ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра менеджменту та інформаційних технологій

Інструктивно-методичні матеріали

до самостійної роботи з навчальної дисципліни:

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей :

– 191 «Архітектура та містобудування»
–192 «Будівництво та цивільна інженерія»
–193 «Геодезія та землеустрій»
–194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології»
–141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

для здобувачів початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти спеціальності–193 «Геодезія та землеустрій»

факультету архітектури та будівництва

Херсон – 2023

Інструктивно-методичні матеріали до самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальностей: – 191 «Архітектура та містобудування», 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 193 «Геодезія та землеустрій», 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», та початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти спеціальності – 193 «Геодезія та землеустрій»факультету архітектури та будівництва.
Херсон: ХДАЕУ, 2023. 230 с.

Укладач: Тетяна БІЛОУСОВА, старший викладач кафедри менеджменту та інформаційних технологій.

Тема 1: Теорія матриць та визначників

Завдання 1.

Методи обчислення визначників.

Приклад №1

Обчислити визначники: 1). $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; 2). $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Розв’язання:

1). $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Розв’язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22$$

2).

Розв’язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -7$$

Другий спосіб:

Метод алгебраїчних доповнень (*або метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпця*) полягає в тому, що визначник обчислюють як суму добутків елементів a_{ij} деякого рядка (або стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(2-2) + 2(-8-6) + 3(4+3) = 0 - 28 + 21 = -7$$

Приклад №3

Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ методом зниження порядку:

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -7 & -4 & -11 \\ 4 & 4 & -1 & -3 \\ -5 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$0\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -4 & -11 \\ 4 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8 & -4 & -11 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + +1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 8 & -7 & -11 \\ 4 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)\begin{vmatrix} 8 & -7 & -4 \\ 4 & 4 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -7 & -11 \\ 4 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8\cdot4\cdot4 + (-7)\cdot(-3)\cdot(-5) + 4\cdot5\cdot(-11) - (-11)\cdot4\cdot(-5) -$$

$$-4\cdot(-7)\cdot4 - 5\cdot(-3)\cdot8 = 128 - 105 - 220 - 220 + 112 + 120 = -95$$

Матриці та дії над ними.

Приклад №4

Для матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Знайти: A+B; A^T; C^2; AB; BA.

Розв'язання:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+1 & -1+0 \\ 1+1 & 0-1 & 3+2 \\ 4+3 & -3+2 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix};$$

$$C^2=C\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2-1\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot1-1\cdot1 & 1\cdot(-1)+2\cdot0-1\cdot3\\ 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1) & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1 & 2\cdot(-1)+1\cdot0+0\cdot3\\ -1\cdot1+1\cdot2+3\cdot(-1) & -1\cdot2+1\cdot1+3\cdot1 & -1\cdot(-1)+1\cdot0+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -4\\ 4 & 5 & -2\\ -2 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4\\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12\\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 11 & 7 & 12\\ 11 & 11 & 2\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0\\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4\\ 6+2+16 & 6+0-12 & -3+6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 9 & -4 & 0\\ 24 & -6 & 11\end{pmatrix}$$

Помічаємо, що AB $\neq$ BA

Приклад №5

Для матриць A=$\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}$; Знайти: AB+3E

Розв’язання:

Перевіримо, чи можливо знайти AB:
A має розмір (3×2); B: (2×3). Отже кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, а це значить , що AB можливо.

AB=$\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-8 & -1-4 & 0+16\\ 0+4 & 0+2 & 0-8\\ -15-6 & 5-3 & 0+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -5 & 16\\ 4 & 2 & -8\\ -21 & 2 & 12\end{pmatrix}$;

1=E=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 3E=$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

AB+3E=$\begin{pmatrix}-5 & -5 & 16\\ 4 & 2 & -8\\ -21 & 2 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+3 & -5 & 16\\ 4 & 2+3 & -8\\ -21 & 2 & 12+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5 & 16\\ 4 & 5 & -8\\ -21 & 2 & 15\end{pmatrix}$;

Індивідуальні завдання №1

Тема: Теорія матриць та визначників.

Варіанти індивідуальних завдань:

ВАРІАНТ № 1

1. Дано: A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; C= $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці A: A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 2

1. Дано: A= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; C= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці A : A= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 3

1. Дано: A= $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; B= $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; C= $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 4

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 5

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 6

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 7

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; С=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 8

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; С=$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 9

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; С=$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 10

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 11

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 12

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2.Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 13

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 14

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 15

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 16

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$; С=$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 17

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; С=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 18

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; В=$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; С=$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 19

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: $A \times B + 2C$

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 20

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: $A \times B + 2C$

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 21

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: $A \times B + 2C$

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 22

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;   В=$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;   С=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А :   А=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 23

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;   В=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;   С=$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: А=$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 24

1. Дано: А=$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;   В=$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;   С=$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Знайти: А×В+2С

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 25

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 26

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 27

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці A: $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 28

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці A: $A=\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 29

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці A: $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ВАРІАНТ № 30

1. Дано: $A=\begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 4 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Знайти: A×B+2C

2. Обчисліть визначник матриці А: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Тема 2: Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Завдання 2.
Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 5x - y - z = 10 \\ x - y + 5z = -12 \end{cases}$$

1) за формулами Крамера;
2) методом Гаусса;

Розв'язання.

1) Для розв'язання за формулами Крамера спочатку обчислимо визначник Δ (для прикладу обчислення проведемо за методом трикутника):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 5 + 1\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 5\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 5\cdot 5 -$$

$$-3\cdot(-1)\cdot(-1) = -15 - 1 - 5 + 1 - 25 - 3 = -48 \neq 0$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

Далі обчислимо визначник Δx (для прикладу обчислення проведемо за методом алгебраїчних доповнень розкладанням за елементами першого рядка):

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1\cdot 5 - (-1)\cdot(-1)) - 1\cdot(10\cdot 5 - (-12)\cdot(-1)) +$$

Можно обчислити методом трикутника.

Обчислимо визначник Δy (для прикладу обчислення проведемо за методом алгебраїчних доповнень розкладанням за елементами першого стовпця):

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 10 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(10\cdot5-(-12)\cdot(-1))-5\cdot(-2\cdot5-(-12)\cdot1)+$$

$$+1\cdot(-2\cdot(-1)-10\cdot1)=3\cdot38-5\cdot2+1\cdot(-8)=114-10-8=96$$

Можно обчислити методом трикутника.

Визначник Δz:

$$\Delta z=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}=144$$

Можно обчислити методом трикутника.

Отже, за формулами Крамера маємо такий розв’язок системи:

$$x=\frac{-48}{-48}=1,\qquad y=\frac{96}{-48}=-2,\quad z=\frac{144}{-48}=-3.$$

Відповідь: $(1;-2;-3)$.

2) Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 1 & -2\\ 5 & -1 & -1 & 10\\ 1 & -1 & 5 & -12\end{array}\right)$$

Для зручності поміняємо місцями перший і третій рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & -12\\ 5 & -1 & -1 & 10\\ 3 & 1 & 1 & -2\end{array}\right) \qquad (1)$$

Приведемо матрицю (1) до трикутного виду за допомогою елементарних перетворень:

а) перший рядок нової матриці перепишемо із матриці (1) без змін;

б) перший рядок матриці (1) помножимо на -5, складемо його з другим рядком і запишемо замість другого рядка в новій матриці;

в) перший рядок матриці (1) помножимо на -3, складемо його з третім рядком і запишемо замість третього рядка в новій матриці.

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & -12\\ 0 & 4 & -26 & 70\\ 0 & 4 & -14 & 34\end{array}\right) \qquad (2)$$

Приведемо матрицю (2) до трикутного виду:

а) перший та другий рядки нової матриці перепишемо із матриці (2) без змін;

б) другий рядок матриці (2) помножимо на -1, складемо його з третім рядком і запишемо замість третього рядка в новій матриці.

Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & -26 & 70 \\ 0 & 0 & 12 & -36 \end{array}\right) \quad (3)$$

Для зручності подальших обчислень в матриці (3) поділимо другий рядок на 2, а третій – на 12. Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 2 & -13 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad (4)$$

Система рівнянь, відповідна матриці (4), має вигляд:

$$\begin{cases} x - y + 5z = -12 \\ 2y - 13z = 35 \\ z = -3 \end{cases}$$

Отже маємо, що $z = -3$, тоді з другого рівняння останньої системи $y = -2$, а з першого рівняння $x = 1$.

Відповідь: $(1;-2;-3)$.

Індивідуальні завдання №2

Тема:Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіанти індивідуальних завдань:

Розв'язати СЛАР:

1).Методом Крамера;

2).Методом Гаусса.

№ варіанта	*Завдання*	*№ варіанта*	*Завдання*
1	$\begin{cases} 5x + 8y - z = -7; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ 2x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$	*2*	$\begin{cases} x + 2y + z = 4; \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$	*4*	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

5	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$	*6*	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x_1-x_2=5; \\ -2x_1+x_2+x_3=0; \\ 2x_1-x_2+4x_3=15. \end{cases}$	*8*	$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4; \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-17; \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$	*10*	$\begin{cases} 3x+4y+2z=8; \\ 2x-y-3z=-1; \\ x+5y+z=0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} x-2y+3z=6; \\ 2x+3y-4z=16; \\ 3x-2y-5z=12. \end{cases}$	*12*	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7; \\ x_1+3x_2-2x_3=0; \\ 2x_2-x_3=2. \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-7; \\ 2x_1-x_2-x_3=0; \\ x_1-2x_2-x_3=2. \end{cases}$	*14*	$\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=3; \\ 3x_1+4x_2-5x_3=8; \\ 2x_2+7x_3=17. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3=20; \\ 2x_1-x_2-3x_3=3; \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$	*16*	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1; \\ x_1+x_2+x_3=6; \\ 3x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$
17	$\begin{cases} x_1-x_2=4; \\ 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$	*18*	$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=7; \\ 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2; \\ 2x_1-x_2-6x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2=8 \end{cases}$	*20*	$\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=-7; \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-1; \\ 5x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$

21	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 15; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$	*22*	$\begin{cases} 11x + 3y - z = 2; \\ 2x + 5y - 5z = 0; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$	*24*	$\begin{cases} x - 2y - 2z = 3; \\ x + y - 2z = 0; \\ x - y - z = 1. \end{cases}$
25	$\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18; \\ x - y - z = 3; \\ x + y + 2z = -2. \end{cases}$	*26*	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1; \\ x + z = 0; \\ x - y - z = 2. \end{cases}$
27	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$	*28*	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$
29	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9; \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$	*30*	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

Тема 3: Векторна алгебра

Завдання 3.

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,1,2)$, $A_2(2,3,-1)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,1,3)$. Знайти:

1) довжину ребра A_1A_4;
2) величину кута між ребрами A_1A_4 та A_2A_3;
3) проекцію ребра A_1A_4 на A_1A_2;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
6) довжину висоти, опущеної з вершини A_4.

Розв'язання.

1) Довжина ребра A_1A_4 дорівнює довжині вектора $\overline{A_1A_4}$. Тоді використовуючи формулу $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$,

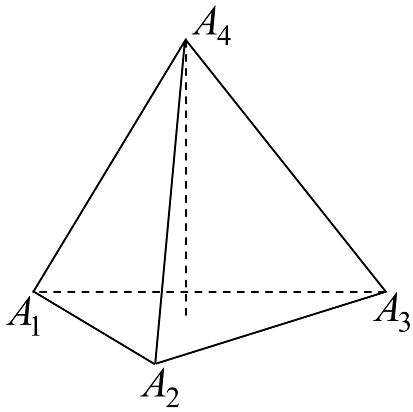
Маємо: $\overrightarrow{A_1A_4} = (-2{,}0{,}1)$

$$\left|A_1A_4\right| = \left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5} \text{ (од.)}$$

2) Кут між ребрами A_1A_4 та A_2A_3 – це кут між векторами $\overline{A_1A_4}$ та $\overline{A_2A_3}$. За формулою :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \,\hat{,}\, \bar{b}),$$

$$\cos(\overline{A_1A_4} \,\hat{,}\, \overline{A_2A_3}) = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_3}}{\left|\overline{A_1A_4}\right| \cdot \left|\overline{A_2A_3}\right|}$$



За формулою $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$\overline{A_1A_4} = (-2{,}0{,}1)$, $\overline{A_2A_3} = (0{,}-5{,}5)$.

$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overline{A_2A_3}\right| = \sqrt{0 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$.

За формулою $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

$$\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_3} = (-2)0 + 0(-5) + 1 \cdot 5 = 5.$$

Отже,

$$\cos(\overline{A_1A_4} \,\hat{,}\, \overline{A_2A_3}) = \frac{5}{\sqrt{250}} \approx 0{,}3$$

Тоді кут між векторами $\overline{A_1A_4}$ та $\overline{A_2A_3}$:

$$(\overline{A_1A_4} \,\hat{,}\, \overline{A_2A_3}) = \arccos 0{,}3 \approx 73^{\circ}$$

3) Використовуючи формули $np_{\bar{b}}\,\bar{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$

проекція $\overline{A_1A_4}$ на $\overline{A_1A_2}$:

$$np_{\overline{A_1A_2}}\,\overline{A_1A_4} = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_1A_2}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|}$$

$\overline{A_1A_2} = (1,2,-3)$; $\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$.

Отже,

$$np_{\overline{A_1A_2}}\,\overline{A_1A_4} = \frac{1\cdot(-2) + 2\cdot 0 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{14}} = \frac{-5}{\sqrt{14}}$$

4) Грань $A_1A_2A_3$ – трикутник, площу якого можна обчислити використовуючи векторний добуток векторів, на яких побудовано цей трикутник:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right|$$

За формулою: $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = i(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + j(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + k(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\bar{i} - 5\bar{j} - 5\bar{k} = (-5;-5;-5)$$

$$\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (кв.од.)}$$

5) Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ знайдемо використовуючи мішаний добуток векторів, на яких побудовано цю піраміду

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2}\;\overline{A_1A_3}\;\overline{A_1A_4}\right|$$

За формулою: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

$$\overline{A_1A_2}\;\overline{A_1A_3}\;\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{5}{6} \text{ (куб.од.)}$$

6) Використовуючи формулу $V_{піраміди} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, маємо

$$H = \frac{3V_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}} = \frac{3 \cdot \frac{5}{6}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (од.)}$$

Індивідуальні завдання №3

Тема:Векторна алгебра.

Варіанти індивідуальних завдань:

Дано координати вершин піраміди A_1, A_2, A_3, A_4:

Варіант	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(0,4,-1)	(-1,1,6)	(3,1,4)	(4,5,2)
2	(1,7,3)	(8,5,8)	(6,9,1)	(-1,6,1)
3	(5,8,3)	(3,5,4)	(1,9,9)	(6,4,8)
4	(2,4,3)	(7,6,3)	(4,9,3)	(3,6,7)
5	(6,9,2)	(7,8,5)	(-8,7,1)	(9,5,5)
6	(0,7,0)	(4,1,5)	(4,6,3)	(3,9,8)
7	(3,8,4)	(5,4,5)	(10,5,3)	(5,8,2)
8	(6,1,1)	4,2,0)	(6,4,6)	(1,6,2)
9	(4,7,5)	(7,9,6)	(9,-4,4)	(3,5,7)
10	(2,4,7)	(0,3,8)	(7,5,4)	(6,6,2)
11	(3,0,6)	(1,4,2)	(-2,0,-1)	(2,0,0)
12	(-2,0,2)	(3,2,5)	(0,0,4)	(4,-1,-2)
13	(1,2,3)	(3,5,2)	(2,0,0)	(-4,0,-2)
14	(3,0,6)	(1,-3,2)	(3,2,5)	(2,2,5)
15	(-2,0,-1)	(0,0,4)	(1,3,2)	(3,2,7)
16	(1,-2,1)	(1,4,2)	(0,4,0)	(2,0,0)
17	(-2,1,0)	(3,2,7)	(2,2,5)	(6,1,5)
18	(-1,3,0)	(2,0,0)	(4,-1,2)	(3,2,7)
19	(6,1,5)	(5,1,0)	(-4,6,-2)	(-6,0,5)
20	(-5,-1,0)	(2,2,5)	(1,-1,6)	(0,0,4)
21	(0,-1,1)	(3,3,9)	(-6,2,7)	(0,-4,2)
22	(6,9,0)	(4,-7,0)	(1,8,6)	(-5,-8,5)
23	(9,3,2)	(-1,-7,2)	(3,5,-1)	(1,-8,4)
24	(1,9,0)	(-8,2,-3)	(0,2,1)	(5,-7,7)

25	(0,-3,9)	(8,-6,1)	(1,3,7)	(7,0,1)
26	(3,2,-1)	(9,0,6)	(5,-7,1)	(7,1,7)
27	(7,8,9)	(1,3,5)	(-9,0,2)	(0,-5,2)
28	(5,-5,1)	(3,4,0)	(2,0,-4)	(4,9,1)
29	(2,3,6)	(5,-6,1)	(7,-5,-7)	(6,9,5)
30	(9,0,8)	(-5,6,3)	(0,7,-6)	(1,9,0)

Знайти:

1) довжину ребра A_1A_4;
2) величину кута між ребрами A_1A_4 та A_2A_3;
3) проекцію ребра A_1A_4 на A_1A_2;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
6) довжину висоти, опущеної з вершини A_4.

Тема 4: Рівняння прямої на площині

Завдання №4

Дано координати точок А; В; С:

А (3; 5); В (-2;2); С (1;-3)

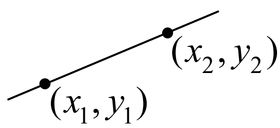
Знайти:

1. Рівняння сторони АВ трикутника АВС;
2. Рівняння висоти АМ трикутника АВС;
3. Рівняння медіани ВК трикутника АВС;
4. Рівняння прямої , яка проходить через точку С паралельно прямій АВ;
5. Відстань від точки Д (-1;7) до прямої АВ;
6. Величину кута між прямими АВ та ВС.

Розв’язання:

1. **Знайдемо рівняння прямої АВ:**

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) можна знайти як



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

В нашому випадку пряма проходить через точки А (3; 5) та В (-2;2)

Тому отримаємо:

АВ: $\dfrac{x-3}{-2-3} = \dfrac{y-5}{2-5}$

$$\frac{x-3}{-5}=\frac{y-5}{-3}$$, скоротимо на(-1) : $$\frac{x-3}{5}=\frac{y-5}{3}$$

Перетворимо це рівняння в загальний вигляд:

$$3\cdot(x-3)=5\cdot(y-5)$$
$$3\cdot x-9=5\cdot y-25$$
$3\cdot x-5y+16=0$, це рівняння прямої АВ в загальному вигляді.

2. Рівняння висоти АМ трикутника АВС:

Висота трикутника АВС – це пряма , яка перпендикулярна до протилежної сторони трикутника. Виходить, що висота АМ буде перпендикулярною до сторони ВС.
Застосуємо умову перпендикулярності прямих:

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \qquad (k_1\cdot k_2=-1)$$

В нашому випадку виходить, що: $k_{AM}\cdot k_{BC}=-1$

Якщо ми знайдемо кутовий коефіцієнт прямої ВС, то знайдемо кутовий коефіцієнт висоти АМ.
Пряму ВС знайдемо як пряму,яка проходить через дві точки:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$; В (-2;2); С (1;-3)

ВС: $$\frac{x-(-2)}{1-(-2)}=\frac{y-2}{-3-2}$$

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-5},$$

Перетворимо це рівняння к вигляду рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$y=kx+b,$ де k – кутовий коефіцієнт

$$-5\cdot(x+2)=3\cdot(y-2)$$

$-5 \cdot x - 10 = 3 \cdot y - 6$

$3y = -5x - 4$

$y = \frac{-5}{3}x - \frac{4}{3}$, це рівняння прямої BC с кутовим коефіцієнтом.

Кутовий коефіцієнт BC : $k_{BC} = -\frac{5}{3}$

З урахуванням умови перпендикулярності $k_{AM} \cdot k_{BC} = -1$

$k_{AM} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -1$; $k_{AM} = \frac{3}{5}$

Тепер для того, щоб знайти рівняння висоти AM застосуємо рівняння прямої , яка проходить через точку і має кутовий коефіцієнт:

Рівняння прямої по її заданій точці (x_0, y_0) ***і кутовому коефі-цієнту*** k ***можна знайти як*** $y - y_0 = k(x - x_0)$

За точку (x_0, y_0) ми беремо координати точки A (3; 5).

Отримаємо:

AM: $y - 5 = \frac{3}{5}(x - 3)$

3. Рівняння медіани BK трикутника ABC;

Ми знаємо , що медіана ділить протилежну сторону трикутника навпіл.
Тому можемо знайти координати точки K, як точки, яка знаходиться посередені сторони AC, наступним чином:

A (3; 5); C (1;-3)

$x_K = \frac{x_A + x_C}{2}$; $y_K = \frac{y_A + y_C}{2}$.

$x_K = \frac{3+1}{2} = 2$; $y_K = \frac{5-3}{2} = 1$.

От же точка K має координати: K(2;1).

А далі, знайдемо рівняння медіани ВК як прямої,що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

В (-2;2); К(2;1)

ВК: $\frac{x-(-2)}{2-(-2)}=\frac{y-2}{1-2}$;

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-2}{-1}$$

ВК: $\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-1}$ отримали рівняння прямої в канонічному вигляді.

4. Рівняння прямої , яка проходить через точку С паралельно прямій АВ:

С (1;-3) нам відома;

$3\cdot x-5y+16=0$, це рівняння прямої АВ в загальному вигляді, яке ми знайшли в 1 завданні.

Застосуємо умову паралельності прямих.

Умова паралельності двох прямих:

$k_1=k_2$

В нашому випадку : $k_l=k_{AB}$

Рівняння прямої АВ нам відомо. Тому приведемо його к рівнянню з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$, та знайдемо k_{AB} .

АВ: $3\cdot x-5y+16=0$

$5y=3\cdot x+16$

АВ : $y=\frac{3}{5}\cdot x+\frac{16}{5}$

$$k_{AB}=\frac{3}{5}$$

Тепер для того, щоб знайти рівняння прямої *l* застосуємо рівняння прямої , яка проходить через точку і має кутовий коефіцієнт:

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

За точку (x_0,y_0) ми беремо координати точки С (1;-3).

Отримаємо:

l: $y-\left(-3\right)=\dfrac{3}{5}\cdot(x-1)$

l: $y+3=\dfrac{3}{5}(x-1)$

Запишемо це рівняння в загальному вигляді:

$5\left(y+3\right)=3(x-1)$

$5y+15=3x-3$

l: $3x-5y-18=0$

5. Відстань від точки Д (-1;7) до прямої АВ:

Відстань d ***від точки*** $M(x_M,y_M)$ ***до прямої*** $Ax+By+C=0$ є довжиною перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму, і знаходиться за формулою:

$$d=\left|\frac{A\,x_M+B\,y_M+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|,$$

Точка Д (-1;7), рівняння прямої АВ в загальному вигляді:

АВ: $3\cdot x-5y+16=0$

Таким чином , в нашому випадку:

$$d=\left|\frac{3\,x_Д+\left(-5\right)y_Д+16}{\pm\sqrt{3^2+\left(-5\right)^2}}\right|=\left|\frac{3\cdot\left(-1\right)-5\cdot 7+16}{\sqrt{9+25}}\right|=\left|\frac{-3-35+16}{\sqrt{34}}\right|=\left|\frac{-22}{\sqrt{34}}\right|=\frac{22}{\sqrt{34}}$$

5. Величину кута між прямими АВ та ВС.

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$, то кут φ між цими прямими можна знайти за формулою:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

АБО:

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом $l_1:y=k_1x+b_1$, $l_2:y=k_2x+b_2$,
то кут φ між цими прямими можна знайти за формулою:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$$

У нашому випадку ми знаємо рівняння прямої

АВ : $3\cdot x-5y+16=0$ в загальному, та

AB : $y=\frac{3}{5}\cdot x+\frac{16}{5}$ в вигляді з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння BC: $y=\frac{-5}{3}x-\frac{4}{3}$, с кутовим коефіцієнтом.

Тому використаємо формулу з кутовими коефіцієнтами: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$

У нашому випадку $k_{AB}=\frac{3}{5}$, а $k_{BC}=-\frac{5}{3}$

От же $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}$

Підставимо кутові коефіцієнти в формулу:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{3}{5}-\left(-\frac{5}{3}\right)}{1+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}=\frac{\frac{9+25}{15}}{1-1}=\frac{34}{0\cdot 15}=\frac{34}{0}$$

Виходить , що $\operatorname{tg}\varphi$ не існує! То це буде кут $\varphi=\frac{\pi}{2}=90^0$.

Дійсно! Ці коефіцієнти задовольняють умові перпендикулярності:

$$k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$$

$$\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-1$$

Виходить, що прямі AB та BC перпендикулярні.

Індивідуальні завдання №4

Тема: Рівняння прямої на площині

Варіанти індивідуальних завдань:

Дано координати точок A; B; C:

Варіант	*A*	*B*	*C*	Варіант	*A*	*B*	*C*
1	(3,3)	(-3,2)	(1,-2)	2	(6,9)	(8,3)	(2,-6)
3	(5,2)	(1,5)	(2,-1)	4	(2,7)	(9,4)	(8,3)
5	(2,2)	(-9,1)	(7,4)	6	(3,6)	(-7,7)	(5,-1)

7	(7,-8)	(3,5)	(-5,9)	8	(5,2)	(4,3)	(1,-4)
9	(9,0)	(-6,3)	(1,7)	10	(6,5)	(0.4)	(5,2)
11	(2,-6)	(0,8)	(9,0)	12	(7,8)	(-5,2)	(3,-3)
13	(3,1)	(8,3)	(8,-6)	14	(1,9)	(2,5)	(6,-8)
15	(9,3)	(4,2)	(8,-5)	16	(8,-6)	(6,-2)	(3,6)
17	(4,3)	(9,4)	(5,-2)	18	(9,5)	(2,8)	(4,-3)
19	(1,4)	(-6,-3)	(8,-4)	20	(6,1)	(3,2)	(-5,-3)
21	(5,8)	(6,4)	(9,-1)	22	(5,-3)	(2,4)	(4,6)
23	(3,5)	(4,1)	(3,-2)	24	(2,5)	(7,4)	(-3,-2)
25	(9,-3)	(0,9)	(7,-2)	26	(6,3)	(9,-2)	(4,7)
27	(4,3)	(2,3)	(5,0)	28	(3,8)	(9,6)	(2,2)
29	(3,8)	(9,1)	(2,-1)	30	(5,2)	(3,6)	(6,-3)

Знайти:

1.) Рівняння сторін трикутника ABC;

2.) Рівняння висоти трикутника ABC, опущеної з вершини A на сторону BC;

3.) Рівняння медіани трикутника ABC, опущеної з вершини B на сторону AC;

Тема 4(продовження): Криві II порядку

Завдання №4

Канонічні рівняння кривих другого порядку

1.) Коло:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Центр кола в точці O $(x_0;y_0)$***, радіус R***

2.) Еліпс:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Центр еліпса в точці O $(x_0;y_0)$***, піввісі a; в***

3.) Гіпербола :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Центр гіперболи в точці О $(x_0;y_0)$, ***піввісі а; в***

4.) Парабола:

$$y-y_0=a\cdot(x-x_0)^2$$, ***симетрична відносно вісі OY,***

$$x-x_0=a\cdot(y-y_0)^2$$, ***симетрична відносно вісі OX***

Вершина параболи в точці Р $(x_0;y_0)$

Приклад 1. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$2x^2+2y^2+8x-16y+8=0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну у дужки і винесемо множники перед змінною в квадраті за дужки:

$$\underbrace{2x^2+8x}+\underbrace{2y^2-16y}+8=0$$

$$2(x^2+4x)+2(y^2-8y)+8=0$$

Доповнимо вирази у дужках до повних квадратів:

$$2\left[\underbrace{x^2+2\cdot 2x+2^2}_{(x+2)^2}-2^2\right]+2\left[\underbrace{y^2-2\cdot 4y+4^2}_{(y-4)^2}-4^2\right]+8=0$$

$$2\left[(x+2)^2-2^2\right]+2\left[(y-4)^2-4^2\right]+8=0$$

$$2(x+2)^2-8+2(y-4)^2-32+8=0$$

$$2(x+2)^2+2(y-4)^2=32$$

Скоротимо рівняння на 2:

$$(x+2)^2+(y-4)^2=16$$

Отримали канонічне рівняння кола. Центр кола буде в точці O$(-2,4)$, радіус кола R=4

Приклад 2. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$9x^2+16y^2-90x+64y+145=0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну :

$$\underbrace{9x^2-90x}+\underbrace{16y^2+64y}+145=0$$

$$9\left(x^2-10x\right)+16\left(y^2+4y\right)+145=0$$

Доповнимо вирази у дужках до повних квадратів:

$$9\left(\underbrace{x^2-2\cdot 5x+5^2}_{(x-5)^2}-5^2\right)+16\left(\underbrace{y^2+2\cdot 2y+2^2}_{(y+2)^2}-2^2\right)+145=0$$

$$9\left((x-5)^2-25\right)+16\left((y+2)^2-4\right)+145=0$$

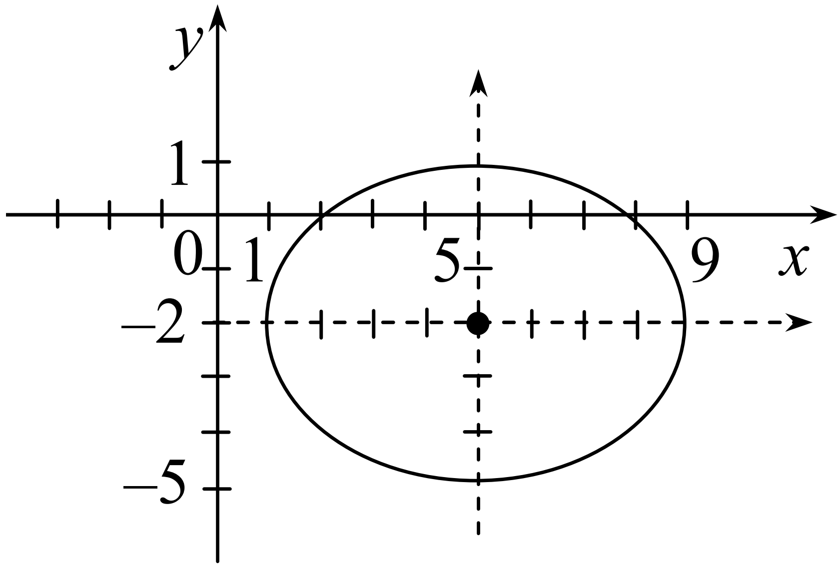
$$9(x-5)^2-225+16(y+2)^2-64+145=0$$

$$9(x-5)^2+16(y+2)^2=144$$

$$\frac{9(x-5)^2}{144}+\frac{16(y+2)^2}{144}=1$$

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

центр еліпса в точці $(5,-2)$. Півосі еліпса $a = 4$, $b = 3$



Приклад 3. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну

$$\underbrace{9x^2 - 18x} - \underbrace{4y^2 - 16y} - 43 = 0$$

$$9\left(x^2 - 2x\right) - 4\left(y^2 + 4y\right) - 43 = 0$$

$$9\left(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1\right) - 4\left(\underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(y+2)^2} - 4\right) - 43 = 0$$

$$9\left((x-1)^2 - 1\right) - 4\left((y+2)^2 - 4\right) - 43 = 0$$

$$9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 - 43 = 0$$

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 0 + 9 - 16 + 43$$

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36,$$

$$\frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y+2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Це канонічне рівняння гіперболи.
Точка $O(1;-2)$ – центр симетрії (центр основного прямокутника) гіперболи. Півосі:
$a^2 = 4 \to a = 2$

$b^2 = 9 \to b = 3$

Приклад 4. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$4x^2 - 8x - y + 7 = 0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну :

$$\underbrace{4x^2 - 8x} - y + 7 = 0$$

$$4\left(x^2 - 2x\right) = y - 7$$

$$4\left(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1\right) = y - 7$$

$$4\left((x-1)^2 - 1\right) = y - 7$$

$$4(x-1)^2 - 4 = y - 7$$

$$4(x-1)^2 = y - 7 + 4$$

$$4(x-1)^2 = y - 3$$

$$y - 3 = 4(x-1)^2$$

- це парабола , симетрична відносно вісі OY. Вершина параболи у точці P(1;3).

Приклад 5. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$y^2 + 3x + 6y + 3 = 0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну :

$$\underbrace{y^2 + 6y} + 3x + 3 = 0$$

$$\underbrace{y^2 + 6y + 3^2}_{(y+3)^2} - 3^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\left(y+3\right)^2-9+3x+3=0$$

$$\left(y+3\right)^2=-3x+6$$

$$\left(y+3\right)^2=-3\left(x-2\right)$$

$$\left(x-2\right)=-\frac{1}{3}\left(y+3\right)^2$$

$$x-2=-\frac{1}{3}\left(y+3\right)^2$$

- це парабола , симетрична відносно вісі ОХ. Вершина параболи у точці Р(2;-3).

Індивідуальні завдання №4 (продовження)

Тема: Криві ІІ порядку

Варіанти індивідуальних завдань:

Привести до канонічного вигляду та побудувати криву другого порядку:

№ варіанту	Завдання
1	$x^2+y^2+2x-2y-2=0$
2	$2y^2-x-4y-2=0$
3	$x^2+y^2+4x-4y-1=0$
4	$3x^2-6x+y+1=0$
5	$x^2+y^2+6x-2y-6=0$
6	$3x^2+6x+y-2=0$
7	$x^2+y^2+10x+2y+1=0$
8	$4y^2+x-8y+9=0$
9	$25x^2+4y^2+200x-16y+316=0$
10	$2y^2+4y-x+6=0$

11	$9x^2-4y^2+36x+16y-16=0$
12	$3x^2+6x-y+8=0$
13	$x^2-9y^2+10x-18y+43=0$
14	$2x^2+y-8x+11=0$
15	$49x^2+16y^2+294x-64y-279=0$
16	$5x^2+y-40x+81=0$
17	$x^2-9y^2-10x-18y+25=0$
18	$3x^2-y+6x+1=0$
19	$-9x^2+4y^2-36x-16y+88=0$
20	$7y^2+x-14y+11=0$
21	$x^2+y^2+2x-2y-2=0$
22	$2y^2-x-4y-2=0$
23	$x^2+y^2+4x-4y-1=0$
24	$3x^2-6x+y+1=0$
25	$x^2+y^2+6x-2y-6=0$
26	$3x^2+6x+y-2=0$
27	$4x^2+36x+12y-3=0$
28	$x^2+9y^2+10x+18y+25=0$
29	$25x^2+4y^2+200x-16y+316=0$
30	$16x^2-4y^2+64x+24y+92=0$

Тема 5: Види рівнянь площини. Взаємне розташування двох площин.

Завдання 5.
Дано точки: $A_1(3;-1;4)$, $A_2(2;3;-2)$, $A_3(-2;1;3)$, $A_4(4;-3;1)$, $A_5(2;-2;4)$. Знайти:
1).рівняння площини (A_1 A_2 A_3);
2). рівняння площини, що проходить через точку A_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$;
3). рівняння площини, що проходить через точку A_5 паралельно площині (A_1 A_2 A_3);
4).відстань від точки A_5 до площини (A_1 A_2 A_3);

Рівняння площини

1) ***Загальне рівняння площини:***

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де (A, B, C) – координати вектора-нормалі, перпендикулярного до площини (рис. 1).

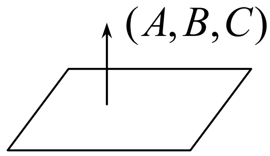


Рис. 1

Рівняння площини, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) пер-пендикулярно до вектора з координатами (A, B, C), можна знайти як

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ можна знайти як

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

2) ***Рівняння площини у відрізках, що відтинаються на координатних осях:***

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (3)$$

де a, b, c – відрізки, що відтинаються площиною на осях Ox, Oy, Oz відповідно від початку координат.

Відстань від точки $M(x_M, y_M, z_M)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \left| \frac{A x_M + B y_M + C z_M + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad (4)$$

де в знаменнику береться знак, протилежний знаку вільного члена D.

Розв'язання:

1. необхідно скористатися рівнянням площини, що проходить через три точки (2):

$$(A_1\ A_2\ A_3):\ \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ -1 & 4 & -6 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } 8x+29y+18z-37=0$$

2. необхідно скористатися умовою : якщо площина перпендикулярна вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$, то $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{N} = (-4;-2;5)$ вектор нормалі до площини. Тоді застосовуємо рівняння площини (1): $-4(x-3)-2(y+1)+5(z-4)=0$ та отримаємо: $-4x-2y+5z-10=0$

3. необхідно скористатися умовою паралельності площин: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, тобто , як вектор нормалі до шуканої площини , можна взяти вектор нормалі до площини (A_1 A_2 A_3) $\vec{N} = (8;29;18)$. Тоді застосовуємо рівняння площини (1): $8(x-2)+29(y+2)+18(z-4)=0$ та отримаємо: $8x+29y+18z-30=0$

4. необхідно скористатися формулою відстані від точки до площини (4):

$$d = \left|\frac{8\cdot 2+29\cdot(-2)+18\cdot 4-37}{\sqrt{8^2+29^2+18^2}}\right| = \frac{7}{\sqrt{1229}}$$

Тема 5 (продовження): Види рівнянь прямої у просторі. Взаємне розташування прямих, прямої та площини.

Завдання 5. Знаючи координати точок $A_1(1,1,2)$, $A_2(2,3,-1)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,1,3)$, знайти:

1) рівняння прямої A_1A_4;
2) рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 пер-пендикулярно площині $A_1A_2A_3$;
3) рівняння проекції прямої A_1A_4 на площину $A_1A_2A_3$;
4) рівняння прямої, яка проходить через вершину A_3 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;

5) рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 паралельно прямій A_2A_3;

6) величину кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$;

7) точку, симетричну точці A_4 відносно площини $A_1A_2A_3$;

8) рівняння площини, яка проходить через точку A_3 перпендикулярно прямій A_1A_4;

9) рівняння прямої, яка проходить через точку A_3 паралельно прямій A_1A_4;

10) точку, симетричну точці A_3 відносно прямої A_1A_4;

Рівняння прямої в просторі

1) ***Канонічне рівняння прямої:***

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{1}$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, що належить цій прямій;

(m, n, p) – координати напрямного вектора, паралельного прямій.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2), можна знайти як

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{2}$$

2) ***Загальні рівняння прямої*** (пряма задана як перетин двох непаралельних площин):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{3}$$

Від рівнянь (3) можна перейти до рівняння (1):

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, що належить заданій прямій;

$A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ – коефіцієнти із загальних рівнянь прямої.

Розв'язання: 1) За формулою (2) канонічне рівняння прямої, що проходить через точки A_1 і A_4:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$$

2) Нехай площина $A_1A_2A_3 - p_1$. Шукана площина p_2 (рис.1) проходить через точку A_1 і нехай має вектор-нормаль $\overline{n_2}=(A,B,C)$.

Тоді рівняння площини p_2:

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-2)=0 \qquad (4)$$

Напрямний вектор прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі): $\overline{s}=(-2,0,1)$.

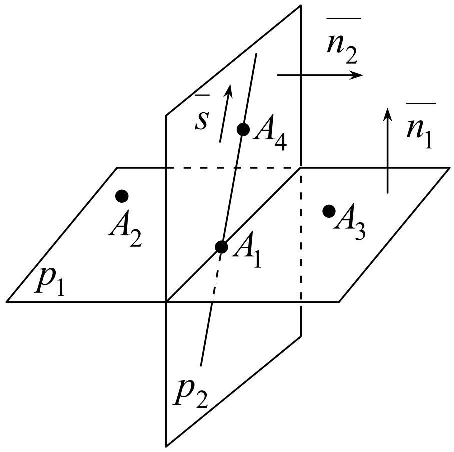


Рис. 1

Знайдемо рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$-5(x-1)-5(y-1)-5(z-2)=0 \;\Rightarrow$$

$$(x-1)+(y-1)+(z-2)=0$$

Отже, рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$x+y+z-4=0$$

Вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$: $\overline{n_1}=(1,1,1)$.

За умовою задачі

$$p_1 \perp p_2 \;\Rightarrow\; \overline{n_1}\perp\overline{n_2} \;\Rightarrow\; \overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0 \;\Rightarrow\; 1\cdot A+1\cdot B+1\cdot C=0$$

пряма $A_1A_4 \in p_2 \;\Rightarrow\; \overline{n_2}\perp\overline{s} \;\Rightarrow\; \overline{n_2}\cdot\overline{s}=0 \Rightarrow\; A\cdot(-2)+B\cdot 0+C\cdot 1=0$

Отже, маємо

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -2A+C=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} B=-3A \\ C=2A \end{cases}$$

Підставивши B і C в рівняння (4), отримаємо

$$A(x-1)-3A(y-1)+2A(z-2)=0 \;\Rightarrow\; x-1-3(y-1)+2(z-2)=0$$

Тоді рівняння шуканої площини p_2:

$$x-3y+2z-2=0$$

3) Рівняння площини $A_1A_2A_3$ (площини p_1) знайдено п.2 задачі:

$$x+y+z-4=0$$

Проекція прямої A_1A_4 на площину p_1 – A_1B (рис. 2), де точка B – проекція точки A_4 на площину p_1. Маємо

$$A_4B \perp p_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{n_1} \parallel A_4B$$

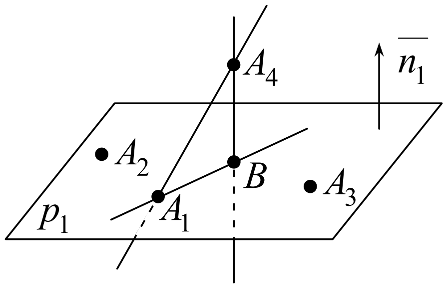


Рис. 2

Вектор-нормаль площини p_1 $\overline{n_1}=(1,1,1)$ буде напрямним вектором прямої A_4B. За формулою (1) отримаємо рівняння прямої A_4B:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$$

Знайдемо координати точки B (як координати точки перетину прямої A_4B і площини p_1):

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{z-3}{1} \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x-z=-4 \\ x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{2}{3},\ y=\frac{4}{3},\ z=\frac{10}{3}$$

Отже, $B\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right)$. Тоді за формулою (2) рівняння прямої A_1B:

$$\frac{x-1}{-5/3}=\frac{y-1}{1/3}=\frac{z-2}{4/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{-5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{4}$$

4) З умови задачі випливає, що вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$ (рівняння площини знайдено п.2 задачі) $\overline{n_1}=(1,1,1)$ буде напрямним вектором шуканої прямої l_1 (рис.3). Тоді за формулою (1) рівняння прямої l_1:

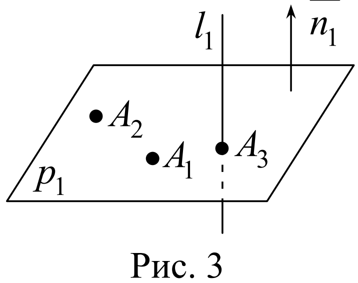


Рис. 3

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{1}$$

5) Шукана площина – p_3 (рис. 4). Візьмемо на площині p_3 до-вільну точку $M(x,y,z)$.

За умовою задачі $A_1A_4 \in p_3$ і $A_2A_3 \parallel p_3$. Тоді вектори $\overline{A_1M}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_3}$ компланарні, а значить їх мішаний добуток дорівнює 0.

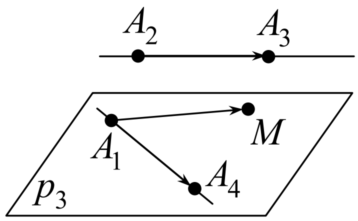


Рис. 4

$\overline{A_1M} = (x-1, y-1, z-2)$;

$\overline{A_1A_4} = (-2,0,1)$;

$\overline{A_2A_3} = (0,-5,5)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x+2y+2z-7=0$$

Отже, рівняння площини p_3: $x+2y+2z-7=0$.

6) Позначимо φ – кут між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$ (рис. 5).

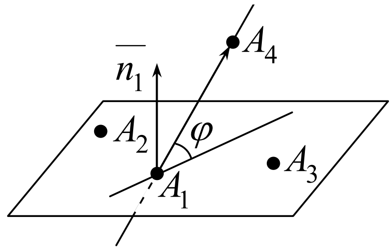


Рис. 5

$\overline{A_1A_4} = (-2,0,1)$;

$\overline{n_1} = (1,1,1)$ – вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$ (рівняння площини знайдено в п.2 задачі).

Кут між векторами $\overline{A_1A_4}$ і $\overline{n_1}$:

$$\cos(\overline{A_1A_4} \,\hat{,}\, \overline{n_1}) = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \overline{n_1}}{|\overline{A_1A_4}| \cdot |\overline{n_1}|} \quad \Rightarrow \quad \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

Будемо вважати кут φ гострим, тоді

$$\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 15^\circ$$

7) Точка A_5 (рис. 6) симетрична точці A_4 відносно площини $A_1A_2A_3$. Точка $B\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$ (координати знайдені в п.3 задачі) є серединою A_4A_5. Тоді маємо

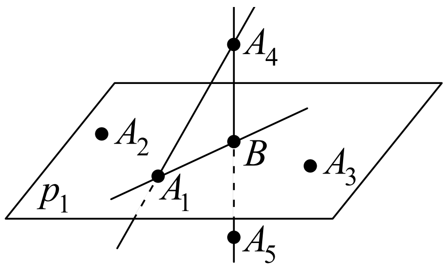


Рис. 6

$$\frac{-1+x_{A_5}}{2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{1+y_{A_5}}{2} = \frac{4}{3}, \quad \frac{3+z_{A_5}}{2} = \frac{10}{3}$$

$$x_{A_5} = -\frac{1}{3},\ y_{A_5} = \frac{5}{3},\ z_{A_5} = \frac{11}{3}$$

Отже, $A_5\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

8) Площина p_4 (рис. 7) – шукана площина. Так як $A_1A_4 \perp p_4$, то напрямний вектор прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі) $\overline{s} = (-2,0,1)$ є вектором-нормаллю площини p_4. Тоді рівняння площини p_4:

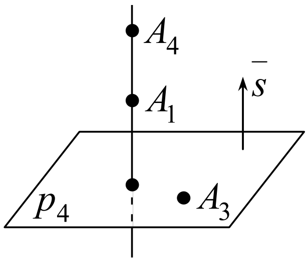


Рис. 7

$$-2(x-2) + 0(y+2) + 1(z-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - z = 0$$

9) Шукана пряма l_2 (рис. 8) за умовою задачі паралельна прямій A_1A_4, а тому паралельна напрямному вектору прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі) $\overline{s} = (-2,0,1)$. Тоді за формулою (1) рівняння l_2:

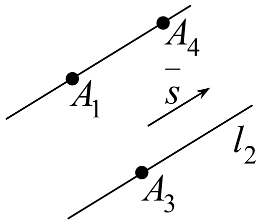


Рис. 8

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-4}{1}$$

10) Нехай A_6 – шукана точка (рис. 9). Вона буде лежати на площині p_4, яка перпендикулярна прямій A_1A_4. Рівняння площини p_4 (знайдене в п.8 задачі): $2x - z = 0$

Рівняння прямої A_1A_4 (знайдене в п. 1 задачі):

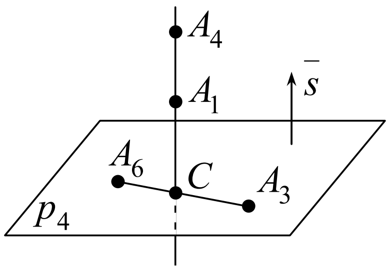


Рис. 9

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}$$

Координати точки C (точки перетину прямої A_1A_4 і площини p_4):

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{0} \\ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1} \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 2z = 5 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1,\ y = 1,\ z = 2$$

Оскільки точка $C(1,1,2)$ середина A_3A_6, то

$$\frac{2+x_{A_6}}{2}=1,\ \frac{-2+y_{A_6}}{2}=1,\ \frac{4+z_{A_6}}{2}=2$$

$$x_{A_6}=0,\ y_{A_6}=4,\ z_{A_5}=0$$

Отже, $A_6(0,4,0)$.

Індивідуальні завдання №5

Тема: Аналітична геометрія в просторі

Варіанти індивідуальних завдань:

Дано координати точок A_1, A_2, A_3, A_4:

Варіант	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(0,4,-1)	(-1,1,6)	(3,1,4)	(4,5,2)
2	(1,7,3)	(8,5,8)	(6,9,1)	(-1,6,1)
3	(5,8,3)	(3,5,4)	(1,9,9)	(6,4,8)
4	(2,4,3)	(7,6,3)	(4,9,3)	(3,6,7)
5	(6,9,2)	(7,8,5)	(-8,7,1)	(9,5,5)
6	(0,7,0)	(4,1,5)	(4,6,3)	(3,9,8)
7	(3,8,4)	(5,4,5)	(10,5,3)	(5,8,2)
8	(6,1,1)	4,2,0)	(6,4,6)	(1,6,2)
9	(4,7,5)	(7,9,6)	(9,-4,4)	(3,5,7)
10	(2,4,7)	(0,3,8)	(7,5,4)	(6,6,2)
11	(3,0,6)	(1,4,2)	(-2,0,-1)	(2,0,0)
12	(-2,0,2)	(3,2,5)	(0,0,4)	(4,-1,-2)
13	(1,2,3)	(3,5,2)	(2,0,0)	(-4,0,-2)
14	(3,0,6)	(1,-3,2)	(3,2,5)	(2,2,5)
15	(-2,0,-1)	(0,0,4)	(1,3,2)	(3,2,7)
16	(1,-2,1)	(1,4,2)	(0,4,0)	(2,0,0)
17	(-2,1,0)	(3,2,7)	(2,2,5)	(6,1,5)
18	(-1,3,0)	(2,0,0)	(4,-1,2)	(3,2,7)
19	(6,1,5)	(5,1,0)	(-4,6,-2)	(-6,0,5)
20	(-5,-1,0)	(2,2,5)	(1,-1,6)	(0,0,4)
21	(0,-1,1)	(3,3,9)	(-6,2,7)	(0,-4,2)
22	(6,9,0)	(4,-7,0)	(1,8,6)	(-5,-8,5)
23	(9,3,2)	(-1,-7,2)	(3,5,-1)	(1,-8,4)
24	(1,9,0)	(-8,2,-3)	(0,2,1)	(5,-7,7)
25	(0,-3,9)	(8,-6,1)	(1,3,7)	(7,0,1)
26	(3,2,-1)	(9,0,6)	(5,-7,1)	(7,1,7)
27	(7,8,9)	(1,3,5)	(-9,0,2)	(0,-5,2)

28	(5,-5,1)	(3,4,0)	(2,0,-4)	(4,9,1)
29	(2,3,6)	(5,-6,1)	(7,-5,-7)	(6,9,5)
30	(9,0,8)	(-5,6,3)	(0,7,-6)	(1,9,0)

Знаючи координати точок A_1, A_2, A_3, A_4, знайти:

1) рівняння прямої A_1A_4;
2) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
3) рівняння прямої, яка проходить через вершину A_3 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;
4) рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 паралельно прямій A_2A_3;
5) рівняння площини, яка проходить через точку A_3 перпендикулярно прямій A_1A_4;
6) рівняння прямої, яка проходить через точку A_3 паралельно прямій A_1A_4;
7) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

Зробити схематичні малюнки

Тема 6: Обчислення границь

Завдання №6

Приклад 1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+6}{2-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+6}{3-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2-x+6}$.

Розв'язання.
Підставляючи у заданий вираз $x=3$, отримаємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+6}{2-x}=\frac{3^2-3+6}{2-3}=\frac{12}{-1}=-12$$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+6}{3-x}$;

Розв'язання.
Так як безпосереднім підставленням отримуємо, що $(x^2-x+6)\to 12$ при $x\to 3$, $(3-x)\to 0$ при $x\to 3$, то, враховуючи співвідношення для нескінченно великих і нескінченно малих функцій, $\dfrac{12}{3-x}\to\infty$ при $x\to 3$. Отже

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+6}{3-x}=\frac{12}{0}=\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2-x+6}$.

Розв'язання.

Безпосередньо підставляючи отримуємо, що при $x\to\infty$ $(x^2-x+6)\to\infty$, тоді $\dfrac{5}{x^2-x+6}\to 0$ при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2-x+6}=\frac{5}{\infty}=0.$$

Приклад 2. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x+1}{2+x^3}$

Розв'язання. Безпосереднім підставленням маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$, тоді ділимо чисельник і знаменник на x^3. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+1}{2+x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+\frac{x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+1}=$$

$$=\frac{3-0+0}{0+1}=3$$

Приклад 3. Знайти границю:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-9x+9}$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-9x+9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)(x-1{,}5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2(x-1{,}5)}=\frac{6}{3}=2$$

Знаменник треба розкласти на множники. Розв'яжемо квадратне рівняння:

$2x^2-9x+9=0$

$D=(-9)^2-4\cdot 2\cdot 9=81-72=9$

$$x_1=\frac{9+\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{9+3}{4}=3$$

$$x_1=\frac{9-\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{9-3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

$$2x^2-9x+9=2\cdot(x-3)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

Приклад 4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{2-x^2}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-6}-1}{x^2-8x+7}$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{(\sqrt{1+x})^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{|1+x|-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=2$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{2-x^2}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+3-4\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}{\left(2-x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}{-\left(x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$= -\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

3) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{\sqrt{x-6} - 1}{x^2 - 8x + 7} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{\left(\sqrt{x-6} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{x-6} + 1\right)}{\left(x^2 - 8x + 7\right) \cdot \left(\sqrt{x-6} + 1\right)} =$$

В знаменнику дужку $\left(x^2 - 8x + 7\right)$ треба розкласти на множники за допомогою дискримінанту або за теоремою Вієта.

Розв'яжемо рівняння $x^2 - 8x + 7 = 0$ за теоремою Вієта:

$x^2 + bx + c = 0$; $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$

У нашому випадку:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \cdot x_2 = 7 \end{cases}$

Виходить, що $x_1 = 7$; $x_1 = 1$.

Таким чином: $x^2 - 8x + 7 = (x - 7) \cdot (x - 1)$.

$$= \lim_{x \to 7} \frac{\left(\sqrt{x-6}\right)^2 - 1^2}{(x-7) \cdot (x-1) \cdot \left(\sqrt{x-6} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{(x-7) \cdot (x-1) \cdot \left(\sqrt{x-6} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{1}{(x-1) \cdot \left(\sqrt{x-6} + 1\right)} = \frac{1}{6 \cdot (1+1)} = \frac{1}{12}$$

Приклад 5. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1.$$

Приклад 6. Знайти границі:

1)1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-7x+10}$.

3). $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x}{5x}$; 4). $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\operatorname{tg}3x}$

Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись і при обчисленні границі тригонометричних виразів. Для розкриття невизначеності в цьому випадку заданий вираз перетвореннями зводять до *першої важливої границі*: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Наслідки першої важливої границі:

$\sin kx\approx kx$, при $x\to0$

$tgkx\approx kx$, при $x\to0$

$\arcsin kx\approx kx$, при $x\to0$

$arctgkx\approx kx$, при $x\to0$

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=$$

$$1-\cos kx=2\sin^2\frac{kx}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$

$$=2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}\cdot 2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}\cdot 2}\cdot 1=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Або інакше за допомогою еквівалентностей:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=$$

$$1-\cos kx=2\sin^2\frac{kx}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}=\left\{\begin{matrix}\sin x\approx x\\ \sin\dfrac{x}{2}\approx\dfrac{x}{2}\end{matrix}\right\}=2\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^3\cos x}=$$

$$=2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{4}}{x^3\cdot\cos x}\cdot=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3\cdot\cos x}\cdot=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{tg}(x-2)}{x^2-7x+10}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

За теоремою Вієта знаменник розкладається $x^2-7x+10=(x-2)\cdot(x-5)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{tg}(x-2)}{(x-2)(x-5)}=\{tg(x-2)\approx(x-2)\}=$$

$$=\lim_{x-2\to 0}\frac{(x-2)}{(x-2)}\frac{1}{(x-5)}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{c}x\to 0\\ \arcsin 3x\to 3x\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5};$

4).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\,\mathrm{tg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\cdot\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{xtg3x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{2x}{2}\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{xtg3x}=\left|\begin{array}{cc}x\to 0 & \sin^2 x\to x^2\\ & tg3x\to 3x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{x\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{3}=$$

$$=\frac{2\cdot 3}{3}=2$$

Розкриття невизначеності 1^∞

Невизначеність виду 1^∞ утворюється при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$. Позбавитись цієї невизначеності можна скориставшись одним з двох способів:

1) звести до *другої важливої границі*: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

або її *наслідків*: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$

2) застосувати формулу

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Приклад 7. Знайти границі:

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x}$; 2). $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Розв'язання.

1). При застосуванні властивості границі отримуємо в основі виразу невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$; якщо її позбавитись за відповідним правилом, то отримаємо 1^{∞}. Далі

1 спосіб:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{x+1}{x-2}-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+2}{x-2}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x-2}}=e^{\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{1-\frac{2}{\infty}}}=e^{6}$$

2 спосіб за формулою:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-x+2}{x-2}\right)2x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{1-\frac{2}{x}}}=e^{\frac{6}{1-0}}=e^{6}$$

2).

$$\lim_{x\to3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to3}\left(1+(3x-9)\right)^{\frac{2}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to3}\left(1+(3x-9)\right)^{\frac{1}{3x-9}\cdot\frac{(3x-9)2}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to3}\frac{6(x-3)}{x-3}}=e^{6}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\cos2x}{\cos x}-1\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\cos2x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\cos2x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\cos2x-\cos x}\cdot\frac{\cos2x-\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2x}}=$$

3).

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x-\cos x}{\cos x\sin^2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{2x+x}{2}\sin\frac{x-2x}{2}}{\cos x\sin^2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\sin^2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x^2\cos x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{2\cos x}}=e^{-\frac{3}{2}}$$

Індивідуальні завдання №6

Тема: Обчислення границь

Варіанти індивідуальних завдань:

<u>Варіант 1</u>

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2+5x-24}$; ; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-5}{4x^2+x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x^2-5x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{2-\sqrt{2+x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\,\mathrm{tg}3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

<u>Варіант 2</u>

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-x^3}{x^2+5x-14}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^8+4x^5+3}{x^4+x^5}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^7+x^5+7}{3x^9+x^4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{5+x}-3}{x^2-x-12}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x+3}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\mathrm{tg}^2 x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^{x+1}$;.

<u>Варіант 3</u>

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+10x+12}{21+x-2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x+4}{3x^4+x^2+2}$;; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+2x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-5x+4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 5x}{\sin^2 x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$.

Варіант 4

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-6x+\dfrac{3}{2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-1}{2x^2-3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{3x^2+2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\mathrm{tg}2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

Варіант 5

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{1+x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^6+x^3-x}{3x^6-2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+x^3+x}{9x^3-4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{\sqrt{6+x}-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{13x-17}}{x^2+x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x-2}$

Варіант 6

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-6+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+9}{3+x^5+5x^9}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{9x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-4x-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+2}\right)^{3x-6}$

Варіант 7

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{2x^2+2x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x+5}{2x^3-3x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{5x^2+3x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2+x^4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^2$.

Варіант 8

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2+3x-18}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^8+3x-1}{5x^8+4x^2+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^7+x^5+x}{x^5+x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{3-\sqrt{4-x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}+x}{x^2-3x-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

Варіант 9

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^3+x+5}{2x^5+x^2+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+3x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x+1}{2x^2+5x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{7x+x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}5x}{\sin^2 x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

.Варіант 10

Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+3}{x^2+3x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{10+3x-x^2}{3x^3-10x^2-5x-100}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-7}{x^4+5x^2-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{3x+3}-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x}$;

Варіант 11

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9x+18}{x^3-27}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+5x+1}{3x^2+x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+3x^2+2}{x^4+x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x^2-3x-10}$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{\sqrt[3]{x+5}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}6x}{\sin 3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x+2}$; .

Варіант 12

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+5x-4x^3}{5x^3+x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^3+2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 4x}{1-\cos^2 x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+3}\right)^{x+1}$;

.**Варіант 13**

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-4x+4}{4x^2+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-5}{2x^2+4x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}\,x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{x}$;

Варіант14

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{64-x^3}{x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+x^2-1}{5x^3+x+1}$;3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x}{3x^5+x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x^2+x-6}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+\sqrt[3]{10+x}}{x^2-3x-10}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{x-2}}$.

Варіант 15

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+7x+3}{6x^2+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^3+x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sqrt{11+x}-2}{x+7}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{\sqrt{x+8}-\sqrt{10-x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\arcsin 12x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+12}{x}\right)^{3x+3}$;

Варіант 16

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x^3+2x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-\sqrt{x+1}}{2-\sqrt{x+5}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+7x+3}{6x^2+1}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{x}$

Варіант 17

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+4x^2-2}{3x^4-2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6+2x^4+x}{5x^8+4x^4+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x+1}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{3}{x-3}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$;

Варіант 18

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{2x^3+x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{4x^2+x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+2}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+3}\right)^{2x+2}$;

Варіант 19

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2+x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{2x^2+4x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{4x^2+x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

Варіант 20

Знайти границі

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-5x-14}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+4x^2-2}{3x^4+2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+6x-3}{x^4+2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{5x+4}}{x^2-4x+3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x-7}-3}{x^2-6x+8}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$.

Варіант 21

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{1+x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^6+x^3-x}{3x^6-2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+x^3+x}{9x^3-4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{\sqrt{6+x}-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{13x-17}}{x^2+x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x-2}$

Варіант 22

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-6+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+9}{3+x^5+5x^9}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{9x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-4x-5}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+2}\right)^{3x-6}$

Варіант 23

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{2x^2 + 2x - 4}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 2x + 5}{2x^3 - 3x^2 + 4}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 + 2x - 5}{5x^2 + 3x - 1}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{3x^2 + x^4}$; 5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{5}}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$; 7) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 3}{x - 2} \right)^2$.

Варіант 24

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 + 3x - 18}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9x^8 + 3x - 1}{5x^8 + 4x^2 + 2}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^7 + x^5 + x}{x^5 + x^2}$;

4) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{3 - \sqrt{4 - x}}$; 5) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 2} + x}{x^2 - 3x - 4}$; 6) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 2}{x + 1} \right)^{x+1}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\mathrm{tg}^2 x}$.

Варіант 25

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5 + x^3 + x + 5}{2x^5 + x^2 + 3}$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x + 2}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^3 - x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}}{7x + x^2}$; 5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,\mathrm{tg} 5x}{\sin^2 x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$; .

Варіант 26

1. Знайти границі, не користуючись правилом Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+3}{x^2+3x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{10+3x-x^2}{3x^3-10x^2-5x-100}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-7}{x^4+5x^2-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{3x+3}-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\mathrm{ctg}^2 x}$;

Варіант 27

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9x+18}{x^3-27}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+5x+1}{3x^2+x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6+3x^2+2}{x^4+x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x^2-3x-10}$; 5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{\sqrt[3]{x+5}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}6x}{\sin 3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{x+2}$;

.Варіант 28

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+5x-4x^3}{5x^3+x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^3+2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$ 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsin 4x}{1-\cos^2 x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+3}\right)^{x+1}$; .

Варіант 29

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-4x+4}{4x^2+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-5}{2x^2+4x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^x$;

Варіант 30

Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{64-x^3}{x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+x^2-1}{5x^3+x+1}$;3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x}{3x^5+x^2+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x^2+x-6}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+\sqrt[3]{10+x}}{x^2-3x-10}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{x-2}}$.

Тема 7: Похідна функції

Завдання №7

<u>Правила диференціювання функцій</u>

Нехай дано функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$.

1.	$(Cu)'=Cu'$, $C=const$
2.	$(u\pm v)'=u'\pm v'$

3.	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4.	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

<u>Похідні основних елементарних функцій</u>

1.	$(c)' = 0$, $c = const$	6.	$(\sin x)' = \cos x$
2.	$(x)' = 1$	7.	$(\cos x)' = -\sin x$
3.	$(x^n)' = nx^{n-1}$, n – будь-яке дійсне число $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	8.	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
		9.	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
		10.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$, a – дійсне число, $a > 0$, $a \neq 1$ $(e^x)' = e^x$	11.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		12.	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

5.	$(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	13.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

а) $y = \ln \sin x$;

б) $y = \ln^3 \sqrt{x}$;

в) $y = \left(tg^3 \dfrac{x}{2} + e^{\sin 4x} \right)^5$

Розв'язання.

1) Використовуючи таблицю диференціювання складної функції, маємо:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x$$

2) $y' = (\ln^3 \sqrt{x})' = 3\ln^2 \sqrt{x} \cdot (\ln \sqrt{x})' = 3\ln^2 \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$

$$= 3\ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$$

3).

$$y' = \left(\left(tg^3 \frac{x}{2} + e^{\sin 4x} \right)^5 \right)' =$$

$$= 5\left(tg^3 \frac{x}{2} + e^{\sin 4x} \right)^4 \cdot \left(3\left(tg^2 \frac{x}{2} \right) \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} + e^{\sin 4x} (\cos 4x) \cdot 4 \right)$$

Приклад 2. Знайти похідні функцій:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x^3}$;

б). $y = 3^{\cos 5x} \cdot \left(x^4 - \sqrt{x-2}\right)$;

Розв'язання.

а) За правилом диференціювання дробу маємо

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x^3}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x^3 - \sin x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{\cos x \cdot x^3 - \sin x \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2(\cos x \cdot x - \sin x \cdot 3)}{x^6} = \frac{x\cos x - 3\sin x}{x^4}$$

$$y' = \left(3^{\cos 5x} \cdot \left(x^4 - \sqrt{x-2}\right)\right)' = \left(3^{\cos 5x}\right)' \cdot \left(x^4 - \sqrt{x-2}\right) +$$

$$+ 3^{\cos 5x} \cdot \left(x^4 - \sqrt{x-2}\right)' = 3^{\cos 5x} \ln 3 \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 \cdot \left(x^4 - \sqrt{x-2}\right) +$$

б)

$$+ 3^{\cos 5x} \cdot \left(4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)$$

Приклад 3. Знайти похідну y'_x функції $e^y \sin y = \cos x$.

<u>*Похідна функції, що задана неявно*</u>

Функція називається ***неявно заданою***, якщо змінні x і y зв'язані між собою рівнянням, що не виражене відносно y, тобто у вигляді $F(x, y) = 0$.

Для знаходження ***похідної*** y'_x ***неявно заданої функції*** диференціюють ліву і праву частину заданої рівності, враховуючи, що y – це функція від x, а отриману рівність розв'язують відносно y'_x.

Розв'язання. 1.) $e^y \sin y = \cos x$;

Диференціюємо ліву і праву частину рівності. Похідну лівої частини знаходимо за правилом диференціювання добутку:

$$(e^y)'\cdot \sin y + e^y \cdot (\sin y)' = (\cos x)'.$$

Так як y є функцією від x, то $(e^y)'$ і $(\sin y)'$ диференціюємо за правилом диференціювання складної функції:

$$e^y \cdot y' \cdot \sin y + e^y \cdot \cos y \cdot y' = -\sin x.$$

З останньої рівності знайдемо y':

$$e^y \cdot y' \cdot (\sin y + \cos y) = -\sin x$$

$$y' = -\frac{\sin x}{e^y \cdot (\sin y + \cos y)}$$

Приклад 4. Знайти похідні функцій

1) $y = (x+1)^{\cos x}$;

2) $y = \sin x^{2x+1}$.

Похідна степенево – показникового виразу.
Логарифмічне диференціювання

Степенево – показникова функція має вигляд $y = u^v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, тобто u і v вирази, що містять незалежну змінну x.

Для знаходження похідної функції $y = u^v$ використовують ***спосіб логарифмічного диференціювання***. Цій спосіб полягає в тому, що задану функцію спочатку логарифмуємо

$$\ln y = \ln u^v,$$

тоді

$$\ln y = v \cdot \ln u.$$

Отримали функцію в неявній формі, тому для знаходження по-хідної y'_x диференціюємо ліву та праву частину останньої рівності, враховуючи, що y є функцією від x. Похідну правої частини знаходимо за правилом диференціювання добутку, похідні $\ln y$ і $\ln u$ – за правило диференціювання складної функції, отримаємо:

$$(\ln y)' = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

З останньої рівності:

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right),$$

де $y = u^v$.

Отже,
похідну степенево – показникової функції можна обчислити за формулою:

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right) \qquad (1)$$

Розв'язання.

1) Скористаємося правилом логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln\,(x+1)^{\cos x};$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln(x+1).$$

Знайдемо похідну лівої і правої частини рівності:

$$(\ln y)' = (\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot (\ln(x+1))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1}(x+1)'$$

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1} \right)$$

$$y' = (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1} \right)$$

Зауваження. Для диференціювання степенево-показникових функцій замість логарифмічного диференціювання можна одразу застосовувати вже готову формулу (1).

Тоді для нашого прикладу, враховуючи, що $u = x+1$, а $v = \cos x$, отримаємо:

$$y' = (x+1)^{\cos x} \cdot \left((\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x \cdot (x+1)'}{x+1} \right) =$$

$$= (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1} \right)$$

2) Так як функція $y = \sin x^{2x+1}$ складна, то за правило диференціювання складної функції знайдемо похідну зовнішньої функції синус за змінною x^{2x+1} і помножимо на похідну x^{2x+1}: $y' = \cos x^{2x+1} \cdot (x^{2x+1})'$. Вираз x^{2x+1} – степенево-показниковий, але так як він міститься в іншому виразі, то застосувати правило логариф-мічного диференціювання неможливо, тому скористаємося вже готовою формулою похідної степенево-показникової функції:

$$y' = \cos x^{2x+1} \cdot (x^{2x+1})' = \cos x^{2x+1} \cdot x^{2x+1} \cdot \left((2x+1)' \cdot \ln x + \frac{(2x+1) \cdot (x)'}{x} \right) =$$

$$= \cos x^{2x+1} \cdot x^{2x+1} \cdot \left(2 \cdot \ln x + \frac{(2x+1) \cdot 1}{x} \right) = \cos x^{2x+1} \cdot x^{2x+1} \cdot \left(2 \ln x + \frac{2x+1}{x} \right)$$

Приклад 5. Знайти похідну y_x' функції

$$\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Похідна функції, заданої параметрично

Функція називається заданою ***параметрично***, якщо відповідні одна одній змінні x та y виражені через деякий параметр t:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

де t – належить деякому інтервалу; найчастіше цей інтервал $(-\infty; +\infty)$.

Похідна y_x' параметрично заданої функції:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Враховуючи, що $\sin 2t$ і $\sin^2 t$ складні вирази і їх треба диференціювати за правилом диференціювання складної функції, маємо:

$$y_t' = 2\cdot\sin t\cdot(\sin t)' = 2\cdot\sin t\cdot\cos t = \sin 2t;$$

$$x_t' = \cos 2t\cdot(2t)' = \cos 2t\cdot 2 = 2\cos 2t.$$

Отже,

$$y_x' = \frac{\sin 2t}{2\cos 2t} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}2t.$$

Індивідуальні завдання №7

Тема: Похідна функції

Варіанти індивідуальних завдань:

<u>Варіант 1</u>

I. Знайти похідні:

1) $y=\left(x^2+4\right)\cdot\mathrm{arctg}\frac{x}{3}$;

2) $y=(\sin 2x)^{\sqrt{x}}$;

3) $\ln y+\frac{y}{x}=2$;

4) $y=\frac{(3x^3-x)}{\sqrt{1+x}}$;

5) $y=(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+1})$;

6) $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$;

7) $y=(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\arcsin\frac{2}{x}$;

8) $\begin{cases} x=\ln(1-t^2); \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$;

Варіант 2

I. Знайти похідні:

1) $y=4\sqrt{x^2-3}-\left(\mathrm{arctg}\frac{2}{x}\right)^2$;

2) $y=\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$;

3) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

4) $\mathrm{tg}(y-2x)+2x=10$;

5) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$;

6) $y=e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)$;

7) $y=\cos\ln 2-\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$;

8) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1-t^2}; \\ y=\arcsin t+\ln t^2 \end{cases}$;

Варіант 3

I. Знайти похідні:

1) $y = \operatorname{arcctg} x - \ln\sqrt{x^3+4}$;

2) $y = \ln^3(1-x)$;

3) $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{x^3+1}$;

4) $e^y + \sqrt[3]{3x} + 4 = 0$;

5) $y = \dfrac{8x^2}{(\sin^2 x - 4)}$;

6) $y = 2x^5 \cdot (2+\sqrt{x})$;

7) $y = \operatorname{tg}\ln\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$;

8) $\begin{cases} x = \arcsin t + \ln\sqrt{t}; \\ y = 5^t. \end{cases}$

Варіант 4

I. Знайти похідні:

1) $y = \left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^2 + \sqrt{x^2-1}$;

2) $y = x2^{x^2+2}$;

3) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x}$;

4) $y^3 = x - \sin y$;

5) $y = \dfrac{2x^2-1}{3\sqrt{2+4x}}$;

6) $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{5} - \dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 8x}$;

7) $y = \sqrt{9x^2-12x+5} \cdot \operatorname{arctg}(3x-2)$;

8). $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t; \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

Варіант 5

I. Знайти похідні:

1) $y = 5^{\sin^2 x} - \sin^6 x + 8x$;

2) $y = (3x^4+7) + \ln\operatorname{tg} x$;

3) $y = (x-7)^{\sin 3x}$;

4) $y + \sqrt{x} - \ln y = 1$;

5) $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{12x^{12}}$;

6) $y = (e^{\cos x})\ln(x^4-2)$;

7) $y = \dfrac{\cos\sin 5 + \cdot\sin^2 4x}{2\cos 4x}$;

8) $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

Варіант 6

I. Знайти похідні:

1) $y = \sqrt{e^{2x} - e^{3x}}$;

2) $y = (\arcsin x)^{x^2}$;

3) $\cos^2 y = x - y;$

4) $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}};$

5) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^{3;}}$

6) $y = \dfrac{\sin\cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4\sin 4x};$

7) $y = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x;$

8) $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}; \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

Варіант 7

I. Знайти похідні:

1) $y = e^{2x^2}(3 + 2x^2 + 2x^4);$

2) $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + 1\right) - 2\operatorname{arctg} e^x;$

3) $y = \left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)^{2x};$

4) $3y = \sin(x - y);$

5) $y = \dfrac{(x^2 - 6)}{120x^3};$

6) $y = (x-3)\ln^2(x + \cos x);$

7) $y = \dfrac{\cos\ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7\cos 14x};$

8) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \dfrac{1}{\cos t}; \end{cases}$

Варіант 8

I. Знайти похідні:

1) $y = \ln\cos\left(\dfrac{4}{x}\right);$

2) $y = \operatorname{arctgx}^5 + \ln\left(x^2 + 1\right);$

3) $y = (x^2 - 1)^{\cos x};$

4) $\sqrt{y} + \sqrt[3]{x} = 2;$

5) $y = \sin(7x - 3)\ln(e^x + 1);$

6) $y = \cos\operatorname{ctg} 2 - \dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x};$

7) $y = 3x - \dfrac{\arcsin\left(e^{3x}\right)}{x-5};$

8) $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sqrt[3]{\sin t}; \end{cases}$

Варіант 9

I. Знайти похідні:

1) $y = \ln\cos x + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x;$

2) $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1};$

3) $y=(\sin x)^{x}$;

4) $y=\cos(x^{2}+y)$;

5) $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\cos x-\sin x}$;

6) $y=\mathrm{ctg}\cos 2+\dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^{2}6x}{\cos 12x}$;

7) $y=\ln(4x-1)-\sqrt{16x^{2}-2\cdot}$;

8) $\begin{cases} x=e^{t}\cos t; \\ y=t+\sin t; \end{cases}$

Варіант 10

I. Знайти похідні:

1) $y=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\sqrt{x^{2}-2}$;

2) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$;

3) $y+8x=\mathrm{ctg}(x+y)$;

4) $y=2(x-3)\sqrt{1+e^{x}}$;

5) $y=\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$;

6) $y=\sqrt[3]{\mathrm{ctg}\,2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^{2}10x}{\sin 20x}$;

7) $y=\dfrac{1-\sin 2x}{2x+4}$;

8) $\begin{cases} x=\sin t; \\ y=\mathrm{tg}^{2}t; \end{cases}$

Варіант 11

I. Знайти похідні:

1) $y=(2x+3)^{4}-\arcsin 5x+\dfrac{2}{3}$;

2) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x^{3}-1}$;

3) $y=(1+x^{2})e^{\mathrm{arctg}\,x;}$

4) $x^{2}+\sin(x+y)+5=0$;

5) $y=\dfrac{1+x}{2x}\mathrm{arctg}\sqrt{x}$;

6) $y=\dfrac{1}{3}\cos\mathrm{tg}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\dfrac{\sin^{2}10x}{\cos 20x}$;

7) $y=\dfrac{1+x^{3}}{2tgx}$;

8) $\begin{cases} x=\cos^{2}t; \\ y=\mathrm{tg}^{2}t; \end{cases}$

Варіант 12

I. Знайти похідні:

1) $y=(\sin x)^{x^{2}}$;

2) $y=\mathrm{arctg}(\cos x)$;

3) $\sin(x-y)=2x^{3}+y$;

4) $y=\dfrac{e^{x^{2}}}{1+x^{2}}$;

5) $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^{2}12x}{\sin 24x}$;

6) $y=\dfrac{3+x}{2}+\sqrt{(2-x)}+3\arccos 7$;

7) $y=9x^{3}\cdot\mathrm{arctg}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}$;

8) $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t}; \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

Варіант 13

I. Знайти похідні:

1) $y = 5x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}\right);$

2) $y = \operatorname{tg} x^2 \cdot e^{\sin x};$

3) $y = \dfrac{\arccos x}{4x + 7};$

4) $x^3 + y^3 - 3x - y = 5;$

5) $y = \ln \ln^2 \ln^3 x;$

6) $y = (x^3 + y)^{\operatorname{tg} x};$

7) $y = 8 \sin \operatorname{ctg} 3 + \dfrac{1}{5} \dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x};$

8) $\begin{cases} x = \arccos t; \\ y = \sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$

Варіант 14

I. Знайти похідні:

1) $y = x - \ln(1 + e^x);$

2) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \cos x}};$

3) $y = x^{\operatorname{arcctg} x};$

4) $x - y + \arcsin(x - y) = 8;$

5) $y = \lg \sqrt{\cos \dfrac{1}{3}} + \dfrac{\sin^2 31x}{31 \cos 62x};$

6) $y = \arcsin x \cdot \sqrt{12x - 7};$

7) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17} - \operatorname{arctg}(x - 4) - 9;$

8) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

Варіант 15

I. Знайти похідні:

1) $y = 5\sqrt{4x + 3} - tg 3x;$

2) $y = 3^x e^{-x};$

3) $y = \arccos(\operatorname{ctg}^2 x);$

4) $y = (\ln x)^{\sin x};$

5) $x^2 - y^2 - \sin^2 y = 0;$

6) $y = \dfrac{\cdot \ln \cos x}{2 \cos^2 x};$

7) $y = \dfrac{\cos \operatorname{tg} \frac{1}{3} \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x};$

8) $\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 + \cos t; \end{cases}$

Варіант 16

I. Знайти похідні:

1) $y = \sqrt{x^2 + 3x} - 3^{\left(x^3 - 7\right)};$

2) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}});$

3) $y = \left(x + 6\right)^{tgx};$

4) $e^{x-y} = x^2 + y^2;$

5) $y=\dfrac{(7x+\sin\ln x)}{2x-8}$;

6) $y=(3x-2)^4\arcsin x$;

7) $y=\dfrac{\sin\mathrm{tg}\dfrac{1}{7}\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$;

8) $\begin{cases} x=e^t; \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

Варіант 17

1.Знайти похідні:

1) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+\ln\cos x$;

2) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;

3) $x-\cos y-\cos 2x=0$;

4) $y=(\cos x)^{\mathrm{tg}\,x}$;

5) $y=\dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2-8}$;

6) $y=\dfrac{x-\cos x}{3\sin^2 x}$;

7) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\sin\dfrac{1}{3}\cdot\sin^2 17x}{15\cos 30x}$;

8) $\begin{cases} x=2(t-\sin t); \\ y=4(2+\cos t). \end{cases}$

Варіант 18

I. Знайти похідні:

1) $y=x-e^{-x}+\arcsin e^x-\ln x$;

2) $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$;

3) $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

4) $y=(5+x)^{\ln x}$;

5) $y=e^{-2x}\cdot\ln\left(e^{2x}+5\right)$;

6) $x+y=e^{x+y}$;

7) $y=\dfrac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg}\,2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$;

8) $\begin{cases} x=\cos t+\sin t; \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

Варіант 19

I. Знайти похідні:

1) $y=x+e^x\arcsin x$;

2) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 2x}$;

3) $y=(\cos x)^{x^2}$;

4) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$;

5) $y=x-\ln(1+e^x)-\left(\mathrm{arctg}\,e^{\frac{x}{2}}\right)^2$;

6) $y=\dfrac{\mathrm{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x}$;

7) $x-y+e^y\mathrm{arctg}\,x=0$;

8) $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=\mathrm{arctg}\,t. \end{cases}$

Варіант 20

Знайти похідні:

1) $y = 3\arcsin 4x + \sqrt{x^2 + 4x - 5};$

2) $y = \dfrac{e^{x^2}}{1 + x^2};$

3) $y = \left(x - x^2\right)^x;$

4) $y = \cos 2x - 2\sin^2 x;$

5) $x + \operatorname{tg} y - y^2 = 1;$

6) $y = \operatorname{ctg}\cos 5 - \dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x};$

7) $y = \dfrac{2x - 5}{4}\sqrt{5x - 4 - x^2};$

8) $\begin{cases} x = 3e^{-t}; \\ y = e^{2t}; \end{cases}$

<u>Варіант 21</u>

Знайти похідні:

1) $y = \left(x^2 + 4\right) \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{x}{3};$

2) $y = (\sin 2x)^{\sqrt{x}};$

3) $\ln y + \dfrac{y}{x} = 2;$

4) $y = \dfrac{(3x^3 - x)}{\sqrt{1 + x}};$

5) $y = (2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + 1});$

6) $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x};$

7) $y = (x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \arcsin\dfrac{2}{x};$

8) $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2); \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2} \end{cases};$

Варіант 22

Знайти похідні:

1) $y = 4\sqrt{x^2 - 3} - \left(\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}\right)^2;$

2) $y = \arcsin\sqrt{1 - e^{2x}};$

3) $y = (\sin x)^{\ln x};$

4) $\operatorname{tg}(y - 2x) + 2x = 10;$

5) $y = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{3x^3};$

6) $y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x);$

7) $y = \cos\ln 2 - \dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x};$

8) $\begin{cases} x = \ln\sqrt{1 - t^2;} \\ y = \arcsin t + \ln t^2 \end{cases};$

Варіант 23

Знайти похідні:

1) $y = \operatorname{arcctg} x - \ln\sqrt{x^3+4}$;

2) $y = \ln^3(1-x)$;

3) $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{x^3+1}$;

4) $e^y + \sqrt[3]{3x} + 4 = 0$;

5) $y = \dfrac{8x^2}{(\sin^2 x - 4)}$;

6) $y = 2x^5 \cdot (2+\sqrt{x})$;

7) $y = \operatorname{tg}\ln\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$;

8) $\begin{cases} x = \arcsin t + \ln\sqrt{t}; \\ y = 5^t. \end{cases}$

Варіант 24

Знайти похідні:

1) $y = \left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^2 + \sqrt{x^2-1}$;

2) $y = x2^{x^2+2}$;

3) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x}$;

4) $y^3 = x - \sin y$;

5) $y = \dfrac{2x^2-1}{3\sqrt{2+4x}}$;

6) $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{5} - \dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 8x}$;

7) $y = \sqrt{9x^2-12x+5} \cdot \operatorname{arctg}(3x-2)$;

8). $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t; \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

Варіант 25

Знайти похідні:

1) $y = 5^{\sin^2 x} - \sin^6 x + 8x$;

2) $y = \left(3x^4+7\right) + \ln\operatorname{tg} x$;

3) $y = (x-7)^{\sin 3x}$;

4) $y + \sqrt{x} - \ln y = 1$;

5) $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{12x^{12}}$;

6) $y = \left(e^{\cos x}\right)\ln\left(x^4-2\right)$;

7) $y = \dfrac{\cos\sin 5 + \cdot\sin^2 4x}{2\cos 4x}$;

8) $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \ln\sin t. \end{cases}$

Варіант 26

Знайти похідні:

1) $y = \sqrt{e^{2x} - e^{3x}}$;

2) $y = (\arcsin x)^{x^2}$;

3) $\cos^2 y = x - y;$

4) $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}};$

5) $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^{3;}}$

6) $y = \dfrac{\sin\cos 3 \cdot \cos^2 2x}{4\sin 4x};$

7) $y = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x;$

8) $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}; \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$

Варіант 27

Знайти похідні:

1) $y = e^{2x^2}(3 + 2x^2 + 2x^4);$

2) $y = \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + 1\right) - 2\operatorname{arctg} e^x;$

3) $y = \left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)^{2x};$

4) $3y = \sin(x - y);$

5) $y = \dfrac{(x^2 - 6)}{120x^3};$

6) $y = (x-3)\ln^2(x + \cos x);$

7) $y = \dfrac{\cos\ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7\cos 14x};$

8) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \dfrac{1}{\cos t}; \end{cases}$

Варіант 28

Знайти похідні:

1) $y = \ln\cos\left(\dfrac{4}{x}\right);$

2) $y = \operatorname{arctgx}^5 + \ln\left(x^2 + 1\right);$

3) $y = (x^2 - 1)^{\cos x};$

4) $\sqrt{y} + \sqrt[3]{x} = 2;$

5) $y = \sin(7x - 3)\ln(e^x + 1);$

6) $y = \cos\operatorname{ctg} 2 - \dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x};$

7) $y = 3x - \dfrac{\arcsin\left(e^{3x}\right)}{x-5};$

8) $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sqrt[3]{\sin t}; \end{cases}$

Варіант 29

Знайти похідні:

1) $y = \ln\cos x + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x;$

2) $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1};$

3) $y = (\sin x)^x$;

4) $y = \cos(x^2 + y)$;

5) $y = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\cos x - \sin x}$;

6) $y = \operatorname{ctg}\cos 2 + \dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$;

7) $y = \ln(4x-1) - \sqrt{16x^2 - 2}\cdot$;

8) $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = t + \sin t; \end{cases}$

Варіант 30

Знайти похідні:

1) $y = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{x} + \sqrt{x^2 - 2}$;

2) $y = (\ln x)^{\sqrt{x}}$;

3) $y + 8x = \operatorname{ctg}(x + y)$;

4) $y = 2(x-3)\sqrt{1 + e^x}$;

5) $y = \ln tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$;

6) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$;

7) $y = \dfrac{1 - \sin 2x}{2x + 4}$;

8) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \operatorname{tg}^2 t; \end{cases}$

Тема 8: Дослідження функцій та побудова їх графіків

Завдання 8.

Приклад 1. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = \frac{x^2 + 2}{x}$$

Асимптоти

Асимптотою називають пряму лінію, до якої наближається графік функції $y = f(x)$, прямуючи у нескінченність.

Асимптоти можуть бути вертикальними, похилими і горизон-тальними:

1) Якщо хоча б одна з односторонніх границь функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює ∞ ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$), то пряма $x = x_0$ є ***вертикальною асимптотою*** графіка цієї функції.

   Тобто вертикальна асимптота $x = x_0$, де x_0 – точка розриву другого роду функції $y = f(x)$.

2) Рівняння ***похилої асимптоти*** функції $y = f(x)$ шукають у вигляді

$$y = kx + b,$$

де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad (1)$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k\cdot x). \qquad (2)$$

Зауважимо, що в загальному випадку треба розглядати окремо границі при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$.

Для знаходження границь (1) та (2) часто зручніше користуватися правилом Лопіталя.

Якщо не існує скінченного значення границі (1), то похилої асимптоти немає.

Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється у горизон-тальну.

3) Рівняння ***горизонтальної асимптоти*** функції $y = f(x)$

$$y = b,$$

де

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x). \qquad (3)$$

Треба розглядати окремо границі при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$.

Якщо не існує скінченного значення границі (9), то горизон-тальної асимптоти немає.

Схема повного дослідження функції $y = f(x)$ *і побудови її графіка:*

1) Знайти область визначення функції.
2) Дослідити функцію на парність, непарність (якщо $f(-x) = f(x)$, то функція парна і має віссю симетрії вісь Oy; якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція непарна і має центром симетрії початок системи координат).
3) Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
4) Знайти точки розриву функції; знайти односторонні границі зліва та справа від точок розриву.
5) Знайти асимптоти графіка функції.
6) Знайти критичні точки першого роду; інтервали зростання та спадання; точки екстремумів та екстремальні значення функції.
7) Знайти критичні точки другого роду; інтервали опуклості та угнутості графіка функції; точки перегину та значення функції в точках перегину.
8) Побудувати в системі координат знайдені асимптоти та всі отримані при дослідженні точки. Потім, враховуючи інтервали монотонності, опуклості та угнутості, побудувати графік функції.

Розв'язання.

1) Область визначення функції: $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
2) Перевіримо функцію на парність, непарність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2}{(-x)} = \frac{x^2 + 2}{-x} = -\frac{x^2 + 2}{x} = -f(x)$$

Функція непарна, тому її графік симетричний відносно початку системи координат.

3) Точок перетину з віссю Ox і з віссю Oy немає.

4) В точці $x=0$ функція має розрив.

Односторонні границі зліва та справа від точки розриву:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2}{x}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+2}{x}=+\infty.$$

5) Враховуючи пункт 4, маємо, що вертикальна асимптота $x=0$.

Знайдемо похилу асимптоту $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Отже, похила асимптота $y=x$ при $x\to\pm\infty$.

Знайдемо горизонтальну асимптоту $y=b$:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{2}{x}\right)=\infty$$

Маємо, що горизонтальна асимптота відсутня.

6) Знайдемо критичні точки першого роду. Для цього знайдемо похідну $f'(x)$ і розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+2)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}$$

$$\frac{x^2-2}{x^2}=0$$

Звідси $\qquad x^2-2=0 \qquad x\neq 0$

$$x=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}4$$

Запишемо критичні точки та інтервали, на які вони поділяють область визначення функції в таблицю 1 (в перший рядок). Визначимо знак $f'(x)$ в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третім рядку таблиці визначимо характер монотонності функції.

Таблиця 1

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не існує	–	0	+
$f(x)$	зростає ↑	max	спадає ↓	не існує	спадає ↓	min	зростає ↑

Отже, екстремуми функції: $y_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \approx -2{,}8$;

$$y_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8.$$

7) Знайдемо критичні точки другого роду. Для цього знайдемо другу похідну $f''(x)$ і розв'яжемо рівняння $f''(x) = 0$:

8)

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 4x}{x^4} = \frac{4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

$$\frac{4}{x^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \neq 0$$

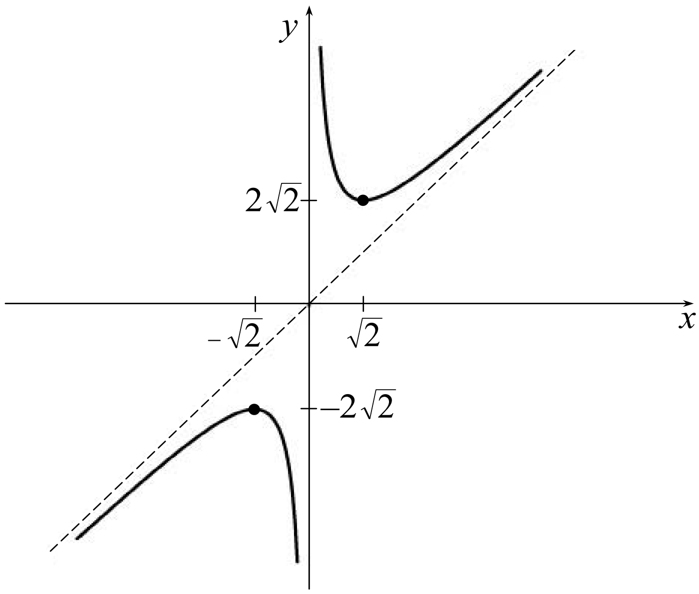
Маємо одну критичну точку другого роду $x = 0$, проте ця точка не входить в область визначення. Інших критичних точок другого роду немає. Таким чином, точок перегину немає.

Так як критичних точок, що входять в область визначення немає, то запишемо тільки інтервали області визначення функції в таблицю 2 (в перший рядок). Знайдемо знак $f''(x)$ в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третім рядку таблиці визначимо опуклість та угнутість функції.

Таблиця 2

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	–	не існує	+
$f(x)$	опукла $\cap$	не існує	угнута $\cup$

9) Побудуємо в системі координат пунктирною лінією похилу асимптоту $y = x$ (асимптота $x = 0$ є віссю Oy) і відмітимо точки $y_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \approx -2{,}8$, $y_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$. Враховуючи асимптоти, інтервали зростання та спадання, опуклості та угнутості, через відмічені точки побудуємо графік функції.



Індивідуальні завдання №8

Тема: Дослідження функцій та побудова їх графіків

Варіанти індивідуальних завдань:

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

№ варіанту	**Функція**	**№ варіанту**	**Функція**
1	$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$	**16**	$y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$
2	$y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$	**17**	$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$
3	$y=\dfrac{2}{x^2+2x}$	**18**	$y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$
4	$y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$	**19**	$y=8\dfrac{(x-1)}{(x+1)^2}$
5	$y=\dfrac{12x}{9+x^2}$	**20**	$y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$
6	$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$	**21**	$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$
7	$y=\dfrac{4-x^2}{x^2}$	**22**	$y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$
8	$y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$	**23**	$y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$
9	$y=\dfrac{9x^3+1}{x^2}$	**24**	$y=\dfrac{1}{x^4-1}$

10	$y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$	**25**	$y=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$;
11	$y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$	**26**	$y=\frac{x^3-32}{x^2}$;
12	$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$	**27**	$y=\frac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$;
13	$y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$	**28**	$y=\frac{3x-2}{x^3}$
14	$y=\frac{e^{2-x}}{2-x}$	**29**	$y=\frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$;
15	$y=\frac{-8x}{x^2+4}$	**30**	$y=\frac{x^3-27x+54}{x^3}$

Тема 9: Функції кількох змінних.

Завдання 9.

1.Частинні похідні функції багатьох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значень двох незалежних одна від одної змінних величин x і y з деякої області D відповідає певне значення величини z, тоді величина z є ***функцією двох незалежних змінних*** x і y, яка визначена в області D. Позначається така функція:

$$z = f(x, y) \text{ або } z = z(x, y).$$

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2).$$

Зобразити її графічно.

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0, \\ 4-x^2-y^2>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2\ge 1, \\ x^2+y^2<4. \end{cases}$$

Область визначення функції D зображена на рис. 1 (заштрихована частина).

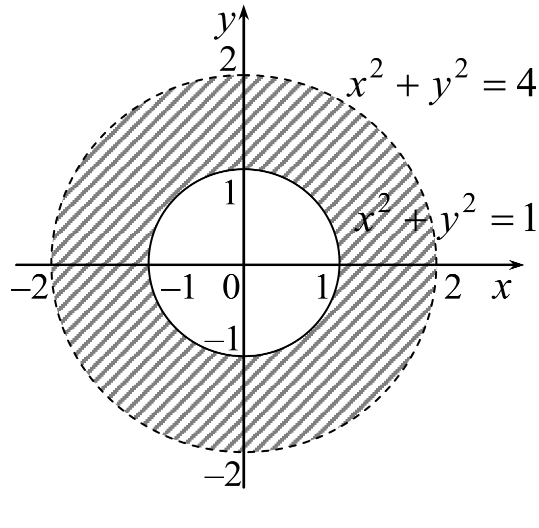


Рис. 1

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z=\frac{y}{x}.$$

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ (що не дорівнює нескінченності), яка не залежить від способу прямування $\Delta x\to 0$, тоді ця границя називається ***частинною похідною (першого порядку)*** функції $z=f(x,y)$ по незалежній змінній x і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x},\text{ або }\frac{\partial f}{\partial x},\text{ або }z'_x,\text{ або }f'_x(x,y),\text{ або }f'_x.$$

Аналогічно визначається частинна похідна по змінній y: z'_y.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}\right)'_x=y\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x=y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{x}(y)'_y=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}.$$

Приклад 3. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z=\sin xy.$$

Частинні похідні другого порядку є частинними похідними від похідних першого порядку.

Частинні похідні другого порядку для функції $z=f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(f'_x\right)'_x=f''_{xx},\tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(f'_y\right)'_y=f''_{yy},\tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(f'_x\right)'_y=f''_{xy},\tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y\right)'_x = f''_{yx}, \tag{4}$$

де (1) і (2) – ***“чисті похідні ”*** другого порядку;
(3) і (4) – “***мішані похідні ”*** другого порядку.

Якщо мішані частинні похідні одного порядку неперервні, тоді їх значення не залежать від порядку диференціювання.

Зокрема, для функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Розв’язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sin xy\right)'_x = \cos xy \cdot \left(xy\right)'_x = \cos xy \cdot y \cdot 1 = y \cos xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin xy\right)'_y = \cos xy \cdot \left(xy\right)'_y = \cos xy \cdot x \cdot 1 = x \cos xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y \cos xy\right)'_x = y \cdot (-\sin xy) \cdot \left(xy\right)'_x = y \cdot (-\sin xy) \cdot y \cdot 1 = -y^2 \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x \cos xy\right)'_y = x \cdot (-\sin xy) \cdot \left(xy\right)'_y = x \cdot (-\sin xy) \cdot x \cdot 1 = -x^2 \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y \cos xy\right)'_y = 1 \cdot \cos xy - y \cdot \sin xy \cdot \left(xy\right)'_y = \cos xy - xy \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x \cos xy\right)'_x = 1 \cdot \cos xy - x \cdot \sin xy \cdot \left(xy\right)'_x = \cos xy - xy \sin xy.$$

2.Похідна за напрямом. Градієнт функції.

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x, y) = x^3 - y^3$ у точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = (1, \sqrt{3})$.

Похідна від функції $u = f(x, y, z)$ ***за напрямом*** $\bar{l}$ характеризує швидкість зміни функції за цим напрямом і обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Ox) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Oy) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Oz).$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 3\cdot 1 = 3; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = -3\cdot 1 = -3.$$

Враховуючи $\vec{l} = (l_1, l_2) = (1;\sqrt{3})$, маємо

$$\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Ox) = \frac{l_1}{|l|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2};$$

$$\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Oy) = \frac{l_2}{|l|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_M = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1-\sqrt{3}).$$

Приклад 4.

Знайти градієнт функції $f(x,y) = x^3 + 2xy^2$ у точці $M(1;1)$.

Градієнтом функції $u = f(x,y,z)$ називається вектор, який показує напрямок найбільшого зростання функції і проекціями якого на координатні осі Ox, Oy, Oz є відповідно $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy; \; \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 5; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = 4;$$

$$grad\ f\Big|_M = 5\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Індивідуальні завдання №9

Тема: Функції кількох змінних.

Варіанти індивідуальних завдань:

№ варіанта	**Завдання**
1	**1).** Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2x^3 y + 5\sin x - 3y^2$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + 2y^2$ в точці $A(-1,1,3)$. **3).** Для функції $Z = 5x^2 - 3xy$ знайти градієнт в точці $M_1(3,-1)$ та похідну в точці $M_0(1,2)$ у напрямі вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$.
2	**1).** Знайти похідні другого порядку функції $Z = 3x^5 y^3 + 2\ln x - 3\cos y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2x^2 + 4y^2$ в точці $A(2,-1,4)$. **3).** Для функції $Z = x^2 + 3xy$ знайти градієнт в точці $M_1(2,1)$ та похідну в точці $M_0(4,2)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
3	**1).** Знайти похідні другого порядку функції $Z = 6xy^6 + 2\cos y - 7x^4$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 4 - x^2 - y^2$ в точці $A(1,0,\sqrt{3})$. **3).** Для функції $Z = 3x - 4y^2$ знайти градієнт в точці $M_1(2,-1)$ та похідну в точці $M_0(1,0)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
4	**1).** Знайти похідні другого порядку функції

	$Z = 2xy - 3e^{x} - 19\sin y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 1 + x^2 + y^2$ в точці $A(3, -4, 6)$. **3).** Для функції $Z = 4xy + y^2$ знайти градієнт в точці $M_1(2,0)$ та похідну в точці $M_0(3,-1)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
5	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 5^{y} + 5\sin x - 3x^6y^2$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 10 - 2x^2 - y^2$ в точці $A(0,1,3)$. **3).** Для функції $Z = xy - y^2 + 3$ знайти градієнт в точці $M_1(3,-4)$ та похідну в точці $M_0(2,-2)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
6	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = \frac{2^x}{5} - 5\ln x - 3y^9$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 4 - x^2 - 3y^2$ в точці $A(-1,-1,0)$. **3).** Для функції $Z = xy + 3y^2 - 4x$ знайти градієнт в точці $M_1(-1,2)$ та похідну в точці $M_0(1,0)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
7	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 9x^9y^3 + 7\sin x - 10y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 1 - 3x^2 + y^2$ в точці $A(1,0,-2)$. **3).** Для функції $Z = xe^{y} + 2xy^2 + 2y$ знайти градієнт в точці $M_1(2,0)$ та похідну в точці $M_0(1,1)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
8	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 8e^{x} + 5y^2\sin x - 3y^2$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

	$z = 2 - \frac{x^2}{2} - y^2$ в точці $A(1,0,\sqrt{3})$. **3).** Для функції $Z = 2xy^4 + 2xy + 6x$ знайти градієнт в точці $M_1(2,4)$ та похідну в точці $M_0(1,2)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
9	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2x^3 \cos y + 9\ln x - 3y^7$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = -xy + 2$ в точці $A(1,-1,3)$. **3).** Для функції $Z = 2x^2 + y^2 + 6x$ знайти градієнт в точці $M_1(-1,-2)$ та похідну в точці $M_0(1,0)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
10	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2y^4 \ln x + 5\cos x - 3e^y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = -1 - x^2 + y^2$ в точці $A(-3,4,-6)$. **3).** Для функції $Z = x^2 + 3y^2 - 9x$ знайти градієнт в точці $M_1(4,0)$ та похідну в точці $M_0(2,3)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
11	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2x^3 \ln y + 9\sin y - 3x^2$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 4 - x^2 y - y^2 + x$ в точці $A(1,2,3)$. **3).** Для функції $z = x^2 + 2xy + y^2$ знайти градієнт в точці $A(1,2)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(3,4)$.
12	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2\cos x \sin y + 5x^5 - 3^y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 4 - \sin x - \cos y$ в точці $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$. **3).** Для функції $z = 2xy - y^3 + x^2$ знайти градієнт в точці $A(-1,2)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(-3,4)$.
13	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 9e^x y^3 - 7\sin x + 2y^{10}$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

	$z = e^x + \cos y$ в точці $A\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$ **3).** Для функції $Z = x^2 - y^2 - 9x$ знайти градієнт в точці $A(2,1)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(3,-4)$.
14	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 4x^9 \sin y - 8^y - 3x^2$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 4 + tg2x - y^2$ в точці $A\left(\frac{\pi}{2}, 2, 2\right)$ **3).** Для функції $Z = xy^2 + x - y$ знайти градієнт в точці $A(1,1)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(-3,-4)$.
15	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2x^3 + 5^y \sin x - 19 \ln y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = tg\pi x - y^2$ в точці $A\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$. **3).** Для функції $Z = x^2 y - y + 5x$ знайти градієнт в точці $A(-2,1)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(5,8)$.
16	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 34y^4 + 4y^6 \sin x - \frac{7^x}{5}$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 4x - xy + y^2$ в точці $A(1,-1,6)$. **3).** Для функції $z = x^3 - 2xy + y^2$ знайти градієнт в точці $A(-2,-1)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(-5,8)$.
17	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2\cos x \ln y + 5x^8 - 3y^4$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

	$z=3x^2y-y^2+7x$ в точці $A(2,1,3)$. **3).** Для функції $z=x^2+xy^2-y^3$ знайти градієнт в точці $A(1,-2)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(-5,-8)$.
18	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z=2xy+3^y6^x-13y^2$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=3-xy-9y^3+4x$ в точці $A(2,2,1)$. **3).** Для функції $z=2x^2+y^2x-4y$ знайти градієнт в точці $A(2,2)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(5,-8)$.
19	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z=2\ln x+\ln 5\sin y-3x^4y^2$ **2).** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=xy+2y^2-2x$ в точці $A(1,2,8)$. **3).** Для функції $Z=13x^3y^2+x$ знайти градієнт в точці $A(1,-1)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(5,-12)$.
20	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z=9\cos y+2\ln x-3^x y^2$ **2).** Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=2xy+3y^2-5x$ в точці $A(3,4,57)$ **3).** Для функції $Z=13xy^3+y$ знайти градієнт в точці $A(3,1)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(-5,12)$.
21	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z=20x^7+2^y\sin x-3y^2$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=x^2-y^2+5x+4y$ в точці $A(3,2,28)$. **3).** Знайти похідну функції $Z=x^2+2xy+3y$ в точці $A(3,3)$ у напрямі градієнта цієї функції.
22	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z=12x^3+e^y\sin x-7\ln y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

	$z = 3x^2 + 2y^2 - xy$ в точці $A(-1,3,24)$. **3).** Знайти похідну функції $Z = e^x + e^y$ в точці $A(1,1)$ у напрямі градієнта цієї функції.
23	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 21x + 6y^5 \ln x - 3\cos y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$ в точці $A(2,4,27)$. **3).** Знайти градієнт функції $Z = x^2 + y^2$ в точці $A(1,1)$ та похідну в цій точці у напрямі градієнта.
24	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 9^x y^9 + 8\sin x - 4y^7$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ в точці $A(2,1,11)$. **3).** Знайти градієнт функції $Z = x^2 y + y^2 x$ в точці $A(3,4)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(2,3)$.
25	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2^y e^x - 7x + 12\cos y$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$ в точці $A(2,3,15)$. **3).** Для функції $Z = 2x^2 + 5y^2 - 3x$ знайти градієнт в точці $A(3,4)$ та похідну в цій точці у напрямі градієнта.
26	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 6xy^6 + 2\cos y - 7x^4$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2 - x^3 y - 2y^3 + 5x$ в точці $A(1,0,\sqrt{3})$. **3).** Для функції $Z = 3x - 4y^2 + 2x$ знайти градієнт в точці $M_1(2,-1)$ та похідну в точці $M_0(1,0)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
27	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = \frac{2^x}{5} - 5\ln x - 3y^9$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

	$z = 4 - x^2 - 3y^2$ в точці $A(-1,-1,0)$. **3).** Для функції $Z = xy + 3y - 4x$ знайти градієнт в точці $M_1(-1,2)$ та похідну в точці $M_0(1,0)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
28	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2x^3 \cos y + 9\ln x - 3y^7$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$ в точці $A(1,-1,3)$. **3).** Для функції $Z = 2x^2 + y^2 + 3x$ знайти градієнт в точці $M_1(-1,-2)$ та похідну в точці $M_0(1,0)$ у напрямі вектора $\overline{M_0M_1}$.
29	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 9e^x y^3 - 7\sin x + 2y^{10}$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $Z = e^x - 3\cos y + 5$ в точці $A\left(1,\pi,\frac{1}{e}\right)$ **3).** Для функції $Z = x^2 - y^2 + 2x$ знайти градієнт в точці $A(2,1)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(3,-4)$.
30	**1).**Знайти похідні другого порядку функції $Z = 2\cos x \ln y + 5x^8 - 3y^4$ **2).** Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x(y+z)(xy-z) + 8 = 0$ в точці $A(2,1,3)$. **3).** Для функції $z = x^2 + xy^2 - y^3$ знайти градієнт в точці $A(1,-2)$ та похідну в цій точці у напрямі вектора $\overline{a}(-5,-8)$.

Тема 10: Невизначений інтеграл

Завдання №10

Метод безпосереднього інтегрування

Приклад 1: $$\int \frac{(5x-4)^2}{x^2}\,dx$$

Розв'язання:

$$\int \frac{(5x-4)^2}{x^2}dx = \int \frac{25x^2-40x+16}{x^2}dx = \int \left(\frac{25x^2}{x^2} - \frac{40x}{x^2} + \frac{16}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int \left(25 - \frac{40}{x} + \frac{16}{x^2} \right) dx = 25\int dx - 40\int \frac{dx}{x} + 16\int x^{-2}dx =$$

$$= 25x - 40\ln|x| + 16\frac{x^{-1}}{-1} + C = 25x - 40\ln|x| - \frac{16}{x} + C$$

Приклад 2: $\int \frac{dx}{x^2-64}$

$$\int \frac{dx}{x^2-64} = \int \frac{dx}{x^2-8^2} =$$

Розв'язання: $= \left| \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \right| = \frac{1}{2\cdot 8}\ln\left|\frac{x-8}{x+8}\right| + C$

Приклад 3:

1) $\int \cos(8x+1)dx$; 2) $\int 5^{1-3x}dx$ **;** 3) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{9x}{4}+\frac{4\pi}{9}\right)}$

Розв'язання:

$$\int \cos(8x+1)dx = \left| \int \cos u du = \sin u + C \right| =$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos(8x+1)d(8x) = \frac{1}{8}\int \cos(8x+1)d(8x+1) =$$

$$= \frac{1}{8}\sin(8x+1) + C$$

2)

$$\int 5^{1-3x}\,dx = \left| \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \right| =$$

$$\frac{-1}{3}\int 5^{1-3x} d(-3x) = -\frac{1}{3}\int 5^{1-3x} d(1-3x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{5^{1-3x}}{\ln 5} + C$$

3)

$$\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{9x}{4}+\frac{4\pi}{9}\right)} = \left| \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C \right| =$$

$$= \frac{4}{9}\int \frac{d\left(\frac{9}{4}x\right)}{\cos^2\left(\frac{9}{4}x+\frac{4\pi}{9}\right)} = \frac{4}{9}\int \frac{d\left(\frac{9}{4}x+\frac{4\pi}{9}\right)}{\cos^2\left(\frac{9}{4}x+\frac{4\pi}{9}\right)} = \frac{4}{9} tg\left(\frac{9}{4}x+\frac{4\pi}{9}\right) + C$$

Узагальнення деяких табличних інтегралів

1. $$\int (ax \pm b)^n\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax \pm b)^{n+1}}{n+1} + C$$

2. $$\int \frac{dx}{ax \pm b} = \frac{1}{a}\cdot\ln|ax \pm b| + C$$

3. $$\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C\,; \quad \int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx+b} + C$$

4. $$\int \sin(ax \pm b)dx = -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax \pm b) + C$$

5. $$\int \cos(ax \pm b)dx = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax \pm b) + C$$

6. $\int \frac{dx}{(kx \pm b)^2 + a^2} = \frac{1}{k \cdot a} \operatorname{arctg} \frac{kx \pm b}{a} + C$

7. $\int \frac{dx}{(kx \pm b)^2 - a^2} = \frac{1}{2ka} \ln \left| \frac{(kx \pm b) - a}{(kx \pm b) + a} \right| + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{(kx \pm b)^2 \pm a^2}} = \frac{1}{k} \cdot \ln \left| (kx \pm b) + \sqrt{(kx \pm b)^2 \pm a^2} \right| + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (kx \pm b)^2}} = \frac{1}{k} \cdot \arcsin \frac{kx \pm b}{a} + C$

Метод заміни змінної (метод підстановки).

Обчислити невизначені інтеграли методом заміни змінної, зводячи до вказаної формули:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \; (n \neq -1)$$

1. $\int (3x^2 + 4)^{12} x dx = \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 4 = u \\ du = \left(3x^2 + 4\right)' dx \\ du = 6x dx \\ x dx = \frac{du}{6} \end{array} \right| = \int u^{12} \cdot \frac{du}{6} =$

$= \frac{1}{6} \frac{u^{13}}{13} + C = \frac{\left(3x^2 + 4\right)^{13}}{78} + C$

$$2.\ \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \\ du = (\ln x)' dx \\ du = \dfrac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot (\ln x)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$$

$$1.\ \int \frac{23dx}{arctgx\,(1+x^2)} = \left| \begin{array}{l} arctgx = u \\ du = (arctgx)' dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \int \frac{23du}{u} =$$

$$= 23\int \frac{du}{u} = 23\ln|u| + C = 23 \cdot \ln|arctgx| + C$$

$$2.\ \int \frac{\sin 2x dx}{5-\cos 2x} = \left| \begin{array}{l} 5-\cos 2x = u \\ du = (5-\cos 2x)' dx \\ du = 2\sin 2x dx \\ \sin 2x = \dfrac{du}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|5-\cos 2x| + C$$

$$\int e^u du = e^u + C, \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C \qquad \int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$$

$$1.\ \int \frac{\sin x}{\sin^2(\cos x)}dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u \\ du = -\sin x dx \\ -du = \sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{du}{\sin^2 u} = -(-ctgu) + C =$$

$$= ctg(\cos x) + C$$

$$2.\ \int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}\cos^2\sqrt{4x-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4x-1} = u \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{4x-1}} \cdot 4dx \\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{dx}{\sqrt{4x-1}} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{1}{2}tgu + C = \frac{1}{2}tg\sqrt{4x-1} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C$$

$$1.\ \int \frac{\sin 2xdx}{\cos^2 2x + 8} = \left| \begin{array}{l} \cos 2x = u \\ du = -2\sin 2xdx \\ -\dfrac{du}{2} = \sin 2xdx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}}arctg\frac{u}{\sqrt{8}} + C = \frac{1}{2\sqrt{8}}arctg\frac{\cos 2x}{\sqrt{8}} + C$$

$$2.\ \int \frac{dx}{x\left(4+\ln^2 5x\right)} = \left|\begin{array}{l} \ln 5x = u \\ du = \dfrac{1}{5x}\cdot 5dx \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{array}\right| = \int \frac{du}{2^2+u^2} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2} arctg \frac{\ln 5x}{2} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

$$1.\ \int \frac{9x^5dx}{x^{12}-4} = \left|\int \frac{9x^5dx}{\left(x^6\right)^2-2^2}\right| = \left|\begin{array}{l} x^6 = u \\ du = 6x^5dx \\ \dfrac{du}{6} = x^5dx \end{array}\right| = \frac{9}{6}\int \frac{du}{u^2-2^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u-2}\right| + C = \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x^6+2}{x^6-2}\right| + C$$

2. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x\left(3-ctg^2 7x\right)} = \left| \begin{array}{l} ctg7x = u \\ du = \frac{-7dx}{\sin^2 7x} \\ -\frac{du}{7} = \frac{dx}{\sin^2 7x} \end{array} \right| = -\frac{1}{7}\int \frac{du}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - u^2} =$

$= -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}}\right| + C = -\frac{1}{14\sqrt{3}}\ln\left|\frac{ctg7x+\sqrt{3}}{ctg7x-\sqrt{3}}\right| + C$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$$

1. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{3-e^{4x}}} = \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(e^{2x}\right)^2}} \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \\ du = e^{2x}\cdot 2dx \\ \frac{dx}{2} = e^{2x}dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - u^2}} =$

$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{e^{2x}}{\sqrt{3}} + C$

2. $\int \frac{dx}{\left(1+36x^2\right)\sqrt{100 - arctg^2 6x}} = \int \frac{dx}{\left(1+36x^2\right)\sqrt{10^2 - \left(arctg6x\right)^2}} =$

$= \left| \begin{array}{l} arctg6x = u \\ du = \frac{6dx}{1+\left(6x\right)^2} \\ \frac{du}{6} = \frac{dx}{1+36x^2} \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{10^2-u^2}} = \frac{1}{6}\arcsin\frac{u}{10} + C = \frac{1}{6}\arcsin\frac{arctg6x}{10} + C$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a}\right| + C$$

$$1.\int \frac{x^8\ dx}{\sqrt{38 + x^{18}}} = \int \frac{x^8 dx}{\sqrt{38 + \left(x^9\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} x^9 = u \\ du = 9x^8 dx \\ \dfrac{du}{9} = x^8 dx \end{array} \right| = \frac{1}{9}\int \frac{du}{\sqrt{38 + u^2}} =$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|u + \sqrt{38 + u^2}\right| + C = \frac{1}{9}\ln\left|x^9 + \sqrt{38 + x^{18}}\right| + C$$

$$2.\ \int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt{\cos^2 5x + 7}} = \int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt{(\cos 5x)^2 - 7}} = \left| \begin{array}{l} \cos 5x = u \\ du = -5\sin 5x dx \\ -\dfrac{du}{5} = \sin 5x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 7}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 7}\right| + C = -\frac{1}{5}\ln\left|\cos 5x + \sqrt{\cos^2 5x - 7}\right| + C$$

Обчислення невизначених інтегралів ,
використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Інтеграли першої групи:

1)	$\int P_n(x) \cdot \sin kx\, dx$ $\int P_n(x) \cdot \cos kx\, dx$ $\int P_n(x) \cdot a^{kx}\ dx$	$u = P_n(x)$

$$\int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx \qquad\qquad dv=\begin{cases}\sin kx\,dx\\ \cos kx\,dx\\ a^{kx}dx\\ e^{kx}dx\end{cases}$$

Приклад 1.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.) $\int(5x+4)\cdot 7^{4x}dx$; 2.) $\int x\cdot\sin 4x dx$

$$1.\int(5x+4)\cdot 7^{4x}dx=\left|\begin{array}{l}u=5x+4\to du=5dx\\ dv=7^{4x}dx\to v=\int 7^{4x}dx=\\ =\frac{1}{4}\int 7^{4x}d(4x)=\frac{1}{4}\frac{7^{4x}}{\ln 7}\end{array}\right|=$$

$$=(5x+4)\cdot\frac{7^{4x}}{4\ln 7}-\frac{5}{4\ln 7}\int 7^{4x}dx=(5x+4)\cdot\frac{7^{4x}}{4\ln 7}-$$

$$-\frac{5}{4^2\ln 7}\int 7^{4x}d(4x)=(5x+4)\cdot\frac{7^{4x}}{4\ln 7}-\frac{5}{16\ln 7}\cdot\frac{7^{4x}}{\ln 7}+C=$$

$$=(5x+4)\cdot\frac{7^{4x}}{4\ln 7}-\frac{5\cdot 7^{4x}}{16\cdot\ln^2 7}+C$$

$$2.\int x\cdot\sin 4x dx=\left|\begin{array}{l} u=x\to du=dx \\ dv=\sin 4x dx\to v=\int\sin 4x dx \\ v=-\dfrac{1}{4}\cos 4x \end{array}\right|=$$

$$=x\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+\frac{1}{4}\int\cos 4x dx=-\frac{1}{4}x\cos 4x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C$$

Інтеграли другої групи :

2)

$$\int P_n(x)\cdot\arcsin kx\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot\arccos kx\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot\mathrm{arctg}\,kx\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot\mathrm{arcctg}\,kx\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot\log_a kx\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot(\log_a kx)^m\,dx$$

$$u=\begin{cases}\arcsin kx\\ \arccos kx\\ \mathrm{arctg}\,kx\\ \mathrm{arcctg}\,kx\\ \log_a kx\\ (\log_a kx)^m\end{cases}$$

$$dv=P_n(x)\,dx$$

Приклад 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.) $\int x^2\cdot\ln x dx$; 2.) $\int arctgxdx$

$$1.\int x^2\cdot\ln x dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\to du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=x^2dx\to v=\int x^2dx=\\ =\dfrac{x^3}{3}\end{array}\right|=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}+C$$

$$2.\int \mathrm{arctg}x\,dx=\left|\begin{array}{l}u=arctgx\to du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=dx\to v=\int dx=x\end{array}\right|=x\cdot arctgx-\int x\cdot\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=x\cdot arctgx-\int\frac{xdx}{1+x^2}=\left|\begin{array}{l}1+x^2=t\\ dt=2xdx\\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right|=xarctgx-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=xarctgx-\frac{1}{2}\ln|t|+C=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$$

Інтеграли третьої групи :

$$\int\begin{Bmatrix}e^{mx}\\ a^{mx}\end{Bmatrix}\cdot\sin kx\,dx,\qquad \text{або}\qquad \int\begin{Bmatrix}e^{mx}\\ a^{mx}\end{Bmatrix}\cdot\cos kx\,dx$$

Приклад 3.

Обчислити невизначений інтеграл: $\int e^x\cos xdx$

$$\underbrace{\int e^x \cdot \cos x\, dx}_{I} = \left| \begin{array}{l} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \to v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \to du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \to v = -\cos x \end{array} \right| =$$

Не

$$= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x dx \right) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{I};$$

хай : $\underbrace{\int e^x \cdot \cos x\, dx}_{I} = I$

В результаті маємо рівняння відносно I:

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x \sin x + e^x \cos x + C$$

$$I = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

$$\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

Інтегрування простих раціональних дробів.

Приклад 1.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.) $\int \frac{10dx}{x^2 + 8x + 3}$; 2.) $\int \frac{x - 8}{x^2 + 2x + 7} dx$

$$1.\int\frac{10dx}{x^2+8x+3}=\left|\begin{array}{l}x^2+8x+3=\underbrace{x^2+8x+4^2}_{(x+4)^2}-4^2+3=\\=(x+4)^2-13\end{array}\right|=$$

$$=10\int\frac{d(x+4)}{(x+4)^2-\left(\sqrt{13}\right)^2}=10\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{13}}{x+4+\sqrt{13}}\right|+C$$

$$2.\int\frac{x-8}{x^2+2x+7}dx=\left|\begin{array}{l}\left(x^2+2x+7\right)'=\\=2x+2\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{2\cdot(x-8)}{x^2+2x+7}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2-16}{x^2+2x+7}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)-18}{x^2+2x+7}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+7}-18\int\frac{dx}{x^2+2x+7}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{d\left(x^2+2x+7\right)}{x^2+2x+7}-18\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x^2+2x+7=\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}+6=\\=(x+1)^2+6\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+7\right|-\frac{9}{\sqrt{6}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{6}}+C$$

Індивідуальні завдання 10

Тема: Невизначений інтеграл

Варіанти індивідуальних завдань:

Вариант № 1

1. $\int \frac{dx}{2x+3}$; **2**. $\int \frac{3x^3-2x^2+2}{3x^3}dx$; **3**. $\int \cos\left(6-\frac{x}{5}\right)dx$;

4. $\int \frac{10dx}{x^2+8x+3}$ **5** $\int x\cdot\cos 3xdx$

Вариант № 2

1. $\int (2x+3)^7 dx$; **2**. $\int \frac{x^3-5x+2}{\sqrt[3]{x}}dx$; **3**. $\int \sin(5-2x)dx$;

4. $\int \frac{3}{x^2+4x+7}dx$; **5.** $\int (x+4)\cdot 3^x dx$;

Вариант № 3

1. $\int e^{-6-\frac{x}{3}} dx$; **2**. $\int \frac{4x^2-5x+1}{x}dx$; **3**. $\int \sin\left(\frac{3x}{8}-\frac{\pi}{6}\right)dx$;

4. $\int \frac{7}{x^2-2x+3}dx$; **5.** $\int e^{\frac{x}{7}}(10x+9)\cdot dx$;

Вариант № 4

1. $\int 7^{\frac{x}{9}-11} dx$; **2**. $\int \frac{2x^3+5x-4}{\sqrt[3]{x}}dx$; **3**. $\int ctg(49-8x)dx$;

4. $\int \frac{2}{x^2+3x+\frac{5}{4}}dx$; **5.** $\int (5x+4)\cdot 7^x dx$;

Вариант № 5

1. $\int 5^{1-3x} dx$; **2**. $\int \frac{9x^3 + x^2 - 4x}{9x^4} dx$; **3**. $\int ctg(49 - 8x) dx$;

4. $\int \frac{4}{x^2 - 8x + 2} dx$; **5.** $\int (7 - 2x) \cdot \sin 3x \, dx$;

Вариант № 6

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 (2 - 9x)}$; **2**. $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x}{3x^4} dx$; **3**. $\int tg \frac{x}{9} dx$;

4. $\int \frac{7}{x^2 - 18x + 82} dx$; **5.** $\int (1 - 6x) \cdot e^{5x} dx$;

Вариант № 7

1. $\int 6^{3+7x} dx$; **2**. $\int \frac{5x^4 - 6x - 4}{6x^3} dx$; **3**. $\int \frac{dx}{\sin^2 (5 + 4x)}$;

4. $\int \frac{-3}{x^2 + 2x + 12} dx$; **5.** $\int x \cdot \sin 4x dx$;

Вариант № 8

1. $\int \frac{dx}{(5x + 2)^4}$; **2**. $\int \frac{5x^5 - 7x - 4}{6x^3} dx$; **3**. $\int \frac{dx}{\sin^2 (3x + 2)}$;

4. $\int \frac{4}{x^2 - 6x + 5} dx$; **5.** $\int (2 + 3x) \cdot e^{x} dx$;

Вариант № 9

1. $\int e^{5+\frac{x}{4}}dx$;   **2**. $\int \frac{3x^2-2x+7}{4x}dx$;   **3**. $\int \sin\left(\frac{x}{3}-2\right)dx$;

4. $\int \frac{-2}{x^2+22x+40}dx$ **5**. $\int (x-2)\cdot\cos 3x dx$;

Вариант № 10

1. $\int 5^{\frac{x}{2}-1}\, dx$;   **2**. $\int \frac{9x^3+3x-4x}{\sqrt[4]{x}}dx$;   **3**. $\int \cos(4-2x)dx$;

4. $\int \frac{5}{x^2+2x+120}dx$;   **5.** $\int (3x-1)\cdot 2^x\, dx$;

Вариант № 11

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;   **2**. $\int \frac{-4x^3-\sqrt[3]{x}\ +2}{\sqrt[5]{x}}dx$;   **3**. $\int \cos\left(2+\frac{x}{9}\right)dx$;

4. $\int \frac{9dx}{x^2-10x+1}$;   **5.** $\int x\cdot\cos 6x dx$

Вариант № 12

1. $\int \left(\frac{x}{3}+1\right)^3 dx$;   **2**. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-2x^2+1}{\sqrt{x}}dx$;   **3**. $\int 2\sin(2-8x)dx$;

4. $\int \frac{dx}{x^2+16x+40}$;   **5.** $\int (2x-1)\cdot 7^x\, dx$;

Вариант № 13

1. $\int e^{-2+\frac{x}{6}}\, dx$;   **2**. $\int \frac{4x^5-8x^3+14x}{x^2}dx$;   **3**. $\int \sin\left(\frac{6x}{5}-\frac{\pi}{3}\right)dx$;

4. $\int \frac{93}{x^2-22x+100}dx$; 5. $\int e^{\frac{x}{2}}(5x+1)\cdot dx$;

Вариант № 14

1. $\int 7^{\frac{x}{4}-9}\ dx$; 2. $\int \frac{2\sqrt[4]{x^3}+5\sqrt{x}-4x^2}{2x}dx$; 3. $\int ctg(35-7x)dx$;

4. $\int \frac{3}{x^2+6x-19}dx$; 5. $\int (8x+1)\cdot 5^{3x}dx$;

Вариант № 15

1. $\int 6^{1-7x}dx$; 2. $\int \frac{2x^7+5\sqrt{x}-4x^2}{2x^6}dx$; 3. $\int ctg(21-3x)dx$;

4. $\int \frac{14}{x^2-7x+10}dx$; 5. $\int (10-3x)\cdot \sin\frac{x}{4}dx$;

Вариант № 16

1. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(1-\frac{9x}{4}\right)}$; 2. $\int \frac{2x^4+7x^2-3\sqrt{x}}{3x^3}dx$; 3. $\int tg\left(\frac{x}{9}+55\right)dx$;

4. $\int \frac{9}{x^2-8x+33}dx$; 5. $\int (1-2x)\cdot 7^{9x}dx$;

Вариант № 17

1. $\int 6^{4-3x}dx$; 2. $\int \frac{7x^5-7\sqrt{x}-4x^2}{7x^3}dx$; 3. $\int \frac{dx}{\sin^2(2+7x)}$;

4. $\int \frac{70}{x^2+90x+100}dx$; 5. $\int x\cdot \sin 10x dx$;

Вариант № 18

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+2)^4}}$; **2**. $\int \frac{5x^6 - 2\sqrt{x} - 6x^2}{6x^3} dx$; **3**. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{3x}{7} + \frac{2}{7}\right)}$;

4. $\int \frac{10}{x^2 - 10x + 5} dx$; **5.** $\int (2 + 7x) \cdot e^x dx$;

Вариант № 19

1. $\int e^{15+\frac{x}{3}} dx$; **2**. $\int \frac{3x^2 - 8x + 7\sqrt{x}}{5x} dx$; **3**. $\int \sin\left(\frac{x}{26} - 11\right) dx$;

4. $\int \frac{-12}{x^2 + 26x + 100} dx$; **5.** $\int (x-1) \cdot \cos 7x dx$;

Вариант № 20

1. $\int 10^{\frac{x}{7}-1} dx$; **2**. $\int \frac{5x^5 + 7x^3 - 4x}{3x^3} dx$; **3**. $\int \cos\left(\frac{4}{3} - \frac{2x}{3}\right) dx$;

4. $\int \frac{7}{x^2 - 7x - 44} dx$; **5.** $\int (2x - 10) \cdot 2^x dx$;

Вариант № 21

1. $\int \frac{dx}{2x+3}$; **2**. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 2}{3x^3} dx$; **3**. $\int \cos\left(6 - \frac{x}{5}\right) dx$;

4. $\int \frac{10dx}{x^2 + 8x + 3}$ **5** $\int x \cdot \cos 3x dx$

Вариант № 22

1. $\int (2x+3)^7 dx$; **2**. $\int \frac{x^3-5x+2}{\sqrt[3]{x}} dx$; **3**. $\int \sin(5-2x)dx$;

4. $\int \frac{3}{x^2+4x+7} dx$; **5.** $\int (x+4)\cdot 3^x dx$;

Вариант № 23

1. $\int e^{-6-\frac{x}{3}} dx$; **2**. $\int \frac{4x^2-5x+1}{x} dx$; **3**. $\int \sin\left(\frac{3x}{8}-\frac{\pi}{6}\right)dx$;

4. $\int \frac{7}{x^2-2x+3} dx$; **5.** $\int e^{\frac{x}{7}}(10x+9)\cdot dx$;

Вариант № 24

1. $\int 7^{\frac{x}{9}-11} dx$; **2**. $\int \frac{2x^3+5x-4}{\sqrt[3]{x}} dx$; **3**. $\int ctg(49-8x)dx$;

4. $\int \frac{2}{x^2+3x+\frac{5}{4}} dx$; **5.** $\int (5x+4)\cdot 7^x dx$;

Вариант № 25

1. $\int 5^{1-3x} dx$; **2**. $\int \frac{9x^3+x^2-4x}{9x^4} dx$; **3**. $\int ctg(49-8x)dx$;

4. $\int \frac{4}{x^2-8x+2} dx$; **5.** $\int (7-2x)\cdot \sin 3x \, dx$;

Вариант №26

1. $\int \frac{dx}{\sin^2(2-9x)}$; **2.** $\int \frac{2x^3+5x^2-4x}{3x^4}dx$; **3.** $\int tg\frac{x}{9}dx$;

4. $\int \frac{7}{x^2-18x+82}dx$; **5.** $\int (1-6x)\cdot e^{5x}\,dx$;

Вариант № 27

1. $\int 6^{3+7x}dx$; **2.** $\int \frac{5x^4-6x-4}{6x^3}dx$; **3.** $\int \frac{dx}{\sin^2(5+4x)}$;

4. $\int \frac{-3}{x^2+2x+12}dx$; **5.** $\int x\cdot\sin 4x dx$;

Вариант № 28

1. $\int \frac{dx}{(5x+2)^4}$; **2.** $\int \frac{5x^5-7x-4}{6x^3}dx$; **3.** $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$;

4. $\int \frac{4}{x^2-6x+5}dx$; **5.** $\int (2+3x)\cdot e^{x}\,dx$;

Вариант № 29

1. $\int e^{5+\frac{x}{4}}dx$; **2.** $\int \frac{3x^2-2x+7}{4x}dx$; **3.** $\int \sin\left(\frac{x}{3}-2\right)dx$;

4. $\int \frac{-2}{x^2+22x+40}dx$ **5.** $\int (x-2)\cdot\cos 3x dx$;

Вариант № 30

1. $\int 5^{\frac{x}{2}-1}\,dx$; **2**. $\int \frac{9x^3+3x-4x}{\sqrt[4]{x}}dx$; **3**. $\int \cos(4-2x)dx$;

4. $\int \frac{5}{x^2+2x+120}dx$; **5.** $\int (3x-1)\cdot 2^x\,dx$;

Тема 11: Визначений інтеграл

Завдання №11

Завдання 1. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями: $y = x^2+1$ **;** $y = 3-x$

Розв'язання.

Знайдемо координати точок перетину параболи і прямої (рис.1). Для цього дорівняємо праві частини їх рівнянь:

$$x^2+1 = 3-x \quad \Rightarrow \quad x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow$$

$$D = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9$$

$$x = \frac{-1\pm 3}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2$$

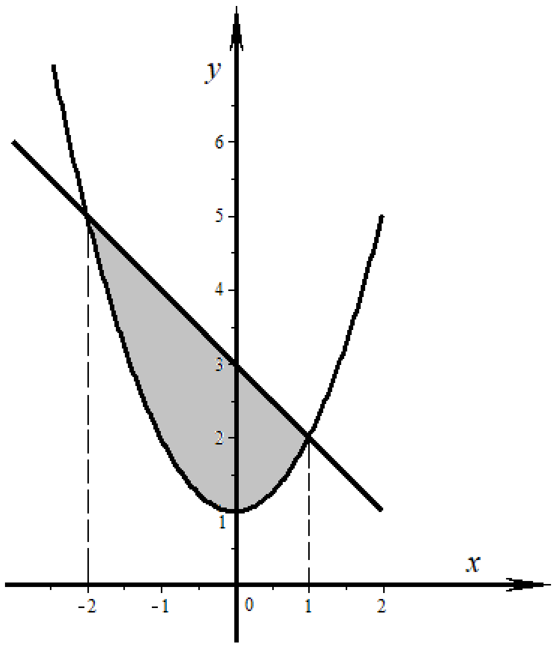


Рис.1

Площа фігури, яка обмежена лініями: параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $y = 3 - x$, – обчислюється за допомогою визначеного інтеграла:

$$S = \int_{-2}^{1} \left(3 - x - \left(x^2 + 1\right)\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right) dx =$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}.$$

Завдання 2. Знайти довжину дуги кривої $y = \sqrt{x^3}$ на відрізку $[0; 5]$

Розв'язання. Довжина дуги кривої, яка задана у декартовій системі координат обчислюється за формулою:

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\, dx.$$

Похідна від заданої функції дорівнює $y' = \frac{3}{2} x^{1/2}$. Тоді підінтегральний вираз має вигляд:

$$\sqrt{1+\left(y^{/}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}=\sqrt{\frac{4+9x}{4}}=\frac{\sqrt{4+9x}}{2}.$$

Обчислимо визначений інтеграл:

$$L=\int_0^5\frac{\sqrt{4+9x}}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^5\sqrt{4+9x}dx=\left\|\begin{array}{c}\sqrt{4+9x}=t\\ 4+9x=t^2\\ 9dx=2tdt\\ dx=\frac{2}{9}tdt\end{array}\right\|=\frac{1}{2}\int_2^7 t\cdot\frac{2}{9}tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\int_2^7 t^2dt=\frac{1}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_2^7=\frac{1}{27}\cdot\left(7^3-2^3\right)=\frac{1}{27}\cdot(343-8)=\frac{335}{27}.$$

Індивідуальні завдання №11

Тема: Визначений інтеграл

Варіанти індивідуальних завдань:

Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:

№ варіанту	Завдання
1	$y=(x-2)^2,\ y=4x-8$.
2	$y=x^2-2x$; $y=3$; $x\ge -1$
3	$y^2=x+1$; $y=x-1$; $x=0$; $x=2$
4	$y=x^2-2x$; $y=0$; $x=0$; $x=-2$
5	$y-4=-x^2,\quad y=0,\ x=0,\ x=1$.
6	$y-4=-x^2,\ y=0\ \left(0\le x\le 2\right)$.
7	$y=\cos x,\ y=0,\ \left(0\le x\le \pi/2\right)$.
8	$y=e^x,\quad y=0,\quad x=0\quad x=\ln 2$.
9	$y-1=e^x,\quad y=0,\quad x=\ln 2$.
10	$y=\sin x,\ y=0,\ \left(0\le x\le \pi/2\right)$.
11	$y=(x+1)^2,\quad y^2=x+1$.
12	$y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3$.
13	$y=(x-1)^2;\ y^2=x-1$.
14	$y=(x+1)^2$; $y=-x+2$; $x=-1$; $x=0$
15	$y^2=x-1$; $y=-x+5$; $y\ge 0$

16	$y=\cos 3x$, $y=0$, $\left(0\le x\le \pi/3\right)$.
17	$y=\sin 2x$, $y=0$, $\left(0\le x\le \pi/4\right)$.
18	$y^2=x+1$; $y=x$
19	$y^2=x+1$; $y=x-1$; $x\ge 0$
20	$y=4-x^2$ та $y=x^2-2x$.
21	$y=(x-2)^2$, $y=4x-8$.
22	$y=x^2-2x$; $y=3$; $x\ge -1$
23	$y^2=x+1$; $y=x-1$; $x=0$; $x=2$
24	$y=x^2-2x$; $y=0$; $x=0$; $x=-2$
25	$y-4=-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.
26	$y-4=-x^2$, $y=0$ $\left(0\le x\le 2\right)$.
27	$y=\cos x$, $y=0$, $\left(0\le x\le \pi/2\right)$.
28	$y=e^x$, $y=0$, $x=0$ $x=\ln 2$.
29	$y-1=e^x$, $y=0$, $x=\ln 2$.
30	$y=\sin x$, $y=0$, $\left(0\le x\le \pi/2\right)$.

Тема 12: Звичайні диференціальні рівняння.

Завдання 12.

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

$$F(x,y,y')=0, \qquad (1)$$

де $y=f(x)$ – шукана функція, x – незалежна змінна.

Загальний розв’язок має вигляд

$$y=\varphi(x,C)$$

або

$$\Phi(x,y,C)=0$$

Задача Коші: знайти розв’язок рівняння (1) при початковій умові $y\big|_{x=x_0}=y_0$ (або ще записують $y(x_0)=y_0$).

Основні види диференціальних рівнянь першого порядку

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з ***відокремлюваними змінними***, якщо його можна представити у вигляді

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0 \qquad (2)$$

або

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (3)$$

Зауважимо, що за допомогою перетворень, враховуючи що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, рівняння (2) та (3) зводяться одне до одного.

Особливістю рівнянь (2) та (3) є розділення множників так, що кожний з них є функцією тільки одного аргументу.

Для знаходження загального розв'язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними його спочатку зводять до рівняння з відокремленими змінними, а потім інтегрують:

для рівняння (2)	$M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$
рівняння з відокремленими змінними	$\dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$
загальний інтеграл	$\int \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$

Для рівняння (3)	$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y)$
рівняння з відокремленими змінними	$\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$
загальний інтеграл	$\int \dfrac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2x\,dx + \frac{1}{y^2}dy = 0.$$

Розв'язання. Так як при dx стоїть коефіцієнт який містить тільки змінну x, а при dy – тільки y, то задане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи ліву і праву частину заданого рівняння отримаємо:

$$\int 2x\,dx + \int \frac{1}{y^2}\,dy = C$$

$$x^2 - \frac{1}{y} = C$$

Остання рівність є загальним інтегралом заданого диференці-ального рівняння. Якщо розв’язати цю рівність відносно y отримаємо загальний розв’язок у вигляді

$$y = \frac{1}{x^2 - C}$$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$\left(\frac{1}{y} + y\right)dy = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Розв’язання. Якщо перенести вираз $\frac{xdx}{1+x^2}$ вліво, то отримаємо рівняння рівняння з відокремленими змінними. Рівняння з відокремленими змінними зручно представляти так, щоб зліва залишався вираз з dy, а справа – з dx, вже потім інтегрувати ліву і праву частину рівняння, при чому додаючи сталу C один раз:

$$\int \left(\frac{1}{y} + y\right)dy = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

Тут виділити y в явному вигляді не представляється можливим. Отже, остання рівність і є загальним розв’язком в неявному вигляді.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$(1+y^2)dx - (1+x^2)ydy = 0$$

Розв’язання. Так як коефіцієнти при dx та dy є добутками функцій тільки однієї змінної, то задане рівняння – з відокремлюваними змінними. Зведемо його до рівняння з відокремленими змінними. Для цього поділимо обидві частини рівності на $(1+x^2)(1+y^2)$:

$$\frac{dx}{1+x^2} - \frac{ydy}{1+y^2} = 0$$

Інтегруючи останнє рівняння (з відокремленими змінними) отримаємо:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{ydy}{1+y^2} = C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = C$$

Тоді загальний розв’язок:

$$\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$$

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$xy' + y = 0$$

Розв’язання. Розв’яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = -\frac{1}{x}\cdot y$$

Отримали рівняння виду (3). Отже, задано рівняння з відокремлюваними змінними. Приведемо його до рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \overline{C},$$

де $\overline{C}$ – довільна стала.

Для спрощення отриманого виразу зробимо заміну $\overline{C} = \ln\widetilde{C}$ ($\widetilde{C} > 0$), при цьому коли $\widetilde{C} \in (0;+\infty)$ величина $\ln\widetilde{C} \in (-\infty;+\infty)$, тобто $\overline{C}$ залишається довільною сталою. Тоді загальний розв’язок набуває вигляду

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln\widetilde{C},$$

Звідси

$$\ln|y| = \ln\frac{\widetilde{C}}{|x|}$$

$$|y| = \frac{\widetilde{C}}{|x|} \quad \text{або} \quad y = \pm\frac{\widetilde{C}}{x}$$

Зробимо ще одну заміну: $C = \pm\widetilde{C}$, де $C \in (-\infty;+\infty)$, тобто довільна стала. Тоді загальний розв’язок: $y = \dfrac{C}{x}$

Зауважимо, що для зручності можна ще при інтегруванні рівняння з відокремленими змінними додавати довільну сталу в тому вигляді, в якому вона спрощує вираз.

Приклад 5. Знайти розв’язок задачі Коші

$$\frac{y}{x}dy = \left(\frac{1}{xy} + \frac{2}{y}\right)dx, \quad y\big|_{x=0} = 1.$$

Розв'язання. Спочатку визначимо вид цього рівняння. В множнику перед dx винесемо $\frac{1}{y}$ за дужки, отримаємо $\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)$. Тоді маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{1}{x}ydy = \frac{1}{y}\cdot\frac{2x+1}{x}dx$$

Знайдемо загальний розв'язок. Помножимо обидві частини останнього рівняння на xy, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$y^2dy = (2x+1)dx$$

Далі інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int y^2dy = \int(2x+1)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + x + \overline{C}$$

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + x + \frac{C}{3}$$

Тоді загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + C}$$

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння при заданій початковій умові $y\big|_{x=0} = 1$. Для цього підставимо початкові данні $x = 0$, $y = 1$ в загальний розв'язок і знайдемо C:

$$1 = \sqrt[3]{C} \;\Rightarrow\; C = 1$$

Підставимо $C = 1$ в загальний розв'язок і отримаємо частинний розв'язок (що задовольняє заданим початковим умовам):

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + 3x + 1}$$

2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається ***однорідним***, якщо його можна представити у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4}$$

де права частина є функцією тільки від $\frac{y}{x}$.

В однорідному рівнянні (4) змінні не відокремлюються. Тому для знаходження загального розв'язку цього рівняння вводять нову змінну

$$\frac{y}{x} = z$$

Тоді $y = zx$. Знайдемо похідну функції y по змінній x: $y' = z'x + z$. Замінивши $\frac{y}{x}$ і y' в заданому однорідному рівнянні отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xdy = (x + y)dx$$

Розв'язання. В цьому рівнянні змінні відокремити неможливо. Але можна привести до вигляду (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

Отже, задане рівняння – однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Зробимо в останньому рівнянні заміну: $\frac{y}{x} = z$, $y' = z'x + z$. Тоді

$$z'x + z = 1 + z \quad \Rightarrow \quad z'x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x = 1$$

$$dz = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int dz = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad z = \ln|x| + C$$

Підставимо замість змінної z її значення $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

Отже, загальний розв'язок:

$$y = x\ln|x| + Cx$$

3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (5)$$

Зауважимо, що y та y' входять в це рівняння в першому степені.

В загальному випадку $Q(x) \neq 0$. Якщо $Q(x) = 0$, то лінійне рівняння називається однорідним і є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння можна знайти за допомогою підстановки:

$$y = u \cdot v,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – деякі функції, що мають неперервні перші похідні.

Тоді y' має вигляд:

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Підставимо y та y' в рівняння (11), отримаємо

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

Згрупуємо доданки в лівій частині рівності наступним чином:

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + P(x) \cdot v\right) = Q(x)$$

Цей метод розв'язання полягає в тому, що функцію v визначають так, щоб коефіцієнт при u в рівнянні перетворювався в нуль. Тоді останнє рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} v' + P(x) \cdot v = 0 \\ u' \cdot v = Q(x) \end{cases}$$

Із цієї системи знаходять спочатку функцію v, потім u.

Знайдемо функції v і u в загальному вигляді.

З першого рівняння системи маємо:

$$v' = -P(x)v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -P(x)v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad v = e^{-\int P(x)dx}$$

Зауважимо, що знайдена функція v є частинним розв'язком першого рівняння системи. Підставляємо v в друге рівняння системи і знаходимо u:

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad \Rightarrow \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

Тоді загальний розв'язок лінійного рівняння (5) можна виразити формулою:

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (6)$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2 y' - 3xy = 4$$

Розв'язання. Звільнимо y' від коефіцієнту. Для цього поділимо обидві частини рівняння на x^2:

$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{4}{x^2}$$

Отримали рівняння виду (5) – лінійне диференціальне рівняння першого порядку, де $P(x) = -\frac{3}{x}$, $Q(x) = \frac{4}{x^2}$. Для знаходження розв'язку цього рівняння не будемо використовувати готову формулу, а виведемо його самі.

Розв’язок будемо шукати у вигляді $y = uv$. Звідси $y' = u'v + uv'$. Підставимо y та y' в останнє рівняння, отримаємо

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{3}{x} uv = \frac{4}{x^2}$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) = \frac{4}{x^2}$$

Покладаючи, що вираз у дужках повинен дорівнювати 0, отримаємо систему

$$\begin{cases} v' - \dfrac{3}{x} v = 0 \\ u'v = \dfrac{4}{x^2} \end{cases}$$

Розв’язуючи перше рівняння системи, враховуючи, що v є частинним розв’язком, маємо

$$v' = \frac{3}{x} v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = \frac{3}{x} v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{3}{x} dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3}{x} dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = 3\ln|x| \;\Rightarrow\; v = \pm x^3$$

Підставимо v в друге рівняння системи і розв’яжемо його:

$$\pm u' x^3 = \frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \pm \frac{4}{x^5} \;\Rightarrow\; du = \pm \frac{4}{x^5} dx$$

$$\int du = \pm 4 \int \frac{dx}{x^5} \;\Rightarrow\; u = \mp \frac{1}{x^4} \pm C$$

Підставимо u і v у розв’язок:

$$y = \left(C - \frac{1}{x^4}\right) x^3$$

Отже, загальний розв’язок має вигляд

$$y = Cx^3 - \frac{1}{x}$$

4. Диференціальні рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння першого порядку, яке можна привести до вигляду

$$y' + P(x) y = Q(x) y^n, \tag{7}$$

де $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Таке рівняння заміною $z = y^{1-n}$ зводиться до лінійного диферен-ціального рівняння виду (11):

$$\frac{1}{1-n}z'+P(x)z=Q(x)$$

Розв’язуючи останнє лінійне диференціальне рівняння першого порядку знаходимо z, а тоді з рівності $z=y^{1-n}$ знаходимо y.

Приклад 8. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$yy'+y^2=x$$

Розв’язання. Поділимо обидві частини рівняння на y, отримаємо рівняння виду (7):

$$y'+y=xy^{-1},$$

де $P(x)=1,\ Q(x)=x$.

Зробимо заміну $z=y^2$. Тоді маємо

$$\frac{1}{2}z'+z=x \ \Rightarrow \quad z'+2z=2x$$

Отримали лінійне рівняння виду (5). Для скорочення обчислень загальний розв’язок знайдемо за готовою формулою (6), де $P(x)=2$, $Q(x)=2x$:

$$z=\left(\int 2xe^{\int 2dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int 2dx}=\left(\int 2xe^{2x}dx+C\right)\cdot e^{-2x}$$

Обчислюючи інтеграл $\int 2xe^{2x}dx$ методом інтегрування частинами, отримаємо

$$z=\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)\cdot e^{-2x}=x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}$$

Так як $z=y^2$, то загальний розв’язок має вигляд

$$y=\pm\sqrt{x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}}$$

Диференціальні рівняння другого порядку

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{8}$$

Загальний розв’язок має вигляд

$$y=\varphi(x,C_1,C_2)$$

Задача Коші: знайти розв’язок рівняння (8), що задовольняє початковим умовам $y\big|_{x=x_0}=y_0$, $y'\big|_{x=x_0}=y_0'$.

Для рівнянь другого порядку умови можуть бути задані і при різних значеннях аргументу. Така задача вже буде називатись крайовою.

Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

І. Рівняння, що містить тільки похідну другого порядку і неза-лежну змінну:

$$y''=f(x) \tag{9}$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння вводять допоміжну функцію:

$$y'=P,$$

де функція $P=P(x)$. Тоді $y''=P'$. При підстановці в рівняння (9) отримуємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$P'=f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dx}=f(x) \quad \Rightarrow \quad dP=f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dP=\int f(x)dx$$

$$P=\int f(x)dx+C_1$$

Тоді

$$y'=\int f(x)dx+C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1 \quad \Rightarrow \quad dy=\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx$$

$$y=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2$$

ІІ. Рівняння, яке не містить в явному вигляді шукану функцію y:

$$F(x,y',y'')=0 \tag{10}$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння, як і в попередньому випадку, вводять допоміжну функцію:

$$y'=P,$$

де функція $P=P(x)$.

Тоді при підстановці $y''=P'$ в рівняння (10) воно зводиться до диференціального рівняння першого порядку відносно функції P:

$$F(x,P,P')=0$$

Далі загальний розв'язок останнього рівняння P треба підставити в рівність $y'=P$. Знову отримуємо диференціальне рівняння першого порядку, з якого знаходимо y.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1+x^2)y''-2xy'=0$$

Розв'язання. В заданому рівнянні відсутня сама функція y, а присутні тільки її похідні і аргумент. Отже, введемо нову функцію $y'=P$, $y''=P'$:

$$(1+x^2)P'-2xP=0$$

Отримали рівняння першого порядку. Звільнимо P' від коефіцієнту:

$$P'-\frac{2x}{1+x^2}P=0 \quad \Rightarrow \quad P'=\frac{2x}{1+x^2}P$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Зведемо його до рівняння з відокремленими змінними, інтегруючи яке отримаємо функцію P:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}P \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{2x}{1+x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dP}{P} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\ln|P| = \ln(1+x^2) + \ln \overline{C}_1 \quad \Rightarrow \quad P = C_1(1+x^2)$$

Так як $y' = P$, враховуючи що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad dy = C_1(1+x^2)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int C_1(1+x^2)dx$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$$

III. Рівняння, яке не містить в явному вигляді аргумент x:

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{11}$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння вводять наступну допоміжну функцію:

$$y' = Z,$$

де функція $Z = Z(y)$. Враховуючи, що y залежить від x, а тому за правилом диференціювання складної функції y'' має вигляд:

$$y'' = \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dZ}{dy} \cdot y' = \frac{dZ}{dy} \cdot Z$$

Підставляючи y' і y'' в рівняння (11) отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$F(y, Z, \frac{dZ}{dy} \cdot Z) = 0$$

З останнього рівняння треба знайти Z, далі підставити в рівність $y' = Z$ і знайти функцію y.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$$

Розв'язання. В заданому рівнянні відсутній аргумент x, тому вводимо функцію $y' = Z$, де $Z = Z(y)$. Тоді $y'' = \dfrac{dZ}{dy} \cdot Z$. Підставляючи y' і y'' в задане рівняння отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dZ}{dy}\cdot Z+\frac{2}{1-y}Z^2=0 \quad\Rightarrow\quad Z\left(\frac{dZ}{dy}+\frac{2}{1-y}Z\right)=0$$

З останнього рівняння маємо:

$$Z=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$y=C$ (один із розв'язків)

$$\frac{dZ}{dy}+\frac{2}{1-y}Z=0$$

$$\frac{dZ}{dy}=\frac{2}{y-1}Z \quad\Rightarrow\quad \frac{dZ}{Z}=\frac{2}{y-1}dy$$

$$\int\frac{dZ}{Z}=\int\frac{2}{y-1}dy$$

$$\ln|Z|=2\ln|y-1|+\ln\overline{C}_1$$

$$Z=\widetilde{C}_1(y-1)^2$$

Так як $y'=Z$, то

$$\frac{dy}{dx}=\widetilde{C}_1(y-1)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{(y-1)^2}=\widetilde{C}_1dx$$

$$\int\frac{dy}{(y-1)^2}=\int\widetilde{C}_1dx \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{y-1}=\widetilde{C}_1x-C_2$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y=\frac{1}{C_1x+C_2}+1$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Так як все нижче наведене розповсюджується і на рівняння n-го порядку, то для спрощення пояснень розглянемо

лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку:

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{12}$$

де a_0, a_1, a_2 – деякі дійсні числа.

Особливістю цього рівняння є те, що шукана функція y і всі її похідні входять до рівняння в першому степені (тому воно називається лінійним), справа в рівнянні стоїть 0 (тому воно називається однорідним).

Загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{13}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв'язки рівняння, C_1, C_2 – довільні сталі.

Частинні розв'язки шукають у вигляді $y=e^{kx}$, де k – деяке число, яке треба знайти. Якщо цю рівність підставити в (12), то отримаємо рівняння, яке називають ***характеристичним рівнянням***:

$$a_0k^2+a_1k+a_2=0, \tag{14}$$

а його розв'язки – характеристичними показниками.

Для знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння (12) треба спочатку скласти характеристичне рівняння, для цього в рівнянні (12) заміняємо y'' на k^2, y' на k, y на 1. Отримаємо рівняння виду (14), яке розв'язуємо відносно k . В залежності від розв'язків характеристичного рівняння k_1 , k_2 складаємо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння виду (13). Можливі наступні випадки:

1) якщо корені характеристичного рівняння дійсні числа, не рівні між собою ($k_1 \neq k_2$), то загальний розв'язок має вигляд
$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$$
2) якщо корені характеристичного рівняння дійсні числа, рівні між собою ($k_1=k_2=k$), то загальний розв'язок має вигляд
$$y=e^{kx}\cdot\left(C_1+C_2x\right)$$
3) якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені числа виду $k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$, де $i=\sqrt{-1}$, $a,b\in R$, то загальний розв'язок має вигляд
$$y=e^{ax}\cdot\left(C_1\cos bx+C_2\sin bx\right)$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$y''-4y'+3y=0$$

Розв'язання. Функція y і її похідні входять до рівняння в першому степені, перед ними сталі коефіцієнти, аргумент x в явному вигляді відсутній, права частина рівняння дорівнює 0. Отже, задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння:
$$k^2-4k+3=0$$

Корені цього рівняння $k_1=1$, $k_2=3$ дійсні, не рівні між собою числа, тому загальний розв'язок заданого рівняння
$$y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$y''+4y'=0$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2+4k=0 \quad \Rightarrow \quad k(k+4)=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=0,\, k_2=-4$$

Корені дійсні, не рівні між собою числа, тому загальний розв'язок

$$y=C_1e^{0x}+C_2e^{-4x} \text{ або } y=C_1+C_2e^{-4x}$$

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-4y'+4y=0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння заданого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$k^2-4k+4=0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=k_2=2$$

Так як корені дійсні і рівні між собою, то загальний розв'язок

$$y=e^{2x}\cdot(C_1+C_2x)$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-2y'+5y=0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння заданого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має комплексні корені

$$k^2-2k+5=0$$

$$k_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm4\sqrt{-1}}{2}=1\pm2i$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y=e^x\cdot(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами відрізняється від попереднього лише тим, що його правою частиною є функція від x. Знов таки, для спрощення пояснень, розглянемо

лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіці-єнтами другого порядку зі спеціальною правою частиною:

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (15)$$

де a_0, a_1, a_2, α, β – деякі дійсні числа, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку виду (15) можна представити у вигляді

$$y=y_0+y_ч,$$

де y_0 – загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$;

$y_ч$ – деякий частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y_{\div}$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Для цього використовуючи вид правої частини неоднорідного рівняння (15), визначають його загальний вигляд з невизначеними коефіцієнтами. Потім знаходять його першу та другу похідні і підставляють в задане неоднорідне рівняння (так як цей частинний розв'язок повинен задовольняти заданому рівнянню). Далі, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях незалежної змінної x в лівій та правій частині рівності, знаходять невизначені коефіцієнти.

Для визначення загального вигляду частинного розв'язку неоднорідного рівняння (15) $y_ч$ розглядають праву частину цього рівняння:

$$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right) \qquad (16)$$

Тоді

– якщо число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок шукають у вигляді
$$y_ч = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right),$$
де $p(x)$ і $q(x)$ – повні многочлени однакового степеня, рівного найвищому степеню многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$.

– якщо число $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок шукають у вигляді
$$y_ч = xe^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right), \text{ коли } \alpha + \beta i = k_1 \neq k_2,$$
або
$$y_ч = x^2 e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right), \text{ коли } \alpha + \beta i = k_1 = k_2.$$

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x}$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок будемо шукати у вигляді $y = y_0 + y_ч$, де y_0 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_ч$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Коренями його характеристичного рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ є $k_1 = k_2 = 1$.

Так як корені характеристичного рівняння рівні між собою, то загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = e^x \cdot (C_1 + C_2 x)$$

Розглянемо праву частину заданого неоднорідного рівняння: xe^{2x}. Порівнюючи з загальним випадком маємо, що $\alpha = 2$, $\beta = 0$. Зауважимо, що коефіцієнтом при e^{2x} є многочлен першого степеня: $P_1(x) = x$.

Так як $\alpha + \beta i = 2 \neq k_{1,2}$, тобто не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, і многочлени $p(x)$ і $q(x)$ мають бути першого степеня, то частинний розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y_ч = e^{2x}(Ax + B),$$

де $Ax + B$ – повний многочлен першого степеня. Коефіцієнти A і B треба знайти. Для цього знайдемо першу та другу похідну частинного розв'язку:

$$y_ч' = 2e^{2x}(Ax + B) + Ae^{2x}; \quad y_ч'' = 4e^{2x}(Ax + B) + 4Ae^{2x}$$

Підставимо $y_ч$, $y_ч'$ і $y_ч''$ в задане неоднорідне рівняння:

$$4e^{2x}(Ax + B) + 4Ae^{2x} - 2\left(2e^{2x}(Ax + B) + Ae^{2x}\right) + e^{2x}(Ax + B) = xe^{2x}$$

Спростивши це рівняння отримаємо:

$$Ax + 2A + B = x$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & x & A = 1 \\ \text{при} & x^0 & 2A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -2 \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок такий:

$$y_ч = e^{2x}(x - 2)$$

Тоді загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = e^x \cdot (C_1 + C_2 x) + e^{2x}(x - 2)$$

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = \sin x$$

Розв'язання. Загальний розв'язок заданого лінійного неодно-рідного рівняння зі сталими коефіцієнтами шукатимемо у вигляді $y = y_0 + y_ч$.

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad k_1 = i,\ k_2 = -i$$

Так як корені характеристичного рівняння виду $k_{1,2} = 0 \pm 1 \cdot i$, то загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Права частина неоднорідного рівняння $\sin x$. У відповідності до загального випадку $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Отже, $\alpha + \beta i = i$ є одним з коренів характеристичного рівняння. Враховуючи, що множником перед $\sin x$ в правій частини неоднорідного рівняння можна вважати многочлен нульового степеня, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_ч = x \cdot (A\cos x + B\sin x),$$

де A і B представляють многочлени нульового степеня.

Для знаходження коефіцієнтів A і B обчислимо першу, а потім другу похідну частинного розв'язку:

$$y_ч' = A\cos x + B\sin x + x \cdot (-A\sin x + B\cos x)$$

$$y_ч'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x \cdot (A\cos x + B\sin x)$$

Підставимо $y_ч$ і $y_ч''$ в задане неоднорідне рівняння:

$$-2A\sin x + 2B\cos x - x \cdot (A\cos x + B\sin x) + x \cdot (A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$$

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & \sin x & -2A = 1 \;\; \Rightarrow \;\; A = -\dfrac{1}{2} \\ \text{при} & \cos x & 2B = 0 \;\; \Rightarrow \;\; B = 0 \end{array}$$

Тоді частинний розв'язок

$$y_ч = -\frac{1}{2} x\cos x$$

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x\cos x$$

Індивідуальні завдання №12

Тема: Диференціальні рівняння

Варіанти індивідуальних завдань:

Визначити вид та проінтегрувати диференціальні рівняння:

№ варіанту	завдання
1	1. $(1+y^2)dx - xydy = 0, \quad y\big|_{x=1} = 0$; 2. $y'' + 4y' + 4y = 0$;
2	1. $(xy^2 + x)dy - (x^2 y - y)dx = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1$; 2. $y'' - 3y' + 3{,}25y = 0$;
3	1. $y' \operatorname{tg} x = y, \quad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$;

	2. $y'' + 2y' + 10y = 0$;
4	1. $\sin y \cdot \cos x\, dy = \cos y \cdot \sin x\, dx$, $\quad y\big\|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}$; 2. $y'' - 6y' + 18y = 0$;
5	1. $y - xy' = 3\left(1 + x^2 y'\right)$, $\quad y\big\|_{x=1} = 1$; 2. $y'' + 4y' + 8y = 0$;
6	1. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $\quad y\big\|_{x=0} = 1$; 2. $y'' - 2y' + y = 0$;
7	1. $y' \sin x = y \cdot \ln y$, $\quad y\big\|_{x=\frac{\pi}{3}} = e$; 2. $y'' - 8y' + 16y = 0$;
8	1. $y' = e^{x+y}$, $\quad y\big\|_{x=0} = 0$; 2. $y'' - 4y' + 8y = 0$;
9	1. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$, $\quad y\big\|_{x=0} = 0$; 2. $y'' - 10y' + 25y = 0$;
10	1. $y' = \dfrac{x+2}{3+y}$, $\quad y\big\|_{x=1} = 0$; 2. $y'' - 2y' + 5y = 0$;
11	1. $\left(1 + y^2\right)x\, dx + \left(1 + x^2\right)dy = 0$, $\quad y\big\|_{x=0} = 0$; 2. $y'' - 3y' + \dfrac{9}{4}y = 0$;
12	1. $xydx + \sqrt{1-x^2}\, dy = 0$, $\quad y\big\|_{x=0} = 1$; 2. $y'' + 3y' + 2{,}25y = 0$;
13	1. $\left(y - 3x^2 y\right)dy + 2xy\, dx = 0$, $\quad y\big\|_{x=0} = 1$; 2. $y'' + 6y' + 10y = 0$;
14	1. $y' = e^{-y} \sin x$; $\quad y\big\|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$; 2. $y'' + y' + 0{,}25y = 0$;

15	1. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0;\qquad y\big|_{x=0} = 1;$ 2. $y'' - 5y' + \frac{25}{4} y = 0;$
16	1. $xy' - 1 = y^2;\qquad y\big|_{x=1} = 1;$ 2. $y'' + 5y' + 6{,}25y = 0;$
17	1. $1 + y' = e^x;\qquad y\big|_{x=0} = 1;$ 2. $y'' + 12y' + 36y = 0;$
18	1. $xyy' = 1 - x^2;\qquad y\big|_{x=1} = 1;$ 2. $y'' - 4y' + 13y = 0;$
19	1. $y' \operatorname{tg} x - y = 2;\qquad y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1;$ 2. $y'' - 16y' + 64y = 0;$
20	1. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0;\qquad y\big|_{x=1} = -1;$ 2. $y'' + 4y' + 13y = 0;$
21	1. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\qquad y\big|_{x=0} = 1;$ 2. $y'' - 7y' + \frac{49}{4} y = 0;$
22	1. $yy' = \frac{1-2x}{y},\qquad y\big|_{x=0} = 0;$ 2. $y''^2 - 5y' + 6 = 0;$
23	1. $y' = 10^{x+y};\qquad y\big|_{x=0} = 0;$ 2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
24	1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0;\qquad y\big|_{x=1} = 1;$ 2. $y'' + 18y' - 81y = 0;$
25	1. $x - yy' = \frac{e^x}{2},\qquad y\big|_{x=0} = 1;$

	2. $y'' - 6y' + 13y = 0$;
26	1. $\left(1 + y^2\right) x\,dx + \left(1 + x^2\right) dy = 0, \qquad y\big\|_{x=0} = 0$; 2. $y'' - 3y' + \frac{9}{4} y = 0$;
27	1. $\sin y \cdot \cos x\,dy = \cos y \cdot \sin x\,dx, \qquad y\big\|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$; 2. $y'' - 6y' + 18y = 0$;
28	1. $xy' - 1 = y^2$; $\qquad y\big\|_{x=1} = 1$; 2. $y'' + 5y' + 6{,}25y = 0$;
29	1. $y' \operatorname{tg} x - y = 2$; $\qquad y\big\|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1$; 2. $y'' - 16y' + 64y = 0$;
30	1. $y' = 4^{x+y}$; $\qquad y\big\|_{x=0} = 0$; 2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$

Тема13: Числові та функціональні ряди.

Завдання 13.

Числові ряди

Нехай задана нескінченна послідовність чисел: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

називають ***числовим рядом***.

Ряд вважається заданим, якщо відомий загальний член a_n у вигляді функції від його номеру n: $a_n = f(n)$.

Наприклад. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + ...$. Тут загальний член ряду $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$, отже, ряд записусться: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

Іноді задається лише декілька перших членів ряду. Тоді аналізуючи ці перші члени ряду треба знайти його загальний член.

Наприклад:

1) $1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

2) $2+6+18+54+...=2+2\cdot 3+2\cdot 9+2\cdot 27+...=$
$=2\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+...$

Тоді загальний член ряду як функція від номера n: $a_n=2\cdot 3^{n-1}$. Маємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 3^{n-1}$.

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+...$

В знаменниках дробів маємо арифметичну прогресію $3,7,11,15,...$, n-й член якої $c_n=c_1+4(n-1)=3+4(n-1)=4n-1$. Тоді загальний член ряду $a_n=\frac{1}{4n-1}$, отже, ряд записується: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-1}$.

Сума n перших членів ряду називається n-ю ***частковою сумою*** ряду:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n$$

Часткові суми

$S_1=a_1$,

$S_2=a_1+a_2$,

$S_3=a_1+a_2+a_3$,

...

$S_n=a_1+a_2+...+a_n$,

...

утворюють числову послідовність $S_1,S_2,...,S_n,...$

Якщо послідовність часткових сум має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

то ця границя називається ***сумою ряду*** і можна записати: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$.

В цьому випадку ряд називається ***збіжним***.

Якщо границя $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ або не існує, то ряд називається ***розбіжним*** (і суми не має).

Приклад 1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$

Розв'язання. Представимо загальний член ряду у вигляді

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

тоді часткові суми мають вигляд:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\ldots$$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Отже, сума ряду

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Заданий ряд збігається.

Приклад 2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{4n^2+8n-5}$

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен в знаменнику загального члена ряду:

$$a_n=\frac{3}{4n^2+8n-5}=\frac{3}{4\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)}=\frac{3}{(2n-1)(2n+5)}$$

Далі представимо загальний член ряду як суму двох дробів методом невизначених коефіцієнтів (див. розділ V):

$$\frac{3}{(2n-1)(2n+5)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+5}$$

$$3=A(2n+5)+B(2n-1)$$

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & n & \quad 2A+2B=0 \\ \text{при} & n^0 & \quad 5A-B=3 \end{array}$$

$$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$$

Отже, $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)$. Складемо n-ну часткову суму:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{17}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-3)-1}-\frac{1}{2(n-3)+5}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-2)-1}-\frac{1}{2(n-2)+5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)-1}-\frac{1}{2(n-1)+5}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\right.$$
$$+\frac{1}{11}-\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{2n-7}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}+$$
$$\left.+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

Сума ряду

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{23}{30}$$

Заданий ряд збігається.

Геометричний ряд

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1},$$

де $a, aq, aq^2, aq^{n-1},\ldots$ – нескінченна геометрична прогресія з першим членом a і знаменником q.

При $|q|<1$ ряд збігається і має суму $S=\frac{a}{1-q}$.

При $|q|\geq 1$ ряд розбіжний.

Гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

де кожен член ряду, починаючи з другого, є середнім гармонічним двох сусідніх членів.

Цей ряд розбіжний.

Узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхлє)

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k},$$

де k – деяка стала.

При $k>1$ ряд збіжний.

При $k\le 1$ ряд розбіжний.

(**достатня ознака розбіжності ряду**):

якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

Наприклад. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, тому цей ряд розбіжний.

Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***додатним***, якщо всі його члени a_n, $n=\overline{1,\infty}$, додатні.

Ознака порівняння. Нехай маємо два додатних ряди:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

і, починаючи з деякого номера n, члени ряду (1) не перевищують відповідних членів ряду (2), тобто виконується умова

$$a_n \le b_n.$$

Якщо ряд (2) збігається, то збігається і ряд (1).

Якщо ряд (1) розбігається, то розбігається і ряд (2).

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

Розв'язання. Заданий ряд додатний: $\frac{1}{n^n}>0$ при $n=1,2,3,\ldots$

Для задач дослідження на збіжність рядів рекомендується спочатку перевіряти необхідну ознаку збіжності ряду: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним, і треба застосувати достатню ознаку.

В нашому випадку

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)}} = 0$$

Отже, застосуємо достатню ознаку порівняння. Члени заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

порівняємо з відповідними членами геометричного ряду (зі знаменником $\frac{1}{2}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Починаючи з третього, члени заданого ряду менші членів допоміжного ряду:

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}, \frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Так як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збіжний, то за ознакою порівняння заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ теж збіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Розв'язання. Ряд додатний: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} > 0$ при $n = 1,2,3,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 0.$$

Застосуємо достатню ознаку порівняння.

Зменшимо множники в знаменнику загального члена ряду: $\frac{1}{n \cdot n \cdot n \cdot n}$, а тим самим збільшимо члени ряду, тобто

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{n^4}.$$

Так як $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ – збіжний узагальнений гармонічний ряд, то за ознакою порівняння заданий ряд теж збіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Розв'язання. Ряд додатний, так як при $n = 2,3,4,...$ $\frac{1}{\ln n} > 0$; $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. Отже, застосуємо достатню ознаку порівняння. Члени заданого ряду порівняємо з відповідними членами гармонічного ряду (з відкинутим першим членом)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Так як $\ln n < n$, то

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{3} < \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{4} < \frac{1}{\ln 4}, ..., \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}, ...$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, тому за ознакою порівняння заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ теж розбіжний.

Ознака порівняння в граничній формі. Якщо для рядів (1) і (2) існує скінченна і відмінна від нуля границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то ряди (1) і (2) або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Зауважимо, що для дослідження ряду за ознакою порівняння зазвичай обирають допоміжний ряд з членами, найближчими до членів заданого ряду ($a_n \sim b_n$).

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Розв'язання. Ряд додатний, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Застосуємо достатню ознаку порівняння. Розглянемо розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

Так як ця границя скінченна і відмінна від нуля, то за ознакою порівняння в граничній формі заданий ряд теж є розбіжним.

Ознака Даламбера. Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд збігається;

при $q > 1$ ряд розбігається;

при $q = 1$ за цією ознакою неможливо визначити збіжність чи розбіжність ряду, треба застосовувати іншу ознаку.

Зауваження: якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд розбіжний і границя його загального члена не дорівнює нулю.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}$

Розв'язання. Ряд додатний. Перевірити необхідну умову збіжності тут важко, як і вибрати допоміжний ряд для порівняння, тому одразу застосуємо ознаку Даламбера. Складемо a_{n+1} член ряду: $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$.

Далі знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}}{\frac{3^n}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot 3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot (2n+1)!}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3) \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(2n+2)\cdot(2n+3)} = 0 < 1$$

Отже, за ознакою Даламбера заданий ряд збіжний.

Радикальна ознака Коші. Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд збігається;

при $q > 1$ ряд розбігається;

при $q=1$ за цією ознакою неможливо визначити збіжність чи розбіжність ряду, треба застосовувати іншу ознаку.

Радикальну ознаку Коші доцільно використовувати тоді, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$

Розв'язання. Ряд додатний. Перевіримо необхідну умову збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}-1\right)2n} = e^{-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n+1}} = 0$$

Отже треба розглянути достатню ознаку збіжності. Загальний член ряду містить в показнику степеня n, а тому зручніше одразу застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4} < 1$$ Так

им чином, за радикальною ознакою Коші заданий ряд збіжний.

Інтегральна ознака Коші. Нехай треба дослідити на збіжність до-датний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де загальний член a_n є функцією від його номера: $a_n = f(n)$. Замінимо аргумент n на x. За умови, що при $x=1,2,3,...$ функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає, розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо цей інтеграл збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним.

Якщо інтеграл розбігається (дорівнює ∞ або не існує), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

Інтегральна ознака Коші є найбільш сильною ознакою і її використовують у випадках, коли за іншими ознаками неможливо встановити збіжність чи розбіжність.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln^2(2n-1)}$

Розв’язання. Ряд додатний. За необхідною умовою збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln^2(2n-1)} = 0$. Так як інші ознаки збіжності важко застосувати, то використаємо інтегральну ознаку Коші. Функція $f(x) = \frac{1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}$ при $x = 2,3,4,...$ неперервна, додатна і монотонно спадає. Отже, розглянемо невласний інтеграл (див. розділ VI):

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)} dx = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{d(\ln(2x-1))}{\ln^2(2x-1)} = -\frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\ln(2x-1)} \bigg|_2^b =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln(2b-1)} - \frac{1}{\ln 3} \right) = \frac{1}{\ln 9}$$

Інтеграл збігається, тому за інтегральною ознакою Коші збігається і заданий ряд.

Знакозмінні числові ряди

Ряд називається ***знакозмінним***, якщо він містить нескінченну кількість як додатних, так і від’ємних членів.

Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, складений із абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***умовно збіжним***, якщо він збігається, а ряд, складений із абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, розбігається.

Сума ряду, який збігається абсолютно, не змінюється від довільної перестановці його членів. Знакозмінний ряд, який збігається умовно, не володіє цією властивістю.

Щоб дослідити на збіжність знакозмінний ряд рекомендується спочатку перевірити (якщо це можливо) необхідну умову збіжності ряду, потім скласти ряд з абсолютних величин його членів і застосувати одну з достатніх ознак збіжності додатних рядів.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ в залежності від n може бути як додатнім, так і від'ємним. Тому цей ряд знакозмінний.

Розглянемо додатний ряд складений з абсолютних величин членів заданого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$$

Скористаємось ознакою порівняння додатних рядів. Так як $|\sin n| \le 1$, то

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ збігається. Звідси випливає, що збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$, і при тому абсолютно.

Ряд, члени якого по черзі мають додатний та від'ємний знаки, називається ***знакопочерговим***:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$$

Знакопочергові ряди є частинним випадком знакозмінних рядів.

Для дослідження на збіжність знакопочергового ряду використовують наступну ознаку.

Теорема Лейбніца. Знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$ збігається, якщо

1) його члени монотонно спадають по абсолютній величині: $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$;
2) границя абсолютної величини загального члену ряду прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Зауважимо, що якщо не виконується друга умова теореми Лейбніца ($\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$), то ряд розбігається (так як не виконується необхідна умова збіжності ряду).

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)^2}$.

Розв'язання. Заданий ряд – знакопочерговий. Перевіримо умови теореми Лейбніца:

1) $\frac{1}{4} > \frac{1}{25} > \frac{1}{64} > ... > \frac{1}{(3n-1)^2} > ...$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = 0$

Тоді за теоремою Лейбніца заданий ряд збігається. Дослідимо характер збіжності ряду. Для цього розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$. За ознакою порівняння в граничній формі (порівнявши з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) або за інтегральною ознакою Коші (обчисливши невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} dx$) маємо, що ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ збігається. Тому заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Заданий ряд є знакопочерговим. Умови теореми Лейбніца виконуються:

1) $\frac{1}{1} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > ... > \frac{1}{\sqrt{n}} > ...$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

За теоремою Лейбніца заданий ряд збігається. Але ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом. Тому заданий ряд збігається умовно.

Функціональні ряди

Ряд називається ***функціональним***, якщо його члени є функціями, наприклад від аргументу x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Якщо в цьому функціональному ряді покласти $x = x_0$, то він перетвориться у числовий ряд.

Якщо такий числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається, то точка $x = x_0$ називається ***точкою збіжності*** цього функціонального ряду, в протилежному випадку – точкою розбіжності.
Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Отже, областю збіжності функціонального ряду є проміжок на числовій осі.

В загальному випадку при дослідженні на збіжність функціонального ряду можна використовувати ті ж правила, що і для знакозмінного числового ряду.

Приклад 13. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-3)^n}.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд із абсолютних величин членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-3|^n}$. Останній ряд має додатні члени, а тому можемо застосувати до нього одну з ознак збіжності додатних рядів. Для цього ряду доцільно застосувати ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}|x-3|^n}{|x-3|^n|x-3|\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{|x-3|\sqrt{n}} = \frac{1}{|x-3|} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{|x-3|}$$

За ознакою Даламбера ряд буде збігатись, якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Звідси

$$\frac{1}{|x-3|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-3| > 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-3 > 1 \\ x-3 < -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < 2 \end{array}\right.$$

Дослідимо ряд в точках $x = 4$ і $x = 2$.

Якщо $x = 4$, заданий ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(4-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$, а для такого числового ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \neq 0$, тому в точці $x = 4$ заданий функціональний ряд розбігається.

Якщо $x = 2$, маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ – знакопочерговий ряд, для нього теж не виконується необхідна умова збіжності. Тому точка $x = 2$ теж не входить до області збіжності.

Таким чином, область збіжності заданого функціонального ряду

$x \in (-\infty;2) \bigcup (4;+\infty)$.

Приклад 14. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n nx}{n^2}.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд із абсолютних величин членів заданого ряду і застосуємо ознаку порівняння. Враховуючи, що $|\sin nx| \le 1$, а, отже, і $|\sin^n nx| \le 1$, то при будь-якому x

$$\frac{|\sin^n nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається. Тоді за ознакою порівняння збігається і заданий ряд, при чому x може бути до-вільним. Отже, область збіжності заданого функціонального ряду $x \in (-\infty;+\infty)$.

Приклад 15. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}.$$

Розв'язання. При фіксованому x заданий ряд є числовим узагальненим гармонічним рядом, тому маємо випадки:

1) при $|x+1| \le 1$ ряд розбігається;

2) при $|x+1| > 1$ ряд збігається, тоді $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -2 \end{array}\right.$

Область збіжності заданого функціонального ряду $x \in (-\infty;-2) \bigcup (0;+\infty)$.

Степеневі ряди

Степеневим рядом називають функціональний ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots \qquad (3)$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються коефіцієнтами степеневого ряду.

При $c = 0$ маємо більш поширений частинний випадок:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4)$$

Ряд (3) називають рядом за степенями $(x-c)$, а ряд (4) – рядом за степенями x.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, що задовольняє нерівності $|x - c| < |x_0 - c|$.

Наслідок: для степеневого ряду існує ***інтервал збіжності*** з центром в точці $x = c$: $|x - c| < R$ або $c - R < x < c + R$. Всередині інтервалу збіжності $(c - R; c + R)$ ряд збігається абсолютно, а зовні – розбігається (рис. 1). На кінцях інтервалу збіжності в точках $x = c \pm R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись, тому збіжність в цих точках потребує спеціального дослідження.

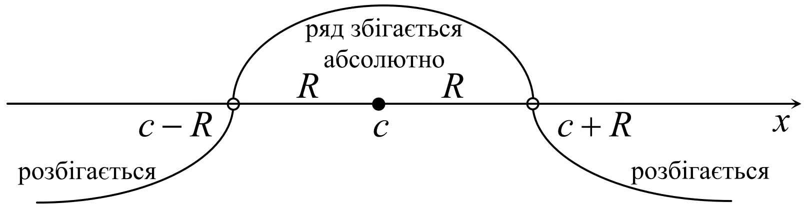


Рис. 1

Число R – половина довжини інтервалу збіжності – називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду.

В частинних випадках радіус збіжності R може дорівнювати 0 (тоді степеневий ряд збігається лише в точці $x = c$) або ∞ (тоді степеневий ряд збігається на всій числовій осі).

Інтервал збіжності степеневого ряду знаходять аналогічно, як і для функціонального ряду: будують ряд з абсолютних величин членів заданого ряду та застосовують одну з достатніх ознак збіжності числових рядів, зокрема ознаку Даламбера.

Якщо жоден з коефіцієнтів степеневого ряду $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ не дорівнює нулю (тобто степеневий ряд повний), то з ознаки Даламбера маємо формулу для знаходження радіусу збіжності такого ряду:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Приклад 16. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n+1)}.$$

Розв'язання. Маємо ряд за степенями x, тому це степеневий ряд виду (4), у якого центр інтервалу збіжності знаходиться в початку координат ($c = 0$), а, отже, інтервал збіжності цього ряду $(-R; R)$. Заданий ряд повний, тобто містить всі цілі додатні степені x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n+1)} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{32} + ... + \frac{x^n}{2^n (n+1)} + ...$$

Тому скористаємось формулою знаходження радіусу збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|};\quad |a_n|=\frac{1}{2^n(n+1)};\quad |a_{n+1}|=\frac{1}{2^{n+1}(n+2)}$$

Маємо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)}=2$.

Перевіримо збіжність заданого ряду на кінцях інтервалу $(-2;2)$.

В точці $x=2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$. За ознакою порівняння в граничній формі цей ряд поводиться так само, як і гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, який розбігається, тому $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ теж розбігається. Отже точка $x=2$ не входить до інтервалу збіжності.

В точці $x=-2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Цей ряд є знакопочерговим. Для нього виконуються умови теореми Лейбніца: $\dfrac{1}{1}>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, тому він збігається, але збігається умовно (так як ряд з абсолютних величин цього ряду розбігається).

Інтервал збіжності заданого ряду $x\in[-2;2)$.

Приклад 17. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1}.$$

Розв’язання. Маємо неповний степеневий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1}=\frac{1}{2}+\frac{(x-1)^3}{9}+\frac{(x-1)^6}{65}+\ldots+\frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1}+\ldots$$

Розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x-1|^{3n}}{8^n+1}$ і застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{3(n+1)}}{8^{n+1}+1}\cdot\frac{8^n+1}{|x-1|^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{3n}\cdot|x-1|^3}{|x-1|^{3n}}\cdot\frac{8^n+1}{8^n\cdot 8+1}=$$

$$=\left|x-1\right|^3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{8^n}}{8+\dfrac{1}{8^n}}=\left|x-1\right|^3\cdot\frac{1}{8}$$

Щоб ряд збігався, за ознакою Даламбера повинна виконуватись умова: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}<1$. Звідси маємо

$$\left|x-1\right|^3\cdot\frac{1}{8}<1\quad\Rightarrow\quad\left|x-1\right|<2\quad\Rightarrow\quad-2<x-1<2\quad\Rightarrow\quad-1<x<3$$

При $x=3$ заданий ряд має вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}}{8^n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{8^n+1}$. Для цього ряду $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8^n}{8^n+1}=1\neq 0$, тому він розбігається.

При $x=-1$ заданий ряд має вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{3n}}{8^n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{8^n+1}$. Для цього ряду теж не виконується необхідна умова збіжності, тому він розбігається.

Отже, інтервал збіжності заданого ряду $x\in(-1;3)$.

Розклад функцій в степеневі ряди

Довільна функція $y=f(x)$, нескінченно диференційована в деякому інтервалі $(c-R;\,c+R)$, може бути розкладена в цьому інтервалі в збіжний до неї степеневий ***ряд Тейлора***:

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\ldots,$$

$n=0,1,2,\ldots$, за умови, що залишок цього ряду прямує до нуля.

Інакше кажучи, ряд Тейлора дає розвинення функції в степеневий ряд в околі точки $x=c$.

Якщо $c=0$, то отримуємо ***ряд Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1; 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1; 1]$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1; 1)$$

Використовуючи ці формули, можна в деяких випадках роз-класти функцію в ряд Маклорена, не обчислюючи похідні для знаходження коефіцієнтів ряду.

Приклад 18. Розкласти функцію $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ в ряд Маклорена.

Розв'язання. Перетворимо задану функцію:

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \cdot \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

У розкладі $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \ldots$ замінимо x на $(-x^2)$, отримаємо розклад

$$\left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \ldots$$

Тоді

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \ldots\right) =$$
$$= 2 + x^2 + \frac{3}{2 \cdot 2!}x^4 + \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3!}x^6 + \ldots$$

Індивідуальні завдання №13

Тема: Числові ряди

Варіанти індивідуальних завдань:

Завдання 1. Знайти суму ряда
Завдання 2. Дослідити ряд на збіжність

№ варіанту	Завдання 1	Завдання 2
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$;	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n+1)!}$;
2	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-6}$;	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)}{2^n}$;
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$;	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n^2}{(n+1)!}$;
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$;	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(2n)!}$;
5	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\frac{1}{2^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$
9	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\frac{1}{5^n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-14n-48}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{6n^2-24n-5}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(2n-1)!}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$

15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+3n-20}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{2n1}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-42n-40}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$
18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2+51n-5}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-35n-6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$
22	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{49n^2-35n-6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$
24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n}$
26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{25n^2-5n-6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n}}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n}$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-56n-33}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right)^{n}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+1}}{5^n}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

Тема14: Теорія ймовірностей

Завдання 14.

Основні поняття комбінаторики

Різні множини, складені з будь-яких елементів, що відрізняються складом елементів або порядком, називаються ***сполуками*** або ***комбінаціями*** цих елементів.

Сполуки бувають трьох видів: перестановки, розміщення, сполучення.

Перестановки – це комбінації (сполуки), складені з одних і тих же n різноманітних елементів і відмінні лише порядком їхнього розташування.
Кількість перестановок з n елементів позначається та обчислюється наступним чином:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Розміщеннями називають будь-який упорядкований набір m елементів із заданих n. Тобто це вибірка m елементів із n з урахуванням порядку (одна вибірка відрізняється від іншої або самими елементами, або їхнім порядком).
Кількість розміщень m елементів із n без повторення:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Кількість розміщень m елементів із n з повторенням:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Сполученнями називають будь-який неупорядкований набір, який містить m елементів із заданих n. Тобто це вибірка m елементів із n без урахування порядку (одна вибірка відрізняється від іншої тільки самими елементами).
Кількість сполучень m елементів із n без повторення:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Кількість сполучень m елементів із n із повторенням:

$$\overline{C}_m^n = C_{n-1+m}^m = C_{n-1+m}^{n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Часто доцільно використовувати такі властивості сполучень:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;
2) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
3) $C_n^n = C_n^0 = 1$;
4) $C_n^1 = n$.

Означення ймовірності події

Ймовірністю події A називається числова міра об'єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається ймовірність як $P(A)$ і дорівнює відношенню числа сприятливих цій події елементарних результатів випробування (m) до загального числа всіх рівноможливих несумісних елементарних результатів, що утворюють повну групу подій (n):

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Приклад 1. Абонент, набираючи номер телефону, забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність, що набрані абонентом цифри правильні.

Розв'язання. Нехай подія $\grave{A}$ полягає у тому, що набрані абонентом дві цифри правильні.

Загальне число всіх можливих елементарних результатів випробування – це число розміщень 2 цифр із 10 існуючих (так як маємо вибірку з урахуванням порядку): $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$.

Число сприятливих результатів випробування: $m = 1$. Тоді за формулою (1)

$$P(A) = \frac{1}{90}.$$

Приклад 2. На фірмі працюють 10 інженерів і 5 спеціалістів. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Знайти ймовірність того, що група включає трьох інженерів.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, що вибрана група із 5 осіб включає трьох інженерів.

Число всіх можливих елементарних результатів n – це число сполучень 5 елементів із 15 (так як маємо вибірку без урахування порядку):

$$n = C_{15}^5 = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10!} = 3003.$$

Сприятливий результат випробування полягає в одночасній вибірці 3 інженерів із 10 і 2 спеціалістів із 5 (порядок не має значення). Тобто число сприятливих результатів випробування:

$$m = C_{10}^3 \cdot C_5^2 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 1200.$$

Тоді

$$P(A)=\frac{1200}{3003}\approx 0,4.$$

Властивості ймовірності

1. Ймовірність достовірної події $P(U)=1$.
2. Ймовірність неможливої події $P(V)=0$.
3. Ймовірність будь-якої випадкової події $0<P(A)<1$.

Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{2}$$

Теорема. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює 1:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Теорема. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{3}$$

Випадкові події A і B називаються ***залежними***, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події.

Ймовірність події B, яка обчислена при умові появи події A, називають ***умовною ймовірністю*** події B, і позначають $P_A(B)$.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A і B дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність другої, розрахованої в припущенні, що перша подія вже відбулась:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_A(A). \tag{4}$$

Події A і B називаються ***незалежними***, якщо поява однієї не змінює ймовірність появи другої, тобто

$$P_A(B)=P(B),\quad P_B(A)=P(A).$$

Теорема. Якщо події A і B незалежні, то

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \tag{5}$$

Дві події називаються ***сумісними***, якщо поява однієї з них не виключає появу другої в одному і тому ж випробуванні.

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cdot B\right). \tag{6}$$

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї із незалежних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ знаходиться за формулою:

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot ...\cdot\overline{A}_n). \tag{7}$$

Теорема. Нехай подія A може настати при умові настання однієї з несумісних подій $B_1, B_2, ..., B_n$, що утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A знаходиться за ***формулою повної ймовірності***:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A). \tag{8}$$

Події $B_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ називаються ***гіпотезами.***

Теорема. Умовна ймовірність гіпотези знаходиться за формулою Байеса:

$$P_A\left(B_i\right)=\frac{P\left(B_i\right)P_{B_i}\left(A\right)}{P\left(A\right)}= \tag{9}$$

$$=\frac{P\left(B_i\right)P_{B_i}\left(A\right)}{P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)P_{B_2}\left(A\right)+...+P\left(B_n\right)P_{B_n}\left(A\right)}.$$

Приклад 3. Деталі, виготовлені цехом заводу, попадають для перевірки їх стандартності до одного із двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Розв'язання. Виділимо такі події:

A – придатна деталь признана стандартною;

гіпотези: B_1 – деталь перевіряв перший контролер;

B_2 – деталь перевіряв другий контролер.

За умовою задачі $P(B_1)=0,6$; $P(B_2)=0,4$.
За формулою повної ймовірності (8):

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=$$
$$=0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98=0,956.$$

За формулою Байеса (9):

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,6\cdot 0,94}{0,956}=0,59.$$

Приклад 4. Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5 попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий –7 разів, третій –9 разів при 10 звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесмену кредит?

Розв'язання. Нехай подія A_i – i-й банк виділить бізнесмену кредит, $\overline{A_i}$ – i-й банк не виділить бізнесмену кредит, $i=1,2,3$; подія A – хоча б один банк виділить бізнесмену кредит.
Ймовірність того, що i-й банк виділить бізнесмену кредит з (1):

$$P\left(A_1\right)=\frac{6}{10},\qquad P\left(A_2\right)=\frac{7}{10},\qquad P\left(A_3\right)=\frac{9}{10}.$$

Ймовірність того, що i-й банк не виділить бізнесмену кредит з (3):

$$P\left(\overline{A_1}\right)=1-P\left(A_1\right)=1-\frac{6}{10}=\frac{4}{10};$$
$$P\left(\overline{A_2}\right)=1-P(A_2)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10};$$
$$P\left(\overline{A_3}\right)=1-P(A_3)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}.$$

Шукана ймовірності за (7) буде дорівнювати:

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=1-0,012=0,988.$$

Приклад 5. Прилад складено з двох блоків, з'єднаних послідовно і працюючих незалежно. Ймовірність відмови блоків дорівнює $0,05$ та $0,08$. Знайти ймовірність відмови приладу.

Розв'язання. Введемо події:
A – безвідмовна робота приладу (працюють два блоки), A_i – i-й блок не вийде з ладу ($i=1,\ 2$), тоді відмова приладу є подія $\overline{A}$ протилежна його безвідмовній роботі, $\overline{A_i}$ – i-й блок вийде з ладу ($i=1,\ 2$).

За умовою задачі $P(\overline{A_1}) = 0,05$, $P(\overline{A_2}) = 0,08$.

Ймовірність безвідмовної роботи блоків з (3):

$$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = 1 - 0,05 = 0,95;\ P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0,08 = 0,92\,.$$

Події A_1 і A_2 незалежні, тому ймовірність безвідмовної роботи приладу згідно теореми множення ймовірностей (5):

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,95 \cdot 0,92 = 0,874\,.$$

Ймовірність відмови приладу:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,874 = 0,126\,.$$

Схема випробувань із повторюваннями

Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах і ймовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова і дорівнює p, та не залежить від появи або не появи A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають ***схемою Бернуллі***.

Ймовірність $P_n(m)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться m раз, виражається **формулою Бернуллі**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}\,, \qquad (10)$$

де $q = 1 - p = P(\overline{A})$, $m = 0,1,2,...,n.$

Число m появи події A у n повторних незалежних випробуваннях називається **частотою.**

Формулу (10) доцільно застосовувати, якщо $n \le 10$.

Частота m_0 настання події у n незалежних випробуваннях називається ***найймовірнішою кількістю*** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np - q \le m_0 \le np + p\,. \qquad (11)$$

Розподіл може мати одне або два найймовірніших числа.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, подія A відбудеться m раз, подається такою наближеною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x)\,; \qquad (12)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,;$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірність із задовільною точністю $P_n(m)$, якщо $n > 10$ і $p > 0{,}1$.

Формула Пуассона. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A) = p$ і $0 < p < 0{,}1$, а n велике, то

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np. \tag{13}$$

Зауваження. Користуючись таблицями значень функції $\phi(x)$, слід пам'ятати, що функція $\phi(x)$ - парна, тобто $\phi(-x) = \phi(x)$, та коли $x \geq 4, \quad \phi(x) \approx 0$ з точністю до 0,0001. Таблиця функції $\phi(x)$ для додатних значень x наведена в додатку 1.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p, визначається формулою

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{14}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ − функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Зауваження. Слід враховувати, що функція $\Phi(x)$ − непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і, якщо $x \geq 4, \quad \Phi(x) \approx 0{,}5$ з точністю до 0,0001. Таблиця функції $\Phi(x)$ для додатних значень x наведена в додатку 2.

З інтегральної теореми Муавра-Лапласа одержується наближена рівність обчислення **відхилення відносної частоти від ймовірності.**

Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-P\right|<\varepsilon\right)\approx\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (15)$$

Приклад 6. Прилад складено з 10 блоків. Надійність кожного з них становить $0,8$. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що:

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовить не менше двох блоків.

Розв'язання. Вихід з ладу блоків є послідовністю випробувань Бернуллі. Нехай подія A – відмова блока, тоді за умовою задачі $q=0,8$, $p=1-q=1-0,8=0,2$, $n=10$, значення m коливається від 2 до 10, тому можна скористатися формулою Бернуллі (11.10):

а) $m=2$: $P_{10}(2)=C_{10}^{2}\cdot(0,2)^{2}\cdot(0,8)^{8}=0,202$;

б) $m\geq 1$: $P_{10}(m\geq 1)=1-P_{10}(0)=1-0,8^{10}=0,8926$;

в) $m\geq 2$: $P_{10}(m\geq 2)=1-\left(P_{10}(0)+P_{10}(1)\right)=$

$=1-\left((0,8)^{10}+C_{10}^{1}\cdot(0,2)^{1}\cdot(0,8)^{9}\right)=0,6244.$

Приклад 7. При повному технологічному процесі 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти серед 250 виготовлених виробів найбільш ймовірне число виробів найвищої якості.

Розв'язання. За умовою задачі позначимо $n=250$; $p=0,8$, $q=1-p=1-0,8=0,2$. Найбільш ймовірне число виготовлених виробів найвищої якості m_0 задовольняє нерівності (11):

$$250\cdot 0,8-0,2\leq m_0\leq 250\cdot 0,8+0,8;$$

$$199,8\leq m_0\leq 200,8;$$

$$m_0=200.$$

Приклад 8. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому $0,6$ загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40.

Розв'язання. За умовою задачі введемо позначення $m_0=40$, $p=0,6$, $q=1-p=1-0,6=0,4$. Для знаходження кількості n волокон у партії скористаємося нерівністю (11):

$$0,6n-0,4\leq 40\leq 0,6n+0,6;$$

$$-0,4-40 \le -0,6n \le 0,6-40;$$
$$65,7 \le n \le 67,3.$$
Задача має два розв'язки $n = 66$ і $n = 67$.

Приклад 9. На кожні 40 відштампованих виробів наявні 4 дефектні. Із всієї продукції навмання взято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Введемо позначення: подія A – деталь без дефектів; ймовірність події A у кожному випробуванні обчислимо за формулою (11.1): $p(A) = p = \dfrac{36}{40} = 0,9$; кількість незалежних випробувань $n = 400$, серед них подія A повинна відбутися $m = 350$ разів. Т.я. $p = 0,9$, $n > 10$ розв'яжемо задачу за допомогою формули локальної теореми Муавра-Лапласа (12):
$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{350-400\cdot 0,9}{\sqrt{400\cdot 0,9\cdot 0,1}} \approx -1,67;$$
$$\phi(-1,67) = \phi(1,67) = 0,0989;$$
$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{6}\cdot 0,0989 \approx 0,0165.$$

Приклад 10. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджений з ймовірністю $0,003$. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 3 пошкоджених вироби.

Розв'язання. Нехай подія A − виріб пошкоджено. Ймовірність події A досить мала $p = p(A) = 0,003$, тому задачу розв'язуємо за формулою Пуассона (11.13):
$$\lambda = np = 1000\cdot 0,003 = 3;$$
$$P_{1000}(3) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} \approx 0,229.$$

Приклад 11. Зерна пшениці проростають з ймовірністю $0,95$. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання. Нехай подія A − зерно пшениці зійшло, відбудеться від від $m_1 = 1890$ до $m_2 = 1920$ раз при проведенні $n = 2000$ незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події A $p = p(A) = 0,95$. Застосуємо формулу інтегральної теореми Муавра-Лапласа (14)

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1890-2000\cdot 0,95}{\sqrt{2000\cdot 0,95\cdot 0,05}}=-1,03;$$

$$x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1920-1900}{\sqrt{95}}=2,06;$$

$$P_{2000}(1880;1920)=\Phi(2,06)-\Phi(-1,03)=\Phi(2,06)+\Phi(1,03)=$$

$$=0,4803+0,3485=0,8288.$$

Приклад 12. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з ймовірністю $0,9$. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з ймовірністю $0,9973$ можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від ймовірності її виявлення не перевищуватиме $0,03$? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Нехай подія A – виготовлено нестандартну деталь, $q=0,9$ (за умовою задачі), ймовірність події A з (3) $p=p(A)=1-0,9=0,1$. Маємо схему з n незалежних випробувань. Скористуємось формулою (15)

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right);$$

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0,9973;$$

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0,49865.$$

За таблицями, додаток 2, знаходимо:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=3\Rightarrow n=\frac{9pq}{\varepsilon^2}=900.$$

Визначимо кількість нестандартних деталей за даних умов:

$$\left|\frac{m}{900}-0,1\right|<0,03;$$

$$-0,03<\frac{m}{900}-0,1<0,03;$$

$$0,07<\frac{m}{900}<0,13;$$

$$63<m<117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Індивідуальні завдання №14

Тема: Теорія ймовірностей

Варіанти індивідуальних завдань:

Варіант 1

1. В наборі з 20 однотипних деталей 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання для перевірки п'яти деталей дві виявляться нестандартними.
2. Ймовірність вразити мішень при одному пострілі з гвинтівки дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що при 600 пострілах мішень буде вражена 250 разів.

Варіант 2

1. В кошику знаходиться 5 білих та 10 червоних куль, які відрізняються лише кольором. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них є біла.
2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,517. Знайти ймовірність того, що із 100 народжених дітей хлопчиків і дівчаток буде однакова кількість.

Варіант 3

1. На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з літер: А, Н, Р, У. Картки перемішано. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній та розміщених зліва направо картках можна прочитати слово «урна».
2. Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія настане 3 рази, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,7.

Варіант 4

1. Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.
2. Знайти ймовірність того, що із 1000 посіяних зерен зійде 230, якщо схожість зерна оцінюється ймовірністю 0,8.

Варіант 5

1. В наборі із 20 однотипних деталей 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання 5 деталей нестандартних не виявиться.
2. Ймовірність народження дівчинки дорівнює 0,475. Яка ймовірність того, що серед 1000 немовлят буде 380 дівчаток?

Варіант 6

1. В ящику знаходиться 5 білих та 10 червоних куль. Навмання взяли 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони білі.
2. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно 100 разів у 273 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,15.

Варіант 7

1. Два стрільці стріляють в ціль. Ймовірність влучення першим стрілком дорівнює 0,7, другим – 0,8. Знайти ймовірність того, що в ціль не влучить жодний стрілець.
2. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться 2400 разів в 3400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,65.

Варіант 8

1. Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що на обох кубиках буде різна кількість очок.
2. Ймовірність події в кожному з 200 незалежних випробувань постійна і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не більше, ніж 190 разів.

Варіант 9

1. На кожній з 8 карток надрукована одна з літер: А, А, З, І, К, Л, Л, М. Картки перевернуті та перемішані. Знайти ймовірність того, що на п'яти навмання взятих і розміщених зліва направо картках можна прочитати слово «залік».
2. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,68. Знайти ймовірність того, що при 17 пострілах стрілець влучить в мішень 14 разів.

Варіант 10

1. В комплекті із 20 деталей 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що взяті для перевірки 5 деталей будуть нестандартні.

2. Гральний кубик підкидають 5020 разів. Яка ймовірність того, що при цьому чотири очка випаде 1520 разів?

Варіант 11

1. В урні знаходиться 5 білих та 10 чорних куль. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони чорні.
2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що із 200 дітей хлопчиків та дівчаток буде однакова кількість.

Варіант 12

1. На кожній з п’яти однакових карток надрукована одна з літер: А, И, М, М, Р. Картки перевернуто і перемішано. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній і розташованих зліва направо трьох картках можна прочитати слово «мир».
2. Ймовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,4. Знайти ймовірність 100 влучень при 320 пострілах.

Варіант 13

1. В урні знаходиться 3 білих та 5 зелених куль. З урни навмання дістали одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.
2. Знайти ймовірність того, що з посіяних 500 штук насіння зійде 130, якщо схожість оцінюється ймовірністю 0,75.

Варіант 14

1. На кожній із 6 однакових карток надруковано одну з літер: А, Е, Н, О, С, Ц. Картки перемішані та перевернуті. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній та розташованих зліва направо п’яти картках можна прочитати слово «СОНЦЕ».
2. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.

Варіант 15

1. В партії з 15 виробів 3 вироби браковані. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання 5 виробів бракованих не буде.

2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Яка ймовірність того, що серед 1000 немовлят буде 480 дівчаток?

Варіант 16

1. В урні знаходиться 5 білих та 10 чорних куль, які відрізняються лише кольором. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них лише одна чорна.
2. Знайти ймовірність того, що подія A настане у 1400 випадках із 2400 випробувань, якщо ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

Варіант 17

1. Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що добуток отриманих очок буде непарним.
2. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах в мішень влучать 75 разів.

Варіант 18

1. В урні знаходиться 3 білих та 2 чорних кульки. З урни дістали 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.
2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.

Варіант 19

1. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення першого стрільця дорівнює 0,7, другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що обидва стрільці влучать у мішень.
2. Гральний кубик підкидають 4200 разів. Яка ймовірність того, що 5 очок випаде 700 разів?

Варіант 20

1. Підкинуто два гральних кубика. Яка ймовірність того, що абсолютна величина різниці отриманих очок дорівнюватиме 2?
2. Ймовірність влучення стрілком в мішень при одному пострілі дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що при 10 пострілах стрілок влучить в мішень 8 разів.

Варіант 21

1. Із урни, в якій знаходиться 3 білих та 2 червоних кульки, дістали 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони білі.
2. Ймовірність того, що листівка надрукована без помилок, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 900 надрукованих листівок 720 не матимуть помилок.

Варіант 22

1. В урні знаходиться 5 білих та 10 чорних куль. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них лише одна біла.
2. Гральний кубик підкидають 4200 разів. Яка ймовірність того, що при цьому три очка випало не менш ніж 680, але не більше ніж 730 разів?

Варіант 23

1. В цеху працюють 10 чоловіків та 4 жінки. За табельними номерами навмання відібрали 5 осіб. Знайти ймовірність того, що серед обраних немає жінок.
2. Стрілець стріляє по мішені 100 разів. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що стрілець влучить 75 разів.

Варіант 24

1. В урні знаходиться 3 білих та 3 червоних кульки. З урни дістали 2 кульки. Знайти ймовірність того, що обидві вони червоні.
2. Засіяно 500 штук насіння. Ймовірність проростання кожної зернини дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що проросте не менше 430 зерен насіння.

Варіант 25

1. На кожній з п'яти однакових карток надруковано одну з літер: А, М, И, М, Р. Картки перемішано. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній і розташованих зліва направо трьох картках можна прочитати слово «мир».
2. Ймовірність появи події в кожному із 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться 1470 разів.

Варіант 26

1. В наборі з 20 однотипних деталей 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання для перевірки п'яти деталей дві виявляться нестандартними.

2. Ймовірність вразити мішень при одному пострілі з гвинтівки дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що при 600 пострілах мішень буде вражена 250 разів.

Варіант 27

1. В кошику знаходиться 5 білих та 10 червоних куль, які відрізняються лише кольором. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них є біла.
2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,517. Знайти ймовірність того, що із 100 народжених дітей хлопчиків і дівчаток буде однакова кількість.

Варіант 28

1. На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з літер: А, Н, Р, У. Картки перемішано. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній та розміщених зліва направо картках можна прочитати слово «урна».
2. Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія настане 3 рази, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,7.

Варіант 29

1. Підкинуто два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що добуток отриманих очок буде непарним.
2. Ймовірність влучити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах в мішень влучать 75 разів.

Варіант 30

1. В урні знаходиться 3 білих та 2 чорних кульки. З урни дістали 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.
2. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.

Додатки

Додаток 1

Таблиця значень функції $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	**0,3989**	**0,3989**	**0,3988**	**0,3986**	**0,3984**	**0,3982**	**0,3980**	**0,3977**	**0,3973**
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,2637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	**0,2420**	**0,2396**	**0,2371**	**0,2347**	**0,2323**	**0,2299**	**0,2275**	**0,2251**	**0,2227**	**0,2203**
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	**0,0540**	**0,0529**	**0,0519**	**0,0508**	**0,0498**	**0,0488**	**0,0478**	**0,0468**	**0,0459**	**0,0449**
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	**0,0044**	**0,0043**	**0,0042**	**0,0040**	**0,0039**	**0,0038**	**0,0037**	**0,0036**	**0,0035**	**0,0034**
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951

0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971

Продовження додатку 2

0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732	∞	0,5
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		

Тема 14.(продовження):Випадкові величини

Випадкова величина – величина, яка внаслідок випробування може приймати лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.

Випадкові величини доцільно позначати великими літерами $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення малими літерами:

$$X: x_1, x_2, ..., x_n; \quad Z: z_1, z_2, ..., z_n.$$

Випадкові величини бувають ***дискретними*** і ***неперервними***

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина, що приймає окремі значення з певними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини можна перенумерувати.

Неперервною називають випадкову величину, яка може приймати всі значення із певного скінченого або нескінченного проміжку.

Функцією розподілу називають функцію, яка описує ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1}$$

Функція розподілу – неспадна, неперервна зліва; $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від функції розподілу і позначають:

$$f(x) = F'(x). \tag{2}$$

$f(x)$ – невід'ємна функція, для якої

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \qquad P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx; \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Числові характеристики випадкової величини

Математичне сподівання

Математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини і визначається за формулами:
для *дискретної* випадкової величини

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i; \tag{3}$$

для *неперервної* на $\left[a;b\right]$ випадкової величини

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx, \qquad (4)$$

де $M\left(X\right)$ – оператор математичного сподівання.

Фізичний зміст: математичне сподівання – середнє значення випадкової величини, тобто значення, яке може бути використано замість випадкової величини в наближених обчисленнях або оцінках.

Властивості математичного сподівання

1. $M(C)=C,\ C$ – стала;
2. $M(CX)=CM(X)$;
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;
4. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$.

Дисперсія

Дисперсія випадкової величини характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного сподівання і
дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Дисперсія *дискретної* випадкової величини знаходиться за формулою:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i; \qquad (5)$$

дисперсія *неперервної* випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx. \qquad (6)$$

Основні властивості дисперсії

1. $D(C)=0$;
2. $D(CX)=C^2D(X)$;
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;
4. $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

Дисперсію доцільно знаходити за властивістю (4). Причому для *дискретних* випадкових величин:

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i; \quad (7)$$

для *неперервних* випадкових величин:

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx. \quad (8)$$

Для оцінки розсіяння можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення крім дисперсії , можуть використовуватися інші характеристики. До їх числа відносять ***середнє квадратичне відхилення***.

Середнє квадратичне відхилення дискретної величини X називають квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \quad (9)$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної величини визначається за формулою (9).

Закони розподілу дискретних випадкових величин

№	Закон розподілу X та його математичний запис	$M(X)$	$D(X)$
1.	Біноміальний $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, m=0,1,2,...,n$	np	npq
2.	Пуассона $P(X=m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a},\ a>0.$	a	a
3.	Геометричний $P(X=m)=pq^{m-1},\ m=1,2,....$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
4.	Гіпергеометричний $P(X=m)=\dfrac{C_k^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},$ $m=0,1,2,...,n,\ k>n.$	$\dfrac{kn}{N}$	$\dfrac{nk(n-k)}{N^2}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Величина X розподілена ***рівномірно*** на проміжку $(a;b)$, якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і ***щільність*** її ймовірностей на цьому проміжку постійна, тобто

$$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b), \\ 0, & x\notin(a;b). \end{cases} \tag{10}$$

Випадкова величина, розподілена рівномірно, має такі числові характеристики:

$$M(X)=\frac{b+a}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Випадкову величину називають розподіленою за ***показниковим законом***, якщо ***щільність*** її ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \tag{11}$$

Випадкова величина, розподілена за показниковим законом, має такі числові характеристики:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};$$

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Нормальний закон розподілу задається щільністю

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{12}$$

Параметри a і σ, що входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{13}$$

Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, у проміжок $(\alpha;\beta)$ використовують функцію Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt; \qquad (14)$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\beta}{\sigma}\right). \qquad (15)$$

Для визначення відхилення нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше заданого додатного числа ε використовується формула:

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (16)$$

Приклад 1. Задані випадкові величини X і Y. Знайти:

1) закони розподілу величин $X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$;
2) математичне сподівання величини $X+Y$;
3) дисперсію величини $X+Y$;
4) середнє квадратичне відхилення величини $X+Y$.

Відомо, що

X	-1	0	1
p_i	0,2	0,5	0,3

Y	0	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Розв’язання.

1. Складаємо розрахункову таблицю.

X	Y	$X+Y$	$X-Y$	$X\cdot Y$	p_i
-1	0	-1	-1	0	$0,2\cdot 0,5=0,10$
	1	0	-2	-1	$0,2\cdot 0,3=0,06$
	2	1	-3	-2	$0,2\cdot 0,2=0,04$
0	0	0	0	0	$0,5\cdot 0,5=0,25$
	1	1	-1	0	$0,5\cdot 0,3=0,15$
	2	2	-2	0	$0,5\cdot 0,2=0,10$
1	0	1	1	0	$0,3\cdot 0,5=0,15$
	1	2	0	1	$0,3\cdot 0,3=0,09$
	2	3	-1	2	$0,3\cdot 0,2=0,06$

Закони розподілу величин $X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$ мають вигляд:

$Z=X+Y$	-1	0	1	2	3
p_i	0,10	0,31	0,34	0,19	0,06

Контроль: $\sum p_i = 0,10+0,31+0,34+0,19+0,06=1$.

$U=X-Y$	-3	-2	-1	0	1
p_i	0,04	0,16	0,31	0,34	0,15

$V=X\cdot Y$	-2	-1	0	1	2
p_i	0,04	0,06	0,75	0,09	0,06

2. Математичне сподівання величини $X+Y$:

$$M(X+Y)=M(Z)=\sum_{i=1}^{5} z_i p_i;$$

$$M(X+Y)=-1\cdot 0,1+0\cdot 0,31+1\cdot 0,34+2\cdot 0,19+3\cdot 0,06=0,8.$$

3. Дисперсія величини $X+Y$:

$$D(X+Y)=D(Z)=M(Z^2)-(M(Z))^2;$$

$$D(Z)=1\cdot 0,1+0\cdot 0,31+1\cdot 0,34+4\cdot 0,19+9\cdot 0,06-0,64=1,1.$$

4. Середнє квадратичне відхилення величини $X+Y$:

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{D(X+Y)}=\sqrt{D(Z)};$$

$$\sigma(X+Y)=\sqrt{1{,}1}\approx 1{,}05.$$

Приклад 2. Задано випадкову величину

X	-1	0	1	2
p_i	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}1$

Знайти закон розподілу X^2, функцію розподілу $F(x^2)$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Складаємо розрахункову таблицю

$Z=X^2$	1	0	1	4
p_i	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}1$

або

$Z=X^2$	0	1	4
p_i	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}1$

Функція розподілу має вигляд:

$$F(z)=F(x^2)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 0{,}4, & 0<z\le 1,\\ 0{,}9, & 1<z\le 4,\\ 1, & z>4.\end{cases}$$

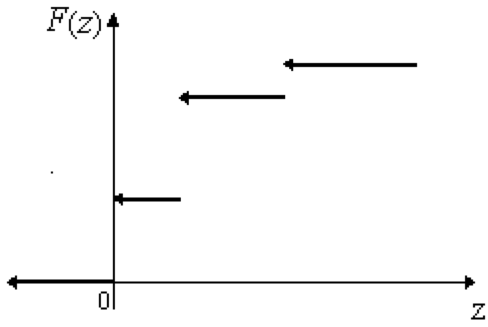


Рис.1. Функція розподілу

Приклад 3. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{9}(x+2)^2, & -2<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Необхідно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$; б) обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ; в) знайти ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(0;2)$; г) побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

Розв'язання.

а) Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від функції розподілу (2):

$$f(x)=F^{'}(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{2}{9}(x+2), & -2<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

б) Обчислимо математичне сподівання неперервної випадкової величини за формулою (4):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{2}{9}\int_{-\infty}^{\infty} x(x+2)dx=\frac{2}{9}\int_{-2}^{1}(x^2+2x)dx=;$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{2}{9}\left(\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+4\right)\right)=0.$$

Дисперсію неперервної випадкової величини обчислимо за формулою (8):

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2; \qquad M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx;$$

$$M\left(X^2\right)=\frac{2}{9}\int_{-2}^{1}x^2(x+2)dx=\frac{2}{9}\int_{-2}^{1}\left(x^3+2x^2\right)dx=\frac{2}{9}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)-\left(4-\frac{16}{3}\right)\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1}{2}=0,5;$$

$$D(X)=0,5-0=0,5.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення випадкової величини X :

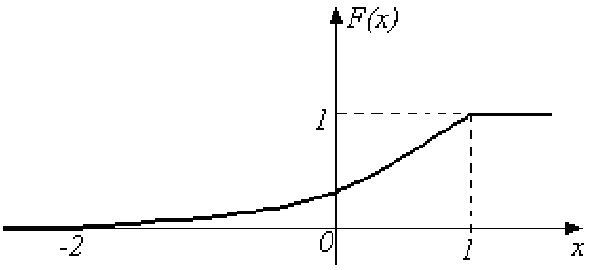
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,5}=0,17.$$

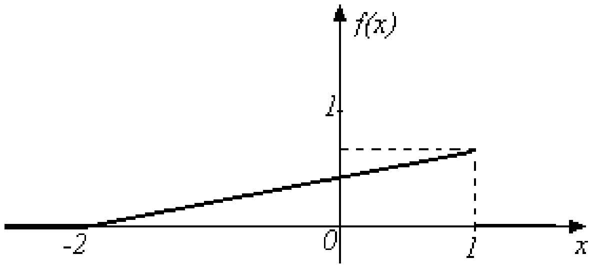
в) Обчислимо ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(0;2)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx;$$

$$P(0 \le x \le 2) = \int_0^1 \frac{2}{9}(x+2)\,dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{9}.$$

г) Побудуємо графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$ відповідно.





Приклад 4. Відомі математичне сподівання $a = 30$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma = 10$ нормально розподіленої випадкової величини X. Обчислити ймовірність того, що:

а) X прийме значення з інтервалу $(10; 50)$;

б) абсолютна величина відхилення прийме значення $|X - a| < 5$.

Розв'язання.

а) Ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(10; 50)$ обчислимо за формулою (15):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right);$$

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

б) Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення прийме значення $|X - a| < 5$ обчислимо за формулою (16):

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right);$$

$$P\left(\left|X-30\right|<5\right)=2\Phi\left(\frac{5}{10}\right)=2\Phi\left(0,5\right)=2\cdot 0,1915=0,383.$$

Індивідуальні завдання №14

Тема: Теорія ймовірностей
(продовження): Випадкові величини

Варіанти індивідуальних завдань:

Завдання 1

Дано незалежні випадкові величини X та Y. Знайти:

а) закони розподілу величин $X+Y$, $X-Y$, XY, X^2;

б) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величин $(X+Y)$ та X^2;

в) функцію розподілу $F\left(X^2\right)$ та побудувати її графік.

Варіант	Закони розподілу										
1	X p	–4 0,1	0 0,2	3 0,4	5 0,3		Y p	0 0,3	2 0,3	3 0,4	
2	X p	–2 0,1	0 0,2	1 0,3	2 0,4		Y p	0 0,3	1 0,5	2 0,2	
3	X p	–3 0,1	–2 0,2	0 0,3	2 0,4		Y p	–1 0,25	2 0,5	4 0,25	
4	X p	–2 0,1	–1 0,1	0 0,3	1 0,5		Y p	0 0,1	1 0,3	3 0,6	
5	X p	–2 0, 1	–1 0,15	0 0,5	4 0,25		Y p	2 0,25	3 0,5	4 0,25	
6	X p	2 0,4	4 0,2	6 0,1	8 0,3		Y p	0 0,5	1 0,25	2 0,25	
7	X p	–2 0,1	–1 0,2	0 0,5	1 0,2		Y p	2 0,4	4 0,2	6 0,1	8 0,3

8	*X* *p*	–2 0,1	–1 0,2	0 0,4	1 0,1	2 0,2	*Y* *p*	0 0,5	1 0,3	4 0,1	9 0,1
9	*X* *p*	–6 0,1	0 0,5	3 0,3	6 0,1		*Y* *p*	3 0,1	4 0,4	6 0,5	
10	*X* *p*	0 0,3	1 0,3	2 0,2	3 0,2		*Y* *p*	–1 0,2	0 0,6	2 0,2	

Варіант	Закони розподілу											
11	*X* *p*	–1 0,1	0 0,2	1 0,3	2 0,4		*Y* *p*	–2 0,6	–1 0,3	0 0,1		
12	*X* *p*	0 0,25	1 0,5	2 0,25			*Y* *p*	0 0,4	1 0,3	2 0,2	3 0,1	
13	*X* *p*	4 0,7	7 0,2	6 0,1			*Y* *p*	–3 0,2	–2 0,4	0 0,4		
14	*X* *p*	–1 0,3	0 0,4	2 0,2	3 0,1		*Y* *p*	–2 0,1	0 0,5	1 0,4		
15	*X* *p*	0 0,4	1 0,3	2 0,2	3 0,1		*Y* *p*	–4 0,4	2 0,3	8 0,1	10 0,2	
16	*X* *p*	–2 0,2	0 0,3	4 0,5			*Y* *p*	–4,2 0,1	–1,2 0,4	1,8 0,3	4,8 0,2	
17	*X* *p*	–2 0,1	0 0,5	3 0,4			*Y* *p*	1 0,05	2 0,18	3 0,23	4 0,41	5 0,13
18	*X* *p*	–3 0,1	–2 0,2	0 0,3	1 0,4		*Y* *p*	2 0,25	3 0,15	4 0,27	5 0,08	8 0,25
19	*X* *p*	4 0,21	5 0,17	6 0,18	8 0,23	10 0,21	*Y* *p*	–1 0,1	0 0,3	2 0,5	3 0,1	
20	*X* *p*	4 0,7	6 0,2	7 0,1			*Y* *p*	–3 0,2	–2 0,4	0 0,4		
21	*X* *p*	–1 0,3	0 0,4	1 0,2	2 0,1		*Y* *p*	–2 0,3	1 0,3	2 0,3	3 0,1	
22	*X* *p*	–2 0,1	–1 0,1	0 0,3	1 0,5		*Y* *p*	0 0,1	1 0,2	2 0,3	3 0,4	
23	*X* *p*	–3 0,1	–1 0,2	0 0,4	2 0,3		*Y* *p*	0 0,1	1 0,2	2 0,3	3 0,4	

24	X p	–1 0,1	0 0,2	1 0,3	2 0,4		Y p	–5 0,35	–1 0,15	3 0,3	7 0,2	
25	X p	0 0,1	1 0,3	2 0,3	3 0,3		Y p	–1 0,2	0 0,5	1 0,3		

Завдання 2

Випадкова величина X задана функцією розподілу:

для непарних варіантів
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{(x-a)^2}{b^2}, & a<x\le a+b,\\ 1, & x>a+b;\end{cases}$$

для парних варіантів
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ 1-\dfrac{(a+b-x)^2}{b^2}, & a<x\le a+b,\\ 1, & x>a+b.\end{cases}$$

Необхідно:

а) знайти щільність розподілу ймовірності $f(x)$;

б) обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

в) знайти ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу (c,d);

г) побудувати графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$.

Варіант	a	b	c	d	Варіант	a	b	c	d
1; 2	–1	3	0	4	15; 16	0	2	1	3
3; 4	–2	4	–1	1	17; 18	–-2	2	–1	1
5; 6	4	2	0	5	19; 20	0	3	–1	2
7; 8	3	3	2	5	21; 22	1	2	0	2

9; 10	1	3	2	5	23; 24	1	2	2	4
11; 12	2	3	1	4	25	0	3	1	4
13; 14	–1	2	0	2					

Тема15: Математична статистика.

Завдання 15.

Основні поняття

Математична статистика – розділ математики, який займається розробкою методів збору та обробки експериментальних даних для одержання наукових та практичних висновків.

Теорія ймовірностей є *теоретичною основою* математичної статистики.

Генеральна сукупність – множина однотипних об'єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню.

Вибірка (вибіркова сукупність) – підмножина об'єктів, одібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності.

При формуванні вибірки використовують наступні ***види відбору:***

- ***індивідуальний***, при якому у вибіркову сукупність вибирають по одній одиниці з генеральної сукупності;
- ***груповий*** або ***серійний***, при якому вибирається група (серія) одиниць;
- ***комбінований***, тобто сполучення перших двох видів відбору.

Розрізняють чотири основних ***способи формування вибірки***:

1) ***випадковий відбір*** (повторний чи безповторний), при якому вибірка формується виключно випадково;

2) ***механічний*** (***систематичний***) відбір, при якому у вибірку попадають одиниці з певними порядковими номерами (цей спосіб відбору є без повторним);

3) ***типовий відбір*** передбачає, що генеральна сукупність поділяється на однорідні групи і з кожної групи випадковим або механічним способом формується вибірка (типовий відбір може бути повторним і без повторним).

Нехай із генеральної сукупності добута вибірка, причому об'єкт x_1 спостерігався n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів, $x_k - n_k$ разів і $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – *об'єм вибірки.*

Спостережувані значення x_i називають ***варіантами***, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, – ***варіаційним рядом***; кількість спостережень n_i називають ***частотами***, а їх відношення до об'єму вибірки – ***відносними частотами***:

$$w_i = \frac{n_i}{n}. \tag{1}$$

Дискретним статистичним розподілом вибірки називається відповідність між варіантами та їх частотами або відносними частотами.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
w_i	w_1	w_2	$\cdots$	w_k

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Інтервальним статистичним розподілом вибірки називають відповідність між проміжками варіаційного ряду та їх частотами або відносними частотами.

$\left(z_{i-1}, z_i\right]$	$\left(z_0, z_1\right]$	$\left(z_1, z_2\right]$	$\cdots$	$\left(z_{m-1}, z_m\right]$
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_m

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

$\left(z_{i-1}, z_i\right]$	$\left(z_0, z_1\right]$	$\left(z_1, z_2\right]$	$\cdots$	$\left(z_{m-1}, z_m\right]$
w_i	w_1	w_2	$\cdots$	w_m

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1.$$

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$ (X – деяка кількісна ознака досліджувального явища):

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – число варіант, менших за x.

Властивості емпіричної функції:

1) значення емпіричної функції належить відрізку $[0;1]$;
2) $F^*(x)$ – неспадна функція;
3) якщо x_1 – найменша варіанта, а x_k – найбільша, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$

Функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають ***теоретичною функцією розподілу***.

Зауважимо, що $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а $F^*(x)$ визначає відносну частоту цієї ж події.

Якщо вихідні статистичні дані згруповані в дискретний варіаційний ряд, то емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ \frac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2; \\ \frac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3; \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 1, & x > x_k. \end{cases}$$

Графічне подання вибіркових даних

Усі статистичні розподіли можуть бути представлені графічно. Завдяки цьому можна побачити характерні зміни ряду розподілу, не користуючись аналізом цифрових даних.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $\left(x_i;\, n_i\right)$, $i=1,\, 2,\ldots,\, k$ координатної площини.

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_i;\, w_i)$, $i=1,\, 2,\ldots,k$.

Гістограмою частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $\left[z_{j-1}, z_1\right)$, $j=1,\, 2,\ldots,\, m$, а їх висота $n_j=\dfrac{n_j}{z_j-z_{j-1}}$. Площа кожного такого прямокутника дорівнює n_i.

Гістограмою відносних частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $\left[z_{j-1}, z_1\right)$, а їх висотами $n_j=\dfrac{w_j}{z_j-z_{j-1}}$.

Чисельні характеристики статистичного розподілу вибірки

Генеральною середньою $\overline{x_\Gamma}$ називається середнє арифметичне значень варіант x_i генеральної сукупності:

$$\overline{x_\Gamma}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\,, \tag{2}$$

якщо варіанти x_i, $i=\overline{1,N}$ мають відповідні частоти $N_1, N_2,\ldots, N_k$, причому $N_1+N_2+\ldots+N_k=N$, то

$$\overline{x_\Gamma}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}x_iN_i\,, \tag{3}$$

де N – об'єм генеральної сукупності.

Вибірковою середньою $\overline{x}$ статистичного розподілу вибірки називається середнє арифметичне значення її варіант $x_i,\ i=\overline{1,n}$ з урахуванням їх частот ($n_1, n_2, ..., n_k$, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), тобто

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ , \tag{4}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\ . \tag{5}$$

Генеральною дисперсією $D_Г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення варіант генеральної сукупності x_i від генеральної середньої $\overline{x_Г}$, тобто

$$D_Г(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_Г)^2\ , \tag{6}$$

якщо варіанти мають відповідні частоти, то

$$D_Г(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x}_Г)^2\ . \tag{7}$$

Генеральне середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г(x)}\ . \tag{8}$$

Вибірковою дисперсією статистичного розподілу вибірки називають середнє арифметичне значення квадратів відхилень його варіант x_i від вибіркового середнього $\overline{x}$, тобто

$$D(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 n_i\ . \tag{9}$$

Для обчислення генеральної чи вибіркової дисперсії зручніше використовувати формулу

$$D(x) = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \tag{10}$$

де $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i\ .$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}. \tag{11}$$

Якщо варіанти статистичного розподілу рівновіддалені, розрахунки числових характеристик можна спростити, користуючись *умовними варіантами*

$$u_k = \frac{x_k - C}{h},$$

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i n_i,$$

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h + C,$$

$$D(u) = \overline{u^2} - (\overline{u})^2, \tag{12}$$

$$D(x) = D(u) \cdot h^2,$$

де h – різниця між будь-якими двома сусідніми варіантами; C – умовний нуль (значення варіанти вибірки з найбільшою частотою)

Приклад 1. Знайти методом добутків вибіркову середню $\overline{x}$, дисперсію $D(x)$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i заданого розподілу:

а) безпосередньо;

б) користуючись умовними варіантами.

x_i	18,6	19	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

Розв'язання.

а) Використаємо розрахункову таблицю

x_i	n_i	$x_i\, n_i$	$x_i^2\, n_i$
18,6	4	74,4	1383,84
19	6	114	2166
19,4	30	582	11290,8
19,8	40	792	15681,6
20,2	18	363,6	7344,7
20,6	2	41,2	848,72

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = 100.$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = 1967,2;$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = 38715,67.$$

Обчислимо вибіркову середню за формулою (5):

$$\overline{x} = \frac{1}{100} \cdot 1967,2 = 19,672.$$

Обчислимо дисперсію $D(x)$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i заданого розподілу безпосередньо:

$$D(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 387,1567 - 19,672^2 \approx 0,169;$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0,169} \approx 0,411.$$

б) Використаємо розрахункову таблицю, при умові що

$$h = x_2 - x_1 = 19 - 18,6 = 0,4.$$

Найбільша частота 40 у варіанти $19,8$, тому умовний нуль $C = 19,8$.

x_i	n_i	$u_i = \frac{x_i - C}{h}$	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$
18,6	4	–3	–12	36
19	6	–2	–12	24
19,4	30	–1	–30	30
19,8	40	0	0	0
20,2	18	1	18	18
20,6	2	2	4	8

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = 100.$$

Обчислимо дисперсію $D(x)$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i заданого розподілу, користуючись умовними варіантами за формулами (12).

$$\sum_{i=1}^{k} u_i n_i = -32;$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i = 116;$$

$$\overline{u} = \frac{1}{100} \cdot (-32) = -0,32;$$

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h + C = -0,32 \cdot 0,4 + 19,8 = 19,672;$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i = \frac{1}{100} \cdot 116 = 1,16;$$

$$D(u) = \overline{u^2} - \overline{u}^2 = 1,16 - (-0,32)^2 = 1,0576;$$

$$D(x) = D(u) \cdot h^2 = 1,0576 \cdot 0,16 = 0,1699.$$

Статистичні оцінки

Розглянемо варіанти вибірки $x_1, x_2, ..., x_k$, одержані в результаті n спостережень, як незалежні випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_k$.

Статистичною оцінкою невідомого параметра θ^* теоретичного розподілу називають функцію від результатів спостережень (випадкових величин).

Наприклад: оцінка математичного сподівання нормального розподілу $\overline{X} = \left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) / n$.

Незсуненою (незміщеною) називають статистичну оцінку θ^* , математичне сподівання якої дорівнює параметру θ оцінюваному за будь-якого об’єму вибірки, тобто

$$M(\theta^*) = \theta.$$

Ефективною називають статистичну оцінку, яка при заданому об’ємі вибірки n має найменшу можливу дисперсію

$$D(\theta^*) = D_{\min}.$$

Обґрунтованою називають статистичну оцінку, якщо під час збільшення об’єму вибірки $n \to \infty$, вона збігається за ймовірністю до оцінюваного параметру.

Оцінювання генеральної середньої та генеральної дисперсії

Точковою називають оцінку, яку визначають одним числом.

За оцінку генеральної середньої $\overline{x_Г}$ обирають вибіркову середню. При цьому $\overline{x}$ – незміщена оцінка.

Для оцінювання генеральної дисперсії $D_Г(x)$ використовують ***виправлену дисперсію***, яку позначають через s^2 і визначають рівністю

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D(x) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2 . \qquad (13)$$

Виправлена дисперсія є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії.

Виправлене середнє квадратичне відхилення дорівнює кореневі квадратному із виправленої дисперсії й не є незміщеною оцінкою:

$$S = \sqrt{s^2} . \qquad (14)$$

Зауважимо, що за великих значень n об’єму вибірки вибіркова і виправлена дисперсії відрізняються мало. Практично виправленою дисперсією користуються, коли $n < 30$.

Інтервальне оцінювання математичного сподівання нормально розподіленої величини

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – границями інтервалу.

Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки невідомого параметра θ за допомогою знайденої за даними вибірки статистичної оцінки θ^* називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$:

$$P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right) = \gamma .$$

Інтервал $\left(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta\right)$ називають ***довірчим (надійним) інтервалом***.

Якщо випадкова величина нормально розподілена і її середнє квадратичне відхилення σ відоме, то з надійністю γ її математичне сподівання $M(X) = a$ задовольняє нерівності:

$$\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\gamma}<a<\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\gamma},$$

де $\overline{x}$ – середнє вибіркове, n – обсяг вибірки, $t=t_{\gamma}$ – розв'язок рівняння $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$, що визначаються за таблицею додаток 2 ($\Phi(t)$ – інтегральна функція Лапласа).

Приклад 2. Середнє квадратичне відхилення σ нормального розподілу дорівнює 10, значення вибіркового середнього $\overline{x}=52$, обсяг вибірки $n=120$. Знайти довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання a з надійністю $\gamma=0,948$.

Розв'язання. Розв'язком є інтервал

$$(\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\gamma},\ \overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\gamma}),$$

де невідомим є t_{γ}.

Значення t_{γ} знайдемо із співвідношення $2\Phi(t_{\gamma})=0,948$,

$$\Phi(t_{\gamma})=\frac{\gamma}{2}=\frac{0,948}{2}=0,474.$$

За таблицею значень функції Лапласа $t_{\gamma}=1,94$.

Визначимо точність оцінки:

$\delta=t\sigma/\sqrt{n}=(1,94\cdot 10)/\sqrt{120}\approx 1,77$.

Таким чином, довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання є

$$(52-1,94\frac{10}{\sqrt{120}},\ 52+1,94\frac{10}{\sqrt{120}})$$

або

$$(50,23;\ 53,77).$$

Статистичний опис системи двох випадкових величин

Підставою для статистичного аналізу залежності між випадковими величинами X і Y є дані вибірки, утвореної внаслідок незалежних спостережень двомірної величини (X,Y).

Статистичний опис двомірної випадкової величини прийнято подавати у вигляді кореляційної таблиці:

x_i \ y_i	x_1	x_2	$\dots$	x_m	n_{yj}
y_1 y_2 $\dots$ y_k	n_{11} n_{12} $\dots$ n_{1k}	n_{21} n_{22} $\dots$ n_{2k}	$\dots$ $\dots$ $\dots$ $\dots$	n_{m1} n_{m2} $\dots$ n_{mk}	n_{y_1} n_{y_2} $\dots$ n_{y_k}
n_{x_i}	n_{x_1}	n_{x_2}	$\dots$	n_{x_m}	n

$$n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} n_{ij} = \sum_{i=1}^{m} n_{xi} = \sum_{j=1}^{k} n_{yj}\,.$$

Основна задача кореляційного аналізу полягає у виявлені залежності між випадковими величинами X і Y. Якщо ця залежність лінійна, рівняння залежності має вигляд

$$y - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}), \tag{15}$$

де $x,\ y$ – варіанти ознак X і Y, $\overline{x}, \overline{y}$ – вибіркові середні, $\sigma_x,\ \sigma_y$ – вибіркові середні квадратичні відхилення; r – коефіцієнт кореляції, що вимірює ступінь лінійного зв'язку між X і Y:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Рівняння (15) називається ***вибірковим рівнянням прямої лінії регресії*** $\boldsymbol{Y}$ ***на*** $\boldsymbol{X}$.

Регресія – залежність середнього значення випадкової величини від деякої іншої величини або декількох величин.

Приклад 3. Знайти рівняння регресії

$$y - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$$

за даними кореляційної таблиці

y \ x	1	3	4	7	n_{yj}
5 8 10	4 – –	2 5 1	– 3 3	– – 2	6 8 6
n_{xi}	4	8	6	2	$n = 20$

Розв’язання. За формулами (5) обчислимо вибіркові середні:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 2) = 3,3;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{20}(5 \cdot 6 + 8 \cdot 8 + 10 \cdot 6) = 7,7.$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij};$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{20}(1 \cdot 5 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 8 \cdot 5 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 3 \cdot 10 \cdot 1 + 4 \cdot 10 \cdot 3 +$$
$$+ 7 \cdot 10 \cdot 2) = 27,8.$$

Користуючись формулами (13.10), (13.11) маємо:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2; \; \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_{xi};$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2; \; \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j n_{yj};$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{20}(1^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 8 + 4^2 \cdot 6 + 7^2 \cdot 2) - (3,3)^2 = 2,61; \Rightarrow \; \sigma_x = 1,62$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{20}(5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 8 + 10^2 \cdot 6) - (7,7)^2 = 11,26; \Rightarrow \; \sigma_y = 3,36.$$

Коефіцієнт кореляції

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{27,8 - 3,3 \cdot 7,7}{1,62 \cdot 3,36} \approx 0,44.$$

Підставимо знайдені значення $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x, σ_y, xy в рівняння регресії (15)

$$y - 7,7 = 0,44 \cdot \frac{3,36}{1,62}(x - 3,3),$$

$$y = 2,62 + 1,54x.$$

Індивідуальні завдання №15

Тема: Математична статистика

Варіанти індивідуальних завдань:

Варіант 1

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $\sigma = 3$, вибіркове середнє – $\overline{x}_B = 125,3$ та об'єм вибірки – $n = 4$.
2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	5,5	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5	17,5	19,5
n_i	10	15	20	30	25	15	10	5

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	4	8	12	16	20	n_x
10	2	5				7
20		6	8	4		18
30		8	46	10		64
40			5	20	4	29
50			3	14	5	22
n_y	2	19	62	48	9	140

Варіант 2

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 4\sqrt{3}$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 121,4$ та об'єм вибірки $n = 12$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

x_i	7	10	13	16	19	22	25	28
n_i	3	8	10	35	25	18	13	5

(в пер шому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	6	9	12	15	18	21	n_x
5	4	2					6
15		5	23				28
25			18	44	5		67
35			1	8	4		13
45					4	2	6
n_y	4	7	42	52	13	2	120

Варіант 3

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 6$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 124,1$ та об'єм вибірки $n = 9$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	6,2	10,4	14,6	18,8	23	27,2	31,4	35,6
n_i	5	10	20	40	36	20	15	10

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

$x \backslash y$	9	13	17	21	25	n_x
8	3	8				11
10		7	5	14		26
12		1	29	12		42
14			5	4	8	17
16				8	6	14
n_y	3	16	39	38	14	110

Варіант 4

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 3\sqrt{2}$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 127,3$ та об'єм вибірки $n = 8$.

2. Визначити методом добутку:

   а) вибіркове середнє;

   б) вибіркову дисперсію;

   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	8,4	10,9	13,4	15,9	18,4	20,9	23,4	25,9
n_i	4	12	15	30	28	18	14	10

   частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	10	20	30	40	50	n_x
14	2	5				7
18		6	4	3		13
22		18	25	4		47
26			13	15	20	48
30				3	2	5
n_y	2	29	42	25	22	120

Варіант 5

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 5\sqrt{2}$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 120,7$ та об'єм вибірки $n = 18$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	7,6	8	8,4	8,8	9,2	9,6	10	10,4
n_i	6	8	16	50	30	15	7	5

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	18	23	28	33	38	n_x
7	5	8	7			20
10		4	13	8		25
13		12	30	17		59
16			14	13	2	29
19				10	7	7
n_y	5	24	64	48	9	150

Варіант 6

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 4$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 126,6$ та об'єм вибірки $n = 25$.

2. Визначити методом добутку:

   а) вибіркове середнє;

   б) вибіркову дисперсію;

   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	4	5,8	7,6	9,4	11,2	13	14,8	16,6
n_i	5	8	12	25	30	20	18	6

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	6	16	26	36	46	n_x
5	1	5	3			9
9		2	14	2		18
13		3	20	6		29
17			16	14	2	32
21				8	4	12
n_y	1	10	53	30	6	100

Варіант 7

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 2\sqrt{5}$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 123,5$ та об'єм вибірки $n = 20$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5
n_4	4	8	18	20	25	13	7	5

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	n_x
10	2	5	4			11
30		3	8	9		20
50		11	20	3		34
70			8	8	1	17
90				11	7	18
n_y	2	19	40	31	8	100

Варіант 8

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 7$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 129,2$ та об'єм вибірки $n = 16$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	10	14,5	19	23,5	28	32,5	37	41,5
n_i	7	15	20	32	35	22	14	8

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	7	13	19	25	31	n_x
6	2	1	1			4
110		6	5	4		15
15		1	18	3		22
20			5	6	4	15
25				3	1	4
n_y	2	8	29	16	5	60

Варіант 9

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 2\sqrt{3}$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 129,2$ та об'єм вибірки $n = 16$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти $x_{i,}$ а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	18	22	26	30	34	38	42	46
n_i	3	18	20	25	25	16	14	8

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	5	9	13	17	21	n_x
4	5	3	1			9
10		2	8	10		20
16		3	20	4		27
22			18	7	4	29
28			4	8	3	15
n_y	5	8	51	29	7	100

Варіант 10

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 5$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 122,8$ та об'єм вибірки $n = 9$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	7	15	18	25	23	20	14	9

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	8	12	16	20	24	n_x
7	4	3	2			9
15		1	8	7		16
23		5	12	4		21
31			8	17	1	26
39			9	5	4	18
n_y	4	9	39	33	5	90

Варіант 11

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 6$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,17$ та об'єм вибірки $n = 36$.

2. Визначити методом добутку:

   а) вибіркове середнє;

   б) вибіркову дисперсію;

   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	12,5	14,5	18,5	20,5	22,5	24,5	26,5	28,5
n_i	10	15	20	30	25	15	10	5

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	10	15	20	25	30	35	n_x
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_y	4	8	9	52	19	8	100

Варіант 12

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 7$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,16$ та об'єм вибірки $n = 49$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	9	12	15	18	21	24	27	30
n_i	2	7	9	34	24	17	12	4

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	4	8	12	16	20	n_x
10	2	5				7
20		6	8	4		18
30		8	46	10		64
40			5	20	4	29
50			3	14	5	22
n_y	2	19	62	48	9	140

Варіант 13

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 8$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,15$ та об'єм вибірки $n = 64$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	5	9,2	13,4	17,6	21,8	26	30,2	34,4
n_i	10	20	40	80	70	40	30	20

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

$x \backslash y$	15	20	25	30	35	40	n_x
5	4	2					6
10		6	4				10
15			6	45	2		53
20			2	8	6		16
25				4	7	4	15
n_y	4	8	12	57	15	4	100

Варіант 14

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 9$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,14$ та об'єм вибірки $n = 81$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	3,4	7,9	10,4	12,9	16,4	17,9	20,4	22,9
n_i	3	11	14	29	27	17	13	9

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	5	10	15	20	25	30	n_x
20	1	5					6
30		5	3				8
40			9	40	2		51
50			4	11	6		21
60				4	7	3	14
n_y	1	10	16	55	15	3	100

Варіант 15

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 10$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,13$ та об'єм вибірки $n = 100$.

2. Визначити методом добутку:

   а) вибіркове середнє;

   б) вибіркову дисперсію;

   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i а в другому – відповідні

x_i	56,6	6	6,4	6,8	7,2	7,4	8	8,4
n_i	5	7	15	49	19	14	6	4

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	n_x
25	2	1							3
35		5	3						8
45			4	2	4				10
55					2	3	1	5	11
65							6	2	8
n_y	2	6	7	2	6	3	7	7	40

Варіант 16

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 11$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,12$ та об'єм вибірки $n = 121$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	5	6,3	8,6	10,4	12,2	14	15,8	17,6
n_i	6	9	13	26	31	21	19	7

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	0	1	2	3	4	n_x
10	20	5				25
11	7	15	3	1		36
20		3	17	4		24
35			89	13	7	28
50				5	42	47
n_y	27	23	28	23	49	150

Варіант 17

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 12$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,11$ та об'єм вибірки $n = 144$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	9	11,5	14	16,5	19	21,5	24	26,5
n_i	5	9	19	21	26	14	8	6

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	5	15	25	35	45	n_x
6	4					4
9	2	5				7
12		23	18	1		42
15			44	8		52
18			5	4	6	15
n_y	6	28	67	13	6	120

Варіант 18

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 13,$ вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,10$ та об'єм вибірки $n = 169.$

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти $x_{i,}$ а в другому – відповідні

x_i	14	18,5	23	27,5	32	36,5	41	45,5
n_i	8	15	21	32	36	22	15	8

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	20	30	40	50	60	n_x
35	5	4				9
40	2	12	10			24
45		7	20	9		36
50			8	9	4	21
55				4	6	10
n_y	7	23	38	22	10	100

Варіант 19

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 14,$ вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,09$ та об'єм вибірки $n = 196.$

2. Визначити методом добутку:

   а) вибіркове середнє;

   б) вибіркову дисперсію;

   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти $x_{i,}$ а в другому – відповідні

x_i	15	19	23	27	31	35	8	43
n_i	16	18	23	28	28	19	17	11

   частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	11	16	21	26	31	36	n_x
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	45	4		55
55			2	8	6		16
65				4	7	3	14
n_y	2	10	11	57	17	3	100

Варіант 20

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,96$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 15$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,08$ та об'єм вибірки $n = 225$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

   (в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	9	11	13	15	17	19	21	23
n_i	8	16	19	26	24	21	15	10

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

$x \backslash y$	40	55	70	85	100	n_x
20	11	8				19
30	3	15	3			21
40		1	14	8		23
50			6	10	6	22
60				7	8	15
n_y	14	24	23	25	14	100

Варіант 21

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 6,$ вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,17$ та об'єм вибірки $n = 36.$

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти $x_i,$ а в другому – відповідні ч
а
с
т

x_i	7,5	9,5	11,5	13,5	15,5	17,5	19,5	21,5
n_i	11	16	21	31	26	16	11	6

оти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	720	750	780	810	840	n_x
2	6	4				10
6	4	4	2			10
10	2	8	6	2		18
14		4	6	8	4	22
18			4	6	10	20
n_y	12	20	18	16	14	80

Варіант 22

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 8$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,15$ та об'єм вибірки $n = 64$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	6	9	12	15	18	21	24	27
n_i	3	7	10	34	25	17	13	4

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	15	20	25	30	35	n_x
30	4	2				6
40	1	12	8			21
50		8	22	7	1	38
60			9	8	6	23
70				5	7	12
n_y	5	22	39	20	14	100

Варіант 23

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 7$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,16$ та об'єм вибірки $n = 49$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	6	10,2	14,4	18,6	22,8	27	31,2	35,4
n_i	7	12	22	42	37	22	17	12

частоти n_i кількісної ознаки).

4. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

$x \backslash y$	0	4	6	7	10	n_x
7	19	1	1			21
13	2	14				16
40		3	22	2		27
80				15		15
200					21	21
n_y	21	18	23	17	21	100

Варіант 24

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 9$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,14$ та об'єм вибірки $n = 81$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	9,4	11,9	14,4	16,9	19,4	21,9	24,4	26,9
n_i	5	13	16	31	29	19	15	11

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

$x \backslash y$	7	15	23	31	39	n_x
8	4					4
12	3	1	5			9
16	2	8	12	8	9	39
20		7	4	17	5	33
24				1	4	5
n_y	9	16	21	26	18	90

Варіант 25

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 10$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,13$ та об'єм вибірки $n = 100$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	8,6	9	9,4	9,8	10,2	10,6	11	11,4
n_i	7	9	17	51	31	16	8	6

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	4	9	14	19	24	29	n_x
10	2	3					5
20		7	3				10
30			2	50	2		54
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_y	2	10	6	64	15	3	100

Варіант 26

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 11$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,12$ та об'єм вибірки $n = 121$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні

x_i	3	4,8	6,6	8,4	10,2	12	13,8	15,6
n_i	4	7	11	24	29	19	17	5

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	18	28	38	48	58	68	n_x
125		2					2
130	2	4	10				16
135		6	4	24			34
140			2	16	14		32
145					6	6	12
150						4	4
n_y	2	12	16	40	20	10	100

Варіант 27

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 12$, вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,11$ та об'єм вибірки $n = 144$.

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти $x_{i,}$ а в другому – відповідні

x_i	7	9,5	12	14,5	17	19,5	22	24,5
n_i	5	9	19	21	26	14	8	6

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	2	7	12	17	22	27	n_x
10	2	4					6
20		6	2				8
30			3	50	2		55
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_y	2	10	6	64	15	3	100

Варіант 28

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 13,$ вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,10$ та об'єм вибірки $n = 169.$

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти $x_i,$ а в другому – відповідні

x_i	12	16,5	21	25,5	30	34,5	39	43,5
n_i	7	16	20	26	25	17	15	8

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	5	10	15	20	25	30	n_x
11	4	2					6
21		5	3				8
31			5	45	5		55
41			2	8	7		17
51				4	7	3	14
n_y	4	7	10	57	19	3	100

Варіант 29

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 14,$ вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,09$ та об’єм вибірки $n = 196.$

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти x_i, а в другому – відповідні частоти n_i кількісної ознаки).

x_i	19	23	27	31	35	39	43	47
n_i	8	16	19	26	24	21	15	10

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

$x \backslash y$	4	9	14	19	24	29	n_x
8	3	3					6
18		5	4				9
28			40	2	8		50
38			5	10	6		21
48				4	7	3	14
n_y	3	8	49	16	21	3	100

Варіант 30

1. Визначити надійний інтервал для невідомого математичного сподівання a із заданою надійністю $\gamma = 0,95$, якщо виправлене вибіркове середньоквадратичне відхилення ознаки x дорівнює $s = 15,$ вибіркове середнє $\overline{x}_B = 75,08$ та об'єм вибірки $n = 225.$

2. Визначити методом добутку:
   а) вибіркове середнє;
   б) вибіркову дисперсію;
   в) вибіркове середньоквадратичне відхилення по даному статистичному розподілу вибірки

(в першому рядку указані вибіркові варіанти $x_{i,}$ а в другому – відповідні

x_i	6	8	10	12	14	16	18	20
n_i	6	14	17	24	22	19	13	8

частоти n_i кількісної ознаки).

3. Визначити вибіркове рівняння прямої

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$$

регресії y на x за наданою кореляційною таблицею:

x \ y	720-750	750-780	780-810	810-840	840-870	n_x
0,02	3	1				4
0,06	1	2	1			4
0,10	1	4	3	1		9
0,14		3	2	4	1	10
0,18		2	3	4	2	11
0,22			2	3	5	10
n_y	5	12	11	12	8	48

ЛІТЕРАТУРА

1. Соколенко О.І. Вища математика. Підручник. Київ «Академія»,2002.-430 с.
2. Збірник задач з математичного аналізу, ч.1, за редакцією .К.Рудавського, Львів,"Львівська політехніка",2001.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник.– К:А.С.К.,2001.–648с.
4. Валєєв К.Г., І.А. Джалладова. Математичний практикум. Київ: КНЕУ. 2004.
5. Вигоднер І.В., Білоусова Т.П., Ляхович Т.П.Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник для студентів денної і заочної форми навчання. Херсон: Видавничий дім «Гельветика», 2019. – 225 с.
6. Вища математика: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. Ч.2 / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. – К.:КНЕУ, 1999. – 396 с.
7. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
8. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
9. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. 2-ге видання.Київ: Кондор. 2006.
10. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання. 2-ге видання. Київ: Кондор. 2006.
11. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Титаренко О.М., Клімова Н.П.. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1-Ч.4.-К.: Кондор. 2006.
12. Higher Mathematics: A Text-Book for Classical and Engineering Colleges (Classic Reprint) Paperback – June 24, 2012/ M.Merriman– 2012. —606p.
13. Learning Higher Mathematics Part I: The Method of Coordinates. Part II: Analysis of the Infinitely Small / L.S.Pontrjagin – 1984. – 232p.
14. Geometric Aspects of Probability Theory and Mathematical Statistics / V.V. Buldygin, A.B. Kharazishvili– Springer Netherlands; June 2013, ISBN: 9789401716871.— 346 p.