МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.862.6
DOI: https://doi.org/10.32782/2708-0366/2023.15.36

Дебела І.М.
кандидат сільськогосподарських наук, доцент,
Херсонський державний аграрно-економічний університет
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7990-4202

Debela Iryna
Kherson State Agrarian and Economic University

СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ З АДАПТИВНОЮ СТРУКТУРОЮ

STATISTICAL ESTIMATES OF PARAMETERS OF MODELS WITH ADAPTIVE STRUCTURE

У статті досліджується статистичний метод оцінки параметрів моделей з адаптивною структурою, що представлені як суміш випадкових величин з не відомим законом розподілу. Структурна форма моделі передбачає поділ множини параметрів на два незалежних вектори – екзогенних та ендогенних змінних, але для більшості економічних задач здійснити такий розподіл не можливо, можна лише спостерігати результат одночасної дії всієї сукупності факторів на результуючу ознаку. Таким чином, вибір структурної форми моделі обмежений можливістю класифікації вектора параметрів. Крім того, до множини параметрів моделі адаптивної структури входять індикативні змінні, що відображують варіацію одної або декількох якісних ознак. Застосування теорії марковських ланцюгів дозволяє спростити процес моделювання до по-крокового алгоритму. Вибір послідовності кроків алгоритму структурної моделі визначається постановкою задачі та можливістю статистичної оцінки параметрів.

Ключові слова: *марковський ланцюг, вектор параметрів, параметрична суміш, адаптивна структура, індикативні змінні.*

The article examines a statistical method for estimating the parameters of models with an adaptive structure, which are represented as a mixture of random variables with an unknown distribution law. The adaptive structure model is more flexible to changes in input data, allows for the influence of variations in the chosen exogenous feature on the value of the endogenous parameter, and analytically reflects these changes in the structure. Statistical models with adaptive structure are widely applicable, but their construction algorithm, qualitative analysis of these models for individual management and economic problems, has not been thoroughly investigated. The choice of the analytical form of the model is based on prior statistical processing of stochastic, multidimensional information, characterized by the presence of qualitative, descriptive features. Qualitative features significantly affect the analytical structure of relationships between variables and can cause unpredictable variations in model parameters. The structural form of the model assumes the division of the set of parameters into two independent vectors – exogenous and endogenous variables, but for most economic problems, such a distribution is not possible, and we can only observe the result of the simultaneous action of all factors on the resulting feature. Thus, the choice of the structural form of the model is limited by the possibility of classifying the parameter vector. In addition, the set of parameters *of the adaptive structure model includes indicative variables that reflect the variation of one or more qualitative features. The application of Markov chain theory simplifies the modeling process into a step-by-step algorithm. The choice of the sequence of steps of the structural model algorithm is determined by the problem statement and the possibility of statistical parameter estimation. If parameter estimation is possible, then using known methods, a decision rule can be formulated according to which the set of parameters will be divided into classes. If the initial stage of model construction is the classification of the parameter vector, then the distribution function estimates in classes will be estimates of model parameters. Analytically, the distribution function of the set of parameters can be represented as a parametric mixture of random variables of two classes, the distribution of which is not known.*

Key words: *Markov chain, Markov chain, parameter vector, parametric mixture, adaptive structure, indicator variables.*

Постановка проблеми. Складність математичного моделювання економічних задач пов’язана з особливістю об’єкта моделювання, з характерною неоднорідністю аналізованих кількісних параметрів та залежністю їх від певних якісних факторів, стохастичних величин з спостереженими, частково прогнозованими значеннями, або випадковими змінними з невідомим розподілом. Але, навіть у припущенні формалізації вхідних параметрів, визначення структурних взаємозв’язків між ними, їх математична інтерпретація, врахування динаміки зміни зв’язку та міри впливу варіації окремого параметра на результуючу ознаку моделі, є досить потужною, аналітично складною задачею. Статистичні моделі з адаптивною структурою, це відокремлений клас моделей, що можуть змінювати свою конфігурацію в залежності від варіації ознак окремого класу або окремого параметра. Модель адаптивної структури більш гнучка до змін вхідних даних, дозволяє врахувати вплив варіації обраної екзогенної ознаки на значення ендогенного параметра та аналітично відобразити ці зміни в структурі. Класифікація векторів змінних і параметрів на ендогенні та екзогенні досить умовна і залежить від обраної концепції моделі [1]. Доцільно в якості екзогенних обирати змінні, що можуть бути об’єктом управління. Статистичні моделі з адаптивною структурою є широко застосовними, але алгоритм їх побудови, якісний аналіз цих моделей для окремих проблем управління, економіки, не досліджено детально.

Метою статті є дослідження статистичних методів оцінки параметрів моделі з адаптивною структурою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделі адаптивної структури відносяться до класу статистичного моделювання та машинного навчання та використовуються для прогнозування станів, класифікації даних, дослідження кореляційних зав’язків, регресійних залежностей, визначення оптимальних альтернатив управлінських рішень. Досить детальний аналіз моделей адаптивної структури для технічних систем, використання інстументірію теорії множин для формалізації моделі, оцінка надійності таких моделей приведений в роботах [2; 3; 4]. Застосування теорії марковських ланцюгів для прогнозування інфляційних очікувань, стратегічного напрямку реформування підприємства, описано в роботах [5; 6]. Теоретичні основи алгоритмів оцінки параметрів стохастичних моделей викладені в [7; 8; 9].

Виклад основного матеріалу. Вибір структури моделі задачі економіко-математичного моделювання ґрунтується на попередній статистичній обробці стохастичної, багатовимірної інформації. Характерною особливістю якої є наявність якісних, описових ознак. Якісні ознаки суттєво впливають на аналітичну структуру зав’язків між змінними та можуть бути причиною не передбачуваних змін параметрів моделі. Найбільш дослідженою статистичною моделлю з адаптивною структурою є лінійні регресійні моделі з фіктивними змінними, в яких вектори економічних параметрів, що приймають значення в межах заданого числового інтервалу, доповнюються однією або кількома якісними ендогенними ознаками, що є результатом впливу екзогенних факторів. Додати в математичну модель якісну ознаку можна лише надавши їй певне числове значення – еквівалент, перетворивши якісну ознаку в кількісну «фіктивну» змінну – індикатор. Індикатор може мати довільне значення, але найчастіше, за числовий еквівалент, обирають булеві змінні, що приймають значення 0 або 1. Відповідно, структура моделі доповнюється предикатом якісних оцінок P: $X \to (0;1)$, що виконує функцію ендогенного перемикача параметрів моделі. Фактично, перевіряється гіпотеза про наявність чи відсутність впливу якісного ендогенного параметра на структуру моделі. Елементарним прикладом є лінійна регресійна модель з 2-ма ендогенними перемикачами станів:

$$\tilde{y}(x, p_1, p_2) = \beta_0 + \beta_1 x + p_1\beta_2 + p_2\beta_3 + \varepsilon\,,\ \ p_1 = \begin{cases}1\\0\end{cases};\ p_2 = \begin{cases}0\\1\end{cases}. \tag{1}$$

Якщо кількість рівнів якісної змінної $n > 2$, то в регресійну модель додається m-фіктивних змінних, за умови $m < n$. Для дослідження моделей типу (1), параметри яких містять індикативні змінні, застосовують марковські моделі з ендогенними перемикачами, в яких імовірності переходу між станами системи S (є множиною можливих n-реалізацій випадкового процесу $S = \{S_t\}, (t = 0 \div n)$) в дискретному часі вважаються постійними величинами, тобто, на момент дослідження t відома матриця по крокового переходу $A = (a_{ij})$ [10].

Марковську модель з ендогенними перемикачами станів системи S можна записати наступним функціоналом:

$$G = FS; P; \Theta; A; B \tag{2}$$

де: $S = \{S_1, S_2, \cdots S_i \cdots S_t\}$ – стани системи з відповідним набором параметрів;

$P = (p_1, p_2 \cdots p_j \cdots p_n)$ – вектор значень фіктивних змінних;

$\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_i \cdots \Theta_t)$ – вектор апріорних імовірностей для станів S_t;

$A = (a_{ij})$ – матриця перехідних імовірностей;

$B = p\left(S_i / p_j\right)$ – апостеріорна імовірність.

Регресійна модель (1) будується на принципі незалежності варіацій факторів, але для більшості економічних задач, це припущення є хибним. Варіація одного параметра може відбуватися при практично не змінному значенні решти та однозначно приводить до зміни структури моделі. Таким чином, окреме рівняння регресії не може адекватно описати економічну задачу. Широке застосування в економіко-математичних дослідженнях отримала система взаємопов'язаних структурних рівнянь (3), що містить $[m \times (n + m - 1)]$ параметрів: m – ендогенних змінних Y та n – екзогенних X, визначених змінних що впливають на Y, але не залежать від них.

$$y_i = a_i + \sum_{j=1}^{m-1}(y_j)\times(\beta_{ij}) + \sum_{j=1}^{m}(\alpha_{ij})\times(x_j) + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j;\ i = 1 \div n \tag{3}$$

Структурна форма моделі (3) передбачає поділ вектора пераметрів на складові – екзогенні та ендогенні змінні $\bar{C} = \begin{pmatrix} y_j \\ x_j \end{pmatrix}$, якщо такий поділ передбачений постановкою задачі моделювання. Один набір економічних змінних для задачі N може бути класифікований як екзогенний, для іншої задачі Q, як ендогенний. В якості екзогенних обирають умовно керовані змінні – зовнішні, до об'єкту моделювання, параметри. Для більшості економічних задач розділення параметрів на два незалежних вектори змінних є не можливим, ми можемо фіксувати лише результат одночасної дії всієї сукупності факторів, а вплив випадкових ознак визначається вектором $\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$. Отже, вибір структурної форми моделі обмежений можливістю класифікації вектора параметрів [1].

Припустимо, що досліджується модель на принципі марковського ланцюга з дискретним часом [4], що в момент t $(0 \le t \le n)$ визначається станом S_t з параметрами $C = (c_i)$, що містить сукупність спостережних значень та випадкових величин. Тоді, початкова постановка задачі поділяється на під задачі: задача оцінки параметрів (параметрична задача); задача класифікації параметрів. Статистично, вектор C описує вибірка X_{AB}, що визначається щільністю розподілу $f_{AB}(C)=f(X_{AB})$, та може бути представлена як суміш щільності розподілу двох вибірок та $f_A(C)=f(X_A)$, $f_B(C)=f(X_B)$:

$$f_{AB}(C)=\pi f_A(C)+(1-\pi)f_B(C);0\le\pi\le1. \tag{4}$$

Параметрична задача ґрунтується на припущенні: $f_{AB}(C)$, $f_A(C),f_B(C)$ – щільності нормально розподілених випадкових величин відомі, з точністю до параметрів (математичного сподівання та дисперсії). Значення параметрів розподілу знаходять відомими класичними методами (метод максимальної правдоподібності, метод Ейткена, ЕМ-алгоритм). Тобто, параметрична задача обмежена умовою: тип розподілу у класах можна вважати гаусівським. Якщо розподіл вибірок X_A та X_B далекий від нормального, або складно специфікований, то починати треба з класифікації вектора параметрів, як суміші випадкових величин А і В. Для не параметричної задачі щільності розподілів $f_A(C),f_B(C)$ не відомі, можна лише припустити, що математичні сподівання випадкових величин X_A та X_B різні

$$M(X_A)=\int X_A f(X_A)=a,M(X_A)=\int X_B f(X_B)=b;a\ne b. \tag{5}$$

Змістом не параметричної задачі є розділенні вибірки X_{AB} на складові X_A, X_B за умов:
– можливим є визначення двох вибірок X_{AB} та X_A із $f_{AB}(C)$ та $f_A(C)$ відповідно;
– відома кількість компонент суміші t;
– статистична оцінка $\tilde{f}_{AB}(C)$ суміші (4) формалізована

$$\tilde{f}_{AB}(C)=\sum_{i=1}^{t}\pi_{AB_i}f(C,\tilde{\theta}_{AB_i}); \tag{6}$$

– визначено вагові коефіцієнти компонент суміші π_{AB_i};
– функція щільності розподілу $f\left(C,\tilde{\theta}_{AB_i}\right)$ оцінена з точністю до параметрів $\tilde{\theta}_{AB_i}$.

Спочатку за X_{AB} оцінюють $\widetilde{f_{AB}}(C)$, потім враховуючи X_A, підбираються оцінки $\tilde{\pi}$, $\widetilde{f_A}(C)$, $\widetilde{f_B}(C)$, що задовольняють рівність

$$\tilde{\pi}\widetilde{f_A}(C)\approx\widetilde{f_{AB}}(C)-(1-\tilde{\pi})\widetilde{f_B}(C). \tag{7}$$

Розв’язок задачі розщеплення суміші параметрів (6) базується на припущені: параметричну суміш (6) можна розділити на два класи без спільних елементів

$$\tilde{f}_{AB}(C)=\begin{cases}\widetilde{f_A}(C)\\ \widetilde{f_B}(C)\end{cases};\ \widetilde{f_A}(C)\ne\widetilde{f_B}(C). \tag{8}$$

Оцінювання $\widetilde{f_A}(C),\tilde{f}_B(C),\tilde{f}_{AB}(C)$ здійснюється шляхом вибору оптимальної множини індексів суміші

$$\widetilde{S_i}=\tilde{\pi}_{AB_i}f\left(C,\tilde{\theta}_{AB_i}\right),i=1\div t, \tag{9}$$

за яких досягається максимальне значення функції правдоподібності для вибірки X_A, в межах заданої похибки:

$$\tilde{\pi}_{B_i}f\left(C,\tilde{\theta}_{B_i}\right),i=1\div n, \tag{10}$$

n – об’єм вибірки X_A.

Оцінки $\tilde{\pi}$, $\widetilde{f_A}(C)$, $\widetilde{f_B}(C)$ з урахуванням (10):

$$\tilde{\pi}=\sum_{i\in\widetilde{S_i}}\tilde{\pi}_{AB_i}\cong\sum_{i=1}^{n}\tilde{\pi}_{A_i}$$

$$\widetilde{f_A}(C)=\frac{1}{\tilde{\pi}}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\pi}_{AB_i}f\left(C,\tilde{\theta}_{AB_i}\right) \tag{11}$$

$$\tilde{f}_B(C)=\left\{\tilde{\pi}_{AB_i}f\left(C,\tilde{\theta}_{AB_i}\right),i=1\div t\right\}\setminus\left\{\tilde{\pi}_{B_i}f\left(C,\tilde{\theta}_{B_i}\right),i=1\div n\right\}$$

Вибірки X_{AB} та X_A, кількість елементів суміші t вважають заданими початковими умовами. Оцінка параметрів суміші за вибіркою X_{AB}, як правило, виконується за ЕМ-алгоритмом [5; 6].

Висновок. Розглянутий метод розділення суміші випадкових величин, приведений в роботі, на думку автора, є прийнятним для формування вектора параметрів структурної моделі економічних задач, початкова умова яких обмежена класифікацією вектора параметрів на ендогенні та екзогенні змінні. Вибір послідовності кроків алгоритму побудови структурної моделі визначається постановкою задачі та можливістю статистичної оцінки параметрів. Якщо оцінка параметрів можлива, то застосувавши відомі методи (байєсовський метод, метод дискримінантного аналізу), можна сформувати вирішальне правило, за яким сукупність $C = (c_i)$, буде розділена на класи. Якщо початковим етапом побудови моделі є класифікація вектора параметрів, то оцінки функцій розподілу в класах, будуть оцінками параметрів моделі. Наступним кроком буде побудова структурної моделі.

Список використаних джерел:

1. Дебела І. М. Класифікація станів системи за вектором параметрів. *ТНВ. Серія : Економіка*. 2022. № 11. С. 114–119. DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2022.11.16
2. Саковіч Л., Криховецький Г., Небесна Ю. Теоретико-множинні моделі об'єктів зі змінною структурою. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. 2018. Т. 5. № 51. С. 136–139. DOI: https://doi.org/10.26906/SUNZ.2018.5.136
3. Саковіч Л., Криховецький Г., Небесна Ю. Оцінка надійності багаторежимних технічних об'єктів. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. 2019. Т. 1. № 53. С. 153–157. DOI: https://doi.org/10.26906/SUNZ.2019.1.153
4. Ігор Кузьо, Юрій Шоловій, Надія Магерус. Моделювання динаміки систем змінної структури на прикладі руху інерційного збудника на пружних опорах. *ISTCIPA*. 2022. Вип. 56. С. 39–47. DOI: https://doi.org/10.23939/istcipa2022.56.039
5. Федорович О., Прончаков Ю. Метод та моделі вибору траєкторії руху підприємства, що розвивається до найближчої цілі реформування. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. 2020. Т. 2. № 60. С. 40–43. DOI: https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.2.040
6. Лук'яненко І., Насаченко М. Моделювання інфляційних очікувань на основі Марківської авторегресійної моделі з перемикачами. *Наукові записки НаУКМА. Економічні науки*. 2020. Т. 5. № 1. С. 82–88. DOI: https://doi.org/10.18523/2519-4739.20205.1.82-88
7. O. V. Kasitskyj, P. I. Bidyuk, L. A. Korshevnyuk. Effective implementation of the EM-algorithm using GPGPU. *Наукові вісті Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут*. 2013. № 5. С. 35–39.
8. Радзіховська Л. М., Гусак Л. П., Панчук Ю. С. Побудова багатофакторної регресійної моделі засобами програмного забезпечення Eviews. *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2021. Вип. 44. С. 54–59. DOI: http://dx.doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-44-09
9. О. М. Ткаченко, Н. О. Біліченко, О. Ф. Грійо-Тукало, О. В. Дзісь. Метод кластеризації на основі послідовного запуску k-середніх з обчисленням відстаней до активних центроїдів. *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. 2012. Т. 14. № 1. С. 25–34. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/50557 (дата звернення: 06.03.2023).
10. Дебела І. М. Байєсовський метод оцінки альтернативних рішень. *Таврійський науковий вісник. Серія : Економіка*. 2021. № 8. С. 76–81. DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2021.8.11

References:

1. Debela I. M. (2022) Klasy'fikaciya staniv sy'stemy' za vektorom parametriv [Classification of system states by parameter vector]. *TNV Series: Economy*, no. 10, pp. 114–119.
2. L. Sakovich, G. Krykhovetskyi, Y. Nebesna (2018) Teorety'ko-mnozhy'nni modeli ob'yektiv zi zminnoyu strukturoyu [Theoretical multiple models of objects with a variable structure]. *Control, navigation and communication systems. Collection of scientific papers*, vol. 5, no. 51, pp. 136–139.

3. L. Sakovich, G. Krykhovetskyi, Y. Nebesna (2019) Ocinka nadijnosti bagatorezhy'mny'x texnichny'x ob'yektiv [Reliability assessment of multi-mode technical objects]. *Control, navigation and communication systems. Collection of scientific papers*, vol. 1, no. 53, pp. 153–157.

4. Ihor Kuzio, Yurii Sholovii, Nadiya Magerus (2022) Modelyuvannya dy'namiky' sy'stem zminnoyi struktury' na pry'kladi ruxu inercijnogo zbudny'ka na pruzhny'x oporax [Modeling the dynamics of variable structure systems using the example of the motion of an inertial exciter on elastic supports]. *ISTCIPA*, vol. 56, pp. 39–47.

5. O. Fedorovich, Yu. Pronchakov (2020) Metod ta modeli vy'boru trayektoriyi ruxu pidpry'yemstva, shho rozvy'vayet'sya do najbly'zhchoyi cili reformuvannya [The method and models of choosing the trajectory of the enterprise, which is developing towards the nearest goal of reform]. *Control, navigation and communication systems. Collection of scientific papers*. vol. 2, no. 60, pp. 40–43.

6. Lukianenko, I., & Nasachenko M. (2020) Modelyuvannya inflyacijny'x ochikuvan' na osnovi Markivs'koyi avtoregresijnoyi modeli z peremy'kachamy' [Markov autoregressive model with switches]. *Scientific notes of NaUKMA. Economic sciences*, vol. 5, no. 1, pp. 82–88.

7. O. V. Kasitskyj, P. I. Bidyuk, L. A. Korshevnyuk (2013) Efekty'vna realizaciya EM-algory'tmu z vy'kory'stannyam GPGPU [Effective implementation of the EM-algorithm using GPGPU]. *Scientific news of the National Technical University of Ukraine Kyiv Polytechnic Institute*, no. 5, pp. 35–39.

8. Radzikhovska L. M., Husak L. P., Panchuk Yu. S. (2021) Pobudova bagatofaktornoyi regresijnoyi modeli zasobamy' programnogo zabezpechennya Eviews [Building a multivariate regression model using Eviews software]. *Computer-integrated technologies: education, science, production*, vol. 44, pp. 54–59.

9. O. M. Tkachenko, N. O. Bilichenko, O. F. Griyo-Tukalo, O. V. Dzis' (2012) Metod klastery'zaciyi na osnovi poslidovnogo zapusku k-serednix z obchy'slennyam vidstanej do akty'vny'x centroyidiv [A clustering method based on sequential running of k-means with calculation of distances to active centroids]. *Registration, storage and processing of data*, vol. 14, no. 1, pp. 25–34. Available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/50557 (accessed 06 March 2023).

10. Debela I. M. (2021) Bajjesovsjkyj metod ocinky aljternatyvnykh rishenj [Bayesian method of evaluating alternative solutions]. *Taurian Scientific Bulletin. Series: Economics*, no. 8, pp. 76–81.