ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра менеджменту та інформаційних технологій

Інструктивно-методичні матеріали
до практичних робіт з навчальної дисципліни:

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

для здобувачів першого бакалаврського рівня вищої освіти
спеціальністі :– 073 «Менеджмент»
–073 «Менеджмент ІТ»
–241 «Готельно – ресторанна справа »
–242 «Туризм »
для здобувачів початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти
спеціальністі:– 081 «Право»

економічного факультету

Херсон – 2021

Інструктивно-методичні матеріали до практичних робіт з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальностей: :– 073 «Менеджмент»; 073 «Менеджмент ІТ»; 241 «Готельно – ресторанна справа »; 242 «Туризм », та початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти спеціальності – 081 «Право» економічного факультету.
Херсон: ХДАЕУ, 2021. 199с.

Укладач: Тетяна БІЛОУСОВА, старший викладач кафедри менеджменту та інформаційних технологій.

Практичне заняття № 1

Тема: **Елементи лінійної алгебри**

1. Методи обчислення визначників.

Приклад №1

Обчислити визначники: 1). $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; 2). $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Розв'язання:

1). $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22$$

2).

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -7$$

Другий спосіб:

Метод алгебраїчних доповнень (*або метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпця*) полягає в тому, що визначник обчислюють як суму добутків елементів a_{ij} деякого рядка (або стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(2-2) + 2(-8-6) + 3(4+3) = 0 - 28 + 21 = -7$$

Приклад №3

Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ методом зниження порядку:

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -7 & -4 & -11 \\ 4 & 4 & -1 & -3 \\ -5 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -4 & -11 \\ 4 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & -4 & -11 \\ 4 & -1 & -3 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + +1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & -7 & -11 \\ 4 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 8 & -7 & -4 \\ 4 & 4 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -7 & -11 \\ 4 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 \cdot 4 + (-7) \cdot (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot 5 \cdot (-11) - (-11) \cdot 4 \cdot (-5) -$$

$$- 4 \cdot (-7) \cdot 4 - 5 \cdot (-3) \cdot 8 = 128 - 105 - 220 - 220 + 112 + 120 = -95$$

Приклад №4

Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 104 & 98 & 100 \\ 25 & 40 & -15 \\ 21 & -49 & -7 \end{vmatrix}$ за допомогою властивостей визначників.

Розв’язання:

$$\Delta == \begin{vmatrix} 104 & 98 & 100 \\ 25 & 40 & -15 \\ 21 & -49 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100+4 & 100-2 & 100 \\ 25 & 40 & -15 \\ 21 & -49 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 25 & 40 & -15 \\ 21 & -49 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 25 & 40 & -15 \\ 21 & -49 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 100 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & -3 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 5 & 8 & -3 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 3500 \cdot (-8-35-9-24-21+5) +$$

$$+ 35 \cdot (-32+18-84-10) = 3500 \cdot (-92) + 35 \cdot (-108) = -325780$$

Самостійно:

1. Обчислити визначники: 1). $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$; 2). $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ за допомогою властивостей визначників.

3. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 55 & 109 & 64 \\ 45 & -105 & 16 \\ -50 & 99 & -48 \end{vmatrix}$ за допомогою властивостей визначників.

Теоретичні запитання

1. Як обчислюються визначники 2-го порядку?
2. Як обчислюються визначники 3-го порядку?
3. Як обчислюються визначники довільного порядку ***n***?.
4. Які властивості визначника полягають в основу методу зниження його порядку?

2. Матриці та дії над ними.

Приклад №1

Для матриць $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Знайти: A+B; A^T; C^2; AB; BA.

Розв’язання:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2 & 2+1 & -1+0\\ 1+1 & 0-1 & 3+2\\ 4+3 & -3+2 & 2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 5\\ 7 & -1 & 6\end{pmatrix};$$

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix};$$

$$C^2=C\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2-1\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot1-1\cdot1 & 1\cdot(-1)+2\cdot0-1\cdot3\\ 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1) & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1 & 2\cdot(-1)+1\cdot0+0\cdot3\\ -1\cdot1+1\cdot2+3\cdot(-1) & -1\cdot2+1\cdot1+3\cdot1 & -1\cdot(-1)+1\cdot0+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -4\\ 4 & 5 & -2\\ -2 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4\\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12\\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 11 & 7 & 12\\ 11 & 11 & 2\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0\\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4\\ 6+2+16 & 6+0-12 & -3+6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 9 & -4 & 0\\ 24 & -6 & 11\end{pmatrix}$$

Помічаємо, що AB$\neq$BA

Приклад №2

Для матриць A=$\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}$; Знайти: AB+3E

Розв’язання:

Перевіримо, чи можливо знайти AB:
A має розмір (3×2); B: (2×3). Отже кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, а це значить , що AB можливо.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 2\\ -5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-8 & -1-4 & 0+16\\ 0+4 & 0+2 & 0-8\\ -15-6 & 5-3 & 0+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -5 & 16\\ 4 & 2 & -8\\ -21 & 2 & 12\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{1=E=}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad 3E=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix};$$

$$AB+3E=\begin{pmatrix}-5 & -5 & 16\\ 4 & 2 & -8\\ -21 & 2 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+3 & -5 & 16\\ 4 & 2+3 & -8\\ -21 & 2 & 12+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5 & 16\\ 4 & 5 & -8\\ -21 & 2 & 15\end{pmatrix};$$

Самостійно:

1. Для матриць $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & -7\\ 1 & 3 & -4 & -1\\ 3 & 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & -1\\ 2 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 0\\ 9 & -8\end{pmatrix}$;

Знайти: AB-2C

2. Для матриць $A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 4 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$

Знайти: $AB+A^2-2C+3$

Теоретичні запитання

1. Дайте означення матриці.
2. Які бувають матриці?
3. Які відбуваються дії над матрицями?
4. Яка матриця називається одиничною?

Практичне заняття № 2

Тема: Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

1. Матричні рівняння

Приклад №1

Знайти обернену матрицю : A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Розв'язання:

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1) Знаходимо ΔA – визначник матриці A. Якщо $\Delta A = 0$, то матриця не має оберненої.
2) Транспонуємо матрицю A, одержуємо
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$
3) Знаходимо ***союзну*** (***приєднану***) матрицю A^*, яка складається з алгебраїчних доповнень до елементів транспонованої матриці:
$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$
4) Обернена матриця утворюється діленням кожного елемента союзної матриці на визначник ΔA:
$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$$

1.
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 5 -$$
$$-3 \cdot (-1) \cdot (-1) = -15 - 1 - 5 + 1 - 25 - 3 = -48 \neq 0$$

2. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

4. $A^{-1}=-\frac{1}{48}\begin{pmatrix}-6 & -6 & 0\\ -26 & 14 & 8\\ -4 & 4 & -8\end{pmatrix}$

Приклад 2. Розв'язати матричне рівняння:

$$X\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 9 & -1 & 7\\ 4 & -6 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}63 & -40 & 96\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння в наступному вигляді

$$X\cdot A=B\,,$$

де $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 9 & -1 & 7\\ 4 & -6 & 11\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}63 & -40 & 96\end{pmatrix}$.

Отже, $X=B\cdot A^{-1}$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}:

$$\Delta A=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\ 9 & -1 & 7\\ 4 & -6 & 11\end{vmatrix}=-7\neq 0; \qquad A^{T}=\begin{pmatrix}3 & 9 & 4\\ 0 & -1 & -6\\ 2 & 7 & 11\end{pmatrix};$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1 & -6\\ 7 & 11\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -6\\ 2 & 11\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 7\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}9 & 4\\ 7 & 11\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 11\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 9\\ 2 & 7\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}9 & 4\\ -1 & -6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & -6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 9\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & -12 & 2\\ -71 & 25 & -3\\ -50 & 18 & -3\end{pmatrix};$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}31 & -12 & 2\\ -71 & 25 & -3\\ -50 & 18 & -3\end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix}63 & -40 & 96\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix}31 & -12 & 2\\ -71 & 25 & -3\\ -50 & 18 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1953+2840-4800 & -756-1000+1728 & 126+120-288\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-7 & -28 & -42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

Приклад 3. Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Запишемо це рівняння в наступному вигляді: $A\cdot X\cdot B=C$,

де $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

Тоді

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\Rightarrow E\cdot X\cdot E=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

Отже,

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

Знаходимо обернені матриці до матриць A і B:

$$A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & -3\end{pmatrix};\quad B^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

Тоді

$$X=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ -4 & 3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{110}\begin{pmatrix}20 & -2\\ 10 & -14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -2\\ -5 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{110}\begin{pmatrix}150 & -46\\ 140 & -62\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{15}{11} & \frac{46}{110}\\ -\frac{14}{11} & \frac{62}{110}\end{pmatrix}$$

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}-\frac{15}{11} & \frac{46}{110}\\ -\frac{14}{11} & \frac{62}{110}\end{pmatrix}$

Самостійно:

Розв'язати матричні рівняння:

1. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -8 & 18 \\ 12 & -6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

Теоретичні запитання

1. Яку матрицю називають оберненою?
2. Як обчислити обернену матрицю?
3. Які рівняння називають матричними?
4. За яким правилом вирішується матричне рівняння?

2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 5x - y - z = 10 \\ x - y + 5z = -12 \end{cases}$$

1) за формулами Крамера;
2) матричним способом;
3) методом Гаусса;

Розв'язання.

1) ***формул Крамера:***

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Зауважимо, що можливі такі випадки:

– якщо $\Delta \neq 0$, то одержані значення (x, y, z) – єдиний розв'язок системи;
– якщо $\Delta = 0$ і $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, то система має безліч розв'язків;
– якщо $\Delta = 0$, але хоча б один із визначників Δx, Δy або Δz відмінний від нуля, то система не має розв'язків.

Для розв'язання за формулами Крамера спочатку обчислимо визначник Δ (для прикладу обчислення проведемо за методом трикутника):

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=3\cdot(-1)\cdot 5+1\cdot(-1)\cdot 1+1\cdot 5\cdot(-1)-1\cdot(-1)\cdot 1-1\cdot 5\cdot 5-$$

$$-3\cdot(-1)\cdot(-1)=-15-1-5+1-25-3=-48\neq 0$$

Отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta x=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & -1\end{vmatrix}=-2\cdot(-1\cdot 5-(-1)\cdot(-1))-1\cdot(10\cdot 5-(-12)\cdot(-1))+$$

$$+1\cdot(10\cdot(-1)-(-12)\cdot(-1))=-2\cdot(-6)-1\cdot 38+1\cdot(-22)=12-38-22=-48$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}10 & -1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -12 & 5\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 10 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(10\cdot 5-(-12)\cdot(-1))-5\cdot(-2\cdot 5-(-12)\cdot 1)+$$

$$+1\cdot(-2\cdot(-1)-10\cdot 1)=3\cdot 38-5\cdot 2+1\cdot(-8)=114-10-8=96$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}=144$$

Отже, за формулами Крамера маємо такий розв'язок системи:

$$x=\frac{-48}{-48}=1,\qquad y=\frac{96}{-48}=-2,\quad z=\frac{144}{-48}=-3.$$

Відповідь: $(1;-2;-3)$.

2) Запишемо систему лінійних рівнянь в матричній формі:

$$A\cdot X=B$$

де $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ – ***матриця-стовпець невідомих***;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – ***матриця-стовпець вільних членів*** (правої частини системи);

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – ***основна матриця системи***, елементами якої є коефіцієнти біля невідомих.

В рівнянні $A \cdot X = B$ помножимо обидві частини на A^{-1} зліва:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, то маємо

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Отже, матричний спосіб зводиться до відшукання оберненої матриці.

Для розв'язання матричним способом також спочатку обчислюють визначник Δ:

$$\Delta A = -48 \neq 0$$

Отже, матриця A має обернену матрицю. Далі знаходимо транспоновану матрицю, а потім союзну

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$A^{-1} = -\frac{1}{48} \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Отже,

$$X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{48}\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -26 & 14 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{48}\begin{pmatrix} -6\cdot(-2)+(-6)\cdot 10+0\cdot(-12) \\ -26\cdot(-2)+14\cdot 10+8\cdot(-12) \\ -4\cdot(-2)+4\cdot 10+(-8)\cdot(-12) \end{pmatrix} = -\frac{1}{48}\begin{pmatrix} -48 \\ 96 \\ 144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $(1;-2;-3)$.

3) Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 5 & -12 \end{array}\right) \qquad (1)$$

Для зручності поміняємо місцями перший і третій рядки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 5 & -1 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

перший рядок нової матриці перепишемо із матриці (1) без змін;
перший рядок матриці (1) помножимо на -5, складемо його з другим рядком і запишемо замість другого рядка в новій матриці;
перший рядок матриці (1) помножимо на -3, складемо його з третім рядком і запишемо замість третього рядка в новій матриці.
Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & -26 & 70 \\ 0 & 4 & -14 & 34 \end{array}\right) \qquad (2)$$

перший та другий рядки нової матриці перепишемо із матриці (2) без змін;
другий рядок матриці (2) помножимо на -1, складемо його з третім рядком і запишемо замість третього рядка в новій матриці.
Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 4 & -26 & 70 \\ 0 & 0 & 12 & -36 \end{array}\right) \qquad (3)$$

Для зручності подальших обчислень в матриці (3) поділимо другий рядок на 2, а третій – на 12. Одержимо еквівалентну матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 2 & -13 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \qquad (4)$$

Система рівнянь, відповідна матриці (4), має вигляд:

$$\begin{cases} x - y + 5z = -12 \\ 2y - 13z = 35 \\ z = -3 \end{cases}$$

Отже маємо, що $z = -3$, тоді з другого рівняння останньої системи $y = -2$, а з першого рівняння $x = 1$.

Відповідь: $(1;-2;-3)$.

Приклад 5. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 6 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

1). за формулами Крамера;
2). матричним способом;
3). методом Гаусса;

Розв'язання. 1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Оскільки Δ, Δx, Δy, Δz дорівнюють нулю, то система має безліч розв'язків.

2. Матричним методом вирішити СЛАР не можливо тому, що оберненої матриці не існує, бо $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

3. Знайдемо розв'язки методом Гаусса.

Складемо розширену матрицю системи. Далі в еквівалентній матриці запишемо перший рядок без змін. Потім помножимо перший рядок розширеної матриці системи на -2, складемо з другим рядком та запишемо замість другого рядка; помножимо перший рядок на -3, а третій на 2, складемо їх і запишемо замість третього рядка. Одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & -11 \end{array}\right)$$

З останньої матриці отримуємо, що ранг матриці (кількість ненульових рядків матриці після елементарних перетворень) менше числа невідомих, тому система має безліч розв'язків:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 11y - 7z = 11 \end{cases}$$

Вилучимо з системи друге рівняння та виразимо y з третього рівняння:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ y = \dfrac{7}{11} z + 1 \end{cases}$$

Підставимо y в перше рівняння:

$$2x + \frac{21}{11} z + 3 - z = 3$$

З останнього рівняння виразимо x:

$$x = -\frac{5}{11} z$$

Відповідь: $\left(-\dfrac{5}{11} z;\ \dfrac{7}{11} z + 1;\ z\right)$, $z \in R$.

Приклад 6. Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ x-5y+2z=3 \\ 4x+6y+2z=0 \end{cases}$$

1). за формулами Крамера;
2). матричним способом;
3). методом Гаусса;

Розв’язання. 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -44 \neq 0$$

Оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta x \neq 0$, то система несумісна, тобто вона не має розв’язків.

2. Матричним методом вирішити СЛАР не можливо тому, що оберненої матриці не існує, бо $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

3. Отримаємо цей результат методом Гаусса. Складемо розширену матрицю системи. Для зручності обчислень поміняємо місцями перший та другий рядок. Далі в наступній еквівалентній матриці запишемо перший рядок без змін. Потім помножимо перший рядок на -2, складемо з другим рядком та запишемо замість другого рядка; помножимо перший рядок на -4, складемо з третім рядком і запишемо замість третього рядка. Одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 \\ 0 & 26 & -6 & -12 \end{array}\right)$$

В останній матриці для зручності поділимо третій рядок на 2. А потім в наступній еквівалентній матриці запишемо перший та другий рядки без змін. Далі помножимо другий рядок на -1 і складемо з третім рядком та запишемо замість третього рядка. Одержимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 \\ 0 & 13 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

З останньої матриці маємо, що ранг основної матриці ($r(A)=2$) не дорівнює рангу розширеної матриці ($r(\overline{A})=3$), отже система розв'язків не має.

Самостійно:

Розв'язати СЛАР

1. $\begin{cases} 5x+8y-z=-7; \\ x+2y+3z=1; \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

Теоретичні запитання

1. У якому випадку за формулами Крамера СЛАР має безліч розв'язків?
2. У якому випадку за формулами Крамера СЛАР не має розв'язків?
3. Який метод зводиться до відшукання оберненої матриці?
4. В якому випадку неможливо вирішити СЛАР матричним методом?

Практичне заняття № 3

Тема: Основи векторної алгебри

1. Лінійні операції над векторами. Проекція вектора на вісь. Ділення відрізка у даному відношенні.

Приклад 1. Дано: A(1;-1;3); B(0;2;-1); C(4;0;1); Д(-1;-2;0).
Знайти:

1. вектор $\overrightarrow{AB}^0$;
2. вектор $3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ та його довжину;
3. вектор $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BC}$ та його довжину;

Координати вектора – це проекції цього вектора на відповідні координатні осі .

Якщо точка A має координати (x_A, y_A, z_A), а точка B має координати (x_B, y_B, z_B), то координати вектора $\overline{AB}$ будуть такі $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ Відстань між точками A та B, називається ***довжиною*** або ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ та позначається $\left|\overline{AB}\right|$ або $\left|\overline{a}\right|$.

Довжина вектора $\overline{AB}$ обчислюється за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Проекцією вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається скалярна величина

$$np_{\overline{b}}\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}\right)$$

Вектор $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z)$ можна представити як лінійну комбінацію векторів $\overline{i} = (1,0,0)$, $\overline{j} = (0,1,0)$, $\overline{k} = (0,0,1)$, які є одиничними векторами (ортами) координатних осей:

$$\overline{AB} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$$

Вектори b_1, b_2, b_3 лінійно незалежні (утворюють базис в тривимірному просторі), якщо визначник матриці, складеної з координат цих векторів, не дорівнює нулю.

Будь-який вектор $\overline{a}$ в просторі може бути лінійною комбінацією лінійно незалежних векторів b_1, b_2, b_3:

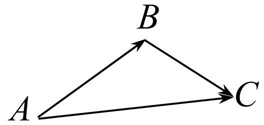
$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{b}_1 + \lambda_2 \overline{b}_2 + \lambda_3 \overline{b}_3,$$

де числа λ_1, λ_2, λ_3 називаються компонентами вектора $\overline{a}$ в базисі $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b_3}$. Цей вираз називають розкладом вектора $\overline{a}$ по векторах $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b_3}$.

Операції з векторами

1. Сума векторів

Правило трикутника:



$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Рис. 3

Правило паралелограма:

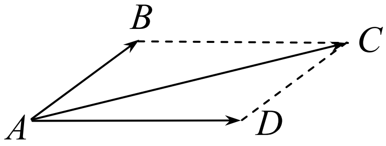


Рис. 4

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$$

Якщо $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x,\ a_y \pm b_y,\ a_z \pm b_z)$$

2. Множення вектора на скаляр (число)

Добутком вектора $\overline{a}$ на число λ називається новий вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, колінеарний з вектором $\overline{a}$, що має довжину в λ раз більшу ніж $|\overline{a}|$ та напрям вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний до $\overline{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Якщо $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ пов'язані співвідношенням $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ ($\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = \lambda$), то вони колінеарні.

Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай точка M(x;y) лежить на прямій , що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, причому задано відношення $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, $\lambda \neq -1$. Тоді координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у заданому відношенні λ, визначають за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Якщо точка M є відрізка серединою M_1M_2, то λ=1 і

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Розв'язання:

1. Знайдемо проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на координатні осі, тобто знайдемо його координати: $x = 0 - 1 = -1; y = 2 - (-1) = 3; z = -1 - 3 = -4$. Отже $\overrightarrow{AB} = (-1;3;-4)$

$$\overrightarrow{AB}^0=\left(\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|};\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|};\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right)$$ Знайдемо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{26}$;

$$\overrightarrow{AB}^0=\left(\frac{-1}{\sqrt{26}};\frac{3}{\sqrt{26}};\frac{-4}{\sqrt{26}}\right).$$

2. С початку знайдемо координати вектора $\overrightarrow{CD}$: $x=-1-4=-5$; $y=-2-0=-2$; $z=0-1=-1$; $\overrightarrow{CD}=(-5;-2;-1)$

Знайдемо координати вектора $3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$:

$x=3\cdot(-1)+(-5)=-8$; $y=3\cdot 3+(-2)=7$; $z=3\cdot(-4)+(-1)=-13$;

$3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(-8;7;-13)$;

Довжина $\left|3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(-8)^2+7^2+(-13)^2}=\sqrt{282}$;

3.С початку знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{AD}=(-1-1;-2-(-1);0-3)=(-2;-1;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(4-0;0-2;1-(-1))=(4;-2;2)$

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BC}$:

$x=-2-2\cdot 4=-10$; $y=-1-2\cdot(-2)=3$; $z=-3-2\cdot 2=-7$;

$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BC}=(-10;3;-7)$;

Довжина $\left|\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-10)^2+3^2+(-7)^2}=\sqrt{158}$;

1. Знайдемо проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$:
   $\overrightarrow{AB}=(-1;3;-4)$; $\overrightarrow{CD}=(-5;-2;-1)$

Приклад 2. У трикутнику АВС з вершинами A(4;3), B(16;-6), C(20;16) знайти центр мас трикутника.

Розв'язання: Знайдемо точку $O_1(x_1;y_1)$ – центр мас трикутника АВС, яка знаходиться у точці перетину медіан. Відомо, що точка O_1 ділить медіану АМ у відношенні 2:1, починаючи від вершини А. Отже, $\lambda=\frac{AO_1}{O_1M}=2$. Тоді за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ,\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Дістаємо: $x_1 = \frac{4+2\cdot 18}{1+2} = \frac{40}{3}$; $y_1 = \frac{3+2\cdot 5}{1+2} = \frac{13}{3}$;

$O_1(\frac{40}{3};\frac{13}{3})$

Приклад 3.Дано три вершини паралелограма АВСД: А(-1;-2), В(-3;2), С(5;4). Визначити довжину його діагоналі ВД.

Розв'язання: *Перший спосіб*

Нехай точка М- точка перетину діагоналей АС і ВД. Оскільки М(х;у) є серединою діагоналі АС, то

$$x = \frac{-1+5}{2} = 2; \quad y = \frac{-2+4}{2} = 1$$, звідки маємо М(2;1).

Тоді за формулою $|\overline{BM}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$, ВД=2ВМ=2$\sqrt{26}$

ВД=2$\sqrt{26}$

Другий спосіб: Запишемо вектор $\overrightarrow{BC} = (5+3;4-2) = (8;2)$. Якщо невідома вершина Д(х;у) паралелограма, то $\overrightarrow{AД} = (x+1; y+2)$. Очевидно, що $\overrightarrow{AД} = \overrightarrow{BC}$; тому х+1=8; у+2=2. Тому х=7; у=0, а Д(7;0). Отже, $|\overrightarrow{BД}| = \sqrt{(7+3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Приклад 4.Дано координати точок: $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,1,2)$, $A_2(2,3,-1)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,1,3)$. Знайти: розклад вектора $\overline{R}(5,-2,7)$ по векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$;

Розв'язання: Вектор $\overline{R}$ може бути розкладеним по векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, якщо вони утворюють базис. Так як визначник, складений з координат цих векторів: $\overline{A_1A_2} = (1,2,-3)$; $\overline{A_1A_3} = (1;-3;2)$; $\overline{A_1A_4} = (-2,0,1)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то вектори $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ лінійно незалежні, тобто утворюють базис.

$$\overline{R} = \lambda_1 \overline{A_1A_2} + \lambda_2 \overline{A_1A_3} + \lambda_3 \overline{A_1A_4}$$

Підставляючи координати цих векторів, отримаємо

$$(5,-2,7) = \lambda_1(1,2,-3) + \lambda_2(1,-3,2) + \lambda_3(-2,0,1)$$

Склавши праву частину і прирівнявши відповідні координати, отримаємо систему

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3=5 \\ 2\lambda_1-3\lambda_2=-2 \\ -3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=7 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $\lambda_1=-9{,}4$; $\lambda_2=-5{,}6$; $\lambda_3=-10$.

Отже, вектор $\overline{R}$ в базисі $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ має координати $\overline{R}=(-9{,}4;-5{,}6;-10)$ або $\overline{R}=-9{,}4\cdot\overline{A_1A_2}-5{,}6\cdot\overline{A_1A_3}-10\cdot\overline{A_1A_4}$.

Самостійно:

1. Дано: А(4;-3;0); В(0;6;-3); С(-4;1;1); Д(-5;-5;0).
   Знайти: вектор $\overrightarrow{AB}^0$; вектор $2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}$ та його довжину;

2. У трикутнику АВС з вершинами А(4;3;-1), В(1;-6;2), С(3;1;0) знайти центр мас трикутника.

3. Дано координати точок: $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4,-1,2)$, $A_2(1,0,-1)$, $A_3(-2,-1,2)$, $A_4(3,-1,3)$. Знайти: розклад вектора $\overline{R}(5,-2,7)$ по векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$;

Теоретичні запитання

1. Що таке вектор? Що таке координати вектора?
2. Які вектори є рівними?
3. Як знайти суму і різницю двох векторів?
4. Що являє собою вектор, помножений на скаляр?
5. Які властивості мають операції додавання векторів та множення вектора на скаляр?
6. Які вектори називаються колінеарними?
7. Які вектори називаються компланарними?
8. Як знайти одиничний вектор, спів спрямований з вектором $\vec{a}$?
9. Як знайти координати центру тяжіння?

2. Розв'язання задач за допомогою скалярного векторного та мішаного добутків.

Приклад 5. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,1,2)$, $A_2(2,3,-1)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,1,3)$. Знайти:

1. величину кута між ребрами A_1A_4 та A_2A_3;
2. проекцію ребра A_1A_4 на A_1A_2;

3. площу грані $A_1A_2A_3$;
4. об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
5. довжину висоти, опущеної з вершини A_4.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$$

Скалярний добуток векторів в координатній формі:

$$\bar{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

Зауваження:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$
2) Необхідна і достатня умова ортогональності векторів ($\bar{a}\perp\bar{b}$): $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$

Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається вектор

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=[\bar{a},\bar{b}]$$

такий, що

1) довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис. 1), тобто $|\bar{c}|=|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;
2) $\bar{c}\perp\bar{a}$ і $\bar{c}\perp\bar{b}$;
3) вектор $\bar{c}$ (рис. 1) напрямлений так, що якщо дивитись з кінця вектора $\bar{c}$, то поворот вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ повинен здійснюватись проти руху годинникової стрілки (така трійка векторів називається правою).

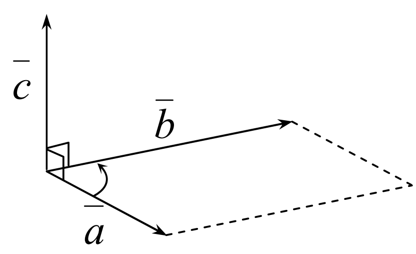


Рис. 1

Векторний добуток векторів в координатній формі:

$$\bar{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k},$$

де $c_x = a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z$; $c_y = -(a_x \cdot b_z - b_x \cdot a_z)$; $c_z = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$

Зауваження:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$

2) Необхідна і достатня умова колінеарності векторів ($\bar{a} \parallel \bar{b}$): $\bar{a} \times \bar{b} = 0$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається число

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$$

Мішаний добуток векторів в координатній формі:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \bar{b} = (b_x, b_y, b_z),\ \bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Зауваження.

1) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$

2) $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ має знак „+”, якщо ця трійка векторів права, і знак „–” в протилежному випадку.

3) Модуль мішаного добутку трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (рис. 2):

$$V_{парал-да} = |\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}|$$

Тоді об’єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ (рис. 3):

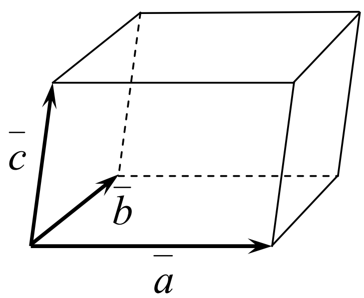


Рис. 2

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6} V_{парал-да} = \frac{1}{6} \left| \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \right|$$

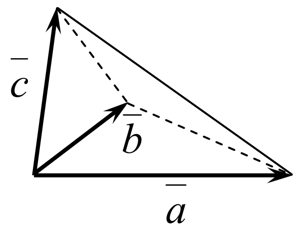
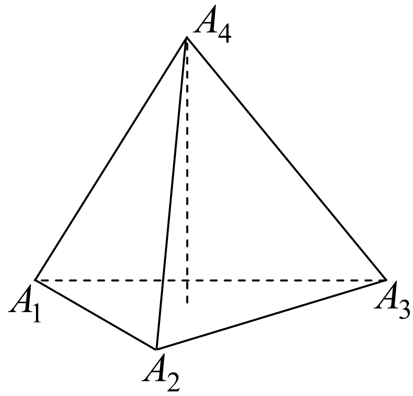


Рис. 3

4) Необхідна і достатня умова компланарності векторів: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$

Розв'язання:

1) Кут між ребрами A_1A_4 та A_2A_3 – це кут між векторами $\overline{A_1A_4}$ та $\overline{A_2A_3}$.



$$\cos(\overline{A_1A_4} \,\hat{,}\, \overline{A_2A_3}) = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_3}}{\left|\overline{A_1A_4}\right| \cdot \left|\overline{A_2A_3}\right|}$$

$\overline{A_1A_4} = (-2,0,1)$, $\overline{A_2A_3} = (0,-5,5)$.

$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overline{A_2A_3}\right| = \sqrt{50}$.

$\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_3} = 5$. Отже,

$$\cos(\overline{A_1A_4} \,\hat{,}\, \overline{A_2A_3}) = \frac{5}{\sqrt{250}} \approx 0{,}3$$

Тоді кут між векторами $\overline{A_1A_4}$ та $\overline{A_2A_3}$:

$$(\overline{A_1A_4} \,\hat{,}\, \overline{A_2A_3}) = \arccos 0{,}3 \approx 73^{\circ}$$

2) проекція $\overline{A_1A_4}$ на $\overline{A_1A_2}$:

$$пр_{\overline{A_1A_2}} \overline{A_1A_4} = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_1A_2}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|}$$

$\overline{A_1A_2} = (1,2,-3)$; $\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{14}$. Отже,

$$пр_{\overline{A_1A_2}} \overline{A_1A_4} = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{14}} = \frac{-5}{\sqrt{14}}$$

3) Грань $A_1A_2A_3$ – трикутник, площу якого можна обчислити використовуючи векторний добуток векторів, на яких побудовано цей трикутник:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \left| \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \right|$$

За формулою $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}$

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -5\bar{i} - 5\bar{j} - 5\bar{k}$$

$$\left| \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \right| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (кв.од.)}$$

4) Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ знайдемо використовуючи мішаний добуток векторів, на яких побудовано цю піраміду

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} \left| \overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}\ \overline{A_1A_4} \right|$$

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{5}{6} \text{ (куб.од.)}$$

5) Використовуючи формулу $V_{піраміди} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, маємо

$$H = \frac{3V_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}} = \frac{3 \cdot \frac{5}{6}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (од.)}$$

Самостійно: Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(0,-1,-2)$, $A_2(-3,0,-1)$, $A_3(4,-2,-3)$, $A_4(4,5,-3)$. Знайти:

1. величину кута між ребрами A_1A_4 та A_2A_3;
2. проекцію ребра A_3A_4 на A_3A_2;
3. площу грані $A_1A_2A_3$;
4. об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
5. довжину висоти, опущеної з вершини A_4.

Теоретичні запитання

1. Що називається скалярним добутком двох векторів і як він обчислюється через координати векторів, що перемножуються?
2. Що називається векторним добутком двох векторів та як він обчислюється через координати векторів, що перемножуються?
3. Що таке мішаний добуток векторів? Яка його геометрична суть та властивості?

Практичне заняття № 4

Тема: Аналітична геометрія на площині. Аналітична геометрія у просторі.

1. Види рівнянь прямої на площині. Взаємне розташування прямих на площині.

Приклад 1. Дано координати трьох точок: $A(2,2)$, $B(9,3)$, $C(4,6)$. Знайти:

1. вершину D паралелограма $ABCD$;
2. точку, симетричну точці A відносно прямої BC;
3. рівняння сторін трикутника, у якого A і B є вершинами, а C – точка перетину висот;
4. рівняння перпендикуляра, проведеного із вершини B трикутника ABC на бісектрису внутрішнього кута A;
5. рівняння сторін квадрата, у якого одна із сторін лежить на прямій AB, а в точці C перетинаються діагоналі.

Пряма на площині

1) ***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:***

$$y = kx + b,$$

де k – кутовий коефіцієнт (рис. 1);

$k = \mathrm{tg}\alpha$;

α – кут між прямою і додатнім напрямком осі Ox проти руху годинникової стрілки;

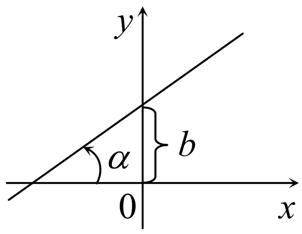


Рис. 1

b – відрізок, що відсікається на осі Oy від початку координат.

Рівняння прямої по її заданій точці (x_0, y_0) і кутовому коефі-цієнту k можна знайти як

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{1}$$

2) ***Канонічне рівняння прямої:***

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

де (x_0, y_0) – координати точки, що лежить на заданій прямій (рис. 2);
(m, n) – координати напрямного вектора, паралельного прямій.

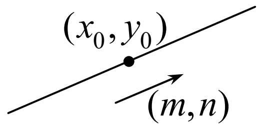


Рис. 2

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) (рис. 3), можна знайти як

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (2)$$

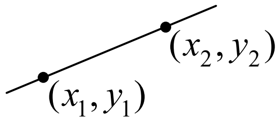


Рис. 3

3) ***Загальне рівняння прямої:***

$$Ax + By + C = 0,$$

де (A, B) – координати вектора-нормалі, перпендикулярного до прямої (рис. 4);
C – вільний член.

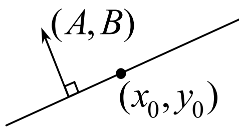


Рис. 4

Рівняння прямої по заданій точці (x_0, y_0) і вектору-нормалі (A, B) (рис. 4) можна знайти як

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Кутом між прямими l_1 і l_2 (рис. 5) називається кут, на який треба повернути першу пряму навколо точки перетину цих прямих проти руху годинникової стрілки до збігу її з другою прямою.

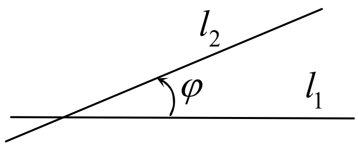


Рис. 5

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то кут φ між цими прямими можна знайти за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}$$

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом $l_1 : y = k_1x + b_1$, $l_2 : y = k_2x + b_2$, то кут φ між цими прямими можна знайти за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \qquad (3)$$

Умова паралельності двох прямих:

$$k_1 = k_2 \qquad \text{або} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (k_1 \cdot k_2 = -1) \qquad \text{або} \qquad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

Координати точки перетину двох прямих знаходять розв'язуючи систему рівнянь, що задають ці прямі.

Відстань d ***від точки*** $M(x_M, y_M)$ ***до прямої*** $Ax + By + C = 0$ є довжиною перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму, і знаходиться за формулою:

$$d = \left| \frac{A\,x_M + B\,y_M + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|, \tag{4}$$

де в знаменнику береться знак, протилежний знаку вільного члена C.

Розв'язання:

1) Нехай точка M – точка перетину діагоналей AC та BD (рис. 6). Вона поділяє діагоналі навпіл.

Знайдемо координати точки $M(x_M, y_M)$ як координати середини відрізка AC:

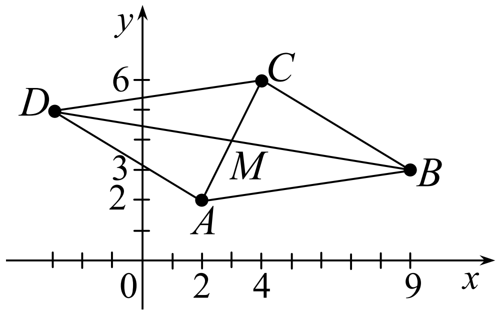


Рис. 6

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \; y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

З іншого боку, точка M – середина відрізка BD. Позначивши координати точки $D(x_D, y_D)$, одержимо:

$$\frac{9 + x_D}{2} = 3, \; \frac{3 + y_D}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad x_D = -3, \; y_D = 5$$

Відповідь: $D(-3{,}5)$.

2) Нехай шукана точка – A_1 (рис. 7). Вона лежить на прямій, яка проходить через точку A перпендикулярно BC. Крім того, відрізок AA_1 поділяється прямою BC навпіл.

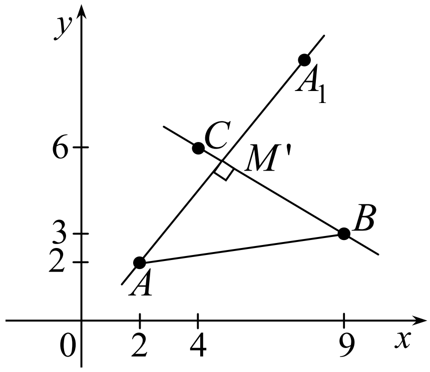


Рис. 7

Знайдемо рівняння прямої BC як рівняння прямої, проведеної через точки B і C, за формулою (2):

$$\frac{x-9}{-5}=\frac{y-3}{3}$$

Якщо представити це рівняння у вигляді з кутовим коефіцієнтом:

$$y=-\frac{3}{5}x+\frac{42}{5},$$

то маємо, що кутовий коефіцієнт прямої BC $k_{BC}=-\frac{3}{5}$.

Розглянемо пряму AA_1. Оскільки вона перпендикулярна BC, то її кутовий коефіцієнт $k_{AA_1}=-\frac{1}{k_{BC}}=\frac{5}{3}$.

За формулою (1) рівняння прямої AA_1 по кутовому коефіцієнту та координатам точки A:

$$y-2=\frac{5}{3}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}$$

Знайдемо координати точки M' – точки перетину прямих AA_1 і BC:

$$\begin{cases} y=\frac{5}{3}x-\frac{4}{3} \\ y=-\frac{3}{5}x+\frac{42}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{73}{17} \\ y=\frac{99}{17} \end{cases}$$

Маємо $M'\left(4\frac{5}{17},5\frac{14}{17}\right)$. Оскільки M' – середина AA_1, то координати точки $A_1(x_{A_1},y_{A_1})$:

$$\frac{2+x_{A_1}}{2}=4\frac{5}{17},\ \frac{2+y_{A_1}}{2}=5\frac{14}{17} \quad \Rightarrow \quad x_{A_1}=6\frac{10}{17},\ y_{A_1}=9\frac{11}{17}$$

Відповідь: $A_1\left(6\frac{10}{17}, 9\frac{11}{17}\right)$ – точка, симетрична точці A відносно прямої BC.

3) За формулою (2) рівняння сторони AB:

$$\frac{x-2}{9-2}=\frac{y-2}{3-2} \quad \Rightarrow \quad x-7y+12=0$$

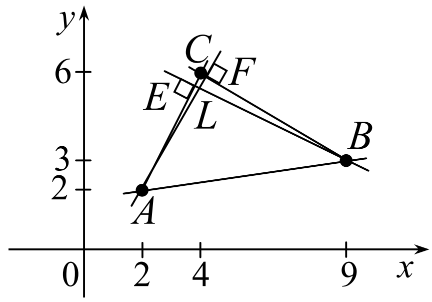


Рис. 8

Так як BF – висота до сторони AL (рис. 8), то рівняння прямої BF збігається з рівнянням прямої BC, яке було одержане раніше:

$$y=-\frac{3}{5}x+\frac{42}{5}$$

Тоді з умови перпендикулярності прямих BF і AL маємо кутовий коефіцієнт прямої AL: $k_{AL}=\frac{5}{3}$.

За формулою (1) рівняння сторони AL:

$$y-2=\frac{5}{3}(x-2) \quad \Rightarrow \quad 5x-3y-4=0$$

Рівняння AE (висоти до сторони BL) знайдемо за формулою (2), як рівняння прямої, що проходить через точки A і C (рис. 8):

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-2}{6-2} \quad \Rightarrow \quad y=2x-2$$

Тоді кутовий коефіцієнт прямої BL $\quad k_{BL}=-\frac{1}{2}$. Отже, рівняння сторони BL:

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-9) \quad \Rightarrow \quad x+2y-15=0$$

Відповідь: рівняння сторін трикутника ABL

AB: $x-7y+12=0$; AL: $5x-3y-4=0$; BL: $x+2y-15=0$.

4) Бісектриса кута – це геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін кута. Тобто для довільної точки (x, y) на бісектрисі AN (рис. 9) довжина відхилення її до прямих AB і AC однакова. Тоді маючи рівняння AB: $x-7y+12=0$ і AC: $2x-y-2=0$ та використовуючи формулу (4) отримаємо рівняння бісектриси AN:

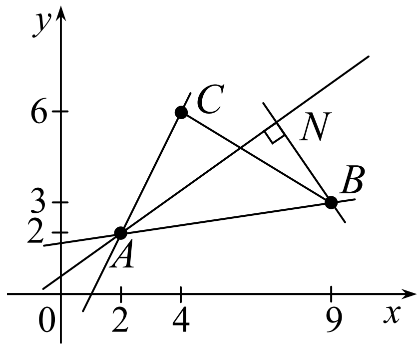


Рис. 9

$$\left|\frac{x-7y+12}{-\sqrt{1^2+(-7)^2}}\right| = \left|\frac{2x-y-2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right| \Rightarrow -\frac{x-7y+12}{-\sqrt{50}} = -\frac{2x-y-2}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{1+2\sqrt{10}}{7+\sqrt{10}}x + \frac{2(6-\sqrt{10})}{7+\sqrt{10}}$$

Кутовий коефіцієнт BN (рис. 9) $k_{BN} = -\frac{7+\sqrt{10}}{1+2\sqrt{10}}$.

Рівняння прямої BN:

$$y-3 = -\frac{7+\sqrt{10}}{1+2\sqrt{10}}(x-9) \Rightarrow$$

$$(7+\sqrt{10})x + (1+2\sqrt{10})y - 66 - 15\sqrt{10} = 0$$

Відповідь: рівняння перпендикуляра, проведеного із вершини B трикутника ABC на бісектрису внутрішнього кута A

$$(7+\sqrt{10})x + (1+2\sqrt{10})y - 66 - 15\sqrt{10} = 0$$

5) У квадрата $DFLT$ точка C є точкою перетину діагоналей, а сторона DF лежить на прямій AB (рис. 10).

Рівняння сторони DF співпадає з рівнянням прямої AB та було знайдено раніше:

$$x-7y+12=0$$

Кутовий коефіцієнт прямої DF $k_{DF} = \frac{1}{7}$.

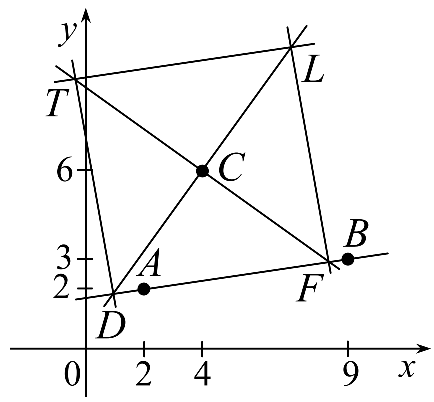


Рис. 10

Знайдемо кутовий коефіцієнт діагоналі DL. Для цього розглянемо кут між прямими

DF і DL, який дорівнює 45°. За формулою (3) маємо

$$\operatorname{tg}45^{\circ} = \frac{k_{DL} - k_{DF}}{1 + k_{DL} \cdot k_{DF}} \quad \Rightarrow \quad k_{DL} = \frac{4}{3}$$

Тоді рівняння діагоналі DL (за координатами точки C та кутовому коефіцієнту):

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x - 4) \quad \Rightarrow \quad 4x - 3y + 2 = 0$$

Координати точки D (як точки перетину прямих DF та DL):

$$\begin{cases} x - 7y + 12 = 0 \\ 4x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{22}{25},\ y = \frac{46}{25}$$

Сторона DT перпендикулярна стороні DF, тому $k_{DT} = -\dfrac{1}{k_{DF}} = -7$. Отже, маємо рівняння сторони DT (за координатами точки D та кутовому коефіцієнту):

$$y - \frac{46}{25} = -7\left(x - \frac{22}{25}\right) \quad \Rightarrow \quad 7x + y - 8 = 0$$

Так як C – середина діагоналі DL, то координати точки $L(x_L, y_L)$ знайдемо за формулою знаходження координат середини відрізка:

$$\frac{\frac{22}{25} + x_L}{2} = 4,\ \frac{\frac{46}{25} + y_L}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad x_L = \frac{178}{25},\ y_L = \frac{254}{25}$$

Сторона FL паралельна DT, тому $k_{DT} = k_{FL} = -7$. Рівняння FL:

$$y - \frac{254}{25} = -7\left(x - \frac{178}{25}\right) \quad \Rightarrow \quad 7x + y - 60 = 0$$

Сторона TL паралельна DF, тому $k_{TL} = k_{DF} = \dfrac{1}{7}$. Рівняння TL:

$$y - \frac{254}{25} = \frac{1}{7}\left(x - \frac{178}{25}\right) \quad \Rightarrow \quad x - 7y + 64 = 0$$

Відповідь: рівняння сторін квадрата $DFLT$:

$$DF: x-7y+12=0;\ TL: x-7y+64=0;$$
$$DT: 7x+y-8=0;\ FL: 7x+y-60=0.$$

Самостійно:

Дано координати трьох точок: $A(2,2)$, $B(9,3)$, $C(4,6)$. Знайти:

1).рівняння прямої, яка проходить через точку В перпендикулярно прямій АС ;

2). рівняння прямої, яка проходить через точку А паралельно прямій ВС ;

3). рівняння прямої, яка проходить через точку А та ділить пряму ВС навпіл;

4). кут між прямими АВ та АС

5). довжину висоти, опущену з вершини С на сторону АВ трикутника АВС;

Теоретичні запитання

1. Як виглядає канонічне рівняння прямої на площині?
2. Як виглядає загальне рівняння прямої. Сформулюйте зміст його коефіцієнтів при змінних.
3. Як виглядає рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
4. Як виглядає рівняння прямої за точкою та кутовим коефіцієнтом?
5. Як виглядає рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
6. Як знаходиться кут між прямими?
7. Умова паралельності та умова перпендикулярності двох прямих.
8. Як знаходиться відстань від точки до прямої?

2. Зведення лінії другого порядку до канонічного вигляду.

Приклад 1. Скласти рівняння траєкторії точки, що рухається, знаходячись вдвічі ближче до точки $B(9,3)$, ніж до точки $C(4,6)$.

Криві другого порядку на площині

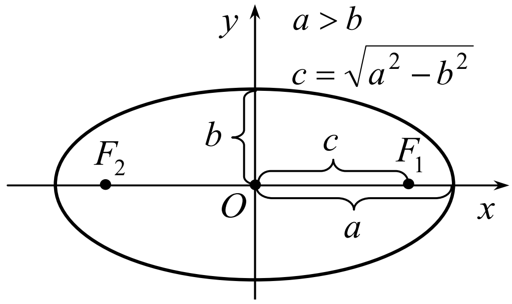
Кривою лінією другого порядку називають лінію, яка задається рівнянням другого степеня. Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

де A,B,C,D,E,F – деякі дійсні числа, причому хоча б одне з чисел A,B,C відмінне від нуля.

<u>*Види кривих другого порядку*</u>

1) ***Еліпс*** – це геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох фіксованих точок (***фокусів***) є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.



***Канонічне рівняння еліпса*:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

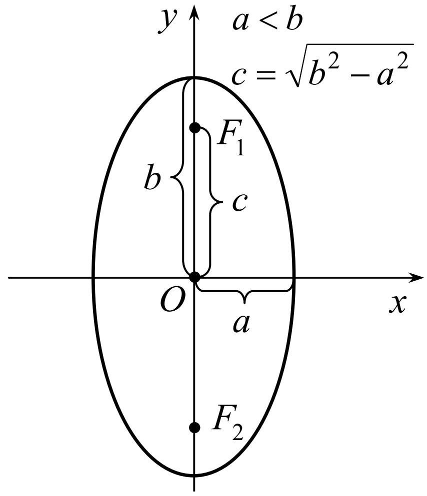
де a, b – півосі еліпса

Точка O – центр еліпса.

Точки F_1, F_2 – фокуси еліпса (лежать на більшій осі еліпса).

Число ε (відношення відстані між фокусами до довжини більшої осі) – ***ексцентриситет*** (міра „сплюснутості” еліпса).

Для еліпса $0 < \varepsilon < 1$.



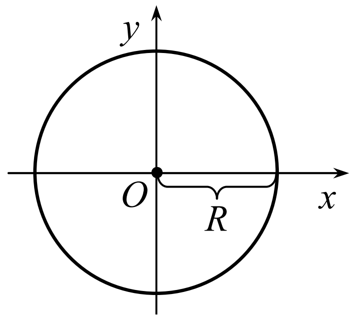
2) ***Коло*** – це геометричне місце точок площини, рівновіддаленних від фіксованої точки (центра).

Канонічне рівняння кола

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Точка O – центр кола. R – радіус кола.

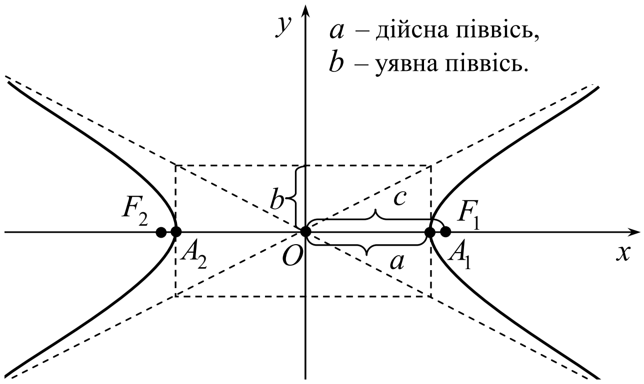
Коло є частинним випадком еліпса, коли $a = b = R$. При цьому $c = 0$, $\varepsilon = 0$.

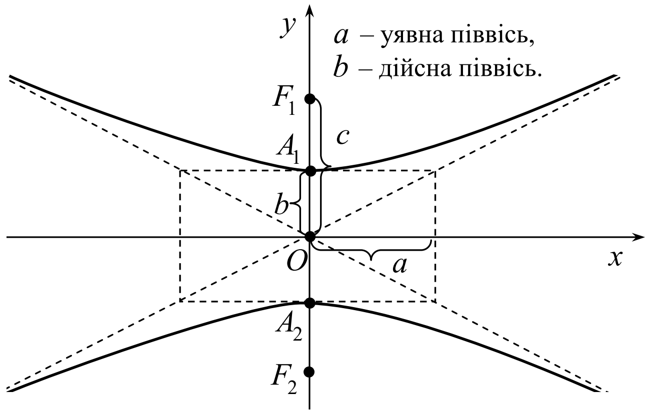


3) ***Гіпербола*** – геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок (фокусів), є величиною сталою і меншою, ніж відстань між фокусами.

***Канонічне рівняння гіперболи*:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (рис. 14)}; \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$





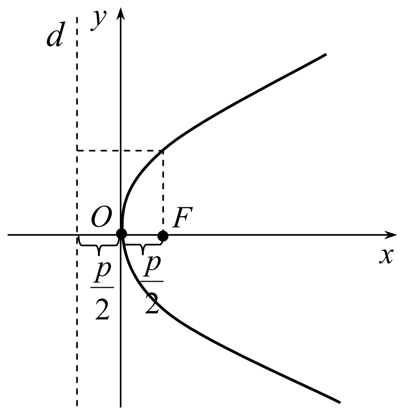
Точка O – центр симетрії (центр основного прямокутника) гіперболи.
Точки A_1, A_2 – вершини гіперболи (лежать на дійсній осі).

Прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – асимптоти (діагоналі основного прямокутника) гіперболи.

Точки F_1, F_2 – фокуси гіперболи (лежать на дійсній осі), $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ексцентриситет гіперболи (відношення відстані між фокусами до довжини дійсної осі) $\varepsilon > 1$.

4) ***Парабола*** – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (фокуса) та фіксованої прямої (***директриси***).



***Канонічне рівняння параболи*:**

$$y^2 = 2px$$
$$y^2 = -2px$$
$$x^2 = 2py$$
$$x^2 = -2py$$

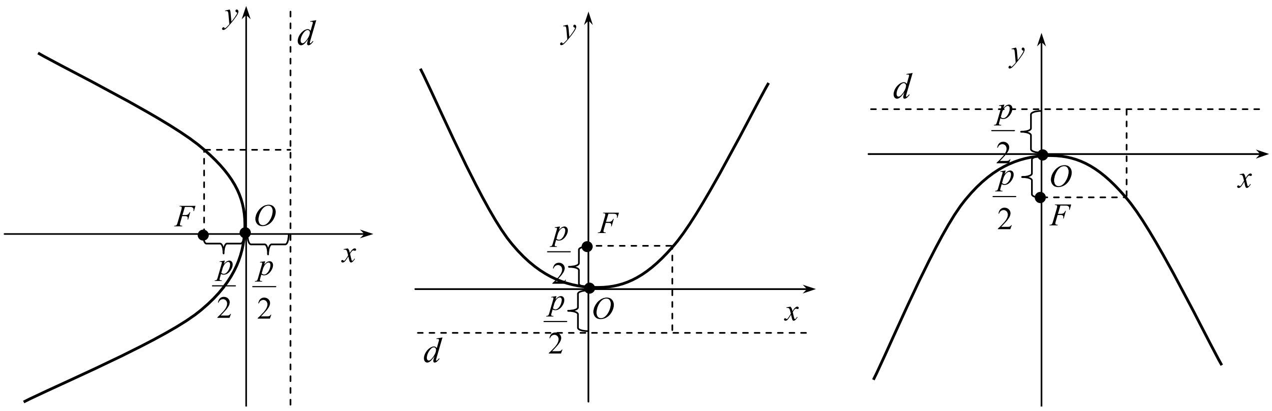
де $p > 0$ – параметр параболи – відстань від фокуса до директриси.

Точка O – вершина параболи.

Точка F – фокус параболи (лежить на осі симетрії параболи).

Пряма d – директриса (перпендикулярна осі симетрії) параболи.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.



Розв'язання.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка, що належить лінії, яка описує задану траєкторію. Тоді за умовою задачі

$$2|MB| = |MC| \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{(9-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(4-x)^2 + (6-y)^2}$$

Спростивши останню рівність, отримаємо рівняння шуканої лінії траєкторії руху точки:

$$3x^2 + 3y^2 - 64x - 12y + 308 = 0$$

Приклад 2. Скласти рівняння траєкторії точки, що рухається, знаходячись на однаковій відстані від точки $C(4,6)$ і від прямої AB: $x - 7y + 12 = 0$.

Розв'язання.

Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ на лінії траєкторії руху. Відстань від цієї точки до прямої AB: $d = \left| \dfrac{x - 7y + 12}{-\sqrt{50}} \right|$

За умовою задачі

$$|MC| = d \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(4-x)^2 + (6-y)^2} = \left| \frac{x - 7y + 12}{-\sqrt{50}} \right|$$

З останньої рівності маємо рівняння шуканої траєкторії руху точки:

$$49x^2 + 14xy + y^2 - 424x - 432y + 2456 = 0$$

Приклад 3. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$9x^2 + 16y^2 - 90x + 64y + 145 = 0$$

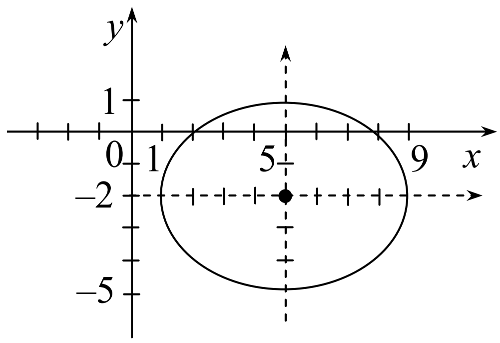
Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну у дужки і винесемо множники перед змінною в квадраті за дужки:

$$9\left(x^2-10x\right)+16\left(y^2+4y\right)+145=0$$

Доповнимо вирази у дужках до повних квадратів:

$$9\left(x^2-2\cdot 5x+5^2-5^2\right)+16\left(y^2+2\cdot 2y+2^2-2^2\right)+145=0$$
$$9(x-5)^2-225+16(y+2)^2-64+145=0$$
$$9(x-5)^2+16(y+2)^2=144$$
$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

Якщо зробити паралельне перенесення системи координат:
$$\begin{cases} x' = x-5 \\ y' = y+2 \end{cases}$$
то отримаємо канонічне рівняння еліпса. Тоді для його зображення треба центр еліпса перенести в точку $(5,-2)$. Півосі еліпса $a=4$, $b=3$



Приклад 4. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну у дужки і винесемо множники перед змінною в квадраті за дужки:

$$9x^2-18x-4y^2-16y-43=0$$
$$9\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2+4y\right)-43=0$$
$$9\left(x^2-2x+1-1\right)-4\left(y^2+4y+4-4\right)-43=0$$
$$9\left((x-1)^2-1\right)-4\left((y+2)^2-4\right)-43=0$$
$$9(x-1)^2-9-4(y+2)^2+16-43=0$$
$$9(x-1)^2-4(y+2)^2=0+9-16+43$$
$$9(x-1)^2-4(y+2)^2=36$$
$$\frac{9(x-1)^2}{36}-\frac{4(y+2)^2}{36}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

Це канонічне рівняння гіперболи. Точка $O(1;-2)$ – центр симетрії (центр основного прямокутника) гіперболи. Піввісі: $\begin{matrix} a^2=4 \to a=2 \\ b^2=9 \to b=3 \end{matrix}$

Приклад 5. Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

$$4x^2-8x-y+7=0$$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, що містять одну й ту ж саму змінну у дужки і винесемо множники перед змінною в квадраті за дужки:

$$4x^2-8x-y+7=0$$

$$4\left(x^2-2x\right)=y-7$$

$$4\left(x^2-2x+1-1\right)=y-7$$

$$4\left((x-1)^2-1\right)=y-7$$

$$4(x-1)^2-4=y-7$$

$$4(x-1)^2=y-7+4$$

$$4(x-1)^2=y-3$$

$(x-1)^2=\dfrac{1}{4}(y-3)$ - це парабола , симетрична відносно вісі OY.

Вершина параболи у точці (1;3).

Самостійно:

Привести до канонічного виду, визначити вид кривої та її намалювати:

1. $x^2+y^2-4x-2y+1=0$
2. $4x^2+3y^2+8x+12y+4=0$
3. $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$
4. $y^2-2x-6y-1=0$

Теоретичні запитання

1. Яку лінію називають кривою другого порядку?

2. Яку лінію називають колом? Визначте його рівняння.
3. Яку лінію називають еліпсом? Визначте його канонічне рівняння.
4. Яку лінію називають гіперболою? Визначте її канонічне рівняння.
5. Яку лінію називають параболою? Визначте її канонічне рівняння

3. Види рівнянь площини. Взаємне розташування двох площин.

Приклад 1. Дано точки: $A_1(3;-1;4)$, $A_2(2;3;-2)$, $A_3(-2;1;3)$, $A_4(4;-3;1)$, $A_5(2;-2;4)$. Знайти:
1).рівняння площини (A_1 A_2 A_3);
2). рівняння площини, що проходить через точку A_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$;
3). рівняння площини, що проходить через точку A_5 паралельно площині (A_1 A_2 A_3);
4).відстань від точки A_5 до площини (A_1 A_2 A_3);

Короткі теоретичні відомості.

Рівняння площини

1) ***Загальне рівняння площини:***
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
де (A, B, C) – координати вектора-нормалі, перпендикулярного до площини (рис. 1).

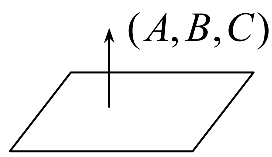


Рис. 1

Рівняння площини, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно до вектора з координатами (A, B, C), можна знайти як

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ можна знайти як

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

2) ***Рівняння площини у відрізках, що відтинаються на координатних осях:***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (3)$$

де a,b,c – відрізки, що відтинаються площиною на осях Ox, Oy, Oz відповідно від початку координат.

Відстань від точки $M(x_M, y_M, z_M)$ ***до площини*** $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\left|\frac{Ax_M+By_M+Cz_M+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \qquad (4)$$

де в знаменнику береться знак, протилежний знаку вільного члена D.

Розв'язання:

1. необхідно скористатися рівнянням площини, що проходить через три точки (2):

$(A_1\ A_2\ A_3)$: $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ -1 & 4 & -6 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$ або $8x+29y+18z-37=0$

2. необхідно скористатися умовою : якщо площина перпендикулярна вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$, то $\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{N}=(-4;-2;5)$ вектор нормалі до площини. Тоді застосовуємо рівняння площини (1): $-4(x-3)-2(y+1)+5(z-4)=0$ та отримаємо: $-4x-2y+5z-10=0$

3. необхідно скористатися умовою паралельності площин: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, тобто , як вектор нормалі до шуканої площини , можна взяти вектор нормалі до площини $(A_1\ A_2\ A_3)$ $\overrightarrow{N}=(8;29;18)$. Тоді застосовуємо рівняння площини (1): $8(x-2)+29(y+2)+18(z-4)=0$ та отримаємо: $8x+29y+18z-30=0$

4. необхідно скористатися формулою відстані від точки до площини (4):

$$d=\left|\frac{8\cdot 2+29\cdot(-2)+18\cdot 4-37}{\sqrt{8^2+29^2+18^2}}\right|=\frac{7}{\sqrt{1229}}$$

Самостійно:

Дано точки: $A_1(4;-1;0)$, $A_2(-2;0;-2)$, $A_3(2;-1;1)$, $A_4(0;-3;-1)$, $A_5(4; 2;0)$. Знайти:

1).рівняння площини (A_1 A_2 A_3);

2). рівняння площини, що проходить через точку A_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$;

3). рівняння площини, що проходить через точку A_5 паралельно площині (A_1 A_2 A_3);

4).відстань від точки A_4 до площини (A_1 A_2 A_3);

Теоретичні запитання

1) Як виглядає рівняння площини, яка проходить через задану точку з заданим нормальним вектором?
2) Як виглядає загальне рівняння площини? Який зміст його коефіцієнтів при змінних?
3) Як виглядає рівняння площини, що проходить через три задані точки?
4) Як виглядає рівняння площини у відрізках на осях?
5) Які умови паралельності та перпендикулярності площин?
6) Як знайти відстань від точки до площини?

4. Види рівнянь прямої у просторі. Взаємне розташування прямих, прямої та площини.

Приклад 1. Знаючи координати точок $A_1(1,1,2)$, $A_2(2,3,-1)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,1,3)$, знайти:

1) рівняння прямої A_1A_4;
2) рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;
3) рівняння проекції прямої A_1A_4 на площину $A_1A_2A_3$;
4) рівняння прямої, яка проходить через вершину A_3 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;
5) рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 паралельно прямій A_2A_3;
6) величину кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$;
7) точку, симетричну точці A_4 відносно площини $A_1A_2A_3$;

8) рівняння площини, яка проходить через точку A_3 перпендикулярно прямій A_1A_4;

9) рівняння прямої, яка проходить через точку A_3 паралельно прямій A_1A_4;

10) точку, симетричну точці A_3 відносно прямої A_1A_4;

Рівняння прямої в просторі

1) ***Канонічне рівняння прямої:***

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{1}$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, що належить цій прямій;

(m, n, p) – координати напрямного вектора, паралельного прямій.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2), можна знайти як

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{2}$$

2) ***Загальні рівняння прямої*** (пряма задана як перетин двох непаралельних площин):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{3}$$

Від рівнянь (3) можна перейти до рівняння (1):

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, що належить заданій прямій;

$A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ – коефіцієнти із загальних рівнянь прямої.

Розв'язання:

1) За формулою (2) канонічне рівняння прямої, що проходить через точки A_1 і A_4:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$$

2) Нехай площина $A_1A_2A_3$ – p_1. Шукана площина p_2 (рис.1) проходить через точку A_1 і нехай має вектор-нормаль $\overline{n_2} = (A, B, C)$.

Тоді рівняння площини p_2:

$$A(x-1) + B(y-1) + C(z-2) = 0 \qquad (4)$$

Напрямний вектор прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі): $\overline{s} = (-2,0,1)$.

Знайдемо рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3:

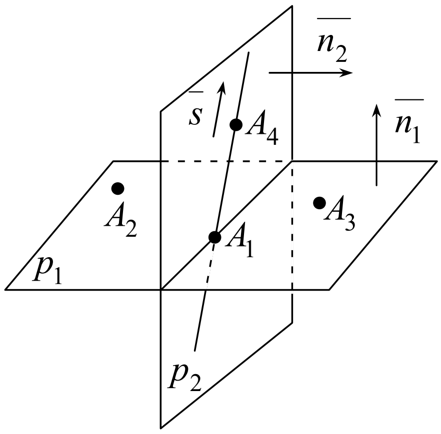


Рис. 1

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$-5(x-1) - 5(y-1) - 5(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1) + (y-1) + (z-2) = 0$$

Отже, рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$x + y + z - 4 = 0$$

Вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$: $\overline{n_1} = (1,1,1)$.

За умовою задачі

$$p_1 \perp p_2 \;\Rightarrow\; \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \;\Rightarrow\; \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \;\Rightarrow\; 1 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C = 0$$

пряма $A_1A_4 \in p_2 \;\Rightarrow\; \overline{n_2} \perp \overline{s} \;\Rightarrow\; \overline{n_2} \cdot \overline{s} = 0 \Rightarrow\; A \cdot (-2) + B \cdot 0 + C \cdot 1 = 0$

Отже, маємо

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -2A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -3A \\ C = 2A \end{cases}$$

Підставивши B і C в рівняння (4), отримаємо

$$A(x-1) - 3A(y-1) + 2A(z-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad x - 1 - 3(y-1) + 2(z-2) = 0$$

Тоді рівняння шуканої площини p_2:

$$x - 3y + 2z - 2 = 0$$

3) Рівняння площини $A_1A_2A_3$ (площини p_1) знайдено п.2 задачі:

$$x + y + z - 4 = 0$$

Проекція прямої A_1A_4 на площину p_1 – A_1B (рис. 2), де точка B – проекція точки A_4 на площину p_1. Маємо

$$A_4B \perp p_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{n_1} \parallel A_4B$$

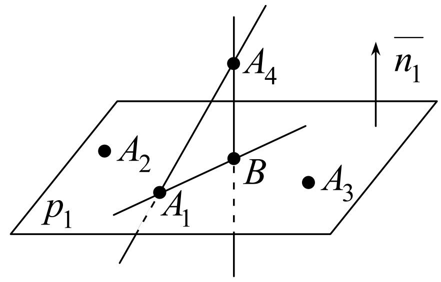


Рис. 2

Вектор-нормаль площини p_1 $\overline{n_1} = (1,1,1)$ буде напрямним вектором прямої A_4B. За формулою (1) отримаємо рівняння прямої A_4B:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

Знайдемо координати точки B (як координати точки перетину прямої A_4B і площини p_1):

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{z-3}{1} \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ x - z = -4 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{3},\ y = \frac{4}{3},\ z = \frac{10}{3}$$

Отже, $B\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$. Тоді за формулою (2) рівняння прямої A_1B:

$$\frac{x-1}{-5/3} = \frac{y-1}{1/3} = \frac{z-2}{4/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}$$

4) З умови задачі випливає, що вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$ (рівняння площини знайдено п.2 задачі) $\overline{n_1} = (1,1,1)$ буде напрямним вектором шуканої прямої l_1 (рис.3). Тоді за формулою (1) рівняння прямої l_1:

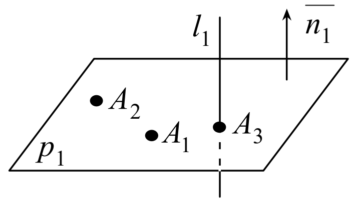


Рис. 3

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{1}$$

4) Шукана площина – p_3 (рис. 4). Візьмемо на площині p_3 до-вільну точку $M(x, y, z)$.

За умовою задачі $A_1A_4 \in p_3$ і $A_2A_3 \parallel p_3$. Тоді вектори $\overline{A_1M}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_3}$ компланарні, а значить їх мішаний добуток дорівнює 0.

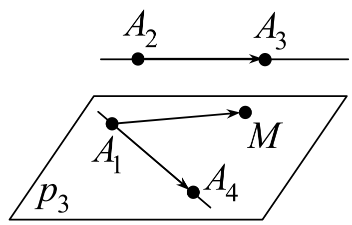


Рис. 4

$\overline{A_1M} = (x-1, y-1, z-2)$;

$\overline{A_1A_4} = (-2,0,1)$;

$\overline{A_2A_3} = (0,-5,5)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 2z - 7 = 0$$

Отже, рівняння площини p_3: $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

6) Позначимо φ – кут між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$ (рис. 5).

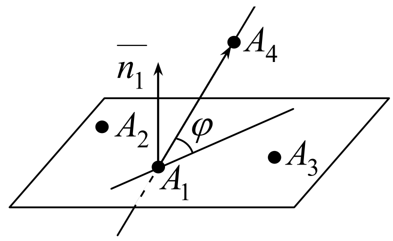


Рис. 5

$\overline{A_1A_4} = (-2,0,1)$;

$\overline{n_1} = (1,1,1)$ – вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$ (рівняння площини знайдено в п.2 задачі).

Кут між векторами $\overline{A_1A_4}$ і $\overline{n_1}$:

$$\cos(\overline{A_1A_4}\,\hat{,}\,\overline{n_1}) = \frac{\overline{A_1A_4} \cdot \overline{n_1}}{\left|\overline{A_1A_4}\right| \cdot \left|\overline{n_1}\right|} \quad \Rightarrow \quad \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

Будемо вважати кут φ гострим, тоді

$$\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 15^\circ$$

7) Точка A_5 (рис. 6) симетрична точці A_4 відносно площини $A_1A_2A_3$. Точка $B\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right)$ (координати знайдені в п.3 задачі) є серединою A_4A_5. Тоді маємо

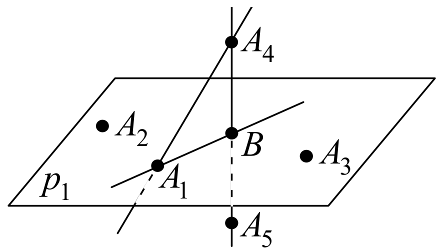


Рис. 6

$$\frac{-1+x_{A_5}}{2}=-\frac{2}{3},\ \frac{1+y_{A_5}}{2}=\frac{4}{3},\ \frac{3+z_{A_5}}{2}=\frac{10}{3}$$

$$x_{A_5}=-\frac{1}{3},\ y_{A_5}=\frac{5}{3},\ z_{A_5}=\frac{11}{3}$$

Отже, $A_5\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{11}{3}\right)$.

8) Площина p_4 (рис. 7) – шукана площина. Так як $A_1A_4 \perp p_4$, то напрямний вектор прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі) $\overline{s}=(-2,0,1)$ є вектором-нормаллю площини p_4. Тоді рівняння площини p_4:

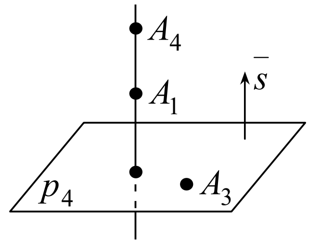


Рис. 7

$$-2(x-2)+0(y+2)+1(z-4)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-z=0$$

9) Шукана пряма l_2 (рис. 8) за умовою задачі паралельна прямій A_1A_4, а тому паралельна напрямному вектору прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі) $\overline{s}=(-2,0,1)$. Тоді за формулою (1) рівняння l_2:

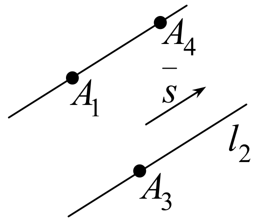


Рис. 8

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{1}$$

10) Нехай A_6 – шукана точка (рис. 9). Вона буде лежати на площині p_4, яка перпендикулярна прямій A_1A_4. Рівняння площини p_4 (знайдене в п.8 задачі): $2x-z=0$

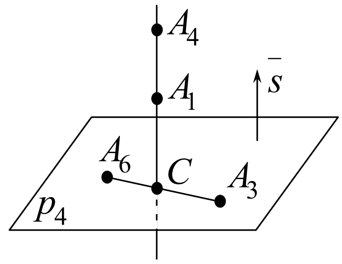


Рис. 9

Рівняння прямої A_1A_4 (знайдене в п. 1 задачі):

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$$

Координати точки C (точки перетину прямої A_1A_4 і площини p_4):

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{0} \\ \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{z-2}{1} \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 2z = 5 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1,\ y = 1,\ z = 2$$

Оскільки точка $C(1,1,2)$ середина A_3A_6, то

$$\frac{2 + x_{A_6}}{2} = 1,\ \frac{-2 + y_{A_6}}{2} = 1,\ \frac{4 + z_{A_6}}{2} = 2$$

$$x_{A_6} = 0,\ y_{A_6} = 4,\ z_{A_5} = 0$$

Отже, $A_6(0,4,0)$.

Самостійно:

Знаючи координати точок $A_1(0,-1,-2)$, $A_2(3,0,-1)$, $A_3(4,-2,0)$, $A_4(-1,1,3)$, знайти:

1).рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;

2).рівняння проекції прямої A_1A_4 на площину $A_1A_2A_3$;

3).рівняння прямої, яка проходить через вершину A_3 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;

4).рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 паралельно прямій A_2A_3;

5).величину кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$;

6).рівняння площини, яка проходить через точку A_3 перпендикулярно прямій A_1A_4;

Теоретичні запитання

1. Як виглядає канонічне рівняння прямої в просторі?
2. Як виглядає рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
3. Умова паралельності та умова перпендикулярності двох прямих.
4. Як знайти кут між прямою та площиною?
5. Як знайти відстань від точки до площини та прямої?
6. Як знайти точку перетину прямої та площини?

Практичне заняття № 5

Тема: Функція однієї змінної.

1. Методи обчислення границь.

Приклад 1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x + 6}{2 - x}$;

2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x + 6}{3 - x}$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{x^2 - x + 6}$.

Границя функції

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при x прямуючим до a ($x \to a$), якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від a, відповідні значення функції $y = f(x)$ достатньо мало відрізняються від числа A, і записується це так

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad \text{або} \qquad f(x) \to A \text{ при } x \to a$$

Властивості границі

1) $\lim\limits_{x \to a} C = C$, $C = const$ Функція $y = f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$$

Функція $y = f(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Якщо при знаходженні границі $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ маємо, що $f(x) \to \infty$ і $g(x) \to \infty$, то отримуємо *невизначеність* виду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$

Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при $x \to \infty$. Для розкриття цієї невизначеності треба чисельник і знаменник поділити на змінну в самому високому степені, який міститься в заданому виразі. Далі обчислюють знов, використовуючи властивості границі та властивості нескінченно великих і нескінченно малих функцій.

Розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$

1) Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при x прямуючим до якогось скінченного числа. В цьому випадку необхідно многочлени в чисельнику і в знаменнику розкласти на прості множники і скоротити.

2) Також невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику або/і знаменнику знаходиться ірраціональність, при x прямуючим до якогось скінченного числа. Тоді треба зробити перетворення для позбавлення ірраціональності.

Розкриття невизначеності $\infty - \infty$

При відніманні від нескінченності нескінченність того ж порядку виникає невизначеність виду $\infty - \infty$. Для її розкриття необхідно перетворити заданий вираз.

Розв'язання.

1) Підставляючи у заданий вираз $x = 3$, отримаємо

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x + 6}{2 - x} = \frac{3^2 - 3 + 6}{2 - 3} = \frac{12}{-1} = -12$$

2) Так як безпосереднім підставленням отримуємо, що $(x^2 - x + 6) \to 12$ при $x \to 3$, $(3 - x) \to 0$ при $x \to 3$, то, враховуючи співвідношення для нескінченно великих і нескінченно малих функцій, $\frac{12}{3-x} \to \infty$ при $x \to 3$. Отже

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x+6}{3-x}=\infty$$

3) Безпосередньо підставляючи отримуємо, що при $x \to \infty$ $(x^2-x+6) \to \infty$, тоді $\frac{5}{x^2-x+6} \to 0$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2-x+6}=0.$$

Приклад 2. Знайти границю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+1}{2+x^3}$$

Розв'язання. Безпосереднім підставленням маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, тоді ділимо чисельник і знаменник на x^3. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-x+1}{2+x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+\frac{x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+1}=$$

$$=\frac{3-0+0}{0+1}=3$$

Приклад 3. Знайти границю:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x^2-9x+9}$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x^2-9x+9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{2(x-3)(x-1{,}5)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{2(x-1{,}5)}=\frac{27}{3}=9$$

Приклад 4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{2-x^2}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x^2-8x+7}$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{(\sqrt{1+x})^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{|1+x|-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{1+x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=2$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{2-x^2}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+3-4\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}{\left(2-x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}+1\right)}{-\left(x^2-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x^2}+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x^2-8x+7}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt[3]{x-6}-1\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}{\left(x^2-8x+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^3-1}{(x-7)\cdot(x-1)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)\cdot(x-1)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2+\sqrt[3]{x-6}+1\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{1}{(x-1)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x-6}\right)^2 + \sqrt[3]{x-6}+1\right)} = \frac{1}{6\cdot(1+1+1)} = \frac{1}{18}$$

Приклад 5. Знайти границю:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) = (\infty-\infty) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} = 0$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) = (\infty-\infty) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1.$$

Самостійно:

Знайти границі:

1). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2+5x-24}$; 2). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{4x^2+x-1}$; 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^2-5x+3}$;

4). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{2-\sqrt{2+x}}$; 5). $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+2x^3-9}{6x^6+3x^2+x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5+x}-3}{x^2-x-12}$; 8). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{\sqrt[3]{x+7}-2}$;

Теоретичні запитання

1. Яке означення границі функції?
2. Які функції називають нескінченно малими та нескінченно великими? Який зв'язок між ними?
3. Які є невизначеності та які правила їх розкриття?

2. Застосування важливих границь.

Приклад 1. Знайти границі:

1)1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-7x+10}$.

3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; 4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x\operatorname{tg}3x}$

<u>*Границя функції*</u>

Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ при x прямуючим до a ($x\to a$), якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від a, відповідні значення функції $y=f(x)$ достатньо мало відрізняються від числа A, і записується це так

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad \text{або} \quad f(x)\to A \text{ при } x\to a$$

Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ може утворитись і при обчисленні границітригонометричних виразів. Для розкриття невизначеності в цьому випадку заданий вираз перетвореннями зводять до *першої важливої границі*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

<u>*Наслідки першої важливої границі*</u>**:**

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=\left|\begin{array}{l}\text{якщо } x\to 0,\\ \text{то } kx\to 0\end{array}\right|=k\cdot\lim_{kx\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k;$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{1}\cdot 1=1;$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{array}{l}\arcsin x=t\\ x=\sin t\\ x\to 0\ \Rightarrow\ t\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\dfrac{1}{1}=1.$

Розкриття невизначеності 1^{∞}

Невизначеність виду 1^{∞} утворюється при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$.

Позбавитись цієї невизначеності можна скориставшись одним з двох способів:

1) звести до *другої важливої границі*: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

або її *наслідків*: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$

2) застосувати формулу

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$

$$=2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}\cdot 2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}\cdot 2}\cdot 1=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-7x+10}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{tg}(x-2)}{(x-2)(x-5)}=\lim_{x-2\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x-2)}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-5}=1\cdot\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

3). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{vmatrix} x\to 0 \\ \arcsin 3x\to 3x\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$;

4).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\,\mathrm{tg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)\cdot\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{xtg3x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{2x}{2}\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{xtg3x}=\begin{vmatrix} x\to 0 & \sin^2 x\to x^2 \\ & tg3x\to 3x\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{x\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)}{3}=$$

$$=\frac{2\cdot 3}{3}=2$$

Приклад 2. Знайти границі:

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x}$; 2). $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Розв'язання.

1). При застосуванні властивості границі отримуємо в основі виразу невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$; якщо її позбавитись за відповідним правилом, то отримаємо 1^{∞}. Далі

1 спосіб:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+3}{x-2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{2\cdot\frac{x-2+2}{3}\cdot 3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{6\left(\frac{x-2}{3}+\frac{2}{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{6\frac{x-2}{3}+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{6}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{4}=e^{6}\cdot 1^{4}=e^{6}$$

2 спосіб:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-x+2}{x-2}\right)2x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{1-\frac{2}{x}}}=e^{\frac{6}{1-0}}=e^{6}$$

2).

$$\lim_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 3}\left(1+(3x-9)\right)^{\frac{2}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(1+(3x-9)\right)^{\frac{1}{3x-9}\cdot\frac{(3x-9)2}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{6(x-3)}{x-3}}=e^{6}$$

3).

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos 2x}{\cos x}-1\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos 2x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos 2x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{\cos 2x-\cos x}\cdot\frac{\cos 2x-\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{\cos x\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+x}{2}\sin\frac{x-2x}{2}}{\cos x\sin^2 x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x^2\cos x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2\cos x}}=e^{-\frac{3}{2}}$$

Самостійно:

Знайти границі:

1). $\lim\limits_{x \to 0} 5x\operatorname{ctg} 3x$; 2). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+\sin x - \cos x}{1-\sin x - \cos x}$; 3). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x}$;

4). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{x+1}$; 5). $\lim\limits_{x \to 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$; 6). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin^2 x}$;

7) $\lim\limits_{x \to 0} (1+3\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$; 8). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{2x}$;

Теоретичні запитання

1. Яке означення границі функції?
2. Які є невизначеності та які правила їх розкриття?
3. Назвіть першу та другу важливі границі і їх наслідки.
4. Як розкривають невизначеності видів: $\dfrac{0}{0}$ та 1^{∞} застосовуючи важливі границі?

3. Дослідження функцій на неперервність.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

<u>Неперервність функції</u> $y = f(x)$

Якщо функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, яка дорівнює $f(x_0)$, то ця функція називається *непервною* в точці x_0.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу ($\Delta x \to 0$) відповідає нескінченно малий приріст функції ($\Delta y \to 0$), тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – границя функції в точці x_0 зліва.

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – границя функції в точці x_0 справа.

Функція має границю в точці, якщо її односторонні границі (границя зліва і границя справа) в цій точці рівні між собою.

Теорема. Функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Функція називається *неперервною на інтервалі* (скінченному або нескінченному), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Зауваження. Якщо функція не існує в точці x_0 або не виконується умова теореми про неперервність, то кажуть що функція в точці x_0 має *розрив*, а x_0 називають *точкою розриву функції*.

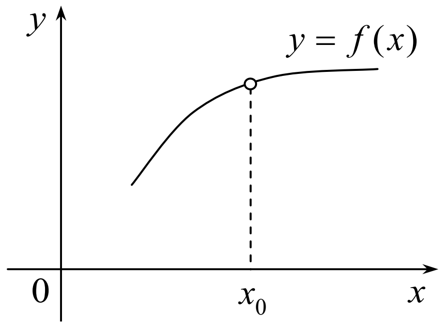
<u>*Класифікація точок розриву*</u>

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив *I роду (усувний)*, якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$$

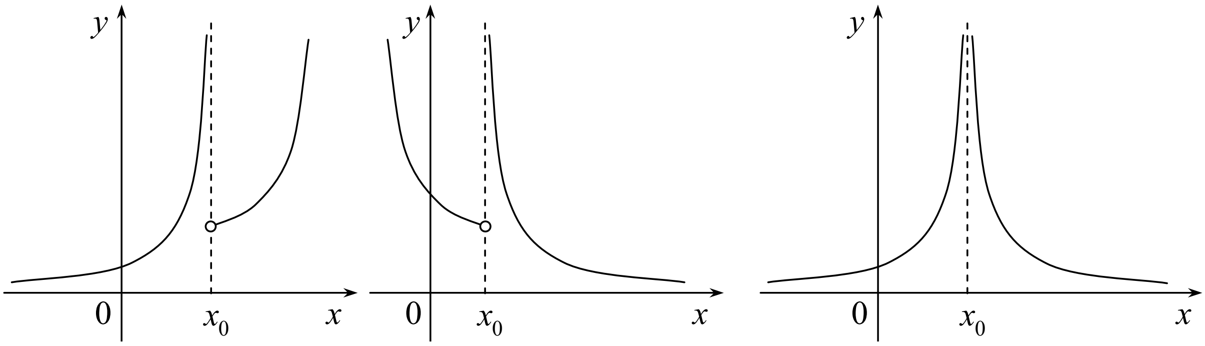
або

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, а $f(x_0)$ не існує.



В цьому випадку покладають, що $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

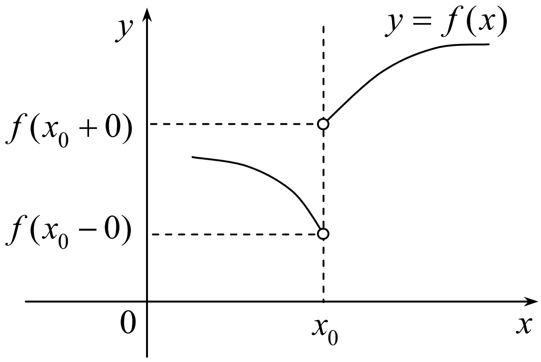
Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив ***II роду***, якщо хоча б одна з границь $f(x_0 - 0)$ або $f(x_0 + 0)$ дорівнює нескінченності або не існує.



а) б) в)

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив *I роду (неусувний)*, якщо

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$



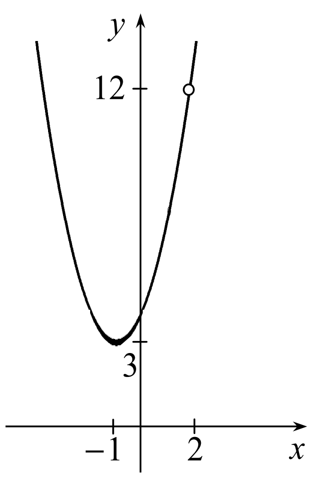
В цьому випадку різницю $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називають *стрибком* функції в точці x_0 .

Розв'язання.

В точці $x = 2$ функція не існує, тобто в цій точці функція має розрив. Знайдемо границі в цій точці зліва та справа:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-0} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2+0} (x^2 + 2x + 4) = 12$$



Маємо, що $f(2-0) = f(2+0)$. Тобто в точці $x = 2$ функція має розрив I роду.

Розрив в точці $x = 2$ можна „усунути", якщо покласти

$$f(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12 .$$

Так як $\dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$, то графіком заданої функції є парабола $y=(x+1)^2+3$ з виколотою точкою $(2,12)$

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y=\begin{cases}-x+1, & x\le 1;\\ 2x^2-2, & 1<x\le 3;\\ 5, & x>3.\end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція визначена на множині всіх дійсних чисел. Дослідимо її поведінку в точках $x=1$ та $x=3$. Для цього знайдемо в цих точках односторонні границі та значення функції.

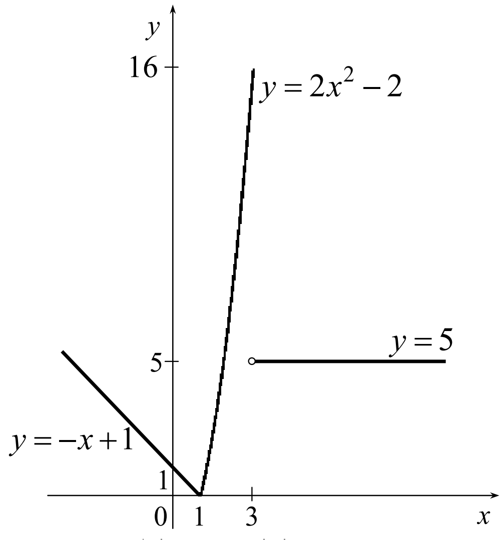
В точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(-x+1)=0;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(2x^2-2)=0;$$

$$f(1)=-1+1=0.$$

Оскільки $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$, то функція неперервна в точці $x=1$.



В точці $x=3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}(2x^2-2)=16;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0} 5=5;$$

$$f(3)=2\cdot 3^2-2=16.$$

Так як $f(3-0)\ne f(3+0)$, то в точці $x=3$ функція має розрив I роду (неусувний), тобто в цій точці стрибок .

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y=1+5^{\frac{1}{x+1}}$$

Розв'язання. Задана функція неперервна при всіх дійсних значеннях x, окрім $x=-1$, оскільки при цьому значенні знаменник дробу $\dfrac{1}{x+1}$ дорівнює нулю. Отже, в точці $x=-1$ функція має розрив. Дослідимо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to-1-0}\left(1+5^{\frac{1}{x+1}}\right)=1+\lim_{x\to-1-0}5^{\frac{1}{x+1}}=\left|\begin{array}{l}\text{так як } \lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{1}{x+1}=-\infty,\\ \text{то } \lim\limits_{x\to-1-0}5^{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{t\to-\infty}5^{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{5^{t}}=0\end{array}\right|=1;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\left(1+5^{\frac{1}{x+1}}\right)=1+\lim_{x\to-1+0}5^{\frac{1}{x+1}}=\left|\begin{array}{l}\text{так як } \lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{1}{x+1}=+\infty,\\ \text{то } \lim\limits_{x\to-1-0}5^{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{t\to+\infty}5^{t}=+\infty\end{array}\right|=+\infty.$$

Оскільки границя справа дорівнює нескінченності, то в точці $x=-1$ функція має розрив другого роду.

Для зображення функції дослідимо її ще при $x\to\pm\infty$:

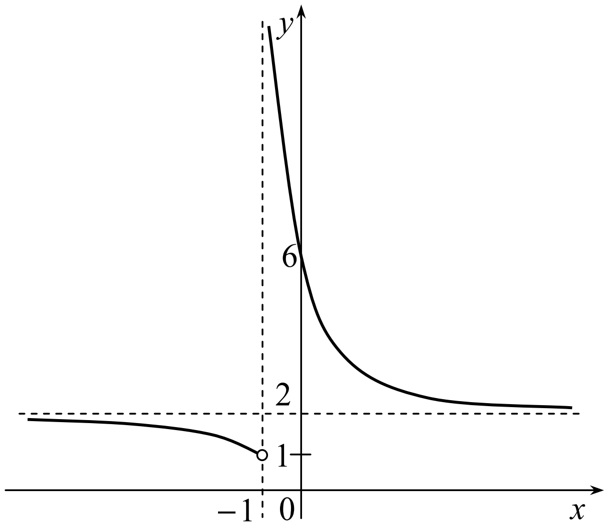
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+5^{\frac{1}{x+1}}\right)=1+\lim_{x\to\pm\infty}5^{\frac{1}{x+1}}=1+\lim_{t\to0}5^{t}=1+1=2.$$

Враховуючи, що

$f(-1)$ не існує,

при $x\to-1-0$ $\quad f(x)\to1$,
при $x\to-1+0$ $\quad f(x)\to+\infty$,
при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$ $\quad f(x)\to2$,

побудуємо графік заданої функції



Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y=\frac{x+2}{x^{2}-9}$$

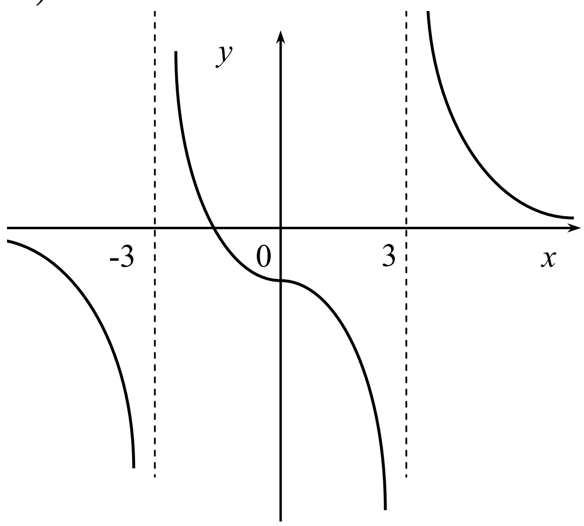
Розв'язання.

В точках: $x_1 = 3$ та $x_2 = -3$ функція не існує, тобто в цих точках функція має розрив. Знайдемо границі в цих точках зліва та справа:

1. <u>Розглянемо точку $x_1 = 3$</u>

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{x \;\; +2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3-0} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{x \;\; +2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3+0} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = +\infty$$



Маємо, що $f(3-0) = -\infty$; $f(3+0) = +\infty$. Тобто в точці $x_1 = 3$ функція має розрив другого роду.

2.<u>Розглянемо точку $x_2 = -3$</u>

$$\lim_{x \to -3-0} \frac{x \;\; +2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3-0} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{x \;\; +2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3+0} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} = +\infty$$

Маємо, що $f(-3-0) = -\infty$; $f(-3+0) = +\infty$. Тобто в точці $x_2 = -3$ функція має розрив другого роду.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y = \begin{cases} x+3, & x \le -1; \\ 2x^2, & -1 < x \le 1; \\ 3, & x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція визначена на множині всіх дійсних чисел. Дослідимо її поведінку в точках $x = -1$ та $x = 1$. Для цього знайдемо в цих точках односторонні границі та значення функції.

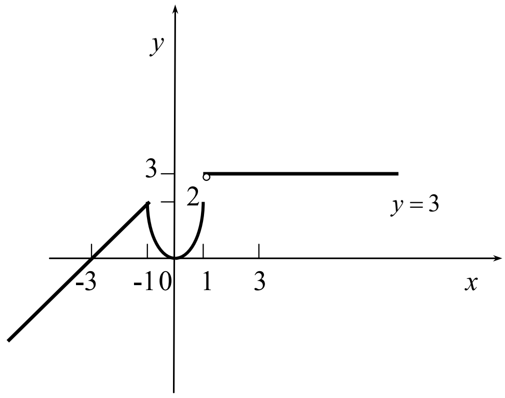
В точці $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x+3) = 2$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}(x+3) = 2;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}(2x^2) = 2;$$

Оскільки $f(-1-0) = f(-1+0) = f(-1) = 2$, то функція неперервна в точці $x = -1$.



В точці $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x^2) = 2$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(2x^2) = 2;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 3 = 3;$$

Так як $f(1-0) = f(1+0) \neq f(1)$, то в точці $x = 1$ функція має розрив I роду (неусувний), тобто в цій точці стрибок .

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

$$y = 2^{\frac{1}{x-3}}$$

Розв'язання.

Задана функція неперервна при всіх дійсних значеннях x, окрім $x = 3$, оскільки при цьому значенні знаменник дробу $\dfrac{1}{x-3}$ дорівнює нулю. Отже, в точці $x = 3$ функція має розрив. Дослідимо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 3-0}\left(2^{\frac{1}{x-3}}\right) = \lim_{x\to -3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left| \begin{array}{l} \text{так як } \lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x-3} = -\infty, \\ \text{то } \lim\limits_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \lim\limits_{t\to -\infty} 2^t = \lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{1}{2^t} = 0 \end{array} \right| = 0;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\left(2^{\frac{1}{x-3}}\right)=\lim_{x\to 3+0}2^{\frac{1}{x-3}}=\left|\begin{array}{l}\text{так як }\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{=1}{x-3}=+\infty,\\ \text{то }\lim\limits_{x\to 3+0}2^{\frac{1}{x-3}}=\lim\limits_{t\to+\infty}2^{t}=+\infty\end{array}\right|=+\infty.$$

Оскільки границя справа дорівнює нескінченності, то в точці $x=3$ функція має розрив другого роду.

Для зображення функції дослідимо її ще при $x\to\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2^{\frac{1}{x-3}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}2^{\frac{1}{x-3}}=\lim_{t\to 0}5^{t}=1.$$

Враховуючи, що

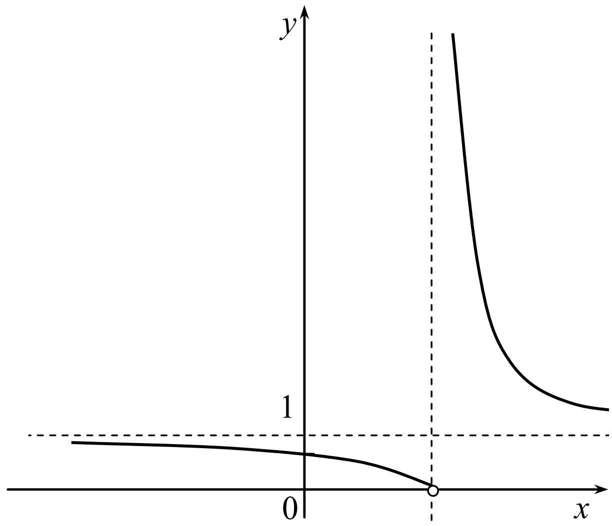
$f(3)$ не існує,

при $x\to 3-0$ $f(x)\to 0$,

при $x\to 3+0$ $f(x)\to+\infty$,

при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$ $f(x)\to 1$,

побудуємо графік заданої функції



Самостійно:

Дослідити на неперервність функцію, виявити характер розривів та зробити схематичний рисунок:

1). $y=13^{\frac{1}{5+x}}$; 2). $y=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x<4;\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$ 3). $y=\dfrac{x+3}{x^2-1}$

Теоретичні запитання

1. Які границі називають односторонніми?
2. Дайте означення неперервності функції в точці? Який критерій неперервності функції в точці?
3. Які точки є точками розриву функції? Дайте їх класифікацію.

Практичне заняття № 6

Тема: Диференціальне числення функції однієї змінної.

1. Обчислення похідних функцій.

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

а) $y = \ln \sin x$;

б) $y = \ln^3 \sqrt{x}$;

в) $y = \left(tg^3 \dfrac{x}{2} + e^{\sin 4x} \right)^5$

Правила диференціювання функцій

Нехай дано функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

1.	$(Cu)' = Cu'$, $C = const$
2.	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
3.	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4.	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Похідні основних елементарних функцій

1.	$(c)' = 0$, $c = const$	6.	$(\sin x)' = \cos x$
2.	$(x)' = 1$	7.	$(\cos x)' = -\sin x$
3.	$(x^n)' = nx^{n-1}$, n – будь-яке дійсне число	8.	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

	$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$	9.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
	$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$, a – дійсне число, $a > 0$, $a \neq 1$	11.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$(e^x)' = e^x$	12.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5.	$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$	13.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$		

Розв’язання.

1) Використовуючи таблицю диференціювання складної функції, маємо:

$$y' = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg} x$$

2)

$$y' = (\ln^3 \sqrt{x})' = 3\ln^2 \sqrt{x} \cdot (\ln \sqrt{x})' = 3\ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= 3\ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \ln^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$$

3).
$$y'=\left(\left(tg^3\frac{x}{2}+e^{\sin 4x}\right)^5\right)'=$$
$$=5\left(tg^3\frac{x}{2}+e^{\sin 4x}\right)^4\cdot\left(3\left(tg^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}+e^{\sin 4x}(\cos 4x)\cdot 4\right)$$

Приклад 2. Знайти похідні функцій: а) $y=\dfrac{\sin x}{x^3}$;

б). $y=3^{\cos 5x}\cdot\left(x^4-\sqrt{x-2}\right)$; в) $y=arctg(x-1)+\sqrt[4]{\ln x-3}$;

Розв'язання.

а) За правилом диференціювання дробу маємо

$$y'=\left(\frac{\sin x}{x^3}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot x^3-\sin x\cdot(x^3)'}{(x^3)^2}=\frac{\cos x\cdot x^3-\sin x\cdot 3x^2}{x^6}=$$
$$=\frac{x^2(\cos x\cdot x-\sin x\cdot 3)}{x^6}=\frac{x\cos x-3\sin x}{x^4}$$

б)

$$y'=\left(3^{\cos 5x}\cdot\left(x^4-\sqrt{x-2}\right)\right)'=\left(3^{\cos 5x}\right)'\cdot\left(x^4-\sqrt{x-2}\right)+$$
$$+3^{\cos 5x}\cdot\left(x^4-\sqrt{x-2}\right)'=3^{\cos 5x}\ln 3\cdot(-\sin 5x)\cdot 5\cdot\left(x^4-\sqrt{x-2}\right)+$$
$$+3^{\cos 5x}\cdot\left(4x^3-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)$$

в).

$$y'=\left(arctg(x-1)+\sqrt[4]{\ln x-3}\right)'=\left(arctg(x-1)\right)'+\left(\sqrt[4]{\ln x-3}\right)'=$$
$$=\frac{1}{1+(x-1)^2}+\frac{1}{4}\cdot(\ln x-3)^{\frac{-3}{4}}\cdot\frac{1}{x}$$

Самостійно:

Знайти похідні функцій:

1) $y=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{x^2-2}$; 2) $y=\ln\cos x+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2 x$;

3) $y = x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}$; 4) $y=\sqrt{1+\sin^2 2x}$;

5) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$; 6) $y=\mathrm{ctg}\cos 2+\dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$;

2. Обчислювати похідні степенево-показникових функцій, та функцій, які задані неявно або параметрично.

Приклад 1. Знайти похідну y'_x функції $e^y\sin y=\cos x$.

Похідна функції, що задана неявно

Функція називається ***неявно заданою***, якщо змінні x і y зв'язані між собою рівнянням, що не виражене відносно y, тобто у вигляді $F(x,y)=0$.

Для знаходження ***похідної*** y'_x ***неявно заданої функції*** диференціюють ліву і праву частину заданої рівності, враховуючи, що y – це функція від x, а отриману рівність розв'язують відносно y'_x.

Похідна степенево – показникового виразу.
Логарифмічне диференціювання

Степенево – показникова функція має вигляд $y=u^v$, де $u=u(x)$, $v=v(x)$, тобто u і v вирази, що містять незалежну змінну x.

Для знаходження похідної функції $y=u^v$ використовують ***спосіб логарифмічного диференціювання***. Цій спосіб полягає в тому, що задану функцію спочатку логарифмуємо

$$\ln y=\ln u^v,$$

тоді

$$\ln y = v\cdot\ln u.$$

Отримали функцію в неявній формі, тому для знаходження по-хідної y'_x диференціюємо ліву та праву частину останньої рівності, враховуючи, що y є функцією від x. Похідну правої частини знаходимо за правилом диференціювання добутку, похідні $\ln y$ і $\ln u$ – за правило диференціювання складної функції, отримаємо:

$$(\ln y)'=v'\cdot\ln u+v\cdot(\ln u)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

З останньої рівності:

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right),$$

де $y = u^v$.

Отже,

похідну степенево – показникової функції можна обчислити за формулою:

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right) \qquad (1)$$

Похідна функції, заданої параметрично

Функція називається заданою ***параметрично***, якщо відповідні одна одній змінні x та y виражені через деякий параметр t:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

де t – належить деякому інтервалу; найчастіше цей інтервал $(-\infty; +\infty)$.

Похідна y'_x ***параметрично заданої функції***:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Розв'язання. 1.) $e^y \sin y = \cos x$;

Диференціюємо ліву і праву частину рівності. Похідну лівої частини знаходимо за правилом диференціювання добутку:

$$(e^y)' \cdot \sin y + e^y \cdot (\sin y)' = (\cos x)'.$$

Так як y є функцією від x, то $(e^y)'$ і $(\sin y)'$ диференціюємо за правилом диференціювання складної функції:

$$e^y \cdot y' \cdot \sin y + e^y \cdot \cos y \cdot y' = -\sin x.$$

З останньої рівності знайдемо y':

$$e^y \cdot y' \cdot (\sin y + \cos y) = -\sin x$$

$$y' = -\frac{\sin x}{e^y \cdot (\sin y + \cos y)}$$

Приклад 2. Знайти похідні функцій

1) $y = (x+1)^{\cos x}$;

2) $y = (x+5)^2 (2x-7)^3 (x-2)$;

3) $y = \sin x^{2x+1}$.

Розв'язання.

1) Скористаємося правилом логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln\,(x+1)^{\cos x};$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln(x+1).$$

Знайдемо похідну лівої і правої частини рівності:

$$(\ln y)' = (\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot (\ln(x+1))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1}(x+1)'$$

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1} \right)$$

$$y' = (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1} \right)$$

Зауваження. Для диференціювання степенево-показникових функцій замість логарифмічного диференціювання можна одразу застосовувати вже готову формулу (1).

Тоді для нашого прикладу, враховуючи, що $u = x+1$, а $v = \cos x$, отримаємо:

$$y' = (x+1)^{\cos x} \cdot \left((\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x \cdot (x+1)'}{x+1} \right) =$$

$$= (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1} \right)$$

2) Функція $y = (x+5)^2 (2x-7)^3 (x-2)$ є степеневою, але замість того, щоб використовувати правило диференціювання добутку, легше скористатися правилом логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln\left((x+5)^2 (2x-7)^3 (x-2)\right)$$

$$\ln y = \ln (x+5)^2 + \ln (2x-7)^3 + \ln (x-2)$$
$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(2x-7) + \ln(x-2)$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \frac{1}{x+5} \cdot (x+5)' + 3 \cdot \frac{1}{2x-7} \cdot (2x-7)' + \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)'$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \frac{1}{x+5} + 3 \cdot \frac{1}{2x-7} \cdot 2 + \frac{1}{x-2}$$
$$y' = y \cdot \left(\frac{2}{x+5} + \frac{6}{2x-7} + \frac{1}{x-2} \right)$$
$$y' = (x+5)^2 (2x-7)^3 (x-2) \cdot \left(\frac{2}{x+5} + \frac{6}{2x-7} + \frac{1}{x-2} \right)$$

Зауваження. Також методом логарифмічного диференціювання зручно диференціювати і вирази, що містять корені з дробів.

3) Так як функція $y = \sin x^{2x+1}$ складна, то за правило диференціювання складної функції знайдемо похідну зовнішньої функції синус за змінною x^{2x+1} і помножимо на похідну x^{2x+1}: $y' = \cos x^{2x+1} \cdot (x^{2x+1})'$. Вираз x^{2x+1} – степенево-показниковий, але так як він міститься в іншому виразі, то застосувати правило логариф-мічного диференціювання неможливо, тому скористаємося вже готовою формулою похідної степенево-показникової функції:

$$y' = \cos x^{2x+1} \cdot (x^{2x+1})' = \cos x^{2x+1} \cdot x^{2x+1} \cdot \left((2x+1)' \cdot \ln x + \frac{(2x+1) \cdot (x)'}{x} \right) =$$
$$= \cos x^{2x+1} \cdot x^{2x+1} \cdot \left(2 \cdot \ln x + \frac{(2x+1) \cdot 1}{x} \right) = \cos x^{2x+1} \cdot x^{2x+1} \cdot \left(2\ln x + \frac{2x+1}{x} \right)$$

Приклад 3. Знайти похідну y'_x функції

$$\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Розв'язання. Враховуючи, що $\sin 2t$ і $\sin^2 t$ складні вирази і їх треба диференціювати за правилом диференціювання складної функції, маємо:

$$y'_t = 2 \cdot \sin t \cdot (\sin t)' = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = \sin 2t;$$

$$x'_t = \cos 2t \cdot (2t)' = \cos 2t \cdot 2 = 2\cos 2t.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{\sin 2t}{2\cos 2t} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg} 2t\,.$$

Самостійно:
Знайти похідні функцій:

1.) $\mathrm{tg}\frac{x}{y} = 5x;$

2.) $x - y + \mathrm{arcctg}\, y = 0;$

3.) $y\sin x = \cos(x - y);$

4.) $y = x^{\ln x};$

5.) $y = \left(x^8 + 1\right)^{\mathrm{tg}\, x};$

6.) $y = (\mathrm{arctg}\, x)^{\ln x};$

7.) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t; \\ y = t - \ln\sin t; \end{cases}$

8.) $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2 + 1}{3t^2}; \\ y = \cos\left(t^2 + t\right). \end{cases}$

9.) $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t); \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

Теоретичні запитання

1. Як знайти похідну функції, яка задана неявно?
2. Як знайти похідну функції, яка задана параметрично?
3. Як знайти похідну степенево-показникової функції?
4. Який спосіб використовують для знаходження похідної функції $y = u^v$?

3. Розв'язання задач на застосування похідної.

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$ на відрізку $[1;4]$.

<u>Необхідна умова існування екстремуму функції</u>

Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює 0 або не існує.

Обернене твердження не вірне: для деякої точки може виконуватись умова, що похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує, проте в цій точці може не існувати екстремуму.

Точки, в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує (можливі точки екстремуму) називають ***критичними точками першого роду***.

<u>Найбільше та найменше значення функції на відрізку</u>

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна у відрізку $[a;b]$, то в цьому від-різку завжди існують точки, в яких вона приймає найбільше і найменше значення. ***Найбільше*** і ***найменше*** значення функції знаходяться або всередині відрізка $[a;b]$ (в критичних точках, що належать цьому відрізку) або на кінцях відрізка $[a;b]$.

<u>Похідні вищих порядків</u>

Похідною n***-го порядку*** функції $y=f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають:

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n}$$

Розв’язання. Спочатку знайдемо область визначення функції:

$$x \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$$

Далі знайдемо критичні точки першого роду. Для цього обчислимо похідну заданої функції і прирівняємо її до 0:

$$f'(x)=(x)'+(4x^{-2})'=1+4\cdot\left(-2x^{-3}\right)=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

$$\frac{x^3-8}{x^3}=0$$

Розв’язуючи останнє рівняння маємо:

$$x^3-8=0 \qquad\qquad x^3\neq 0$$
$$x=2 \qquad\qquad x\neq 0$$

Отримали дві критичні точки: $x=2$ і $x=0$.

В точці $x=0$ не існує не тільки $f'(x)$, а і сама задана функція. Точка $x=2$ входить в область визначення. Також вона належить відрізку $[1;4]$, на якому відшукуємо найбільше та найменше значення функції, а тому її треба розглянути.

Знайдемо значення заданої функції в критичній точці $x=2$ і на кінцях заданого відрізка, тобто ще в точках $x=1$, $x=4$:

$$f(1)=1+\frac{4}{1^2}=5;\ f(2)=2+\frac{4}{2^2}=3;\ f(4)=4+\frac{4}{4^2}=\frac{17}{4}=4{,}25.$$

Серед цих значень функції найбільше 5 і найменше 3.

Таким чином, $\max\limits_{[1;4]} f(x) = f(1) = 5$, $\min\limits_{[1;4]} f(x) = f(2) = 3$.

Приклад 2. Знайти другу похідну y_x'' функції

$$\begin{cases} x = \sin 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Розв’язання. Враховуючи, що $\sin 2t$ і $\sin^2 t$ складні вирази, отримаємо:

$$y_t' = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = \sin 2t; \; y_t'' = 2\cos 2t;$$

$$x_t' = 2\cos 2t; \; x_t'' = 2 \cdot (-\sin 2t) \cdot 2 = -4\sin 2t.$$

Отже,

$$y_x'' = \frac{2\cos 2t \cdot 2\cos 2t - \sin 2t \cdot (-4\sin 2t)}{(2\cos 2t)^3} =$$

$$= \frac{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t}{8\cos^3 2t} = \frac{4(\cos^2 2t + \sin^2 2t)}{8\cos^3 2t} = \frac{1}{2\cos^3 2t}$$

Самостійно:

1.) Знайти найбільше та найменше значення функції $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{8}{x-2} + 5$ на відрізку $[-2;1]$.

2.) Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5}$ на відрізку $[-3;3]$.

Теоретичні запитання

1. Дайте означення похідних вищих порядків. Який фізичний зміст другої похідної.
2. Сформулюйте означення максимуму та мінімуму функції.

4. Розв'язання задач на застосування похідної (продовження). Рівняння дотичної та нормалі. Обчислення границь за допомогою правила Лопіталя.

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = \frac{2}{x}$ в точці $(1,2)$.

<u>*Застосування похідної для дослідження функції*</u>

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{1}$$

Рівняння дотичної до графіка параметрично заданої функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру t_0:

$$y - y_0 = y_x'(t_0) \cdot (x - x_0) \tag{2}$$

Рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \tag{3}$$

Рівняння нормалі до графіка параметрично заданої функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру t_0:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_x'(t_0)} \cdot (x - x_0) \tag{4}$$

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y = \frac{2}{x}$:

$$y' = f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ дотичної до кривої в заданій точці $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Для цього в похідну $f'(x)$ замість x підставимо значення 1: $f'(x_0) = -2$.

Тоді за формулою (1) рівняння дотичної до кривої в точці $(1,2)$:

$$y-2=-2(x-1)$$

За формулою (3) рівняння нормалі до кривої в точці $(1,2)$:

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$$

Приклад 2. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання. В похідну

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2\sin t\cos t}{2\cos 2t}=\frac{\sin 2t}{2\cos 2t}=\frac{1}{2}\text{tg}2t$$

замість t підставимо значення $\dfrac{\pi}{6}$:

$$y'_x(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\text{tg}\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\text{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При $t_0=\dfrac{\pi}{6}$ маємо

$$x_0=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad y_0=\sin^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Тоді за формулою (2) рівняння дотичної до кривої:

$$y-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

За формулою (3) рівняння нормалі до кривої:

$$y-\frac{1}{4}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

Правило Лопіталя розкриття невизначеності

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ або $\left(\frac{0}{0}\right)$ і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені та диференційовані в околі точки x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{4}$$

Зауваженн 1. Правило Лопіталя можна застосовувати для знаходження границі неодноразово.

Зауваження 2. Правило Лопіталя можна застосовувати для розкриття невизначенностей видів: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $\left(\frac{0}{0}\right)$; $(\infty-\infty)$; $(0\cdot\infty)$; $\left(0^0\right)$; $\left(\infty^0\right)$; $\left(1^\infty\right)$.

Розв'язання.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

Приклад 4. Обчислити: 1.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$; 2.) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$;

3.) $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$; 4.) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$; 5.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

Розв'язання.

1.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$;

2.)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$$

3.)

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{-x}{1} = 0$$

4.)

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to0} e^{\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+3x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{1} = 3$$; отже $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = e^3$

5.)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = (\infty^0) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} tgx\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} tgx\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{x}}{ctgx} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

Таким чином $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = e^0 = 1$

Самостійно:

1.) Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = \dfrac{x^2-2x-3}{4}$ в точці, що відповідає параметру $x_0 = 4$.

2.) Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t; \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

3.) Обчислити: а.) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-4x+9}$; б.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+5}\right)$;

в.) $\lim\limits_{x\to+0} x^2 \ln 4x$; г.) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; 5.) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^{ctg 3x}$

Теоретичні запитання

1. За якими формулами знаходять рівняння дотичної та нормалі за допомогою похідної?
2. Сформулюйте правило Лопіталя.
3. .Які види невизначенностей розкриваються за допомогою правила Лопіталя?

5. Дослідження функцій на монотонність та екстремум (локальний, глобальний).

Приклад 1. Знайти проміжки зростання та спадання функції:
$y = x^3 - 12x + 11$

Достатня умова монотонності функції

Нехай задана диференційована функція $y = f(x)$. Якщо в деякому інтервалі похідна $f'(x) > 0$, то функція в цьому інтервалі ***зростає***; якщо в деякому інтервалі $f'(x) < 0$, то функція в цьому інтервалі ***спадає***. Інтервали, в яких функція зростає або спадає, називаються ***інтервалами монотонності функції***.

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має ***максимум*** (***мінімум***), якщо значення функції в цій точці більше (менше) ніж її значення в деякому околі точки x_0.

Максимум ($y_{\max}$) і мінімум ($y_{\min}$) функції називають ***екстремумом функції***. Точку, в якій функція має максимум або мінімум, називають точкою екстремуму функції.

Необхідна умова існування екстремуму функції

Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює 0 або не існує.

Обернене твердження не вірне: для деякої точки може виконуватись умова, що похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує, проте в цій точці може не існувати екстремуму.

Точки, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує (можливі точки екстремуму) називають ***критичними точками першого роду***.

Перша достатня умова існування екстремуму функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована. Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з „+” на „–”, то в точці x_0 функція має максимум; якщо з „–” на „+”, то мінімум; якщо знак не змінюється, то екстремуму немає.

Розв'язання. Областю існування функції $y = x^3 - 12x + 11$ є вся вісь OX. Знайдемо похідну функції: $y' = 3x^2 - 12$.

$$y' = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to x^2 - 4 = 0 \to \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$ критичні точки

На проміжку $(-\infty;-2)$, $y' \geq 0$, функція зростає;

На проміжку $(-2;2)$, $y' \leq 0$, функція спадає;

На проміжку $(2;+\infty)$, $y' \geq 0$, функція зростає;

Таким чином в точці $x = -2$ похідна функції змінює знак з «+» на «-» , тобто в цій точці функція буде мати екстремум. А $x = -2$ ці точка максимуму. В точці $x = 2$ похідна функції змінює знак з «-» на «+» , тобто в цій точці функція буде мати екстремум. А $x = 2$ ці точка минимуму.

Таким чином функція зростає на проміжку : $x \subset (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ та спадає на проміжку: $x \subset (-2;2)$

Приклад 2. Знайти проміжки зростання та спадання функції:

$$y = \frac{2x^2}{1 - x^2}$$

Розв'язання. Функція існує при будь яких значеннях x зокрема $x = 1$ та $x = -1$. Таким чином область існування функції є : $x \subset (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

Знайдемо похідну функції $y = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$:

$$y' = \left(\frac{2x^2}{1-x^2} \right)' = \frac{4x(1-x^2) - 2x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x - 4x^3 + 4x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$y' = 0$; $\frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$;

$x = 0$ критична точка.

На проміжку $(-\infty;-1)$, $y' \leq 0$, функція спадає;

На проміжку $(-1;0)$, $y' \leq 0$, функція спадає;

На проміжку $(0;1)$, $y' \geq 0$, функція зростає;

На проміжку $(1;+\infty)$, $y' \geq 0$, функція зростає;

Таким чином в точці $x = 0$ похідна функції змінює знак з «-» на «+» , тобто в цій точці функція буде мати екстремум. Точка $x = 0$ - точка мінімуму.

Функція зростає на проміжку : $x \subset [0;1) \cup (1;+\infty)$

спадає на проміжку: $x \subset (-\infty;-1) \cup (-1;0]$.

Самостійно:

Знайти проміжки зростання та спадання функцій:

1.) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; 2.) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; 3.) $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$

Теоретичні запитання

1. Які умови існування екстремуму?
2. Сформулюйте достатні умови зростання та спадання функцій.
3. Сформулюйте означення максимуму та мінімуму функції.

6. Дослідження функцій на опуклість, знаходження точок перегину.

Приклад 1. Знайти точки перегину, проміжки опуклості та угнутості функції:

$$y = 5x^2 + 20x + 9$$

Друга достатня умова існування екстремуму функції

Нехай $f'(x_0)=0$ і існує $f''(x_0)$. Тоді якщо $f''(x_0)<0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму, а якщо $f''(x_0)>0$, то мінімуму.

Графік функції $y=f(x)$ називається ***опуклим*** (***угнутим***) в деякому проміжку, якщо усі точки графіка функції лежать нижче (вище) її дотичних в цьому проміжку.

Достатня умова опуклості графіка функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена і двічі диференційована в деякому проміжку. Тоді якщо в цьому проміжку $f''(x)<0$, то графік функції в цьому проміжку опуклий, а якщо $f''(x)>0$, то угнутий.

Точка графіка функції, яка відокремлює його опуклу частину від угнутої називається точкою ***перегину***.

Точки, в яких $f''(x)=0$ або $f''(x)$ не існує, називають ***критичними точками другого роду***.

Ознака перегину графіка функції

Точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y=f(x)$, якщо вона є її критичною точкою другого роду і при переході через цю точку $f''(x)$ змінює знак.

Розв'язання. Областю існування функції $y=5x^2+20x+9$ є OX. Знайдемо вся вісь похідну функції: $y'=10x\ +20$.
Знайдемо критичні точки другого роду: $y''=0$.
$y''=10>0$, т.я. $y''>0$ при будь якому значенні змінної x,то кривая угнута на усьому прміжку $(-\infty;+\infty)$. Точок перегину немає.

Приклад 2. Знайти точки перегину, проміжки опуклості та угнутості функції:

$$y=\frac{3}{x-2}$$

Розв'язання. Областю існування функції $y=\dfrac{3}{x-2}$ є: $x\subset(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Знайдемо похідну функції $y=\dfrac{3}{x-2}$: $y'=\left(\dfrac{3}{x-2}\right)'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}$;

$y'=0$; $y'=-\dfrac{3}{(x-2)^2}=0$; $-\dfrac{3}{(x-2)^2}\neq 0$; критичних точок першого рода немає.

Знайдемо критичні точки другого роду: $y''=0$.

$$y''=\left(-\frac{3}{(x-2)^2}\right)''=\frac{6(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{6}{(x-2)^3}$$

$$y''=\left(-\frac{3}{(x-2)^2}\right)''=\frac{6}{(x-2)^3}\neq 0$$ критичних точок

Таким чином критичних точок другого роду немає.

Знайдемо проміжки опуклості та угнутості функції:

Перевіримо знак y'' на проміжках області існування:

$x\subset(-\infty;2)\to y''<0$, на цьому проміжку функція опуклая;

$x\subset(2;+\infty)\to y''>0$, на цьому проміжку функція угнутая.

Точок перегину немає.

Приклад 3. Знайти точки перегину, проміжки опуклості та угнутості функції:

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

Розв'язання. Областю існування функції $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ є вся вісь ох.

Знайдемо похідну функції $y=\dfrac{x}{1+x^2}$:

$$y'=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};$$

$y'=0$; $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0\to$; критичні точки першого роду є.

Знайдемо критичні точки другого роду: $y'' = 0$.

$$y'' = \left(\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \right)' = \frac{-2x\left(1+x^2\right)^2 - \left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{-2x\left(1+x^2\right) - 4x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3} = 0$$

$$\frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3} = 0 \to 2x^3-6x=0 \to 2x\left(x^2-3\right)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$$

Маємо три критичні точки другого роду.
Знайдемо проміжки опуклості та угнутості функції:
Перевіримо знак y'' на проміжках області існування:

$x \subset \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \to y'' < 0$, на цьому проміжку функція опуклая;

$x \subset \left(-\sqrt{3};0\right) \to y'' > 0$, на цьому проміжку функція угнутая.

$x \subset \left(0;\sqrt{3}\right) \to y'' < 0$, на цьому проміжку функція опуклая;

$x \subset \left(\sqrt{3};+\infty\right) \to y'' > 0$, на цьому проміжку функція угнутая.

Усі три точки будуть точками перегину.

Самостійно:

Знайти точки перегину, проміжки опуклості та угнутості функцій:

1.) $y = \dfrac{x-2}{x+4}$; 2.) $y = arctgx$

Теоретичні запитання

1. Дайте визначення опуклої та угнутості функції.
2. Дайте визначення точки перегину.
3. Яка ознака точки перегину?

7. Повне дослідження функції. Побудова графіків.

Приклад 1. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = \frac{x^2 + 2}{x}$$

Асимптоти

Асимптотою називають пряму лінію, до якої наближається графік функції $y = f(x)$, прямуючи у нескінченність.

Асимптоти можуть бути вертикальними, похилими і горизон-тальними:

1) Якщо хоча б одна з односторонніх границь функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює ∞ ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$), то пряма $x = x_0$ є ***вертикальною асимптотою*** графіка цієї функції.

   Тобто вертикальна асимптота $x = x_0$, де x_0 – точка розриву другого роду функції $y = f(x)$.

2) Рівняння ***похилої асимптоти*** функції $y = f(x)$ шукають у вигляді

$$y = kx + b,$$

де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{1}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - k \cdot x). \tag{2}$$

   Зауважимо, що в загальному випадку треба розглядати окремо границі при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$.

   Для знаходження границь (1) та (2) часто зручніше користуватися правилом Лопіталя.

   Якщо не існує скінченного значення границі (1), то похилої асимптоти немає.

   Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється у горизон-тальну.

3) Рівняння ***горизонтальної асимптоти*** функції $y = f(x)$

$$y = b,$$

де

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x). \tag{3}$$

   Треба розглядати окремо границі при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$.

   Якщо не існує скінченного значення границі (9), то горизон-тальної асимптоти немає.

Схема повного дослідження функції $y = f(x)$ і побудови її графіка:

1) Знайти область визначення функції.
2) Дослідити функцію на парність, непарність (якщо $f(-x) = f(x)$, то функція парна і має віссю симетрії вісь Oy; якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція непарна і має центром симетрії початок системи координат).
3) Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
4) Знайти точки розриву функції; знайти односторонні границі зліва та справа від точок розриву.
5) Знайти асимптоти графіка функції.
6) Знайти критичні точки першого роду; інтервали зростання та спадання; точки екстремумів та екстремальні значення функції.
7) Знайти критичні точки другого роду; інтервали опуклості та угнутості графіка функції; точки перегину та значення функції в точках перегину.
8) Побудувати в системі координат знайдені асимптоти та всі отримані при дослідженні точки. Потім, враховуючи інтервали монотонності, опуклості та угнутості, побудувати графік функції.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty;0) \bigcup (0;+\infty)$.
2. Перевіримо функцію на парність, непарність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 2}{(-x)} = \frac{x^2 + 2}{-x} = -\frac{x^2 + 2}{x} = -f(x)$$

Функція непарна, тому її графік симетричний відносно початку системи координат.

3. Точок перетину з віссю Ox і з віссю Oy немає.
4. В точці $x = 0$ функція має розрив.

Односторонні границі зліва та справа від точки розриву:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{x^2 + 2}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{x^2 + 2}{x} = +\infty.$$

5. Враховуючи пункт 4, маємо, що вертикальна асимптота $x = 0$.

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Отже, похила асимптота $y = x$ при $x \to \pm\infty$.

Знайдемо горизонтальну асимптоту $y = b$:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{2}{x}\right) = \infty$$

Маємо, що горизонтальна асимптота відсутня.

6. Знайдемо критичні точки першого роду. Для цього знайдемо похідну $f'(x)$ і розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x-(x^2+2)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2}$$

$$\frac{x^2-2}{x^2}=0$$

Звідси $\qquad x^2-2=0 \qquad\qquad x\neq 0$

$$x=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}4$$

Запишемо критичні точки та інтервали, на які вони поділяють область визначення функції в таблицю 1 (в перший рядок). Визначимо знак $f'(x)$ в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третім рядку таблиці визначимо характер монотонності функції.

Таблиця 1

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	не існує	–	0	+
$f(x)$	зростає ↑	max	спадає ↓	не існує	спадає ↓	min	зростає ↑

Отже, екстремуми функції: $y_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\approx -2{,}8$;

$$y_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\approx 2{,}8.$$

7. Знайдемо критичні точки другого роду. Для цього знайдемо другу похідну $f''(x)$ і розв'яжемо рівняння $f''(x)=0$:

8.

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)' = \frac{2x\cdot x^2-(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^3-2x^3+4x}{x^4} = \frac{4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

$$\frac{4}{x^3}=0 \qquad \Rightarrow \qquad x\neq 0$$

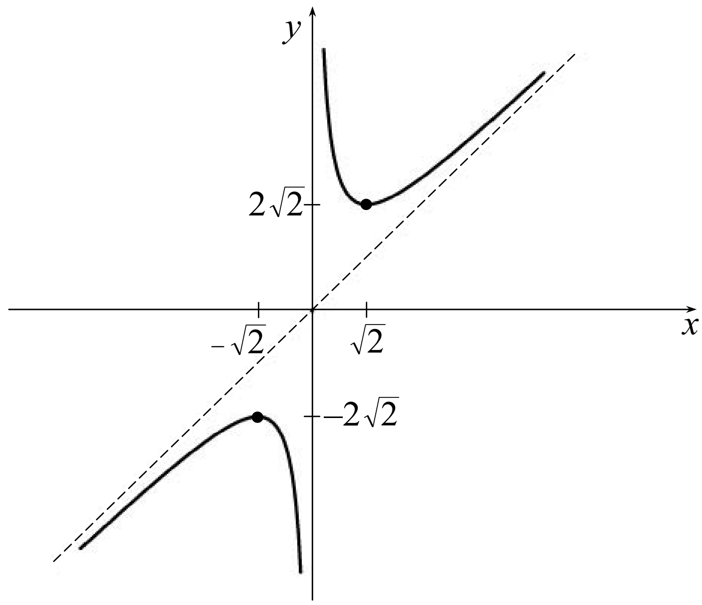
Маємо одну критичну точку другого роду $x=0$, проте ця точка не входить в область визначення. Інших критичних точок другого роду немає. Таким чином, точок перегину немає.

Так як критичних точок, що входять в область визначення немає, то запишемо тільки інтервали області визначення функції в таблицю 2 (в перший рядок). Знайдемо знак $f''(x)$ в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третім рядку таблиці визначимо опуклість та угнутість функції.

Таблиця 2

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	–	не існує	+
$f(x)$	опукла $\cap$	не існує	угнута $\cup$

9. Побудуємо в системі координат пунктирною лінією похилу асимптоту $y = x$ (асимптота $x = 0$ є віссю Oy) і відмітимо точки $y_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \approx -2{,}8$, $y_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$. Враховуючи асимптоти, інтервали зростання та спадання, опуклості та угнутості, через відмічені точки побудуємо графік функції.



Самостійно:

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = xe^{-\frac{x}{2}}$$

Теоретичні запитання

1. Як знаходять асимптоти?
2. Дайте схему повного дослідження функції та побудови графіка.

Практичне заняття № 7

Тема: **Інтегральне числення функції однієї змінної.**

1. Невизначені інтеграли. Методи інтегрування.

Приклад 1. Знайти $\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx$

<u>Таблиця основних інтегралів</u>

1.	$\int 0\,dx = C$	6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
2.	$\int dx = x + C$	7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$,	8.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
	де n – будь-яке дійсне число, $n \neq -1$	9.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$,	11.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
	де a – дійсне число, $a > 0$, $a \neq 1$ $\int e^x dx = e^x + C$	12.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
13.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	16.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$
14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	17.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$

<u>Властивості невизначеного інтеграла</u>

1. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, де $k = const$

2. $\int \left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right) dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$

3. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

4. $\int dF(x) = F(x) + C$

Розв’язання. Підінтегральну функцію розкладемо на суму:

$$\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx = \int \left(\frac{x^3}{2x} + \frac{4x}{2x} + \frac{2}{2x} \right) dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x} \right) dx$$

Застосуємо властивість 2 невизначеного інтеграла:

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{x^2}{2} dx + \int 2dx + \int \frac{1}{x} dx$$

До першого та другого інтеграли застосуємо властивість 1:

$$\int \frac{x^2}{2} dx + \int 2dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + 2\int dx + \int \frac{1}{x} dx$$

Отримали три табличних інтеграли. За формулами 3, 2, 4 відповідно таблиці основних інтегралів знаходимо:

$$\frac{1}{2} \int x^2 dx + 2\int dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C$$

Отже,

$$\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C$$

Метод заміни змінної

1) $$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)dt$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x}}$

Розв’язання. Щоб позбутись квадратного кореня зробимо заміну $x = t^2$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x}} = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = d(t^2) = (t^2)'\,dt = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{t^3 + t} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ t = \sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C$$

2) $$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,dx = dt \end{vmatrix} = \int f(t)\,dt$$

Частинний випадок:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \begin{vmatrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,dx = d(\varphi(x)) = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$$

Приклад 3. Знайти $\int x\sqrt{x-5}\,dx$

Розв'язання. Щоб позбутись квадратного кореня, зробимо заміну $x - 5 = t^2$. Тоді

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \begin{vmatrix} x - 5 = t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{x-5} \\ x = t^2 + 5 \\ dx = d(t^2+5) = (t^2+5)'\,dt = 2tdt \end{vmatrix} = \int (t^2+5)\cdot t \cdot 2tdt =$$

$$= 2\int (t^4 + 5t^2)dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 10\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x-5})^5 + \frac{10}{3}(\sqrt{x-5})^3 + C$$

Приклад 4. Знайти $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

Розв'язання. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2+1}dx$. Зробимо підстановку $e^x = t$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ d(e^x) = dt \\ (e^x)'dx = dt \\ e^x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \mathrm{arctg}\,t + C = \mathrm{arctg}\,e^x + C$$

Приклад 5. Знайти $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

Розв'язання. Так як $(x^2+1)' = 2x$, то

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)'dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left| x^2+1=t \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+1)+C$$

3) В інтегралі $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\cdot d(\varphi(x))$ підстановку $\varphi(x)=t$ можна робити уявно і інтегрувати за складною змінною $\varphi(x)$. В такому випадку метод називається ***підведенням під знак диференціала***.

Приклад 6. Знайти $\int \sin^3 x\cdot\cos x dx$

Розв'язання. Так як $(\sin x)' = \cos x$, то

$$\int \sin^3 x\cdot\cos x dx = \left| \cos x dx = (\sin x)'dx = d(\sin x) \right| =$$

$$= \int \sin^3 x\, d(\sin x) = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \int t^3 dt = \dfrac{t^4}{4} + C \end{array} \right| = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

Метод інтегрування частинами

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du,$$

де $u=u(x),\ \ v=v(x)$.

Інтеграли, які обчислюються методом інтегрування частинами:

1)

$$\int P_n(x)\cdot\sin kx\,dx \qquad \int P_n(x)\cdot\cos kx\,dx \qquad \int P_n(x)\cdot a^{kx}\,dx \qquad \int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx$$

$$u = P_n(x), \qquad dv = \begin{cases} \sin kx\,dx \\ \cos kx\,dx \\ a^{kx}dx \\ e^{kx}dx \end{cases}$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; k, a – дійсні числа, $a>0$, $a\neq 1$

Приклад 7. Знайти $\int x\cos x\,dx$

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами. Зауважимо, що при знаходженні v не має потреби дописувати „$+C$", так як довільна постійна буде додана в самому кінці розв'язання. Отже,

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = x\cdot \sin x - \int \sin x\, dx =$$

$$= x\cdot \sin x + \cos x + C$$

2)

$$\begin{array}{l|l} \int P_n(x)\cdot \arcsin kx\, dx & \\ \int P_n(x)\cdot \arccos kx\, dx & \\ \int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\, kx\, dx & u = \begin{cases} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \mathrm{arctg}\, kx \\ \mathrm{arcctg}\, kx \\ \log_a kx \\ (\log_a kx)^m \end{cases} \\ \int P_n(x)\cdot \mathrm{arcctg}\, kx\, dx & \\ \int P_n(x)\cdot \log_a kx\, dx & \\ \int P_n(x)\cdot (\log_a kx)^m\ dx & dv = P_n(x)\, dx \end{array}$$

Приклад 8. Знайти $\int \ln x\, dx$

Розв'язання. В даному випадку многочлен $P_n(x) = 1$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = \int dv = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\cdot \ln x - \int x\cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x\cdot \ln x - \int dx = x\cdot \ln x - x + C$$

3) $\int a^{kx}\cdot \sin mx\, dx$

$\int a^{kx}\cdot \cos mx\, dx$

В результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами отримаємо знов заданий інтеграл. Тоді ліву і праву частину рівності розв'язуємо як лінійне рівняння відносно заданого інтеграла.

В цьому випадку не важливо який з множників беремо за u, а який за dv, головне при повторному застосуванні формули розподілити функції подібним чином, як і при першому застосуванні.

Приклад 9. Знайти $\int e^x \sin x\, dx$

Розв’язання.

$$\int e^x \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u=\sin x & du=(\sin x)'\,dx=\cos x\,dx \\ dv=e^x dx & v=\int dv=\int e^x\,dx=e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u=\cos x & du=-\sin x\,dx \\ dv=e^x dx & v=\int e^x\,dx=e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot\sin x\,dx$$

Отже,

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot\sin x\,dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x\right)+C$$

Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен у знаменнику

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Перетворимо квадратний тричлен:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

Приклад 10. Знайти $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \left| \begin{array}{l} 2x^2+8x+20 = \\ = 2(x^2+4x+10) = \\ = 2(x^2+2\cdot 2x+4-4+10) \\ = 2\left((x+2)^2+6\right) \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

2. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$; $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Перетворимо вираз у чисельнику так, щоб він містив похідну квадратного тричлена:

$$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$$

$$Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)$$

Тоді, враховуючи, що

$$(2ax+b)dx = (ax^2+bx+c)'\,dx = d(ax^2+bx+c),$$

маємо

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c};$$

Приклад 11. Знайти $\int \frac{x-1}{2x^2+8x+20}dx$

Розв’язання.

$$\int \frac{x-1}{2x^2+8x+20}dx = \left| \begin{aligned} &(2x^2+8x+20)' = 4x+8 \\ &x-1 = \frac{1}{4}(4x+8)-3 \end{aligned} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+20} -$$

$$-3\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+20)}{2x^2+8x+20} - 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+2\right)^2+6} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+8x+20\right| - \frac{3}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дробово-раціональною функцією (або раціональним дробом) називається функція, у якої в чисельнику і знаменнику многочлен:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; $Q_m(x)$ – многочлен степеня m.

Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менше степеня знаменника ($n < m$); в протилежному випадку ($n \geq m$) – неправильним.

Інтегрування правильних раціональних дробів за допомогою розкладання на найпростіші раціональні дроби (методом невизначених коефіцієнтів)

Найпростіші правильні раціональні дроби (***елементарні дроби***) мають вигляд

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\ \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

причому ax^2+bx+c не розкладається на множники (тобто $D = b^2-4ac < 0$ і квадратний тричлен не має дійсних коренів).

Правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$) можна представити у вигляді суми найпростіших дробів.

Приклад 12. Знайти $\int \frac{11x-4}{(x-2)(x^2+2x-8)}dx$

Розв'язання. Квадратний тричлен у знаменнику має дійсні корені $x = 2$ і $x = -4$, а тому його можна розкласти: $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$.

Тоді

$$\int \frac{11x-4}{(x-2)(x^2+2x-8)}dx = \int \frac{11x-4}{(x-2)^2(x+4)}dx$$

Розкладемо підінтегральний раціональний дріб на суму найпростіших дробів. Множнику $(x-2)^2$ буде відповідати 2 дроби, а множнику $(x+4)$ – один:

$$\frac{11x-4}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x+4}$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти A_1, A_2, A_3.

В останній рівності в правій частині приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{11x-4}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{A_1(x-2)(x+4) + A_2(x+4) + A_3(x-2)^2}{(x-2)^2(x+4)}$$

Так як у дробів зліва та справа знаменники рівні, то прирівняємо тільки чисельники:

$$11x - 4 = A_1(x-2)(x+4) + A_2(x+4) + A_3(x-2)^2$$

1 спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів
(метод порівняння коефіцієнтів)

Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частини рівності:

$$11x - 4 = A_1x^2 + 2A_1x - 8A_1 + A_2x + 4A_2 + A_3x^2 - 4A_3x + 4A_3$$

$$11x - 4 = (A_1 + A_3)x^2 + (2A_1 + A_2 - 4A_3)x - 8A_1 + 4A_2 + 4A_3$$

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & x^2 & A_1 + A_3 = 0 \\ \text{при} & x & 2A_1 + A_2 - 4A_3 = 11 \\ \text{при} & x^0 & -8A_1 + 4A_2 + 4A_3 = -4 \end{array}$$

З цих рівнянь отримуємо: $A_1 = \frac{4}{3},\ A_2 = 3,\ A_3 = -\frac{4}{3}$.

2 спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів (метод довільних значень аргументу)

В рівності $11x - 4 = A_1(x-2)(x+4) + A_2(x+4) + A_3(x-2)^2$ покладемо довільні значення x і знайдемо коефіцієнти $A_1,\ A_2,\ A_3$:

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & x = -4 & A_3 = -\frac{4}{3} \\ \text{при} & x = 2 & A_2 = 3 \\ \text{при} & x = 0 & -8A_1 + 4A_2 + 4A_3 = -4 \Rightarrow A_1 = \frac{4}{3} \end{array}$$

Таким чином, заданий інтеграл набуває вигляду

$$\int \frac{11x-4}{(x-2)(x^2+2x-8)}dx = \int \left(\frac{\frac{4}{3}}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{4}{3}}{x+4} \right) dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+4} = \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} - \frac{4}{3}\ln|x+4| + C$$

Приклад 13. Знайти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$

Розв'язання. Множник знаменника (x^2+1) не має дійсних коренів, а тому

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

В правій частині приведемо до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Комбінований спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів (поєднання способів 1 і 2)

при $x=1$	$A=\frac{1}{2}$
при x^2	$A+B=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$
при x^0	$A-C=0 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

Таким чином,

$$\int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

Інтегрування неправильних раціональних дробів

Якщо раціональний дріб неправильний, то за допомогою ділення кутом чисельника на знаменник (по правилу ділення многочленів) його представляють у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.

Приклад 14. Знайти $\int\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+4x-1}dx$

Розв’язання. Представимо підінтегральну функцію у вигляді многочлена та правильного раціонального дробу:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3+2x^2+x-1 \\ x^3+4x^2-x \end{array} & \underline{x^2+4x-1} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{l} -2x^2+2x-1 \\ -2x^2-8x+2 \end{array} & x-2 \\
\cline{1-1}
10x-3 &
\end{array}
$$

$$
\int\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+4x-1}dx=\int\left(x-2+\frac{10x-3}{x^2+4x-1}\right)dx=\int xdx-2\int dx+
$$

$$
+5\int\frac{2x+4-\frac{23}{5}}{x^2+4x-1}dx=\int xdx-2\int dx+5\int\frac{d(x^2+4x-1)}{x^2+4x-1}-23\int\frac{dx}{(x+2)^2-5}=
$$

$$
=\frac{x^2}{2}-2x+5\ln\left|x^2+4x-1\right|-\frac{23}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right|+C
$$

<u>Інтегрування тригонометричних функцій</u>

I. Для інтегралів виду

$$\int\sin mx\cdot\cos nx\,dx,$$

$$\int\cos mx\cdot\cos nx\,dx,$$

$$\int\sin mx\cdot\sin nx\,dx$$

використовують формули

$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m-n)x+\sin(m+n)x);$$

$$\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x);$$

$$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x).$$

Приклад 15. Знайти $\int\sin 5x\cdot\sin 3xdx$

Розв'язання.

$$\int\sin 5x\cdot\sin 3xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx=\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 8x}{16}+C$$

II. Для інтегралів виду

$$\int \sin^{2m} x\, dx,$$

$$\int \cos^{2n} x\, dx,$$

$$\int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x\, dx,$$

де $m, n \in N$, тобто степені є цілими додатними парними числами, використовують формули зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Приклад 16. Знайти $\int \sin^4 x dx$

Розв'язання. Так як $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$, то формулу зниження степеня треба застосувати двічі

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

III.

	Для інтегралів виду:	використовують підстановки:	
1)	$\int R(\sin x) \cdot \cos x\, dx$	$\sin x = t$,	$\cos x\, dx = dt$
2)	$\int R(\cos x) \cdot \sin x\, dx$	$\cos x = t$,	$\sin x\, dx = -dt$
3)	$\int R(\operatorname{tg} x)\, dx$	$\operatorname{tg} x = t$,	$x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{t^2 + 1}$

де $R(\sin x)$, $R(\cos x)$, $R(\operatorname{tg} x)$ означає раціональний вираз, що містить тільки відповідну тригонометричну функцію.

Приклад 17. Знайти $\int \dfrac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$

Розв'язання. За допомогою перетворень приведемо підінтегральну функцію до вигляду $R(\cos x) \cdot \sin x$ і зробимо відповідну підстановку:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^4 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x} \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4} dt = -\int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = -\left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t \right) + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C$$

Приклад 18. Знайти $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$

Розв'язання. За допомогою перетворень приведемо підінтегральну функцію до вигляду $R(\operatorname{tg} x)$ і зробимо відповідну підстановку:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^4 x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, d(\operatorname{tg} x) = \left| \ \operatorname{tg} x = t \ \right| =$$

$$= \int t^4 (1 + t^2) dt = \int (t^4 + t^6) dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C$$

Приклад 19. Знайти $\int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx$

Розв'язання.

$$\int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{2 + \sin x} \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(1 - t^2)}{2 + t} dt =$$

$$= \int \left(-t + 2 - \frac{3}{2 + t} \right) dt = -\frac{t^2}{2} + 2t - 3 \ln |t + 2| + C =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x - 3 \ln(\sin x + 2) + C$$

IV. Для всіх інших інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ використовують ***універсальну тригонометричну підстановку***:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

враховуючи, що в цьому випадку

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад 20. Знайти $\int \frac{1}{1-\sin x} dx$

Розв'язання.

$$\int \frac{1}{1-\sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

Інтегрування деяких ірраціональних виразів

I. Для інтегралів виду $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$, $m, n, \ldots r, s \in N$

використовують підстановку

$$x = t^k, \qquad dx = k \cdot t^{k-1} dt,$$

де k – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m}{n}$, ..., $\frac{r}{s}$.

Приклад 21. Знайти $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx$

Розв'язання. Вирази $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x}$ можна представити відповідно як $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{1}{2}}$. Найменшим спільним кратним знаменників дробів, що стоять у степенях, є число 6. Отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(t^6\right)^{\frac{2}{3}} - \left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^2}{t^4 - t^3} t^5 dt =$$

$$=6\int\frac{t^7}{t^3(t-1)}dt=6\int\frac{t^4}{t-1}dt=6\int\left(t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=\begin{vmatrix}t^6=x\\ t=\sqrt[6]{x}\end{vmatrix}=$$

$$=6\left(\frac{(\sqrt[6]{x})^4}{4}+\frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3}+\frac{(\sqrt[6]{x})^2}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

Самостійно:

Знайти невизначені інтеграли:

1	1) $\int\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\sin 8x\,dx$; 3) $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$; 4) $\int x\sin 2x\,dx$
2	1) $\int\frac{(1-x)^2}{x^2}dx$; 2) $\int\sqrt{2x-3}dx$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+7}}$; 4) $\int x^2\ln x\,dx$;

Теоретичні запитання

1. Дайте означення первісної функції.
2. Що називається невизначеним інтегралом? Укажіть його геометричний зміст.
3. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтегралу.
4. Напишіть таблицю основних інтегралів.
5. Сформулюйте метод заміни змінної в невизначеному інтегралі.
6. Запишіть формулу інтегрування частинами.
7. Які раціональні дроби називаються найпростішими.
8. Сформулюйте правило розкладання правильної дробово-раціональної функції на елементарні дроби.
9. Укажіть алгоритм інтегрування дробово-раціональних функцій.
10. Укажіть прийоми інтегрування тригонометричних функцій.
11. Укажіть прийоми інтегрування ірраціональних функцій.

2.Визначений інтеграл

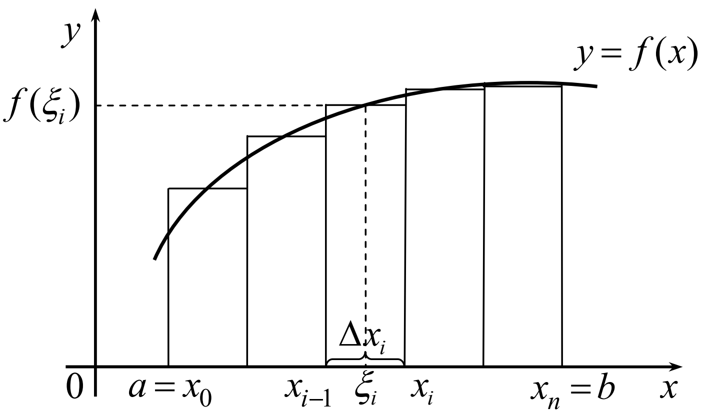


Рис. 1

Розглянемо функцію $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин, в кожній з яких виберемо точку ξ_i.

Тоді площа деякого i-того сегменту (рис. 1):

$$S_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ називають ***інтегральною сумою***.

Якщо існує границя інтегральної суми при умові, що довжина відрізків розбиття нескінченно зменшується $\Delta x_i \to 0$, а їх кількість нескінченно збільшується $n\to\infty$, і ця границя не залежить ні від розбиття відрізка $[a;b]$, ні від вибору точки ξ_i, то така границя називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла

$\int\limits_a^b f(x)dx$ – це площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$, $x=b$ (рис. 1).

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int\limits_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int\limits_a^b f(x)dx$, $k=const$

2. $\int\limits_a^b \big(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\big)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_3\ (x)dx$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$,

$a < c < b$ (рис. 2)

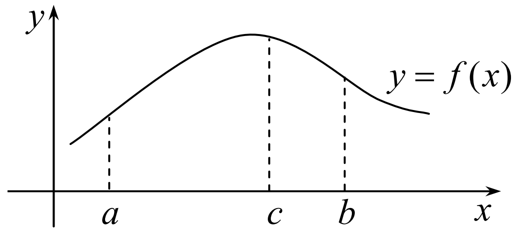


Рис. 2

6. Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) \ge 0$ (рис. 3), то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) < 0$ (рис. 4), то $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$.

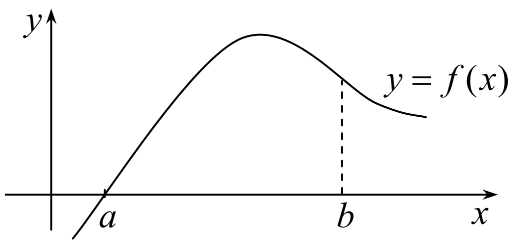


Рис. 3

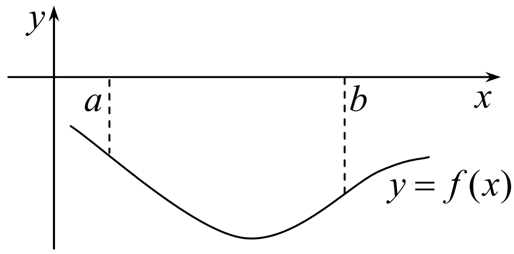


Рис. 4

7. Якщо функція $f(x)$ парна (рис. 5), тобто $f(-x) = f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ непарна (рис. 6), тобто $f(-x) = -f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

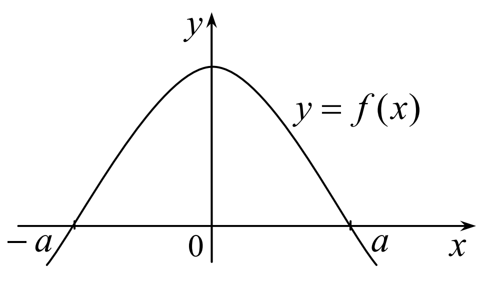


Рис. 5

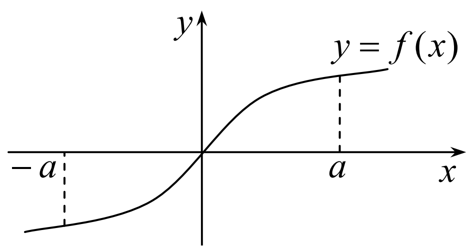


Рис. 6

8. Якщо на відрізку $[a;b]$ $f_1(x) < f_2(x)$ (рис. 7), то $\int\limits_a^b f_1(x)dx < \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

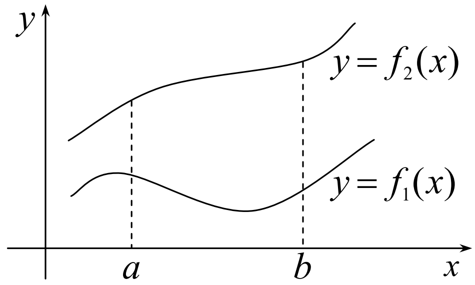


Рис. 7

Оцінка визначеного інтеграла

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і m – її найменше, а M – найбільше значення на цьому відрізку, то

$$m \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M \cdot (b-a)$$

Приклад 1. Оцінити інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}dx$

Розв'язання. Знайдемо найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt{8+x^3}$ на відрізку $[-1;1]$:

$$y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{8+x^3}}$$

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{8+x^3}} = 0 \Rightarrow x = 0;\ x \ne -2$$

$$f(0) = \sqrt{8} \approx 2{,}8;\ x = -2 \notin [-1;1];\ f(-1) = \sqrt{7} \approx 2{,}6;\ f(1) = 3$$

Отже, найменше $m = \sqrt{7}$, найбільше $M = 3$. Тоді

$$2\sqrt{7} \le \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}dx \le 6$$

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 8} e^{2x}dx$

Розв'язання.

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 8} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln 8} = \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 8} - e^{2\ln 2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 64} - e^{\ln 4}\right) = \frac{1}{2}(64-4) = 30$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \left|\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \text{при } \ x_1 = a, t_1 = \alpha \\ \text{при } \ x_2 = b, t_2 = \beta \end{array}\right| = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

Розв'язання.

$$\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left|\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \\ x = 3;\, t = 2 \\ x = 8;\, t = 3 \end{array}\right| = \int\limits_2^3 \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int\limits_2^3 \left(t^2-1\right)dt = 2\left(\int\limits_2^3 t^2dt - \int\limits_2^3 dt\right) =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^3 - t\Bigg|_2^3\right) = 2\left(\left(9 - \frac{8}{3}\right) - (3-2)\right) = \frac{32}{3}$$

Інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b u\, dv = u \cdot v\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b v\, du\,,$$

де $u = u(x),\ v = v(x)$.

Приклад 4. Обчислити $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos x\, dx$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= (\pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0) + \cos x \Big|_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -2$$

Середнє значення функції

Теорема. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому від-різку існує така точка c, що буде мати місце рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$$

Приклад 5. Знайти середнє значення функції $y = x^3$ на відрізку $[0;2]$.

Розв'язання. $f(c) = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{1}{8}(2^4 - 0) = 2$

Похідна визначеного інтеграла від неперервної функції зі змінними межами інтегрування

Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовані на відрізку $[a;b]$, $f(t)$ неперервна при $\varphi(a) \le t \le \psi(b)$ і $\Phi(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$, то

$$\Phi'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $\Phi(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \sqrt[3]{\operatorname{tg} t^2}\, dt$

Розв’язання.

$$\Phi'(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{1}{x^2}}}{x^2}$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $\Phi(x) = \int\limits_0^x \sqrt[3]{\operatorname{tg} t^2}\, dt$

Розв’язання.

$$\Phi'(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x^2} \cdot 1 - 0 = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x^2}$$

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі

1)

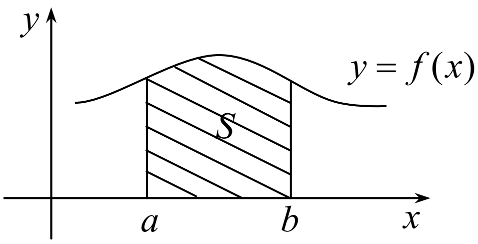


Рис. 8

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

2)

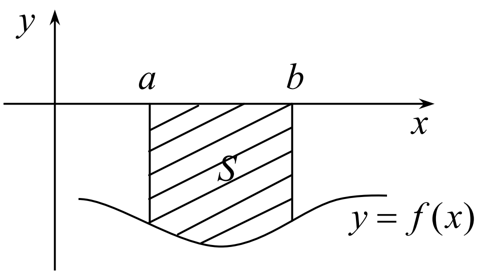


Рис. 9

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

3)

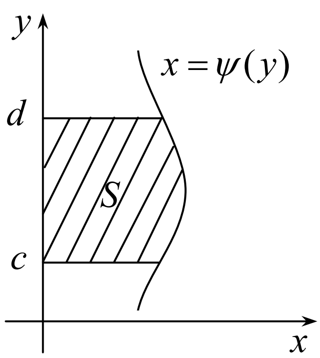


Рис. 10

$$S = \int\limits_c^d \psi(y)dy$$

4)

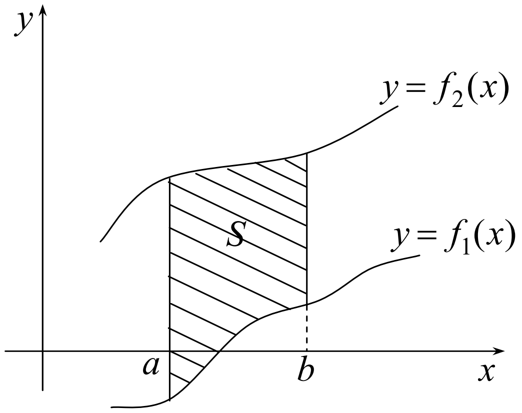


Рис. 11

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

5)

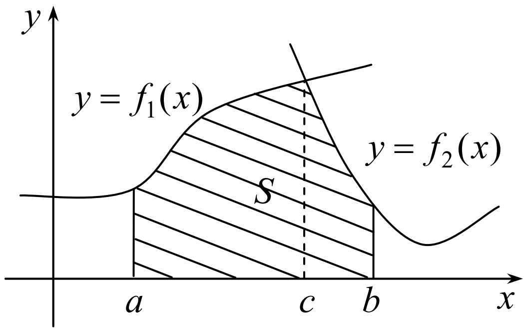


Рис. 12

$$S = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$$

Приклад 8. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - 3x$, прямими $x = 0$, $x = 4$ і віссю Ox.

Розв'язання. Спочатку будуємо задані лінії.

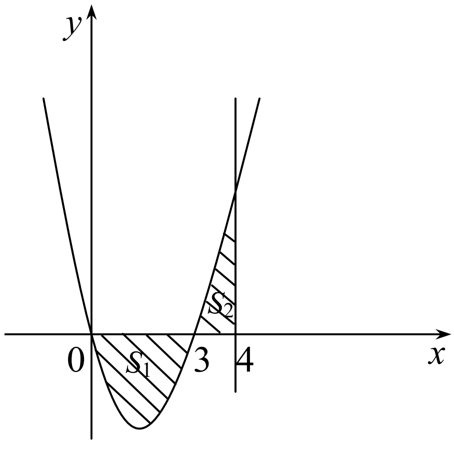


Рис. 13

Маємо дві замкнуті фігури (рис. 13). Отже, шукана площа складається з S_1 і S_2.

Враховуючи, що перша фігура знаходиться під віссю Ox, отримуємо

$$S = S_1 + S_2 = -\int_0^3 (x^2 - 3x)dx + \int_3^4 (x^2 - 3x)dx =$$

$$= -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 + \left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^3 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_3^4 - \left.\frac{3x^2}{2}\right|_3^4 = \frac{19}{3} \text{ (кв. од.)}$$

6) Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ де $t \in [t_1; t_2]$, то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt$$

Приклад 9. Знайти площу астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо графік. Для цього покладемо значення t від 0 до 2π і із заданої системи знайдемо точки астроїди з координатами (x, y).

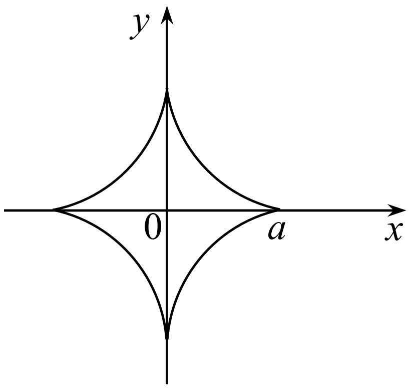


Рис. 14

Так як лінія симетрична (рис. 14), то достатньо обчислити площу для однієї чверті:

$t_1 = \dfrac{\pi}{2}$: $x_1 = 0$, $y_1 = a$

$t_2 = 0$: $x_2 = a$, $y_2 = 0$

$$x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$$

Тоді за відповідною формулою маємо:

$$S = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot (-3a\cos^2 t \cdot \sin t)dt = 12a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t \, dt$$

Поступово знижуючи степінь підінтегрального виразу, отримаємо

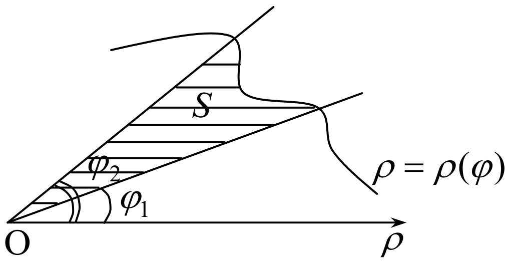
$$S = \frac{3}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 4t + \cos^3 2t \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 4t + (1 - \sin^2 2t)\cos 2t \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t - \sin^2 2t \cos 2t \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{\sin^3 2t}{6} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{8} \text{(кв. од.)}$$

7) Якщо функція задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, де $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, то



$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$$

Рис. 15

Приклад 10. Знайти площу кардіоїди $\rho = a(\cos\varphi + 1)$, $a > 0$

Розв'язання. Побудуємо цю лінію (рис. 16).

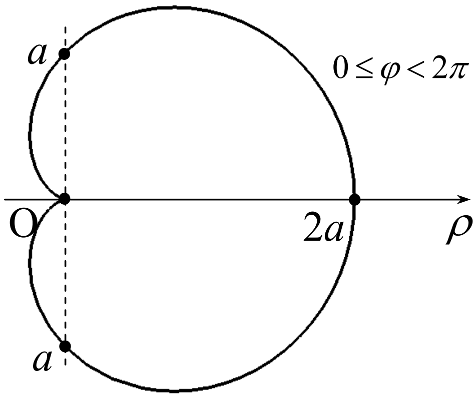


Рис. 16

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(\cos\varphi + 1)^2 d\varphi .$$

Так як фігура симетрична, то достатньо обчислити площу для $0 \le \varphi \le \pi$:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(\cos\varphi + 1)^2 d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 1) d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + 2\cos\varphi\right) d\varphi =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{3\pi a^2}{2} \text{ (кв. од.)}$$

Обчислення довжини дуги

1) В декартовій системі координат довжина лінії $y = f(x)$, $x \in [x_1; x_2]$

$$L = \int_{x_2}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Приклад 11. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $x \in [0;1]$.

Розв'язання. $y' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4 + e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}} dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{e^{2x}+2+e^{-2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^x\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{e^2-1}{2e}\text{ (од.)}$$

2) Довжина лінії, заданої параметрично $\begin{cases}x=x(t);\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in\left[t_1;t_2\right]$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$$

Приклад 12. Знайти довжину астроїди при $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t;\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$

Розв'язання. $x'=-3a\cos^2 t\cdot\sin t$, $y'=3a\sin^2 t\cdot\cos t$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\cdot\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cdot\cos t)^2}dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\cos t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=$$

$$=-\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3a}{4}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{3a}{2}\text{ (од.)}$$

3) Довжина лінії, заданої в полярній системі координат $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\;d\varphi$$

Приклад 13. Знайти довжину кардіоїди $\rho=a(\cos\varphi+1)$

Розв'язання. Для цієї лінії $\varphi\in[0;2\pi]$ (рис. 16).

$$\rho' = -a\sin\varphi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin\varphi)^2 + (a(\cos\varphi + 1))^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\cdot a\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 1}\, d\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi} \sqrt{\cos\varphi + 1}\, d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 8a \text{ (од.)}$$

Об'єм тіла обертання

Розглянемо тіло обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, $x \in [x_1; x_2]$ (рис. 17).

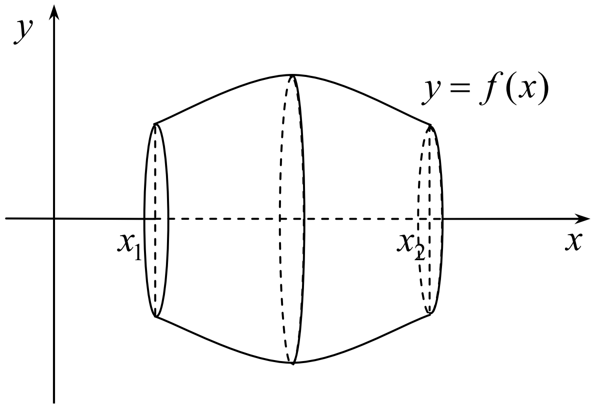


Рис. 17

Площа поперечного перерізу:

$$S = \pi R^2 = \pi y^2 = \pi \cdot (f(x))^2.$$

Тоді об'єм тіла обертання

$$V_{Ox} = \int_{x_1}^{x_2} S(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi(f(x))^2 dx$$

Аналогічно знаходиться об'єм тіла обертання навколо осі Oy.

Отже, об'єм тіла обертання:

$$V_{Ox} = \pi\int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx; \qquad V_{Oy} = \pi\int_{y_1}^{y_2} (\psi(y))^2 dy$$

Приклад 14. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо Ox фігури, обмеженої графіками функцій $y^2 = x$ і $x = 3$.

Розв'язання. Побудуємо графік (рис. 18).

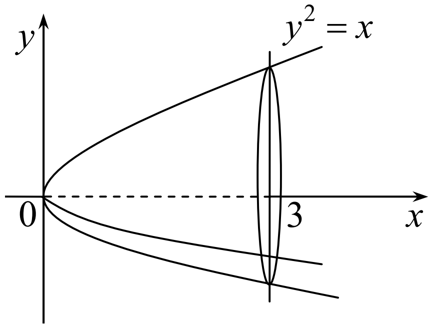


Рис. 18

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Підставимо $y^2 = x$ у формулу, отримаємо

$$V_{Ox} = \pi \int_0^3 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \bigg|_0^3 = \frac{9\pi}{2} \text{ (куб. од.)}$$

Самостійно:

Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:

1	$y = (x-2)^2$, $y = 4x - 8$.
2	$y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 3)$.
3	$y = 4 - x^2$ та $y = x^2 - 2x$.

Теоретичні запитання

1. Що називається визначеним інтегралом?
2. Перелічіть всі властивості визначеного інтеграла.
3. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
4. Запишіть формулу обчислення площі в прямокутних координатах.
5. По якій формулі обчислюється площа в полярних координатах?
6. Запишіть формули для обчислення довжини дуги кривої в прямокутних координатах, в параметричній формі та в полярній системі координат.
7. Як обчислюється об’єм тіла обертання?

Практичне заняття № 8

Тема: **Комплексні числа.**

1. Поняття комплексного числа

Приклад 1. Для комплексного числа $z = 5\sqrt{3} + 5i$ визначити: модуль та аргумент. Подати ці числа у показниковій формі та тригонометричній формі.

Комплексним числом z називається вираз виду

$$z = x + iy,$$

де x та y – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця, що задовольняє умові $i^2 = -1$. Числа x та y називаються відповідно дійсною і уявною частинами комплексного числа z і позначаються $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексних числа вважаються *рівними*, якщо рівні їх дійсні і уявні частини: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Нехай задані комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, $(z_2 \neq 0)$;

4) $z^2 = \left(x + iy\right)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$;

5) $z^3 = \left(x + iy\right)^3 = x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - iy^3$.

Модуль $|z|$ та аргумент $\left(\operatorname{Arg} z\right)$ комплексного числа $z = x + iy$ є одними із його головних характеристик.

Модулем комплексного числа називається довжина вектора, що є геометричним зображенням цього числа на комплексній площині (рис. 15.1). Модуль комплексного числа обчислюється за формулою:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Вираз **аргументу** комплексного числа складається із суми, до складу якої входить головне значення аргументу $(\arg z)$ та доданок $2\pi k, \;\; k \in Z$.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \;\; k \in Z,$$

де головне значення аргументу комплексного числа $z = x + iy$ обчислюється за формулою:

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Отже, аргумент комплексного числа z визначається неоднозначно, а з точністю до доданка $2\pi k, \;\; k \in Z$.

Геометричний зміст головного значення аргументу комплексного числа полягає у тому, що $\arg z$ дорівнює найменшому із кутів між додатним напрямком осі Оx та вектором, що зображає комплексне число $z = x + iy$.

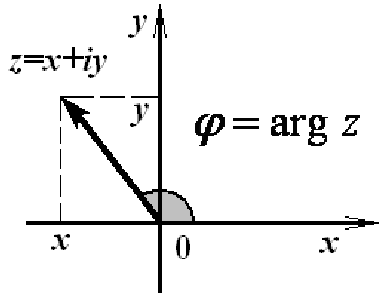


Рис.15.1

Із геометричного змісту зрозуміло, що головні значення аргументів комплексних чисел знаходяться у межах:

$$-\pi < \arg z \le \pi$$
$$(-\pi < \varphi \le \pi).$$

2. Форми комплексних чисел

Алгебраїчна: $z = x + iy$.

Показникова: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Тригонометрична: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.

Правила знаходження значень функції арктангенс:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x\ge 0,\ \ y\ge 0,\\ \pi-\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x<0,\ \ y\ge 0,\\ -\left(\pi-\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|\right) & x<0,\ \ y<0,\\ -\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right| & x\ge 0,\ \ y<0.\end{cases}$$

Розв’язання. Дійсна та уявна частини комплексного числа $z=5\sqrt{3}+5i$: $x=5\sqrt{3}$; $y=5$ – додатні, тому значення арктангенса обчислюється за першою формулою системи :

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{5}{5\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

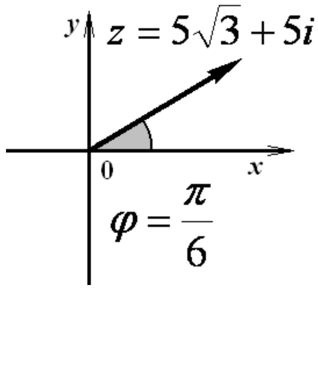
Тоді аргумент дорівнює: $\operatorname{Arg} z=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z$.

Модуль цього комплексного числа знаходимо за формулою:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2+5^2}=\sqrt{75+25}=\sqrt{100}=10.$$

У показниковій формі число $z=5\sqrt{3}+5i$ набуває такого вигляду: $z=10\cdot e^{i\pi/6}$, а у тригонометричній формі такого: $z=10\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Графічна ілюстрація розв’язків із прикладу 1.



2. Елементарні функції комплексної змінної

Приклад 2. Обчислити

а) $\sin\left(2-3i\right)$; б) $\left(-5-5\sqrt{3}i\right)^{2i}$; в) $\sqrt[3]{1-i}$.

Вид функції	Обчислення значень функцій комплексного аргументу
1. Тригонометричні функції.	$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$; $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $tg\,z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$; $ctg\,z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$; $\sin\left(x\pm iy\right)=\sin x\cos iy\pm\sin iy\cos x$; $\cos\left(x\pm iy\right)=\cos x\cos iy\mp\sin x\sin iy$.
2. Експоненціальної функція.	$e^{iz}=\cos z+i\sin z$; $e^{-iz}=\cos z-i\sin z$; $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$.
3. Логарифмічна функція.	$\mathrm{Ln}\,z=\mathrm{Ln}\left\|z\right\|+i\arg z+i2\pi k,\quad k\in Z.$
4. Показникова функція.	$a^{z}=e^{\mathrm{Ln}\,a^{z}}=e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}=e^{z\left(\mathrm{Ln}\left\|a\right\|+i\arg a+i2\pi k\right)},k\in Z$.
5. Степенева функція.	$z^{\alpha}=e^{\alpha\cdot\mathrm{Ln}\,z}$, $z\neq 0$.
6. Обернені тригонометричні функції.	$\mathrm{Arc}\cos z=-i\cdot\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right)$; $\mathrm{Arc}\sin z=-i\cdot\mathrm{Ln}\,i\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right)$; $\mathrm{Arctg}\,z=\dfrac{1}{2i}\cdot\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$; $\mathrm{Arcctg}\;z=\dfrac{i}{2}\cdot\mathrm{Ln}\dfrac{z-i}{z+i}$.
Корінь n-ого степеня з комплексного числа $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень $w_k=\sqrt[n]{\left\|z\right\|}\cdot\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=\overline{0;\ n-1}$.	

Розв’язання.

а) Користуючись таблицею елементарних функцій комплексної змінної, отримаємо:

$$\sin\left(2-3i\right)=\sin 2\cos 3i-\sin 3i\cos 2;$$

$$\sin 2\approx 0,909; \qquad \cos 2\approx -0,416;$$

$$\sin 3i=\frac{e^{-3}-e^{3}}{2i}\approx\frac{0,050-20,086}{2i}=\frac{-19,586}{2i}=9,793i;$$

$$\cos 3i=\frac{e^{-3}+e^{3}}{2}\approx\frac{0,050+20,086}{2}=10,068;$$

$$\sin\left(2-3i\right)\approx 0,909\cdot 10,068-9,793i\cdot(-0,416)=$$

$$=9,152+4,074i.$$

б) Для числа $a=-5-5\sqrt{3}i$, обчислимо $\left|a\right|=\sqrt{25+75}=10$,

$$\arg a=-(\pi-arctg\sqrt{3})=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{3}\pi.$$

Користуючись таблицею елементарних функцій комплексної змінної, отримаємо:

$$\left(-5-5\sqrt{3}i\right)^{2i}=e^{2i\cdot Ln(-5-5\sqrt{3}i)}=e^{2i\cdot(Ln\left|10\right|+i\cdot\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i2\pi k)}=$$

$$=e^{2iLn\left|10\right|+\frac{4}{3}\pi-4\pi k}=e^{(\frac{4}{3}\pi-4\pi k)-i(2Ln\left|10\right|)}=\left\{\begin{matrix}\text{застосуємо формулу}\\ e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)\end{matrix}\right\}$$

$$=e^{\frac{4}{3}\pi-4\pi k}(\cos 2Ln10+i\sin 2Ln10).$$

в) Представимо число $1-i$ в тригонометричній формі:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right).$$

Отже, $\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right).$

Вважаючи $k=0,1,2,$ знайдемо

$$(k=0)\qquad w_0=\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(k=1)\qquad w_1=\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\sin\frac{7}{16}\pi\right),$$

$$(k=2)\qquad w_2=\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\sin\frac{15}{16}\pi\right).$$

Самостійно:

Для комплексних чисел $z_1 - z_4$ визначити: 1) модуль; 2) аргумент. Подати їх у 3) показниковій формі; 4) тригонометричній формі:

а) $z_1=-8\sqrt{3}-8i$; б) $z_2=2-2i$; в) $z_3=4+4i$; г) $z_4=-7+7\sqrt{3}i$.

- Обчислити:

а) $\cos(\frac{i}{3})$; в) $e^{-1-\pi i/3}$; д) $(-7+7i)^{2i}$;

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{5}{4}i\right)$; г) $Ln(-4\sqrt{3}-4i)$; е) $\mathrm{Arcctg}\left(-\sqrt{3}+2i\right)$.

- Обчислити корінь n-ого степеня із комплексного числа:

а) $\sqrt{-7-7i}$; б) $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$; в) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}i}$; г) $\sqrt[4]{-7}$.

Теоретичні запитання

1. Яке число називається комплексним?
2. Який вигляд має комплексне число в алгебраїчній формі?
3. Який вигляд має комплексне число в показниковій формі?
4. Який вигляд має комплексне число в тригонометричній формі?
5. За якою формулою обчислюється корінь n-ого степеня з комплексного числа?

Практичне заняття № 9

Тема: **Диференціальні рівняння.**

1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з ***відокремлюваними змінними***, якщо його можна представити у вигляді

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

або

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (2)$$

Зауважимо, що за допомогою перетворень, враховуючи що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, рівняння (1) та (2) зводяться одне до одного.

Особливістю рівнянь (1) та (2) є розділення множників так, що кожний з них є функцією тільки одного аргументу.

Для знаходження загального розв’язку диференціального рівняння з відокремлюваними змінними його спочатку зводять до рівняння з відокремленими змінними, а потім інтегрують:

для рівняння (1) $\quad M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$

рівняння з відокремленими змінними $\quad \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$

загальний інтеграл $\quad \displaystyle\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$

Для рівняння (2) $\quad y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y)$

рівняння з відокремленими змінними $\quad \dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$

загальний інтеграл $\quad \displaystyle\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2x\,dx + \frac{1}{y^2}\,dy = 0.$$

Розв'язання. Так як при dx стоїть коефіцієнт який містить тільки змінну x, а при dy – тільки y, то задане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи ліву і праву частину заданого рівняння отримаємо:

$$\int 2x\,dx + \int \frac{1}{y^2}\,dy = C$$

$$x^2 - \frac{1}{y} = C$$

Остання рівність є загальним інтегралом заданого диференці-ального рівняння. Якщо розв'язати цю рівність відносно y отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$y = \frac{1}{x^2 - C}$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\left(\frac{1}{y} + y\right)dy = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Розв'язання. Якщо перенести вираз $\dfrac{xdx}{1+x^2}$ вліво, то отримаємо рівняння рівняння з відокремленими змінними. Рівняння з відокремленими змінними зручно представляти так, щоб зліва залишався вираз з dy, а справа – з dx, вже потім інтегрувати ліву і праву частину рівняння, при чому додаючи сталу C один раз:

$$\int\left(\frac{1}{y} + y\right)dy = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

Тут виділити y в явному вигляді не представляється можливим. Отже, остання рівність і є загальним розв'язком в неявному вигляді.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1+y^2)dx - (1+x^2)ydy = 0$$

Розв'язання. Так як коефіцієнти при dx та dy є добутками функцій тільки однієї змінної, то задане рівняння – з відокремлюваними змінними. Зведемо його до рівняння з відокремленими змінними. Для цього поділимо обидві частини рівності на $(1+x^2)(1+y^2)$:

$$\frac{dx}{1+x^2}-\frac{ydy}{1+y^2}=0$$

Інтегруючи останнє рівняння (з відокремленими змінними) отримаємо:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}-\int\frac{ydy}{1+y^2}=C$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=C$$

Тоді загальний розв'язок:

$$\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy'+y=0$$

Розв'язання. Розв'яжемо задане рівняння відносно y':

$$y'=-\frac{1}{x}\cdot y$$

Отримали рівняння виду (3). Отже, задано рівняння з відокремлюваними змінними. Приведемо його до рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}y$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо:

$$\ln|y|=-\ln|x|+\overline{C},$$

де $\overline{C}$ – довільна стала.

Для спрощення отриманого виразу зробимо заміну $\overline{C}=\ln\widetilde{C}$ ($\widetilde{C}>0$), при цьому коли $\widetilde{C}\in(0;+\infty)$ величина $\ln\widetilde{C}\in(-\infty;+\infty)$, тобто $\overline{C}$ залишається довільною сталою. Тоді загальний розв'язок набуває вигляду

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln\widetilde{C},$$

Звідси

$$\ln|y|=\ln\frac{\widetilde{C}}{|x|}$$

$$|y|=\frac{\widetilde{C}}{|x|} \quad \text{або} \quad y=\pm\frac{\widetilde{C}}{x}$$

Зробимо ще одну заміну: $C=\pm\widetilde{C}$, де $C\in(-\infty;+\infty)$, тобто довільна стала. Тоді загальний розв'язок: $y=\dfrac{C}{x}$

Зауважимо, що для зручності можна ще при інтегруванні рівняння з відокремленими змінними додавати довільну сталу в тому вигляді, в якому вона спрощує вираз.

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\frac{y}{x}dy=\left(\frac{1}{xy}+\frac{2}{y}\right)dx, \quad y\big|_{x=0}=1.$$

Розв'язання. Спочатку визначимо вид цього рівняння. В множнику перед dx винесемо $\dfrac{1}{y}$ за дужки, отримаємо $\dfrac{1}{y}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+2\right)$. Тоді маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{1}{x}ydy=\frac{1}{y}\cdot\frac{2x+1}{x}dx$$

Знайдемо загальний розв'язок. Помножимо обидві частини останнього рівняння на xy, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$y^2dy=(2x+1)dx$$

Далі інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int y^2dy=\int(2x+1)dx$$

$$\frac{y^3}{3}=x^2+x+\overline{C}$$

$$\frac{y^3}{3}=x^2+x+\frac{C}{3}$$

Тоді загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y=\sqrt[3]{3x^2+3x+C}$$

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння при заданій початковій умові $y\big|_{x=0}=1$. Для цього підставимо початкові данні $x=0$, $y=1$ в загальний розв'язок і знайдемо C:

$$1=\sqrt[3]{C} \;\Rightarrow\; C=1$$

Підставимо $C=1$ в загальний розв'язок і отримаємо частинний розв'язок (що задовольняє заданим початковим умовам):

$$y=\sqrt[3]{3x^2+3x+1}$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається ***однорідним***, якщо його можна представити у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3}$$

де права частина є функцією тільки від $\frac{y}{x}$.

В однорідному рівнянні (3) змінні не відокремлюються. Тому для знаходження загального розв'язку цього рівняння вводять нову змінну

$$\frac{y}{x} = z$$

Тоді $y = zx$. Знайдемо похідну функції y по змінній x: $y' = z'x + z$. Замінивши $\frac{y}{x}$ і y' в заданому однорідному рівнянні отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xdy = (x + y)dx$$

Розв'язання. В цьому рівнянні змінні відокремити неможливо. Але можна привести до вигляду (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

Отже, задане рівняння – однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Зробимо в останньому рівнянні заміну: $\frac{y}{x} = z$, $y' = z'x + z$. Тоді

$$z'x + z = 1 + z \quad \Rightarrow \quad z'x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x = 1$$

$$dz = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int dz = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad z = \ln|x| + C$$

Підставимо замість змінної z її значення $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

Отже, загальний розв'язок:

$$y = x\ln|x| + Cx$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке можна привести до вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{4}$$

Зауважимо, що y та y' входять в це рівняння в першому степені.

В загальному випадку $Q(x)\neq 0$. Якщо $Q(x)=0$, то лінійне рівняння називається однорідним і є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння можна знайти за допомогою підстановки:

$$y=u\cdot v,$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$ – деякі функції, що мають неперервні перші похідні.

Тоді y' має вигляд:

$$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

Підставимо y та y' в рівняння (11), отримаємо

$$u'\cdot v+u\cdot v'+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x)$$

Згрупуємо доданки в лівій частині рівності наступним чином:

$$u'\cdot v+u\cdot\left(v'+P(x)\cdot v\right)=Q(x)$$

Цей метод розв'язання полягає в тому, що функцію v визначають так, щоб коефіцієнт при u в рівнянні перетворювався в нуль. Тоді останнє рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} v'+P(x)\cdot v=0 \\ u'\cdot v=Q(x) \end{cases}$$

Із цієї системи знаходять спочатку функцію v, потім u.

Знайдемо функції v і u в загальному вигляді.

З першого рівняння системи маємо:

$$v'=-P(x)v \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dx}=-P(x)v \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=-P(x)dx$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx \quad\Rightarrow\quad \ln|v|=-\int P(x)dx \quad\Rightarrow\quad v=e^{-\int P(x)dx}$$

Зауважимо, що знайдена функція v є частинним розв'язком першого рівняння системи. Підставляємо v в друге рівняння системи і знаходимо u:

$$u'=Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad\Rightarrow\quad u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

Тоді загальний розв'язок лінійного рівняння (5) можна виразити формулою:

$$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2y'-3xy=4$$

Розв'язання. Звільнимо y' від коефіцієнту. Для цього поділимо обидві частини рівняння на x^2:

$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{4}{x^2}$$

Отримали рівняння виду (5) – лінійне диференціальне рівняння першого порядку, де $P(x) = -\frac{3}{x}$, $Q(x) = \frac{4}{x^2}$. Для знаходження розв'язку цього рівняння не будемо використовувати готову формулу, а виведемо його самі.

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y = uv$. Звідси $y' = u'v + uv'$. Підставимо y та y' в останнє рівняння, отримаємо

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{3}{x}uv = \frac{4}{x^2}$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) = \frac{4}{x^2}$$

Покладаючи, що вираз у дужках повинен дорівнювати 0, отримаємо систему

$$\begin{cases} v' - \frac{3}{x}v = 0 \\ u'v = \frac{4}{x^2} \end{cases}$$

Розв'язуючи перше рівняння системи, враховуючи, що v є частинним розв'язком, маємо

$$v' = \frac{3}{x}v \ \Rightarrow \ \frac{dv}{dx} = \frac{3}{x}v \ \Rightarrow \ \frac{dv}{v} = \frac{3}{x}dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3}{x}dx \ \Rightarrow \ \ln|v| = 3\ln|x| \ \Rightarrow \ v = \pm x^3$$

Підставимо v в друге рівняння системи і розв'яжемо його:

$$\pm u' x^3 = \frac{4}{x^2} \ \Rightarrow \ \frac{du}{dx} = \pm\frac{4}{x^5} \ \Rightarrow \ du = \pm\frac{4}{x^5}dx$$

$$\int du = \pm 4\int \frac{dx}{x^5} \ \Rightarrow \ u = \mp\frac{1}{x^4} \pm C$$

Підставимо u і v у розв'язок:

$$y = \left(C - \frac{1}{x^4}\right)x^3$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = Cx^3 - \frac{1}{x}$$

Диференціальні рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння першого порядку, яке можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{5}$$

де $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Таке рівняння заміною $z = y^{1-n}$ зводиться до лінійного диференціального рівняння виду (4):

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x)$$

Розв'язуючи останнє лінійне диференціальне рівняння першого порядку знаходимо z, а тоді з рівності $z = y^{1-n}$ знаходимо y.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$yy' + y^2 = x$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на *y*, отримаємо рівняння виду (7):

$$y' + y = xy^{-1},$$

де $P(x) = 1$, $Q(x) = x$.

Зробимо заміну $z = y^2$. Тоді маємо

$$\frac{1}{2}z' + z = x \quad \Rightarrow \quad z' + 2z = 2x$$

Отримали лінійне рівняння виду (5). Для скорочення обчислень загальний розв'язок знайдемо за готовою формулою (6), де $P(x) = 2$, $Q(x) = 2x$:

$$z = \left(\int 2xe^{\int 2dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int 2dx} = \left(\int 2xe^{2x}dx + C\right)\cdot e^{-2x}$$

Обчислюючи інтеграл $\int 2xe^{2x}dx$ методом інтегрування частинами, отримаємо

$$z = \left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C\right)\cdot e^{-2x} = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$$

Так як $z = y^2$, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = \pm\sqrt{x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}}$$

2. Диференціальні рівняння другого порядку

<u>Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку</u>

I. Рівняння, що містить тільки похідну другого порядку і неза-лежну змінну:

$$y'' = f(x) \qquad (1)$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння вводять допоміжну функцію:

$$y' = P,$$

де функція $P = P(x)$. Тоді $y'' = P'$. При підстановці в рівняння (1) отримуємо диференціальне рівняння першого порядку.

II. Рівняння, яке не містить в явному вигляді шукану функцію y:

$$F(x, y', y'') = 0 \qquad (2)$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння, як і в попередньому випадку, вводять допоміжну функцію:

$$y' = P,$$

де функція $P = P(x)$.

Тоді при підстановці $y'' = P'$ в рівняння (10) воно зводиться до диференціального рівняння першого порядку відносно функції P:

$$F(x, P, P') = 0$$

Далі загальний розв'язок останнього рівняння P треба підставити в рівність $y' = P$. Знову отримуємо диференціальне рівняння першого порядку, з якого знаходимо y.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$$

Розв'язання. В заданому рівнянні відсутня сама функція y, а присутні тільки її похідні і аргумент. Отже, введемо нову функцію $y' = P$, $y'' = P'$:

$$(1 + x^2)P' - 2xP = 0$$

Отримали рівняння першого порядку. Звільнимо P' від коефіцієнту:

$$P' - \frac{2x}{1 + x^2}P = 0 \quad \Rightarrow \quad P' = \frac{2x}{1 + x^2}P$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Зведемо його до рівняння з відокремленими змінними, інтегруючи яке отримаємо функцію P:

$$\frac{dP}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}P \quad\Rightarrow\quad \frac{dP}{P}=\frac{2x}{1+x^2}dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dP}{P}=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\ln|P|=\ln(1+x^2)+\ln\overline{C}_1 \quad\Rightarrow\quad P=C_1(1+x^2)$$

Так як $y'=P$, враховуючи що $y'=\dfrac{dy}{dx}$, маємо

$$\frac{dy}{dx}=C_1(1+x^2) \quad\Rightarrow\quad dy=C_1(1+x^2)dx \quad\Rightarrow\quad \int dy=\int C_1(1+x^2)dx$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$$

III. Рівняння, яке не містить в явному вигляді аргумент x:

$$F(y,y',y'')=0 \tag{3}$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння вводять наступну допоміжну функцію:

$$y'=Z,$$

де функція $Z=Z(y)$. Враховуючи, що y залежить від x, а тому за правилом диференціювання складної функції y'' має вигляд:

$$y''=\frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dZ}{dy}\cdot y'=\frac{dZ}{dy}\cdot Z$$

Підставляючи y' і y'' в рівняння (11) отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$F(y,Z,\frac{dZ}{dy}\cdot Z)=0$$

З останнього рівняння треба знайти Z, далі підставити в рівність $y'=Z$ і знайти функцію y.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$$

Розв'язання. В заданому рівнянні відсутній аргумент x, тому вводимо функцію $y'=Z$, де $Z=Z(y)$. Тоді $y''=\dfrac{dZ}{dy}\cdot Z$. Підставляючи y' і y'' в задане рівняння отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dZ}{dy}\cdot Z+\frac{2}{1-y}Z^2=0 \quad \Rightarrow \quad Z\left(\frac{dZ}{dy}+\frac{2}{1-y}Z\right)=0$$

З останнього рівняння маємо:

$$Z=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$y=C$ (один із розв'язків)

$$\frac{dZ}{dy}+\frac{2}{1-y}Z=0$$

$$\frac{dZ}{dy}=\frac{2}{y-1}Z \quad \Rightarrow \quad \frac{dZ}{Z}=\frac{2}{y-1}dy$$

$$\int\frac{dZ}{Z}=\int\frac{2}{y-1}dy$$

$$\ln|Z|=2\ln|y-1|+\ln\overline{C}_1$$

$$Z=\widetilde{C}_1(y-1)^2$$

Так як $y'=Z$, то

$$\frac{dy}{dx}=\widetilde{C}_1(y-1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{(y-1)^2}=\widetilde{C}_1dx$$

$$\int\frac{dy}{(y-1)^2}=\int\widetilde{C}_1dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y-1}=\widetilde{C}_1x-C_2$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y=\frac{1}{C_1x+C_2}+1$$

3.Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Так як все нижче наведене розповсюджується і на рівняння n-го порядку, то для спрощення пояснень розглянемо ***лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку***:

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{4}$$

де a_0, a_1, a_2 – деякі дійсні числа.

Особливістю цього рівняння є те, що шукана функція y і всі її похідні входять до рівняння в першому степені (тому воно називається лінійним), справа в рівнянні стоїть 0 (тому воно називається однорідним).

Загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{5}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв'язки рівняння, C_1, C_2 – довільні сталі.

Частинні розв'язки шукають у вигляді $y = e^{kx}$, де k – деяке число, яке треба знайти. Якщо цю рівність підставити в (4), то отримаємо рівняння, яке називають

характеристичним рівнянням:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \tag{6}$$

а його розв'язки – характеристичними показниками.

Можливі наступні випадки:

1) якщо корені характеристичного рівняння дійсні числа, не рівні між собою ($k_1 \neq k_2$), то загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) якщо корені характеристичного рівняння дійсні числа, рівні між собою ($k_1 = k_2 = k$), то загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^{kx} \cdot \left(C_1 + C_2 x\right)$$

3) якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені числа виду $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$, де $i = \sqrt{-1}$, $a, b \in R$, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^{ax} \cdot \left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Розв'язання. Функція y і її похідні входять до рівняння в першому степені, перед ними сталі коефіцієнти, аргумент x в явному вигляді відсутній, права частина рівняння дорівнює 0. Отже, задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

Корені цього рівняння $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ дійсні, не рівні між собою числа, тому загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' = 0$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k(k+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0,\ k_2 = -4$$

Корені дійсні, не рівні між собою числа, тому загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} \text{ або } y = C_1 + C_2 e^{-4x}$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-4y'+4y=0$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння заданого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$k^2-4k+4=0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=k_2=2$$

Так як корені дійсні і рівні між собою, то загальний розв’язок

$$y=e^{2x}\cdot\left(C_1+C_2x\right)$$

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y''-2y'+5y=0$$

Розв’язання. Характеристичне рівняння заданого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має комплексні корені

$$k^2-2k+5=0$$

$$k_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm4\sqrt{-1}}{2}=1\pm2i$$

Отже, загальний розв’язок має вигляд

$$y=e^{x}\cdot\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$$

Самостійно:

Визначити вид та проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $\left(1+y^2\right)dx-xydy=0, \quad y\big|_{x=1}=0$;
2. $\left(xy^2+x\right)dy-\left(x^2y-y\right)dx=0, \quad y\big|_{x=1}=1$;
3. $y''+2y'+10y=0$;
4. $y''+4y'+4y=0$;

Теоретичні запитання

1. Що називається диференціальним рівнянням та його порядком?
2. Що називається розв’язком диференціального рівняння?
3. Дайте визначення загального та частинного розв’язку диференціального рівняння.
4. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку.
5. Опишіть диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та їх розв’язок.

6. Опишіть однорідні диференціальні рівняння першого порядку та їх розв'язок.
7. Опишіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку та їх розв'язок.
8. Як розв'язуються диференціальні рівняння виду $F(x, y', y'') = 0$?
9. Як розв'язуються диференціальні рівняння виду $F(y, y', y'') = 0$?
10. Опишіть метод знаходження загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадках:
    а) дійсних різних коренів;
    б) дійсних рівних коренів;
    в) комплексних коренів характеристичного рівняння.

Практичне заняття № 10

Тема: **Функції багатьох змінних.**

1.Частинні похідні функції багатьох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значень двох незалежних одна від одної змінних величин x і y з деякої області D відповідає певне значення величини z, тоді величина z є ***функцією двох незалежних змінних*** x і y, яка визначена в області D. Позначається така функція:

$$z = f(x, y) \text{ або } z = z(x, y).$$

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Зобразити її графічно.

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - x^2 - y^2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

Область визначення функції D зображена на рис. 1 (заштрихована частина).

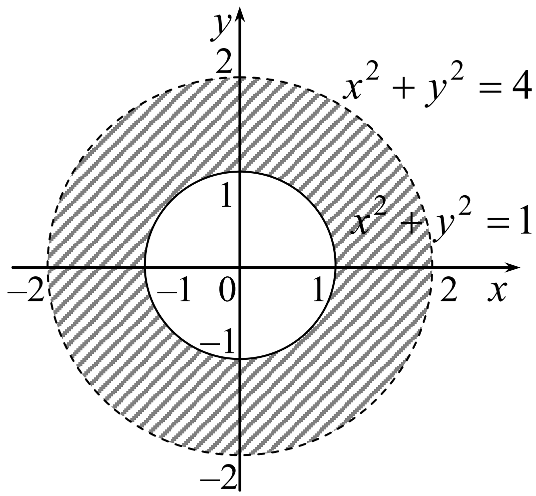


Рис. 1

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = \frac{y}{x}.$$

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ (що не дорівнює нескінченності), яка не залежить від способу прямування $\Delta x \to 0$, тоді ця границя називається ***частинною похідною (першого порядку)*** функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \text{ або } \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ або } z'_x, \text{ або } f'_x(x, y), \text{ або } f'_x.$$

Аналогічно визначається частинна похідна по змінній y: z'_y.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}(y)'_y = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Приклад 3. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = \sin xy.$$

Частинні похідні другого порядку є частинними похідними від похідних першого порядку.

Частинні похідні другого порядку для функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x\right)'_x = f''_{xx}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y\right)'_y = f''_{yy}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x\right)'_y = f''_{xy}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y\right)'_x = f''_{yx}, \qquad (4)$$

де (1) і (2) – “***чисті похідні*** ” другого порядку;
(3) і (4) – “***мішані похідні*** ” другого порядку.

Якщо мішані частинні похідні одного порядку неперервні, тоді їх значення не залежать від порядку диференціювання.

Зокрема, для функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Розв’язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sin xy\right)'_x = \cos xy \cdot \left(xy\right)'_x = \cos xy \cdot y \cdot 1 = y\cos xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin xy\right)'_y = \cos xy \cdot \left(xy\right)'_y = \cos xy \cdot x \cdot 1 = x\cos xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y\cos xy\right)'_x = y \cdot (-\sin xy) \cdot \left(xy\right)'_x = y \cdot (-\sin xy) \cdot y \cdot 1 = -y^2 \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x\cos xy\right)'_y = x \cdot (-\sin xy) \cdot \left(xy\right)'_y = x \cdot (-\sin xy) \cdot x \cdot 1 = -x^2 \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y\cos xy\right)'_y = 1 \cdot \cos xy - y \cdot \sin xy \cdot \left(xy\right)'_y = \cos xy - xy\sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x\cos xy\right)'_x = 1 \cdot \cos xy - x \cdot \sin xy \cdot \left(xy\right)'_x = \cos xy - xy\sin xy.$$

2. Найбільше та найменше значення функції у замкненій області

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 + y^2 - 6xy$ у замкненій області D: $x + y \geq -1,\ x \leq 2,\ y \leq 2.$

Функція, обмежена і диференційована у замкненій області, досягає свого найбільшого та найменшого значення або всередині цієї області у ***стаціонарних точках*** (точках, в яких частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю), або на її границі.

Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції $z = f(x, y)$

1) Знайти стаціонарні точки, розв’язавши систему рівнянь (***необхідна умова екстремуму функції***):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

2) Обчислити у стаціонарних точках значення функції.
3) Знайти найбільше і найменше значення функції на кожній лінії, що обмежує задану область.
4) Порівняти всі отримані в пп. 2) – 3) значення і визначити найбільше і найменше з них.

Розв’язання. Знайдемо стаціонарні точки, що належать області D:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x - 6y; \; \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6x;$$

$$\begin{cases} 10x - 6y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Зобразимо область D (рис. 2). Для зручності позначимо вершини заданої області, яка має вигляд трикутника (див. рис.2). Стаціонарна точка $(0;0)$ знаходиться всередині області D.

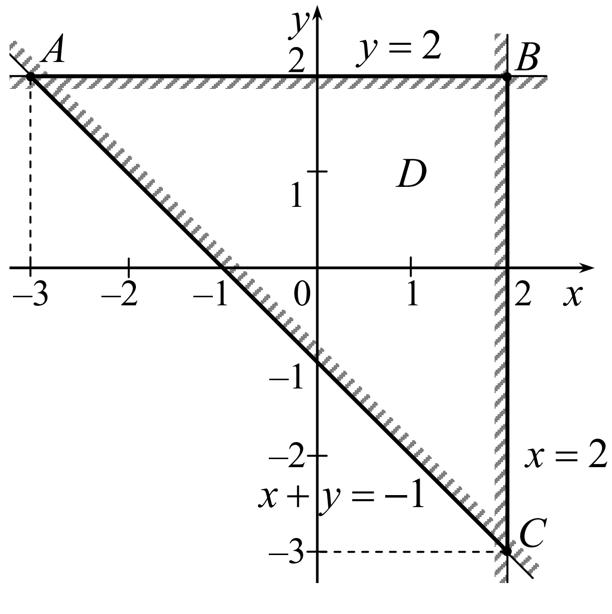


Рис. 2

Значення функції у цій точці: $z(0;0) = 0$.

Знайдемо найбільше та найменше значення функції на границі області D. Для цього розглянемо функцію на границі. Так як границя складається із трьох ліній, то розглянемо функцію на кожній з них окремо.

Розглянемо функцію z на границі AB. На лінії AB $y = 2$, отже функція z тут приймає вигляд: $z = 5x^2 + 4 - 12x$. Тобто задача зводиться до наступної: знайти найбільше та найменше значення функції від однієї незалежної змінної $z = 5x^2 + 4 - 12x$ на відрізку $[-3; 2]$.

$$\frac{dz}{dx} = 10x - 12 \quad \Rightarrow \quad 10x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{5} \in [-3;2];$$

$$z\left(\frac{6}{5};2\right) = -3\frac{1}{5};\ z_A = z(-3;2) = 85;\ z_B = z(2;2) = 0.$$

Розглянемо функцію z на границі CB:

$$\begin{cases} x = 2, \\ -3 \le y \le 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = 20 + y^2 - 12y;$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y - 12 \quad \Rightarrow \quad 2y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6 \notin [-3;2];$$

$$z_C = z(2;-3) = 65;\ z_B = z(2;2) = 0.$$

Розглянемо функцію z на границі AC:

$$\begin{cases} -3 \le x \le 2, \\ -3 \le y \le 2, \\ x + y = -1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = 5x^2 + (-1-x)^2 - 6x(-1-x);$$

$$z = 12x^2 + 8x + 1;$$

$$\frac{dz}{dx} = 24x + 8 \quad \Rightarrow \quad 24x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3} \in [-3;2];$$

$$y = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3};$$

$$z\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3};\ z_A = z(-3;2) = 85;\ z_C = z(2;-3) = 65.$$

З усіх знайдених значень найбільше та найменше значення функції:

$$\max_D z(x,y) = z(-3;2) = 85; \quad \min_D z(x,y) = z\left(\frac{6}{5};2\right) = -3\frac{1}{5}.$$

3.Похідна за напрямом. Градієнт функції.

Приклад 4. Знайти похідну функції $f(x,y) = x^3 - y^3$ у точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = (1,\sqrt{3})$.

Похідна від функції $u = f(x, y, z)$ ***за напрямом*** $\bar{l}$ характеризує швидкість зміни функції за цим напрямом і обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Ox) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Oy) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Oz).$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 3\cdot 1 = 3; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = -3\cdot 1 = -3.$$

Враховуючи $\vec{l} = (l_1, l_2) = (1; \sqrt{3})$, маємо

$$\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Ox) = \frac{l_1}{|l|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2};$$

$$\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Oy) = \frac{l_2}{|l|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_M = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

Приклад 5. Знайти градієнт функції $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$ у точці $M(1;1)$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, який показує напрямок найбільшого зростання функції і проекціями якого на координатні осі Ox, Oy, Oz є відповідно $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy; \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 5; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = 4;$$

$$grad\ f\Big|_M = 5\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Самостійно:

1. Знайти та відобразити на рисунку область визначення функції $z = \sqrt{x+y} + \dfrac{1}{x-y^2}$.

2. Знайти похідну $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \ln(x^2 + e^{-2y})$.

3. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$ в замкненій області $D:\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$.

4. Для функції $u = 5x^2 y - 3xy + z^3$ знайти градієнт в точці $M_1(3,-1,0)$ та похідну в точці $M_0(1,2,-1)$ у напрямі вектора $\overline{M_0 M_1}$.

Теоретичні запитання

1. Що називається функцією багатьох змінних, зокрема, двох змінних?
2. Який геометричний зміст функції двох змінних та її області визначення?
3. Як визначаються частинні похідні?
4. Сформулюйте правила знаходження частинних похідних функції кількох змінних.
5. Що називається похідною функції в даній точці за даним напрямом? Запишіть формулу її обчислення.
6. Що називається градієнтом скалярного поля в даній точці?

Практичне заняття № 11

Тема: **Числові та функціональні ряди.**

1. Числові ряди

Нехай задана нескінченна послідовність чисел: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$
Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

називають ***числовим рядом***.

Ряд вважається заданим, якщо відомий загальний член a_n у вигляді функції від його номеру n: $a_n = f(n)$.

Сума n перших членів ряду називається n-ю ***частковою сумою*** ряду:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Якщо послідовність часткових сум має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ця границя називається ***сумою ряду*** і можна записати: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
В цьому випадку ряд називається ***збіжним***.
Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд називається ***розбіжним*** (і суми не має).

Приклад 1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$

Розв’язання. Представимо загальний член ряду у вигляді

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

тоді часткові суми мають вигляд:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right),$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

...

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Отже, сума ряду

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Заданий ряд збігається.

Приклад 2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n^2+8n-5}$

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен в знаменнику загального члена ряду:

$$a_n=\frac{3}{4n^2+8n-5}=\frac{3}{4\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}\right)}=\frac{3}{(2n-1)(2n+5)}$$

Далі представимо загальний член ряду як суму двох дробів методом невизначених коефіцієнтів (див. розділ V):

$$\frac{3}{(2n-1)(2n+5)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+5}$$

$$3=A(2n+5)+B(2n-1)$$

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & n & 2A+2B=0 \\ \text{при} & n^0 & 5A-B=3 \end{array}$$

$$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$$

Отже, $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)$. Складемо n-ну часткову суму:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{15}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{17}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-3)-1}-\frac{1}{2(n-3)+5}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-2)-1}-\frac{1}{2(n-2)+5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-1)-1}-\frac{1}{2(n-1)+5}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\right.$$

$$+\frac{1}{11}-\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{2n-7}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n+3}+$$

$$\left.+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

Сума ряду

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{23}{30}$$

Заданий ряд збігається.

<u>Геометричний ряд</u>

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1},$$

де $a, aq, aq^2, aq^{n-1}, \ldots$ – нескінченна геометрична прогресія з першим членом a і знаменником q.

При $|q|<1$ ряд збігається

При $|q|\geq 1$ ряд розбіжний.

<u>Гармонічний ряд</u>

Узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхлє)

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k},$$

де k – деяка стала.

При $k>1$ ряд збіжний.

При $k\leq 1$ ряд розбіжний.

(**достатня ознака розбіжності ряду**):

якщо $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ є розбіжним.

Наприклад. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, тому цей ряд розбіжний.

Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***додатним***, якщо всі його члени a_n, $n = \overline{1,\infty}$, додатні.

Ознака порівняння. Нехай маємо два додатних ряди:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (1)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

і, починаючи з деякого номера n, члени ряду (1) не перевищують відповідних членів ряду (2), тобто виконується умова

$$a_n \le b_n .$$

Якщо ряд (2) збігається, то збігається і ряд (1).
Якщо ряд (1) розбігається, то розбігається і ряд (2).

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Розв'язання. Заданий ряд додатний: $\frac{1}{n^n} > 0$ при $n = 1,2,3,\ldots$

Для задач дослідження на збіжність рядів рекомендується спочатку перевіряти необхідну ознаку збіжності ряду: якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, то ряд розбіжний, якщо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним, і треба застосувати достатню ознаку.

В нашому випадку

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)}} = 0$$

Отже, застосуємо достатню ознаку порівняння. Члени заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

порівняємо з відповідними членами геометричного ряду (зі знаменником $\frac{1}{2}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Починаючи з третього, члени заданого ряду менші членів допоміжного ряду:

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}, \frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збіжний, то за ознакою порівняння заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ теж збіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Розв'язання. Ряд додатний: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} > 0$ при $n = 1,2,3,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 0.$$

Застосуємо достатню ознаку порівняння.

Зменшимо множники в знаменнику загального члена ряду: $\frac{1}{n \cdot n \cdot n \cdot n}$, а тим самим збільшимо члени ряду, тобто

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{n^4}.$$

Так як $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ – збіжний узагальнений гармонічний ряд, то за ознакою порівняння заданий ряд теж збіжний.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Розв'язання. Ряд додатний, так як при $n = 2,3,4,\ldots$ $\frac{1}{\ln n} > 0$; $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. Отже, застосуємо достатню ознаку порівняння.

Члени заданого ряду порівняємо з відповідними членами гармонічного ряду (з відкинутим першим членом)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Так як $\ln n < n$, то

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\ln 2},\frac{1}{3}<\frac{1}{\ln 3},\frac{1}{4}<\frac{1}{\ln 4},\ldots,\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n},\ldots$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний, тому за ознакою порівняння заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ теж розбіжний.

Ознака порівняння в граничній формі. Якщо для рядів (1) і (2) існує скінченна і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, то ряди (1) і (2) або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Зауважимо, що для дослідження ряду за ознакою порівняння зазвичай обирають допоміжний ряд з членами, найближчими до членів заданого ряду ($a_n \sim b_n$).

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

Розв'язання. Ряд додатний, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$. Застосуємо достатню ознаку порівняння. Розглянемо розбіжний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$$

Так як ця границя скінченна і відмінна від нуля, то за ознакою порівняння в граничній формі заданий ряд теж є розбіжним.

Ознака Даламбера. Якщо для додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

то при $q<1$ ряд збігається;

при $q>1$ ряд розбігається;

при $q=1$ за цією ознакою неможливо визначити збіжність чи розбіжність ряду, треба застосовувати іншу ознаку.

Зауваження: якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$, то ряд розбіжний і границя його загального члена не дорівнює нулю.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)!}$

Розв'язання. Ряд додатний. Перевірити необхідну умову збіжності тут важко, як і вибрати допоміжний ряд для порівняння, тому одразу застосуємо ознаку Даламбера. Складемо a_{n+1} член ряду: $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}=\frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$.

Далі знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(2n+3)!}}{\dfrac{3^n}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot 3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=0<1$$

Отже, за ознакою Даламбера заданий ряд збіжний.

Радикальна ознака Коші. Якщо для додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

то при $q<1$ ряд збігається;

при $q>1$ ряд розбігається;

при $q=1$ за цією ознакою неможливо визначити збіжність чи розбіжність ряду, треба застосовувати іншу ознаку.

Радикальну ознаку Коші доцільно використовувати тоді, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$

Розв'язання. Ряд додатний. Перевіримо необхідну умову збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}-1\right)2n} = e^{-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n+1}} = 0$$

Отже треба розглянути достатню ознаку збіжності. Загальний член ряду містить в показнику степеня n, а тому зручніше одразу застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < 1$$

Таким чином, за радикальною ознакою Коші заданий ряд збіжний.

Інтегральна ознака Коші. Нехай треба дослідити на збіжність до-датний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де загальний член a_n є функцією від його номера: $a_n = f(n)$. Замінимо аргумент n на x. За умови, що при $x = 1,2,3,...$ функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає, розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо цей інтеграл збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним.

Якщо інтеграл розбігається (дорівнює ∞ або не існує), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

Інтегральна ознака Коші є найбільш сильною ознакою і її використовують у випадках, коли за іншими ознаками неможливо встановити збіжність чи розбіжність.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln^2(2n-1)}$

Розв'язання. Ряд додатний. За необхідною умовою збіжності:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\ln^2(2n-1)} = 0$. Так як інші ознаки збіжності важко застосувати, то використаємо інтегральну ознаку Коші. Функція $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}$ при $x = 2,3,4,...$ неперервна, додатна і монотонно спадає. Отже, розглянемо невласний інтеграл (див. розділ VI):

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(2x-1)\ln^2(2x-1)}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{d(\ln(2x-1))}{\ln^2(2x-1)} = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln(2x-1)}\bigg|_2^b =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(2b-1)} - \frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{\ln 9}$$

Інтеграл збігається, тому за інтегральною ознакою Коші збігається і заданий ряд.

<u>Знакозмінні числові ряди</u>

Ряд називається ***знакозмінним***, якщо він містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, складений із абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***умовно збіжним***, якщо він збігається, а ряд, складений із абсолютних величин його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, розбігається.

Сума ряду, який збігається абсолютно, не змінюється від довільної перестановці його членів. Знакозмінний ряд, який збігається умовно, не володіє цією властивістю.

Щоб дослідити на збіжність знакозмінний ряд рекомендується спочатку перевірити (якщо це можливо) необхідну умову збіжності ряду, потім скласти ряд з абсолютних величин його членів і застосувати одну з достатніх ознак збіжності додатних рядів.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ в залежності від n може бути як додатнім, так і від'ємним. Тому цей ряд знакозмінний.

Розглянемо додатний ряд складений з абсолютних величин членів заданого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$$

Скористаємось ознакою порівняння додатних рядів. Так як $|\sin n| \le 1$, то

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ збігається.

Звідси випливає, що збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$, і при тому абсолютно.

Ряд, члени якого по черзі мають додатний та від'ємний знаки, називається ***знакопочерговим***:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$$

Знакопочергові ряди є частинним випадком знакозмінних рядів.

Для дослідження на збіжність знакопочергового ряду використовують наступну ознаку.

Теорема Лейбніца. Знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$ збігається, якщо

1) його члени монотонно спадають по абсолютній величині: $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$;
2) границя абсолютної величини загального члену ряду прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Зауважимо, що якщо не виконується друга умова теореми Лейбніца ($\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$), то ряд розбігається (так як не виконується необхідна умова збіжності ряду).

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)^2}$.

Розв'язання. Заданий ряд – знакопочерговий. Перевіримо умови теореми Лейбніца:

1) $\frac{1}{4} > \frac{1}{25} > \frac{1}{64} > \ldots > \frac{1}{(3n-1)^2} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = 0$

Тоді за теоремою Лейбніца заданий ряд збігається. Дослідимо характер збіжності ряду. Для цього розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$. За ознакою порівняння в граничній формі (порівнявши з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) або за інтегральною ознакою Коші (обчисливши невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} dx$) маємо, що ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ збігається. Тому заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Заданий ряд є знакопочерговим. Умови теореми Лейбніца виконуються:

1) $\frac{1}{1} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

За теоремою Лейбніца заданий ряд збігається. Але ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом. Тому заданий ряд збігається умовно.

2. Функціональні ряди

Ряд називається ***функціональним***, якщо його члени є функціями, наприклад від аргументу x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Якщо в цьому функціональному ряді покласти $x = x_0$, то він перетвориться у числовий ряд.

Якщо такий числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається, то точка $x = x_0$ називається ***точкою збіжності*** цього функціонального ряду, в протилежному випадку – точкою розбіжності.

Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Отже, областю збіжності функціонального ряду є проміжок на числовій осі.

В загальному випадку при дослідженні на збіжність функціонального ряду можна використовувати ті ж правила, що і для знакозмінного числового ряду.

Приклад 13. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-3)^n}.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд із абсолютних величин членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{|x-3|^n}$. Останній ряд має додатні члени, а тому можемо застосувати до нього одну з ознак збіжності додатних рядів. Для цього ряду доцільно застосувати ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}|x-3|^n}{|x-3|^n|x-3|\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{|x-3|\sqrt{n}} = \frac{1}{|x-3|} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{|x-3|}$$

За ознакою Даламбера ряд буде збігатись, якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Звідси

$$\frac{1}{|x-3|} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-3| > 1 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x-3 > 1 \\ x-3 < -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ x < 2 \end{array}\right.$$

Дослідимо ряд в точках $x = 4$ і $x = 2$.

Якщо $x = 4$, заданий ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(4-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$, а для такого числового ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \neq 0$, тому в точці $x = 4$ заданий функціональний ряд розбігається.

Якщо $x = 2$, маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2-3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ – знакопочерговий ряд, для нього теж не виконується необхідна умова збіжності. Тому точка $x = 2$ теж не входить до області збіжності.

Таким чином, область збіжності заданого функціонального ряду $x \in (-\infty; 2) \bigcup (4; +\infty)$.

Приклад 14. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n nx}{n^2}.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд із абсолютних величин членів заданого ряду і застосуємо ознаку порівняння. Враховуючи, що $|\sin nx| \le 1$, а, отже, і $\left|\sin^n nx\right| \le 1$, то при будь-якому x

$$\frac{\left|\sin^n nx\right|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається. Тоді за ознакою порівняння збігається і заданий ряд, при чому x може бути до-вільним. Отже, область збіжності заданого функціонального ряду $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 15. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}.$$

Розв'язання. При фіксованому x заданий ряд є числовим узагальненим гармонічним рядом, тому маємо випадки:

1) при $|x+1| \le 1$ ряд розбігається;
2) при $|x+1| > 1$ ряд збігається, тоді $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -2 \end{array}\right.$

Область збіжності заданого функціонального ряду $x \in (-\infty; -2) \bigcup (0; +\infty)$.

3. Степеневі ряди

Степеневим рядом називають функціональний ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots \qquad (3)$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називаються коефіцієнтами степеневого ряду.

При $c = 0$ маємо більш поширений частинний випадок:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4)$$

Ряд (3) називають рядом за степенями $(x-c)$, а ряд (4) – рядом за степенями x.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, що задовольняє нерівності $|x-c| < |x_0 - c|$.

Наслідок: для степеневого ряду існує ***інтервал збіжності*** з центром в точці $x = c$: $|x-c| < R$ або $c - R < x < c + R$. Всередині інтервалу збіжності $(c-R; c+R)$ ряд збігається абсолютно, а зовні – розбігається (рис. 1). На кінцях інтервалу збіжності в точках $x = c \pm R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись, тому збіжність в цих точках потребує спеціального дослідження.

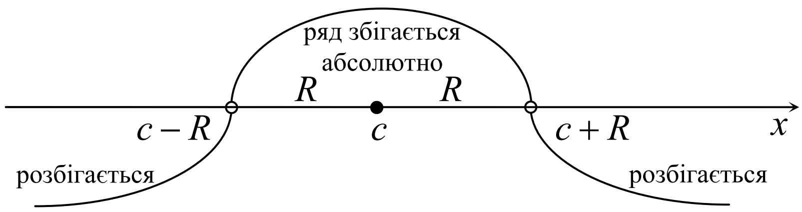


Рис. 1

Число R – половина довжини інтервалу збіжності – називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду.

В частинних випадках радіус збіжності R може дорівнювати 0 (тоді степеневий ряд збігається лише в точці $x = c$) або ∞ (тоді степеневий ряд збігається на всій числовій осі).

Інтервал збіжності степеневого ряду знаходять аналогічно, як і для функціонального ряду: будують ряд з абсолютних величин членів заданого ряду та застосовують одну з достатніх ознак збіжності числових рядів, зокрема ознаку Даламбера.

Якщо жоден з коефіцієнтів степеневого ряду $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ не дорівнює нулю (тобто степеневий ряд повний), то з ознаки Даламбера маємо формулу для знаходження радіусу збіжності такого ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Приклад 16. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)}.$$

Розв'язання. Маємо ряд за степенями x, тому це степеневий ряд виду (4), у якого центр інтервалу збіжності знаходиться в початку координат ($c=0$), а, отже, інтервал збіжності цього ряду $(-R;\, R)$. Заданий ряд повний, тобто містить всі цілі додатні степені x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{32} + ... + \frac{x^n}{2^n(n+1)} + ...$$

Тому скористаємось формулою знаходження радіусу збіжності:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}; \quad |a_n| = \frac{1}{2^n(n+1)}; \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1}(n+2)}$$

Маємо $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)} = 2$.

Перевіримо збіжність заданого ряду на кінцях інтервалу $(-2;2)$.

В точці $x=2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$. За ознакою порівняння в граничній формі цей ряд поводиться так само, як і гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, який розбігається, тому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ теж розбігається. Отже точка $x=2$ не входить до інтервалу збіжності.

В точці $x=-2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Цей ряд є знакопочерговим. Для нього виконуються умови теореми Лейбніца: $\dfrac{1}{1} > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > ...$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, тому він збігається, але збігається умовно (так як ряд з абсолютних величин цього ряду розбігається).

Інтервал збіжності заданого ряду $x \in [-2;2)$.

Приклад 17. Знайти область збіжності функціонального ряду
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1}.$$

Розв'язання. Маємо неповний степеневий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1} = \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^3}{9} + \frac{(x-1)^6}{65} + \ldots + \frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1} + \ldots$$

Розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-1|^{3n}}{8^n+1}$ і застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{3(n+1)}}{8^{n+1}+1} \cdot \frac{8^n+1}{|x-1|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{3n} \cdot |x-1|^3}{|x-1|^{3n}} \cdot \frac{8^n+1}{8^n \cdot 8+1} =$$

$$= |x-1|^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{8^n}}{8+\frac{1}{8^n}} = |x-1|^3 \cdot \frac{1}{8}$$

Щоб ряд збігався, за ознакою Даламбера повинна виконуватись умова: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. Звідси маємо

$$|x-1|^3 \cdot \frac{1}{8} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-1| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x-1 < 2 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 3$$

При $x = 3$ заданий ряд має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{8^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{8^n+1}$.

Для цього ряду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8^n}{8^n+1} = 1 \neq 0$, тому він розбігається.

При $x = -1$ заданий ряд має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3n}}{8^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{8^n+1}$. Для цього ряду теж не виконується необхідна умова збіжності, тому він розбігається.

Отже, інтервал збіжності заданого ряду $x \in (-1;3)$.

Самостійно:

1. Знайти суму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$;

2. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n+1)!}$;

Теоретичні запитання

1. Що називається числовим рядом?
2. Як визначається сума числового ряду?
3. Сформулюйте достатню ознаку розбіжності числового ряду.
4. Який ряд називається геометричним? Які ознаки його збіжності?
5. Який ряд називається гармонічним? Які ознаки його збіжності?
6. Сформулюйте достатні ознаки збіжності рядів з додатніми членами: порівняння, Даламбера, Коші.
7. Які ряди називаються знакозмінними? Які ряди називаються абсолютно та умовно збіжними?
8. Які ряди називаються знакопочерговими? Сформулюйте ознаку Лейбніца.
9. Які ряди називаються функціональними і, зокрема, степеневими? Що називається областю збіжності функціонального ряду?
10. Як визначити інтервал збіжності степеневого ряду?

Практичне заняття № 12

Тема: **Основні поняття теорії ймовірностей.**

1. Основні поняття комбінаторики

Різні множини, складені з будь-яких елементів, що відрізняються складом елементів або порядком, називаються ***сполуками*** або ***комбінаціями*** цих елементів.

Сполуки бувають трьох видів: перестановки, розміщення, сполучення.

Перестановки – це комбінації (сполуки), складені з одних і тих же n різноманітних елементів і відмінні лише порядком їхнього розташування.

Кількість перестановок з n елементів позначається та обчислюється наступним чином:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Розміщеннями називають будь-який упорядкований набір m елементів із заданих n. Тобто це вибірка m елементів із n з урахуванням порядку (одна вибірка відрізняється від іншої або самими елементами, або їхнім порядком).
Кількість розміщень m елементів із n без повторення:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Кількість розміщень m елементів із n з повторенням:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Сполученнями називають будь-який неупорядкований набір, який містить m елементів із заданих n. Тобто це вибірка m елементів із n без урахування порядку (одна вибірка відрізняється від іншої тільки самими елементами).
Кількість сполучень m елементів із n без повторення:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Кількість сполучень m елементів із n із повторенням:

$$\overline{C}_m^n = C_{n-1+m}^m = C_{n-1+m}^{n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Часто доцільно використовувати такі властивості сполучень:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

3) $C_n^n = C_n^0 = 1$;

4) $C_n^1 = n$.

2.Означення ймовірності події

Ймовірністю події A називається числова міра об'єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається ймовірність як $P(A)$ і дорівнює відношенню числа сприятливих цій події елементарних результатів випробування (m) до загального числа всіх рівноможливих несумісних елементарних результатів, що утворюють повну групу подій (n):

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Приклад 1. Абонент, набираючи номер телефону, забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність, що набрані абонентом цифри правильні.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, що набрані абонентом дві цифри правильні.

Загальне число всіх можливих елементарних результатів випробування – це число розміщень 2 цифр із 10 існуючих (так як маємо вибірку з урахуванням порядку): $A_{10}^{2}=10\cdot 9=90$.

Число сприятливих результатів випробування: $m=1$. Тоді за формулою (1)

$$P(A)=\frac{1}{90}.$$

Приклад 2. На фірмі працюють 10 інженерів і 5 спеціалістів. Керівник фірми вирішив для виконання спеціального завдання сформувати робочу групу з 5 осіб. Знайти ймовірність того, що група включає трьох інженерів.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, що вибрана група із 5 осіб включає трьох інженерів.

Число всіх можливих елементарних результатів n – це число сполучень 5 елементів із 15 (так як маємо вибірку без урахування порядку):

$$n=C_{15}^{5}=\frac{15!}{5!\cdot 10!}=\frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 10!}=3003.$$

Сприятливий результат випробування полягає в одночасній вибірці 3 інженерів із 10 і 2 спеціалістів із 5 (порядок не має значення). Тобто число сприятливих результатів випробування:

$$m=C_{10}^{3}\cdot C_{5}^{2}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=1200.$$

Тоді

$$P\left(A\right)=\frac{1200}{3003}\approx 0,4.$$

Властивості ймовірності

1. Ймовірність достовірної події $P(U) = 1$.
2. Ймовірність неможливої події $P(V) = 0$.
3. Ймовірність будь-якої випадкової події $0 < P(A) < 1$.

3. Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

Теорема. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Теорема. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1:

$$P\left(A\right) + P\left(\overline{A}\right) = 1. \tag{3}$$

Випадкові події A і B називаються ***залежними***, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події.

Ймовірність події B, яка обчислена при умові появи події A, називають ***умовною ймовірністю*** події B, і позначають $P_A(B)$.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A і B дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність другої, розрахованої в припущенні, що перша подія вже відбулась:

$$P\left(A \cdot B\right) = P\left(A\right) \cdot P_A\left(B\right) = P\left(B\right) \cdot P_A\left(A\right). \tag{4}$$

Події A і B називаються ***незалежними***, якщо поява однієї не змінює ймовірність появи другої, тобто

$$P_A\left(B\right) = P\left(B\right), \quad P_B\left(A\right) = P\left(A\right).$$

Теорема. Якщо події A і B незалежні, то

$$P\left(A \cdot B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right). \tag{5}$$

Дві події називаються ***сумісними***, якщо поява однієї з них не виключає появу другої в одному і тому ж випробуванні.

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P\left(A+B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cdot B\right). \qquad (6)$$

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї із незалежних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ знаходиться за формулою:

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot...\cdot\overline{A}_n). \qquad (7)$$

Теорема. Нехай подія A може настати при умові настання однієї з несумісних подій $B_1, B_2, ..., B_n$, що утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A знаходиться за ***формулою повної ймовірності***:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A). \qquad (8)$$

Події $B_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ називаються ***гіпотезами.***

Теорема. Умовна ймовірність гіпотези знаходиться за формулою Байеса:

$$P_A\left(B_i\right)=\frac{P\left(B_i\right)P_{B_i}\left(A\right)}{P\left(A\right)}= \qquad (9)$$

$$=\frac{P\left(B_i\right)P_{B_i}\left(A\right)}{P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)P_{B_2}\left(A\right)+...+P\left(B_n\right)P_{B_n}\left(A\right)}.$$

Приклад 3. Деталі, виготовлені цехом заводу, попадають для перевірки їх стандартності до одного із двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Розв’язання. Виділимо такі події:

A – придатна деталь признана стандартною;

гіпотези: B_1 – деталь перевіряв перший контролер;

B_2 – деталь перевіряв другий контролер.

За умовою задачі $P(B_1)=0,6$; $P(B_2)=0,4$.
За формулою повної ймовірності (8):

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=$$
$$=0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98=0,956.$$

За формулою Байеса (9):

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,6\cdot 0,94}{0,956}=0,59.$$

Приклад 4. Бізнесмен має контакти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5 попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий –7 разів, третій –9 разів при 10 звертаннях до кожного з них. Яка ймовірність того, що в даний час хоча б один із банків виділить бізнесмену кредит?

Розв'язання. Нехай подія A_i – i-й банк виділить бізнесмену кредит, $\overline{A_i}$ – i-й банк не виділить бізнесмену кредит, $i=1,2,3$; подія A – хоча б один банк виділить бізнесмену кредит.
Ймовірність того, що i-й банк виділить бізнесмену кредит з (1):

$$P\left(A_1\right)=\frac{6}{10},\qquad P\left(A_2\right)=\frac{7}{10},\qquad P\left(A_3\right)=\frac{9}{10}.$$

Ймовірність того, що i-й банк не виділить бізнесмену кредит з (3):

$$P\left(\overline{A_1}\right)=1-P\left(A_1\right)=1-\frac{6}{10}=\frac{4}{10};$$
$$P\left(\overline{A_2}\right)=1-P(A_2)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10};$$
$$P\left(\overline{A_3}\right)=1-P(A_3)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}.$$

Шукана ймовірності за (7) буде дорівнювати:

$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}=1-0,012=0,988.$$

Приклад 5. Прилад складено з двох блоків, з'єднаних послідовно і працюючих незалежно. Ймовірність відмови блоків дорівнює $0,05$ та $0,08$. Знайти ймовірність відмови приладу.

Розв'язання. Введемо події:

A − безвідмовна робота приладу (працюють два блоки), A_i − i-й блок не вийде з ладу ($i = 1,\ 2$), тоді відмова приладу є подія $\overline{A}$ протилежна його безвідмовній роботі, $\overline{A_i}$ − i-й блок вийде з ладу ($i = 1,\ 2$)

За умовою задачі $P(\overline{A_1}) = 0,05$, $P(\overline{A_2}) = 0,08$.

Ймовірність безвідмовної роботи блоків з (3):

$$P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = 1 - 0,05 = 0,95;$$

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - 0,08 = 0,92.$$

Події A_1 і A_2 незалежні, тому ймовірність безвідмовної роботи приладу згідно теореми множення ймовірностей (5):

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,95 \cdot 0,92 = 0,874.$$

Ймовірність відмови приладу:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,874 = 0,126.$$

4. Схема випробувань із повторюваннями

Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах і ймовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова і дорівнює p, та не залежить від появи або не появи A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають ***схемою Бернуллі***.

Ймовірність $P_n(m)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться m раз, виражається **формулою Бернуллі**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{10}$$

де $q = 1 - p = P(\overline{A})$, $m = 0, 1, 2, ..., n.$

Число m появи події A у n повторних незалежних випробуваннях називається **частотою.**

Формулу (10) доцільно застосовувати, якщо $n \le 10.$

Частота m_0 настання події у n незалежних випробуваннях називається ***найймовірнішою кількістю*** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np - q \le m_0 \le np + p. \tag{11}$$

Розподіл може мати одне або два найймовірніших числа.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, подія A відбудеться m раз, подається такою наближеною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x); \qquad (12)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірність із задовільною точністю $P_n(m)$, якщо $n > 10$ і $p > 0{,}1$.

Формула Пуассона. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A) = p$ і $0 < p < 0{,}1$, а n велике, то

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np. \qquad (13)$$

Зауваження. Користуючись таблицями значень функції $\phi(x)$, слід пам'ятати, що функція $\phi(x)$- парна, тобто $\phi(-x) = \phi(x)$, та коли $x \geq 4,\quad \phi(x) \approx 0$ з точністю до 0,0001. Таблиця функції $\phi(x)$ для додатних значень x наведена в додатку 1.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p, визначається формулою

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (14)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Зауваження. Слід враховувати, що функція $\Phi(x)$ − непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і, якщо $x \geq 4$, $\Phi(x) \approx 0,5$ з точністю до 0,0001. Таблиця функції $\Phi(x)$ для додатних значень x наведена в додатку 2.

З інтегральної теореми Муавра-Лапласа одержується наближена рівність обчислення **<u>відхилення відносної частоти від ймовірності.</u>**

Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - P\right| < \varepsilon\right) \approx \left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (15)$$

Приклад 6. Прилад складено з 10 блоків. Надійність кожного з них становить $0,8$. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що:

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовить не менше двох блоків.

Розв'язання. Вихід з ладу блоків є послідовністю випробувань Бернуллі. Нехай подія A − відмова блока, тоді за умовою задачі $q = 0,8$, $p = 1 - q = 1 - 0,8 = 0,2$, $n = 10$, значення m коливається від 2 до 10, тому можна скористатися формулою Бернуллі (11.10):

а) $m = 2:\ P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8 = 0,202$;

б) $m \geq 1:\ P_{10}(m \geq 1) = 1 - P_{10}(0) = 1 - 0,8^{10} = 0,8926$;

в) $m \geq 2:\ P_{10}(m \geq 2) = 1 - \left(P_{10}(0) + P_{10}(1)\right) =$

$= 1 - \left((0,8)^{10} + C_{10}^1 \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9\right) = 0,6244.$

Приклад 7. При повному технологічному процесі 80% усієї виготовленої продукції має найвищу якість. Знайти серед 250 виготовлених виробів найбільш ймовірне число виробів найвищої якості.

Розв'язання. За умовою задачі позначимо $n = 250$; $p = 0,8$, $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$. Найбільш ймовірне число виготовлених виробів найвищої якості m_0 задовольняє нерівності (11):

$$250 \cdot 0,8 - 0,2 \le m_0 \le 250 \cdot 0,8 + 0,8;$$
$$199,8 \le m_0 \le 200,8;$$
$$m_0 = 200.$$

Приклад 8. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому $0,6$ загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40.

Розв'язання. За умовою задачі введемо позначення $m_0 = 40$, $p = 0,6$, $q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$. Для знаходження кількості n волокон у партії скористаємося нерівністю (11):

$$0,6n - 0,4 \le 40 \le 0,6n + 0,6;$$
$$-0,4 - 40 \le -0,6n \le 0,6 - 40;$$
$$65,7 \le n \le 67,3.$$

Задача має два розв'язки $n = 66$ і $n = 67$.

Приклад 9. На кожні 40 відштампованих виробів наявні 4 дефектні. Із всієї продукції навмання взято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Введемо позначення: подія A – деталь без дефектів; ймовірність події A у кожному випробуванні обчислимо за формулою (1): $p(A) = p = \dfrac{36}{40} = 0,9$; кількість незалежних випробувань $n = 400$, серед них подія A повинна відбутися $m = 350$ разів. Т.я. $p = 0,9$, $n > 10$ розв'яжемо задачу за допомогою формули локальної теореми Муавра-Лапласа (12):

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,67;$$
$$\phi(-1,67) = \phi(1,67) = 0,0989;$$
$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{6} \cdot 0,0989 \approx 0,0165.$$

Приклад 10. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджений з ймовірністю $0,003$. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 3 пошкоджених вироби.

Розв'язання. Нехай подія A – виріб пошкоджено. Ймовірність події A досить мала $p = p(A) = 0,003$, тому задачу розв'язуємо за формулою Пуассона (11.13):

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,003 = 3;$$

$$P_{1000}(3) = \frac{3^3}{3!}e^{-3} \approx 0,229.$$

Приклад 11. Зерна пшениці проростають з ймовірністю $0,95$. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання. Нехай подія A – зерно пшениці зійшло, відбудеться від від $m_1 = 1890$ до $m_2 = 1920$ раз при проведенні $n = 2000$ незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події A $p = p(A) = 0,95$. Застосуємо формулу інтегральної теореми Муавра-Лапласа (14:)

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1890 - 2000 \cdot 0,95}{\sqrt{2000 \cdot 0,95 \cdot 0,05}} = -1,03;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} = 2,06;$$

$$P_{2000}(1880;\, 1920) = \Phi(2,06) - \Phi(-1,03) = \Phi(2,06) + \Phi(1,03) =$$

$$= 0,4803 + 0,3485 = 0,8288.$$

Приклад 12. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з ймовірністю $0,9$. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з ймовірністю $0,9973$ можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від ймовірності її виявлення не перевищуватиме $0,03$? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Нехай подія A – виготовлено нестандартну деталь, $q = 0,9$ (за умовою задачі), ймовірність події A з (3) $p = p(A) = 1 - 0,9 = 0,1$. Маємо схему з n незалежних випробувань. Скористуємось формулою (15)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right);$$

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0,9973;$$
$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0,49865.$$

За таблицями, додаток 2, знаходимо:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=3\Rightarrow n=\frac{9pq}{\varepsilon^2}=900.$$

Визначимо кількість нестандартних деталей за даних умов:

$$\left|\frac{m}{900}-0,1\right|<0,03;$$
$$-0,03<\frac{m}{900}-0,1<0,03;$$
$$0,07<\frac{m}{900}<0,13;$$
$$63<m<117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Самостійно:

1. В наборі з 20 однотипних деталей 5 нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання для перевірки п'яти деталей дві виявляться нестандартними.
2. В кошику знаходиться 5 білих та 10 червоних куль, які відрізняються лише кольором. Навмання дістали 3 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них є біла.
3. На кожній з чотирьох однакових карток надруковано одну з літер: А, Н, Р, У. Картки перемішано. Знайти ймовірність того, що на вийнятих по одній та розміщених зліва направо картках можна прочитати слово «урна».
4. Ймовірність вразити мішень при одному пострілі з гвинтівки дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що при 600 пострілах мішень буде вражена 250 разів.

5. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,517. Знайти ймовірність того, що із 100 народжених дітей хлопчиків і дівчаток буде однакова кількість.
6. Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях подія настане 3 рази, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події дорівнює 0,7.

Теоретичні запитання

1. Дайте класичне визначення ймовірності та її основні властивості.
2. Дайте визначення суми та добутку подій.
3. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
4. Сформулюйте теорему добутку ймовірностей незалежних подій.
5. Сформулюйте теорему про ймовірність появи хоча б однієї події.
6. Дайте визначення умовної ймовірності.
7. Сформулюйте теорему множення ймовірностей залежних подій.
8. Сформулюйте теорему складання ймовірностей сумісних подій.
9. Запишіть формулу повної ймовірності.
10. Сформулюйте формулу Байєса.
11. Дайте визначення послідовних незалежних подій, схеми Бернуллі та запишіть формулу Бернуллі.
12. Сформулюйте локальну теорему Лапласа та запишіть її формулу.

Додатки

Додаток 1

Таблиця значень функції $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	**0,3989**	**0,3989**	**0,3988**	**0,3986**	**0,3984**	**0,3982**	**0,3980**	**0,3977**	**0,3973**
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,2637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	**0,2420**	**0,2396**	**0,2371**	**0,2347**	**0,2323**	**0,2299**	**0,2275**	**0,2251**	**0,2227**	**0,2203**
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	**0,0540**	**0,0529**	**0,0519**	**0,0508**	**0,0498**	**0,0488**	**0,0478**	**0,0468**	**0,0459**	**0,0449**
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	**0,0044**	**0,0043**	**0,0042**	**0,0040**	**0,0039**	**0,0038**	**0,0037**	**0,0036**	**0,0035**	**0,0034**
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,d\,z$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971

0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732	∞	0,5
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		

Практичне заняття № 13

Тема: **Одновимірні випадкові величини.**

1. Випадкові величини

Випадкова величина – величина, яка внаслідок випробування може приймати лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.

Випадкові величини доцільно позначати великими літерами $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення малими літерами:

$$X: x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad Z: z_1, z_2, \ldots, z_n.$$

Випадкові величини бувають ***дискретними*** і ***неперервними***

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина, що приймає окремі значення з певними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини можна перенумерувати.

Неперервною називають випадкову величину, яка може приймати всі значення із певного скінченого або нескінченного проміжку.

Функцією розподілу називають функцію, яка описує ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1}$$

Функція розподілу – неспадна, неперервна зліва; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від функції розподілу і позначають:

$$f(x) = F'(x). \tag{2}$$

$f(x)$ – невід'ємна функція, для якої

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \qquad P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx;$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

2.Числові характеристики випадкової величини

<u>**Математичне сподівання**</u>

Математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини і визначається за формулами:
для *дискретної* випадкової величини

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,; \tag{3}$$

для *неперервної* на $[a;b]$ випадкової величини

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx, \qquad (4)$$

де $M\left(X\right)$ – оператор математичного сподівання.

Фізичний зміст: математичне сподівання – середнє значення випадкової величини, тобто значення, яке може бути використано замість випадкової величини в наближених обчисленнях або оцінках.

Властивості математичного сподівання

1. $M(C)=C,\ C$ – стала;
2. $M(CX)=CM(X)$;
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;
4. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$.

Дисперсія

Дисперсія випадкової величини характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного сподівання і
дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Дисперсія *дискретної* випадкової величини знаходиться за формулою:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i; \qquad (5)$$

дисперсія *неперервної* випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx. \qquad (6)$$

Основні властивості дисперсії

1. $D(C)=0$;
2. $D(CX)=C^2D(X)$;
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;
4. $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

Дисперсію доцільно знаходити за властивістю (4). Причому для *дискретних* випадкових величин:

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\,; \qquad (7)$$

для *неперервних* випадкових величин:

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx. \qquad (8)$$

Для оцінки розсіяння можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення крім дисперсії , можуть використовуватися інші характеристики. До їх числа відносять ***середнє квадратичне відхилення***.

Середнє квадратичне відхилення дискретної величини X називають квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}. \qquad (9)$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної величини визначається за формулою (9).

Закони розподілу дискретних випадкових величин

№	Закон розподілу X та його математичний запис	$M(X)$	$D(X)$
1.	Біноміальний $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, m=0,1,2,...,n$	np	npq
2.	Пуассона $P(X=m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a},\ a>0.$	a	a
3.	Геометричний $P(X=m)=pq^{m-1},\ m=1,2,....$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
4.	Гіпергеометричний $P(X=m)=\dfrac{C_k^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},$ $m=0,1,2,...,n,\ k>n.$	$\dfrac{kn}{N}$	$\dfrac{nk(n-k)}{N^2}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Величина X розподілена ***рівномірно*** на проміжку $(a;b)$, якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і ***щільність*** її ймовірностей на цьому проміжку постійна, тобто

$$f(x) = \begin{cases} c = \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a;b), \\ 0, & x \notin (a;b). \end{cases} \qquad (10)$$

Випадкова величина, розподілена рівномірно, має такі числові характеристики:

$$M(X) = \frac{b+a}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Випадкову величину називають розподіленою за ***показниковим законом***, якщо ***щільність*** її ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Випадкова величина, розподілена за показниковим законом, має такі числові характеристики:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2};$$

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Нормальний закон розподілу задається щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (12)$$

Параметри a і σ, що входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (13)$$

Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, у проміжок $(\alpha;\beta)$ використовують функцію Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt; \qquad (14)$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\beta}{\sigma}\right). \qquad (15)$$

Для визначення відхилення нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше заданого додатного числа ε використовується формула:

$$P\left(\left|X-a\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (16)$$

Приклад 1. Задані випадкові величини X і Y. Знайти:

1. закони розподілу величин $X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$;
2. математичне сподівання величини $X+Y$;
3. дисперсію величини $X+Y$;
4. середнє квадратичне відхилення величини $X+Y$.

Відомо, що

X	-1	0	1
p_i	$0,2$	$0,5$	$0,3$

Y	0	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Розв'язання.

1. Складаємо розрахункову таблицю.

X	Y	$X+Y$	$X-Y$	$X\cdot Y$	p_i
-1	0	-1	-1	0	$0,2\cdot 0,5=0,10$
	1	0	-2	-1	$0,2\cdot 0,3=0,06$
	2	1	-3	-2	$0,2\cdot 0,2=0,04$
0	0	0	0	0	$0,5\cdot 0,5=0,25$
	1	1	-1	0	$0,5\cdot 0,3=0,15$
	2	2	-2	0	$0,5\cdot 0,2=0,10$
1	0	1	1	0	$0,3\cdot 0,5=0,15$
	1	2	0	1	$0,3\cdot 0,3=0,09$
	2	3	-1	2	$0,3\cdot 0,2=0,06$

Закони розподілу величин $X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$ мають вигляд:

$Z=X+Y$	-1	0	1	2	3
p_i	$0,10$	$0,31$	$0,34$	$0,19$	$0,06$

Контроль: $\sum p_i = 0,10+0,31+0,34+0,19+0,06=1$.

$U=X-Y$	-3	-2	-1	0	1
p_i	$0,04$	$0,16$	$0,31$	$0,34$	$0,15$

$V=X\cdot Y$	-2	-1	0	1	2
p_i	$0,04$	$0,06$	$0,75$	$0,09$	$0,06$

2. Математичне сподівання величини $X+Y$:

$$M(X+Y)=M(Z)=\sum_{i=1}^{5} z_i p_i\,;$$

$$M(X+Y)=-1\cdot 0,1+0\cdot 0,31+1\cdot 0,34+2\cdot 0,19+3\cdot 0,06=0,8.$$

1. Дисперсія величини $X+Y$:

$$D(X+Y)=D(Z)=M(Z^2)-(M(Z))^2;$$

$$D(Z) = 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}31 + 1 \cdot 0{,}34 + 4 \cdot 0{,}19 + 9 \cdot 0{,}06 - 0{,}64 = 1{,}1.$$

2. Середнє квадратичне відхилення величини $X+Y$:

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{D(X+Y)} = \sqrt{D(Z)};$$

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{1{,}1} \approx 1{,}05.$$

Приклад 2. Задано випадкову величину

X	-1	0	1	2
p_i	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}1$

Знайти закон розподілу X^2, функцію розподілу $F(x^2)$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Складаємо розрахункову таблицю

$Z = X^2$	1	0	1	4
p_i	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}1$

або

$Z = X^2$	0	1	4
p_i	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}1$

Функція розподілу має вигляд:

$$F(z) = F(x^2) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 0{,}4, & 0 < z \le 1, \\ 0{,}9, & 1 < z \le 4, \\ 1, & z > 4. \end{cases}$$

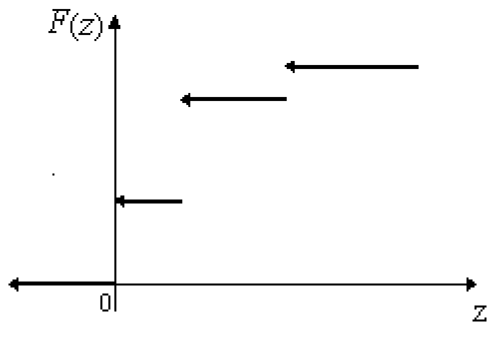


Рис.1. Функція розподілу

Приклад 3. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{9}(x+2)^2, & -2<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Необхідно: а) знайти щільність розподілу ймовірностей $f(x)$; б) обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X; в) знайти ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(0;2)$; г) побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

Розв'язання.

а) Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від функції розподілу (2):

$$f(x)=F^{'}(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{2}{9}(x+2), & -2<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

б) Обчислимо математичне сподівання неперервної випадкової величини за формулою (4):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{2}{9}\int_{-\infty}^{\infty}x(x+2)dx=\frac{2}{9}\int_{-2}^{1}(x^2+2x)dx=;$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{2}{9}\left(\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{8}{3}+4\right)\right)=0.$$

Дисперсію неперервної випадкової величини обчислимо за формулою (8):

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2;\qquad M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx;$$

$$M\left(X^2\right)=\frac{2}{9}\int_{-2}^{1}x^2(x+2)dx=\frac{2}{9}\int_{-2}^{1}\left(x^3+2x^2\right)dx=\frac{2}{9}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)-\left(4-\frac{16}{3}\right)\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1}{2}=0,5;$$

$$D(X)=0,5-0=0,5.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

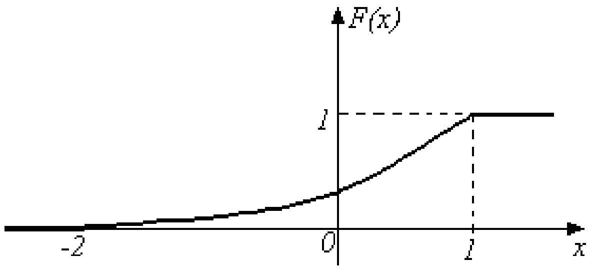
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,5}=0,17.$$

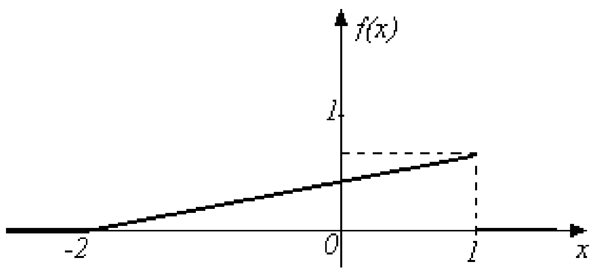
в) Обчислимо ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(0;2)$:

$$P\left(\alpha<X<\beta\right)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left(x\right)dx;$$

$$P\left(0\le x\le 2\right)=\int\limits_{0}^{1}\frac{2}{9}\left(x+2\right)dx=\frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{5}{9}.$$

г) Побудуємо графіки функцій $F\left(x\right)$ і $f\left(x\right)$ відповідно.





Приклад 4. Відомі математичне сподівання $a=30$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma=10$ нормально розподіленої випадкової величини X. Обчислити ймовірність того, що:

а) X прийме значення з інтервалу $(10;50)$;

б) абсолютна величина відхилення прийме значення $\left|X-a\right|<5$.

Розв'язання.

а) Ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(10;50)$ обчислимо за формулою (15):

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right);$$

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

б) Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення прийме значення $|X - a| < 5$ обчислимо за формулою (16):

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right);$$

$$P(|X - 30| < 5) = 2\Phi\left(\frac{5}{10}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

Самостійно:

1. Дано незалежні випадкові величини X та Y. Знайти:

   а) закони розподілу величин $X+Y$, $X-Y$, XY, X^2;

   б) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величин $(X+Y)$ та X^2;

   в) функцію розподілу $F\left(X^2\right)$ та побудувати її графік.

X p	–4 0,1	0 0,2	3 0,4	5 0,3		Y p	0 0,3	2 0,3	3 0,4	

Теоретичні запитання

1. Що таке дискретні та неперервні випадкові величини?
2. Дайте визначення закону розподілу ймовірностей випадкових величин.
3. Дайте визначення інтегральної функції розподілу випадкової величини та її властивостей.

4. Дайте визначення диференціальної функції розподілу (щільність розподілу) випадкової величини та її властивостей.
5. Дайте визначення математичного сподівання випадкової величини та перерахуйте її властивості.
6. Запишіть формули для знаходження математичного сподівання дискретної та неперервної випадкової величини.
7. Дайте визначення дисперсії випадкової величини та перелічіть головні її властивості.
8. Запишіть формули для знаходження дисперсії дискретної та неперервної випадкової величини.
9. Основні закони розподілу ймовірностей дискретних випадкових величин: біноміальний, геометричний, гіпергеометричний, Пуассонівський, їх властивості та числові характеристики.
10. Основні закони розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин: рівномірний і нормальний, їх властивості та основні характеристики.

Практичне заняття № 14

Тема: **Статистичні розподіли вибірок та їх числові характеристики.**

Приклад 1. Знайти методом добутків вибіркову середню $\overline{x}$, дисперсію $D(x)$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i заданого розподілу:
а) безпосередньо;
б) користуючись умовними варіантами.

x_i	18,6	19	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

Вибірка (вибіркова сукупність) – підмножина об'єктів, одібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності.

При формуванні вибірки використовують наступні ***види відбору:***
- ***індивідуальний***, при якому у вибіркову сукупність вибирають по одній одиниці з генеральної сукупності;
- ***груповий*** або ***серійний***, при якому вибирається група (серія) одиниць;
- ***комбінований***, тобто сполучення перших двох видів відбору.

Нехай із генеральної сукупності добута вибірка, причому об’єкт x_1 спостерігався n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів, $x_k - n_k$ разів і $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – *об’єм вибірки*.

Спостережувані значення x_i називають ***варіантами***, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, – ***варіаційним рядом***; кількість спостережень n_i називають ***частотами***, а їх відношення до об’єму вибірки – ***відносними частотами***:

$$w_i = \frac{n_i}{n}. \tag{1}$$

Дискретним статистичним розподілом вибірки називається відповідність між варіантами та їх частотами або відносними частотами.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
w_i	w_1	w_2	$\cdots$	w_k

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Інтервальним статистичним розподілом вибірки називають відповідність між проміжками варіаційного ряду та їх частотами або відносними частотами.

$(z_{i-1}, z_i]$	$(z_0, z_1]$	$(z_1, z_2]$	$\cdots$	$(z_{m-1}, z_m]$
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_m

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

$(z_{i-1}, z_i]$	$(z_0, z_1]$	$(z_1, z_2]$	$\cdots$	$(z_{m-1}, z_m]$
w_i	w_1	w_2	$\cdots$	w_m

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1.$$

Вибірковою середньою $\overline{x}$ статистичного розподілу вибірки називається середнє арифметичне значення її варіант $x_i,\ i = \overline{1,n}$ з урахуванням їх частот ($n_1, n_2, ..., n_k$, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), тобто

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad (2)$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i. \quad (3)$$

Генеральною дисперсією $D_Г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення варіант генеральної сукупності x_i від генеральної середньої $\overline{x_Г}$, тобто

$$D_Г(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_Г)^2, \quad (4)$$

якщо варіанти мають відповідні частоти, то

$$D_Г(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x}_Г)^2. \quad (5)$$

Генеральне середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г(x)}. \quad (6)$$

Вибірковою дисперсією статистичного розподілу вибірки називають середнє арифметичне значення квадратів відхилень його варіант x_i від вибіркового середнього $\overline{x}$, тобто

$$D(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i. \qquad (7)$$

Для обчислення генеральної чи вибіркової дисперсії зручніше використовувати формулу

$$D(x) = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \qquad (8)$$

де $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i$.

Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}. \qquad (9)$$

Розв'язання.

а) Використаємо розрахункову таблицю

x_i	n_i	$x_i\, n_i$	$x_i^2\, n_i$
18,6	4	74,4	1383,84
19	6	114	2166
19,4	30	582	11290,8
19,8	40	792	15681,6
20,2	18	363,6	7344,7
20,6	2	41,2	848,72

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = 100.$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = 1967,2;$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = 38715,67.$$

Обчислимо вибіркову середню за формулою (3):

$$\overline{x} = \frac{1}{100}\cdot 1967,2 = 19,672.$$

Обчислимо дисперсію $D(x)$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i заданого розподілу безпосередньо:

$$D(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 387,1567 - 19,672^2 \approx 0,169;$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0,169} \approx 0,411.$$

Якщо варіанти статистичного розподілу рівновіддалені, розрахунки числових характеристик можна спростити, користуючись *умовними варіантами*

$$u_k = \frac{x_k - C}{h},$$

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i n_i,$$

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h + C,$$

$$D(u) = \overline{u^2} - (\overline{u})^2, \tag{10}$$

$$D(x) = D(u) \cdot h^2,$$

де h – різниця між будь-якими двома сусідніми варіантами; C – умовний нуль (значення варіанти вибірки з найбільшою частотою)

Розв'язання.

б) Використаємо розрахункову таблицю, при умові що

$$h = x_2 - x_1 = 19 - 18,6 = 0,4.$$

Найбільша частота 40 у варіанти $19,8$, тому умовний нуль $C = 19,8$.

x_i	n_i	$u_i = \frac{x_i - C}{h}$	$u_i\, n_i$	$u_i^2\, n_i$
18,6	4	–3	–12	36
19	6	–2	–12	24
19,4	30	–1	–30	30
19,8	40	0	0	0
20,2	18	1	18	18
20,6	2	2	4	8

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = 100.$$

Обчислимо дисперсію $D(x)$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i заданого розподілу, користуючись умовними варіантами за формулами (10).

$$\sum_{i=1}^{k} u_i n_i = -32;$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i = 116;$$

$$\overline{u} = \frac{1}{100} \cdot (-32) = -0,32;$$

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h + C = -0,32 \cdot 0,4 + 19,8 = 19,672;$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} u_i^2 n_i = \frac{1}{100} \cdot 116 = 1,16;$$

$$D(u) = \overline{u^2} - \overline{u}^2 = 1,16 - (-0,32)^2 = 1,0576;$$

$$D(x) = D(u) \cdot h^2 = 1,0576 \cdot 0,16 = 0,1699.$$

Приклад 2.

Дано вибірку чисел:

1; 2; 2; 4; 1; 1; 3; 1; 4; 4; 1; 2; 3; 4; 1

Знайти:

1). варіаційний ряд;

2).емпіричною функцією розподілу;

3).побудувати графіки варіаційного ряда;

4). вибіркову середню $\overline{x}$,

5) дисперсію ,

6) вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i

Розв'язання.

Нехай із генеральної сукупності добута вибірка, причому об'єкт x_1 спостерігався n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів, $x_k - n_k$ разів і $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – *об'єм вибірки*.

Спостережувані значення x_i називають ***варіантами***, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, – ***варіаційним рядом***; кількість спостережень n_i називають ***частотами***, а їх відношення до об'єму вибірки – ***відносними частотами***:

1).варіаційний ряд буде мати вигляд:

Варіанта x	n_i
1	6
2	3
3	2
4	4

Об'єм вибірки: $n = \sum_{1}^{4} n_i = 6 + 3 + 2 + 4 = 15$

2). ***Емпіричною функцією розподілу*** називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$ (X – деяка кількісна ознака досліджувального явища):

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – число варіант, менших за x.

Властивості емпіричної функції:

значення емпіричної функції належить відрізку $[0;1]$;

$F^*(x)$ – неспадна функція;

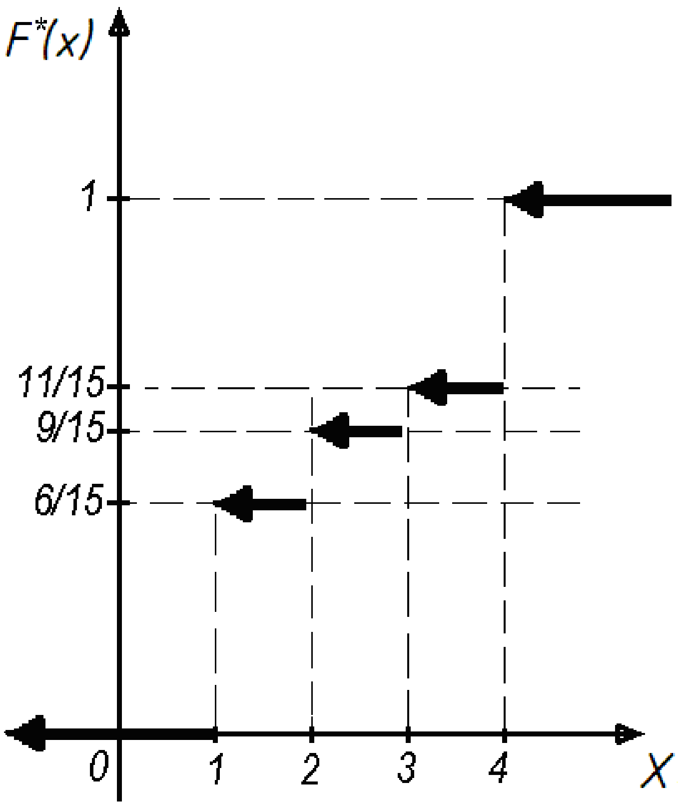
якщо x_1 – найменша варіанта, а x_k – найбільша, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Якщо вихідні статистичні дані згруповані в дискретний варіаційний ряд, то емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2; \\ \dfrac{n_1+n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3; \\ \dots\dots\dots & \\ 1, & x > x_k. \end{cases}$$

Знайдемо емпіричну функцію розподілу:

$$F^*(X)=\begin{cases} 0; & x \le 1 \\ \dfrac{6}{15}; & 1 < x \le 2 \\ \dfrac{6+3}{15}=\dfrac{9}{15}; & 2 < x \le 3 \\ \dfrac{6+3+2}{15}=\dfrac{11}{15}; & 3 < x \le 4 \\ \dfrac{6+3+2+4}{15}=1; & x > 4 \end{cases}$$



3). Усі статистичні розподіли можуть бути представлені графічно. Завдяки цьому можна побачити характерні зміни ряду розподілу, не користуючись аналізом цифрових даних.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $\left(x_i;\, n_i\right)$, $i = 1,\, 2, ...,\, k$ координатної площини.

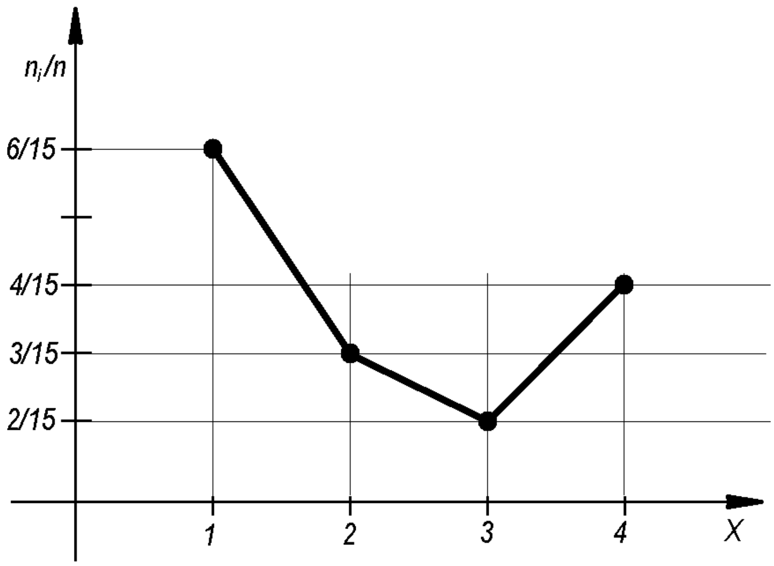
Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_i;\, w_i)$, $i = 1,\, 2, ..., k$. де $w_i = \dfrac{n_i}{n}$

Гістограмою частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $\left[z_{j-1}, z_1\right)$, $j = 1,\, 2, ...,\, m$, а їх висота $n_j = \dfrac{n_j}{z_j - z_{j-1}}$. Площа кожного такого прямокутника дорівнює n_i.

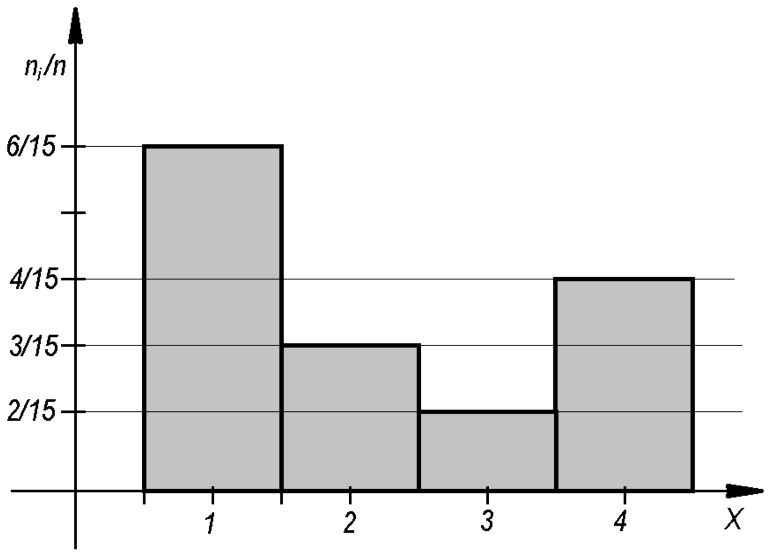
Гістограмою відносних частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $\left[z_{j-1}, z_1\right)$, а їх висотами $n_j = \dfrac{w_j}{z_j - z_{j-1}}$.

Варіанта x	$w_i = \dfrac{n_i}{n}$
1	$\dfrac{6}{15}$
2	$\dfrac{3}{15}$
3	$\dfrac{2}{15}$
4	$\dfrac{4}{15}$

Полігон відносних частот буде мати вигляд:



Гістограма відносних частот:



4)

Вибірковою середньою $\overline{x}$ статистичного розподілу вибірки називається середнє арифметичне значення її варіант $x_i,\ i=\overline{1,n}$ з урахуванням їх частот ($n_1, n_2, \ldots, n_k$, причому $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$), тобто.

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i .$$

Таким чином: $\overline{x}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{4}x_i n_i=\frac{1}{15}\left(1\cdot 6+2\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 4\right)=\frac{34}{15}=2{,}26667$

5).
Вибірковою дисперсією статистичного розподілу вибірки називають середнє арифметичне значення квадратів відхилень його варіант x_i від вибіркового середнього $\overline{x}$, тобто

$$D(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i .$$

Для обчислення генеральної чи вибіркової дисперсії зручніше використовувати формулу

$$D(x) = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \text{ де } \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i$$

Отже: $\overline{x^2} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{4} x^2{}_i n_i = \frac{1}{15}\left(1^2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 4\right) = \frac{100}{15} = 6{,}66667$

$D(x) = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{4} x^2{}_i n_i - \left(\overline{x}\right)^2 = 6{,}66667 - 2{,}26667^2 = 1{,}52888$

6). ***Вибіркове середнє квадратичне відхилення***:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{1{,}52888} \approx 1{,}23648$

Самостійно:
Дано вибірку чисел:
1; 3; 2; 3; 1; 0; 3; 0; 4; 4; 5; 2; 3; 0; 1; 4; 5; 3
Знайти:
1). варіаційний ряд;
2).емпіричною функцією розподілу;
3).побудувати графіки варіаційного ряда;
4). вибіркову середню $\overline{x}$,
5) дисперсію ,
6) вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_i

Теоретичні запитання

1. В чому полягає предмет математичної статистики? Що є її теоретичною основою?
2. Дайте визначення вибірки і генеральної сукупності.
3. Які бувають способи відбору?

4. Вкажіть особливості побудови варіантного ряду. Що називається варіантою?
5. Як знаходять емпіричний закон розподілення та емпіричну функцію розподілення?
6. Що називають полігоном відносних частот?
7. Як будується гістограма?
8. Дайте визначення вибіркової середньої, вибіркової дисперсії та вибіркового середньоквадратичного відхилення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман – М.: Наука, 1986. – 444 с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Бугров Я.С. Задачник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Гл. редакция физико-математической литературы, 1982.– 192 с.
4. Вища математика: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. Ч.2 / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. – К.:КНЕУ, 1999. – 396 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 1975. – 333с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I / П.Е. Данко, А.Г. Попов – М.:Высш. шк., 1974. – 416 с.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: Изд-во Моск. Кн.-та, ЧеРо, 1997. – 624 с.
8. Коваленко И.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Н. Коваленко, А.Н. Филиппова – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
9. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко –М.:1981. – 304 с.
10. Кривуца В.Г. Вища математика: Практикум / В.Г. Кривуца, В.В. Барковський, Н.В. Барковська – К.:ЦУЛ, 2003. – 536 с.
11. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. (Типовые расчёты) / Л.А. Кузнецов – М.: Высшая школа, 1983. – 176 с.
12. Лихолетов И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич – Минск: Выш. шк., 1976. – 456 с.
13. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного

аналізу, диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
14. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1 / Н.С. Пискунов – М.: Наука, 1985. – 348 с.
16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2 / Н.С. Пискунов – М.: Наука, 1976. – 576 с.
17. Сборник задач по курсу высшей математики / П.Е. Дюбюк, Г.И. Кручкович, Н.Н. Глаголева и др. – М.: Высшая школа, 1965. – 592 с.