СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

SYSTEM ANALYSIS

УДК 624.074.04

ВИКОРИСТАННЯ РОЗПОДІЛЬНОГО МЕТОДУ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Кавун Г.М. *– старший викладач кафедри менеджменту*
та інформаційних технологій
Херсонського державного аграрно-економічного університету
ORCID ID: 0000-0003-2912-4536

У статті розглянуто використання розподільного методу для розв'язування транспортних задач та охарактеризовано загальні підходи до постановки більш складних завдань.

Обґрунтовано актуальність питання з метою оптимального планування розподілу технічних ресурсів під час визначення потреби цих ресурсів та організації їх використання для підвищення ефективності роботи підприємств.

Розкрито необхідність удосконалення та оптимізації планів вантажоперевезень за допомогою методів математичного моделювання транспортної задачі, зокрема розподільного методу.

Досліджено розподільний метод та алгоритми його розв'язання щодо впровадження в процес розрахунку оптимальних планів перевезення вантажів. Охарактеризовано загальні підходи до складання моделі транспортної задачі та наведено критерії її оптимальності, кінцевим результатом якої буде можливість зіставляти свої ресурсні можливості з потребами підприємства, оцінювати їх з точки зору розвитку бізнесу для прийняття оптимальних рішень під час планування перевезень вантажу.

Отримано модель транспортної задачі, яка мінімізує затрати на перевезення вантажів за умови, що їх об'єми виражаються в різних одиницях виміру. Це дозволяє більш точно відобразити в цій моделі конкретне планування відповідної економічної задачі.

Охарактеризовано загальні підходи до оптимізації вантажоперевезень на підприємствах та наведено критерії оптимальності в сучасних умовах господарювання. З'ясовано необхідність використання математичних методів у плануванні та прогнозуванні роботи підприємств, а також вимоги до зменшення транспортних витрат, що потребують поглиблених досліджень та впровадження відповідних математичних моделей.

Обґрунтовано актуальність застосування цього методу для транспортних перевезень за різних одиниць виміру вантажу.

Ключові слова: *модель, транспортне завдання, оптимізаційні моделі, ефективність, оптимальний план.*

Kavun H.M. Use of the distribution method in mathematical modeling

The article considers the problem of using the distribution method to solve transport problems and describes the general approaches to setting more complex problems.

The urgency of the issue is substantiated in order to optimally plan the distribution of technical resources in determining the need for these resources and organize their use in order to improve the efficiency of enterprises.

The necessity of improvement and optimization of freight plans with the help of methods of mathematical modeling of the transport problem by the distribution method is shown.

The distribution method and algorithms for its solution before implementation in the process of calculating the optimal plans of cargo transportation are studied. The general approaches to drawing up of model of a transport problem are characterized and criteria of its optimum are resulted, the final result of which will be an opportunity to compare the resource possibilities with needs of the enterprise, to estimate them from the point of view of business development.

A model of the transport problem is obtained, which minimizes the cost of transporting goods, provided that their volumes are expressed in different units. This allows you to more accurately reflect in this model the specific planning of the relevant economic problem.

The general approaches to optimization of cargo transportation at the enterprises are characterized and the criteria of optimality in modern economic conditions are given. The need to use mathematical methods to plan and forecast the work of enterprises, as well as the growing demands to reduce the cost of transport costs, which require in-depth research and implementation of appropriate mathematical models.

The relevance of the application of this method for transportation with different units of cargo is substantiated.

Key words: *model, transport problem, optimization models, efficiency, optimal plan.*

Постановка проблеми. Під час вирішення завдання з оптимізації виробництва виникає необхідність застосування нових методів, які покращують організацію виробництва та заощаджують матеріальні ресурси. Більшість методів програмування призначена для визначеного кола задач, розв’язання яких спрощується у зв’язку з використанням їхніх специфічних властивостей. Найбільш поширеним методом є розподільний, який має різні види. Математична модель повинна відображати всі умови, які містяться в ній, і водночас не має включати вимоги, обумовлені лише алгоритмом розв’язку, але не властиві самій задачі, мусить доповнювати систему моделей господарства, виявляти додаткові можливості та резерви його розвитку. Дедалі очевиднішою стає необхідність створення такої моделі транспортної задачі, яка б мінімізувала затрати на перевезення вантажів за умови, що їх об’єми виражені в різних одиницях.

Метою дослідження є одержання за допомогою розподільного методу математичної моделі транспортної задачі, яка допоможе виконувати поточне й оперативне планування раціонального використання транспорту та забезпечить оптимальну структуру машинно-транспортного парку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Процес ефективного застосування здобутків математичного програмування в сучасних економічних дослідженнях органічно пов’язаний із досягненнями на попередніх етапах розвитку. Багато методів програмування пристосовані тільки для визначеного кола задач, розв’язання яких спрощується тільки з використанням їхніх специфічних властивостей. Труднощі виникають не під час складання моделі, а в процесі пошуку методів розв’язання сформульованих задач із вихідними даними. Питання пошуку методів економіко-математичного моделювання в процесі розрахунку оптимальних планів вантажоперевезень з метою підвищення економічної ефективності аграрного підприємства завжди є нагальним.

Виклад основного матеріалу. Задача про розподіл транспорту за видами робіт укладається в економіко-математичну модель так званої розподільної задачі. Одним із найважливіших методів, що використовується під час створення економіко-математичної моделі оптимізації затрат на виконання вантажоперевезень, є розподільний метод, який має певний алгоритм.

Необхідно знайти такий план $\{x_{ij}\}$, який задовольняє умові мінімуму сумарну вартість робіт. Позначимо: x_{ij} – кількість транспорту i-го типу, зайнятого на j-му виді робіт; b_j (j = 1, 2, … n) – об'єми робіт, які необхідно виконати; a_i – наявна кількість транспорту (i = 1, 2, …m) [1; 3].

Розглянемо обмеження, які потрібно враховувати під час розв'язання завдання:

Всі роботи повинні бути виконані. Для математичного запису цієї умови вводимо коефіцієнт λ_{ij}, який означає норму виробітку одного транспорту i-го типу на j-тій роботі за розглянутий період. Тоді ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} x_{il} = b_j. \tag{1}$$

2. До виконання запланованих робіт буде повністю або частково задіяний виділений для цього парк транспорту:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{il} \le a_i. \tag{2}$$

Ця умова передбачає можливе неповне використання наявних енергетичних можливостей , на що вказує знак нерівності.

3. Число транспорту не повинно бути від'ємним:

$$x_{ij} \ge 0. \tag{3}$$

Мінімізується лінійна функція:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} \lambda_{ij} x_{ij}, \tag{4}$$

де c'_{ij} – вартість 1 га j-тої роботи, виконаної на i-му типі транспорту; $\lambda_{ij} c'_{ij}$ – вартість роботи, виконаної на і-му типі транспорту за весь період.

Цю задачу ще називають λ задачею. Від транспортної вона відрізняється тим, що об'єми в неї виражаються в різних одиницях виміру. Це дозволяє більш точно відобразити в моделі конкретний економічний зміст. Для компенсації різнорідності величин введено коефіцієнт λ. Розподільна задача складніша за транспортну, відповідно, ускладнюється й алгоритм її розв'язання.

Наведемо деякі вихідні дані про розподіл транспорту і розв'яжемо задачу розподільним методом [4].

Об'єми робіт, які потрібно виконати (в натуральних одиницях), наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Об'єми робіт, які потрібно виконати

I	II	III	IV	V
10000	5000	2000	10000	20000

Кількість вантажівок (за типами): a_1 = 18, a_2 = 12.

Сезонні норми виробітку (в натуральних одиницях) наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Сезонні норми виробітку

λ_{ij}	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5
i = 1 i = 2	2770 1360	485 250	2502 1080	1740 1300	7400 3780

У табл. 3 внесені значення c'_{ij} і $c_{ij} = \lambda_{ij} c'_{ij}$.

Таблиця 3

c'_{ij}	c_{ij}	***j* = 1**		***j* = 2**		***j* = 3**		***j* = 4**		***j* = 5**	
i=1	i=1	1,00	2770	3,20	552	1,27	3178	0,80	1392	0,27	1998
i=2	*i=2*	0,90	1224	3,40	850	1,00	1080	0,70	910	0,25	945

На перетині рядків і стовпців у табл. 4 проставлені дві величини: норми виробітку λ_{ij} – у верхньому лівому кутку; вартість сезонної роботи одного транспорту c_{ij} – у правому нижньому кутку. Крім цього, в кожній клітці є місце для елементів заданої матриці $\{x_{ij}\}$. Початковий план складають за правилом мінімального елемента по стовпцю. Для цього в першому стовпчику відшукують рядок k з мінімальною величиною вартості та в обрану таким чином клітку k-1 записують таке число машин *k*-го типу, яке необхідне для виконання всього об'єму робіт виду 1.

Для визначення кількості машин необхідно розділити об'єм роботи $в_1$ на сезонну продуктивність λ_{k1}, тобто $\frac{10000}{1360} = 7,35$.

У другому стовпчику на роботі II мінімальну вартість мають автомашини другого типу, але машини другого типу, що залишилися (17 - 7,35 = 7,65), за продуктивності 250 га за сезон можуть виконати всього лише 1912 га (7,65 250 = 1912) замість 5000 га. Тому під час виконання об'єму робіт типу II доведеться використати ще 6,36 машин першого типу. Всі залишкові роботи передбачається виконати також на тракторах першого типу, оскільки трактори другого зайняті на роботах I і II. Значення цільової функції дорівнює 41311.

Представляючи математично принцип розподілу вантажівок за правилом мінімального елемента по стовпцю, можна зазначити, що після вибору в *k*-му стовпцю *j*-го рядка з мінімальним значенням $c_{ij} c_{kj} = min(cij)$.

Таблиця 4

Тип машин	v_j / **u**$_i$	**Види робіт**												**Кількість машин**
		1		**II**		**III**		**IV**		**V**		**VI**		
		0,863		**3,200**		**0,954**		**0,800**		**0,270**		**0**		
1	0	2770 2770		485 1552	6,36 7,32	2502 3178	0,80	1740 1392	5,75 5,75	77400 1998	2,70 20,70	1 1 80	0,23 20,23	18
2	-50	1360 1224	7,35 77,35	250 850	7,65	1080 1080	1,86	1300 910		33780 9945		1 1 80		15
Обсяг робіт, га		10000		5000		2000		10000		20000				

У клітку k_j вписують величину $x_{\kappa j}$, яка дорівнює:

$$x_{kj} = \min(\frac{b_j}{\lambda_{kj}}, a_k - \sum_{lk \neq j} x_{kl}). \quad (5)$$

Якщо, згідно з цим правилом, у деякий s-й стовпчик записали величину

$$x_{ks} = a_k - \sum_{lk \neq j} x_{kl}, \tag{6}$$

то наступним кроком буде пошук в s-му стовпчику r-го рядка, який містить

$$c_{rs} = min(c_{is}),$$

і заповнення клітки rs величиною

$$x_{kj} = \min\left(\frac{b_s - (a_k \sum_{lk \neq j} x_{kl}) \cdot \lambda_{ks}}{\lambda_{rs}}, a_r\right). \tag{7}$$

Після заповнення останнього п’ятого стовпця виявилося, що машини першого типу використані не повністю. Залишок у 2,39 записують в додатковий шостий стовпчик. Для зручності для подальших обчислень в цьому стовпці проставляють величини 1 і 0 [5; 6].

Розпочнемо тепер обчислення попередніх потенціалів, які в розподільному методі задовольняють такі умови:

$\lambda_{ij} - v_j = c_{ij}$ якщо $x_{ij} \succ 0, j \leq n$;

$u_i = 0$ якщо $x_{i,n+1} \succ 0$.

Для потенціалів в оптимальному плані додаються умови:

$$u_i \geq 0, \text{ для всіх } i;\ \lambda_{ij} \cdot v_j - u_i \leq c_{ij} \text{ для всіх } i, j; \text{ якщо } jx_i = 0. \tag{8}$$

Одразу після обчислення потенціалів видно, що початковий план С=41311 у.о. не оптимальний, його необхідно покращити. Процес покращення плану в розподільному методі набагато складніший, ніж у транспортній задачі, йому повинна передувати допоміжна операція з викреслювання рядків і стовпців, яка полягає в послідовному вивченні рядків матриці X і викреслюванні тих із них, що містять всього одну заповнену клітку, тобто один ненульовий елемент.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 6,36^* & 0,80^* & 5,75^* & 2,70^* & 2,39^/ \\ & 6 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 7,35^* & 7,65 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & & & & \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Процес викреслювання закінчується тоді, коли всі ненульові елементи матриці будуть у викреслених рядках.

Складемо співвідношення $\frac{xlj}{xij}$ для всіх $\bar{x}_{ij} > 0$, найменше з них приймають за 0 і за допомогою формули (18) отримують новий, більш економний варіант плану. Значення 0 проставляють у клітці $r_1 d_1$ Економія завдяки виправленню плану в першому випадку дорівнює θ_u, а у другому – $\theta\omega_{r2d1}$. Пояснимо все сказане на подальшому прикладі. В нашому випадку серед величин u_1 и v_{2111} = -342. Отже, у новому плані величина θ повинна бути внесена до клітки 2111.

Складаємо два ланцюжки:

– перший x_{211}, $x^*{}_{111}$, $x_{1\,VI}$;

– другий $x^*{}_{111}$, $x_{1\,VI}$.

Знаходимо доданок $\bar{x}\frac{(1)}{ij}$ та $\bar{x}\frac{(2)}{ij}$:

$$\bar{x}\frac{(1)}{2\,\mathrm{II}} = 1;\ \bar{x}\frac{(1)}{1\,111} = -\frac{\lambda_{2\mathrm{II}}}{\lambda_{1\mathrm{II}}}\bar{x}^{1}_{2\ \mathrm{II}} = -0{,}515;\ \bar{x}^{1}_{IV1} = -\bar{x}^{1}_{1\ \mathrm{II}} = 0{,}515.$$

$$\bar{x}^{(2)}_{1\ \mathrm{III}} = \frac{1}{\lambda_{1\ \mathrm{III}}} = 0{,}000399;\ \bar{x}^{(2)}_{1\ V1} = -\bar{x}^{(2)}_{1\mathrm{III}} = -0{,}000399. \tag{10}$$

Обчислюємо коефіцієнти $\overline{x}_{ij}$:

$$\overline{x}_{1\ \mathrm{II}}=\overline{x}^{(1)}_{1\ \mathrm{III}}=-0{,}515,$$

$$\overline{x}_{1\ \mathrm{III}}=\lambda_{2\ \mathrm{III}}\overline{x}^{(2)}_{1\ \mathrm{III}}=0{,}434$$

$$\overline{x}_{1\ V1}=\overline{x}^{(1)}_{1\ V1}+\lambda_{2\mathrm{III}}\overline{x}^{(2)}_{1\ V1}=0{,}084,$$

$$\overline{x}_{2\ \mathrm{II}}=\overline{x}^{(1)}_{2\ \mathrm{II}}=1.$$

Або у вигляді матриці:

$$\overline{\mathrm{X}}=\begin{pmatrix}0 & -0{,}515 & 0{,}431 & 0 & 0 & 0{,}084\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Визначаємо новий елемент плану θ за формулою:

$$\theta=\min_{\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{ij}}>0}\frac{\mathrm{xij}}{\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{ij}}}=\min\left(\frac{\mathrm{x}_{1\ \mathrm{III}}}{\overline{\mathrm{x}}_{1\ \mathrm{III}}};\ \frac{x_{1\ V1}}{\overline{x}_{1V1}};\frac{x_{2\ \mathrm{II}}}{\overline{x}_{2\ \mathrm{II}}}\right)=$$

$$=min\left(\frac{0{,}80}{0{,}431};\ \frac{2{,}39}{0{,}084};\ \frac{7{,}65}{1}\right)=1{,}86. \qquad (11)$$

Інші елементи плану записуємо до табл. 5.

Таблиця 5

Тип машин	v_j / u_i	**Види робіт**												**Кількість машин**
		1		**II**		**III**		**IV**		**V**		**VI**		
		0,863		**3,200**		**0,954**		**0,800**		**0,270**		**0**		
1	0	2770 2770		485 1552	7,32 7,32	2502 3178		1740 1392	5,75 5,75	7400 1998	2,70 2,70	0 1 0	2,23 2,23	18
2	-50	1360 1224	7,35 7,35	250 850	5,79 5,79	1080 1080	1,86 1,86	1300 910		3780 945		0 1 0		15
Обсяг робіт, га		10000		5000		2000		10000		20000				

Попередні потенціали для другого плану (табл. 5) обчислені за формулами (8), причому нульове значення набуває знову u_1, оскільки рядок 1 має зв'язок зі стовпцем n + 1. Як показують розрахунки u_i та v_{ij}, другий план С-40686 також не оптимальний, а мінімум досягається на $v_{2\ IV}$ = -180.

Знову залишаємо ланцюжки: перший $x'_{2\ \mathrm{II}}, x^{*}_{1\ \mathrm{II}}, x'_{1\ V1}$; другий $x^{*}_{1\ 1V}, x'_{1\ V1}$.

Обчислюємо нові доданки $\overline{x}^{(1)}_{ij}$ та $\overline{x}^{(2)}_{ij}$:

$$\overline{x}^{(2)}_{2\ \mathrm{II}}=1;\ \overline{x}^{(1)}_{1\mathrm{II}}=-\frac{\lambda_{2\ \mathrm{II}}}{\lambda_{1\ \mathrm{II}}}\overline{x}^{(1)}_{2\ \mathrm{II}}=-0{,}515;\ \overline{x}^{(1)}_{1\ \mathrm{II}}=0{,}515,$$

$$\overline{x}^{(2)}_{1\ 1V}=\frac{1}{\lambda 1_{\ 1V}}=0{,}000575;\ \overline{x}^{(2)}_{1\ 1V}=-\ \overline{x}^{(2)}_{1\ 1V}=0{,}000575 \qquad (12)$$

та коефіцієнти $\overline{x}_{ij}$. В результаті отримуємо:

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}0 & -0{,}515 & 0 & 0{,}747 & 0 & -232\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо:

$$\theta=min\left(\frac{x_{1\ 1V}}{x_{2\ 1V}}\ \frac{x_{2\ \mathrm{II}}}{x_{1\ \mathrm{II}}}\right)=min\left(\frac{5{,}75}{0{,}747}\ \frac{5{,}79}{1}\right)=5{,}79. \qquad (13)$$

Використовуючи величини θ та $\bar{x}_{ij}$, змінюємо план, згідно з формулою (18), та отримуємо третій варіант плану (табл. 6).

Таблиця 6

Тип машин	v_j / u_i	**Види робіт**												Кількість машин
		1		**II**		**III**		**IV**		**V**		**VI**		
		0,863		**3,200**		**0,954**		**0,800**		**0,270**		**0**		
1	0	2770 2770		485 1552	7,32 7,32	2502 3178		1740 1392	5,75 5,75	7400 1998	2,70 2,70 2,70	0 1 0	3,57 2,23	18
2	-50	1360 1224	7,38 7,35	250 850	5,79 5,79	1080 1080	1,86 1,86	1300 910		3780 945		0 1 0		15
Обсяг робіт, га		10000		5000		2000		10000		20000				

Для цього плану С=39645 жодна з величин u_i, v_{ij} не є негативною. Отже, отримано оптимальний варіант. Його реалізація обійдеться в 39 645 у. о, водночас як за першим планом було 41 311 у. о. Завдання вирішено. Оптимальний варіант розподілу машин за видами робіт знайдено [2; 3; 7].

Висновки і пропозиції. Однак слід звернути увагу на одну обставину. Рішення отримали не в цілих числах, тобто кількість машин виражається у вигляді дробових величин. Округлення до цілих порушило б оптимальність плану, тому рекомендується оперувати не кількістю машин, а кількістю машино-змін. Для цього треба помножити кожен із елементів x_{ij} на постійну величину – кількість змін у розрахунковому періоді. У такий спосіб отримують кількість змін, яку має відпрацювати i-та машина на j-й роботі.

Під час складання диспетчерського плану роботи машинного парку орієнтуються насамперед на кількість змін і потім на округлену до цілих кількість машин, передбачену оптимальним планом. При цьому число змін у розрахунковому періоді вже не буде постійним для всіх марок машин та видів роботи і визначається в кожному випадку запланованою кількістю змін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Оптимізаційні методи і моделі / О.Г. Савченко та ін. Херсон : ТОВ «Айлайт», 2014. 430 с.

2. Іващук О.Т. Економіко-математичне моделювання. Тернопіль : ТНЕУ. 2008. 704 с.

3. Лобода О.М. Актуальні проблеми ідентифікації та моделювання структури управління підприємством. *Наука й економіка.* 2015. № 3. С. 130–134.

4. Гатаулін А.М. Економіко-математичні методи в плануванні сільськогосподарського виробництва. Київ : Вища школа, 2000. 260 с.

5. Вітлінський В.В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком. Київ : КНЕУ, 2000. 292 с.

6. Лобода О.М., Димов В.С. Моделі та методи інформаційних технологій управління аграрного сектора економіки за допомогою достатніх умов оптимальності. *Проблеми інформаційних технологій.* Херсон, 2018. Вип. 1 (023). С. 104–110.

7. Influence of Mineral Nutrition and Combined Growth Regulating Chemical on Nutrient Status of Sunflower / E.O. Domaratskiy et al. *Indian Journal of Ecology.* 2018. Vol. 45. Issue 1. P. 126–129.

REFERENCES:

1. Savchenko, O.H., Kavun, H.M., Valko, N.V., Kuzmich, L.V. (2014) Optymizatsiyni metody i modeli [Optimization Methods and Models]. Kherson : Ailight LLC. 430 p. [in Ukrainian]

2. Ivashchuk, O.T. (2008) Ekonomiko-matematychne modelyuvannya [Economic and Mathematical Modeling]. Ternopil : TNEU. 704 p. [in Ukrainian]

3. Loboda, O.M. (2015) Aktual'ni problemy identyfikatsiyi ta modelyuvannya struktury upravlinnya pidpryyemstvom [Actual Problems of Identification and Modeling of Enterprise Management Manufacturing]. *Science and Economics*. № 3. pp. 130–134. [in Ukrainian]

4. Hataulin, A.M. (2000) Ekonomiko-matematychni metody v planuvanni sil's'kohospodars'koho vyrobnytstva [Economic and Mathematical Methods in Agricultural Production Planning]. Kyiv : Higher School. 260 p. [in Ukrainian]

5. Vitlinsky, V.V. (2000) Analiz, modelyuvannya ta upravlinnya ekonomichnym ryzykom [Analysis, Modeling and Management of Economic Risk]. Kyiv : KNEU. 292 p. [in Ukrainian]

6. Loboda, O.M., Dymov, V.S. (2018) Modeli ta metody informatsiynykh tekhnolohiy upravlinnya ahrarnoho sektoru ekonomiky za dopomohoyu dostatnikh umov optimal'nosti [Models and methods of information technologies of management of economy's agrarian sector with the help of optimality's sufficient conditions]. *Problems of information technology*. Kherson. Issue 01 (023), pp. 104–110. [in Ukrainian]

7. Domaratskiy, E.O., Bazaliy, V.V., Domaratskiy, O.O., Dobrovol'skiy, A.V., Kyrychenko, N.V., Kozlova, O.P. (2018) Influence of Mineral Nutrition and Combined Growth Regulating Chemical on Nutrient Status of Sunflower. *Indian Journal of Ecology.* Vol. 45. Issue 1. P. 126–129. [in English]