DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-085-8-7

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ СТІЙКОСТІ ТА ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ, ЩО ПІДКРІПЛЕНА РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ

Ємел'янова Т. А., Кириченко В. Л.

ВСТУП

Тришарові пластини як плоскі елементи конструкцій широко застосовуються в різних галузях техніки та будівництва. Це пояснюється тим, що плоским тонкостінним конструкціям притаманні легкість і раціональність форм, висока несуча здатність, економічність і хороша технологічність. Поєднання шарів дозволяє створювати конструкції, які мають високі показники міцності та жорсткості з відносно малою масою. Тому розробка нових методів розв'язання задач стійкості та вільних коливань тришарових пластин сприяє підвищенню надійності зазначених конструкцій.

Дослідженням стійкості та вільних коливань непідкріплених тришарових пластин присвячено досить багато публікацій[1, 2, 3, 4]. Чисельні методи розрахунку тришарових пластин на стійкість і вільні коливання наведені в роботах[5, 6, 7, 8].

---

[1] Александров А.Я., Куршин Л.И. Многослойные пластинки и оболочки. *Труды VII Всесоюзной конференции оболочек по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск, 1969 г.* Москва : Наука, 1970. С. 714–721.

[2] Григолюк Э.И., Кассихин В.Н. Осесимметричные свободные колебания круговых трехслойных пластин. *Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек :* сборник научных трудов / под ред. Э.И. Григолюка. 1981. С. 185–195.

[3] Прусаков А.П. Некоторые задачи изгиба круглых трехслойных пластин с легким заполнителем. *Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961 г.* Казань : Казанский гос. ун-т, 1961. С. 293–297.

[4] Chun-Sheng Chen. Investigation on the Vibration and Stability of Hybrid Composite Plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2005. № 24 (16). P. 1747–1758. URL https://doi.org/10.1177/0731684405052186.

[5] Алфутов Н.А., Трофимов В.В. Энергетический метод расчета оболочек на устойчивость, не требующий определения начального напряженного состояния. *Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск, 1969 г*. Москва : Наука, 1970. С. 52–57.

Специфічною особливістю роботи тришарової конструкції є великий вплив поперечних деформацій зсуву заповнювача на роботу зовнішніх шарів, тому доцільно підкріплювати тришарові пластини ребрами жорсткості[9].

Розрахункам на динаміку та стійкість підкріплених тришарових пластин присвячена незначна кількість робіт[10, 11, 12, 13]; наведені розв'язки завдань за різних навантажень і граничних умов[14, 15].

---

[6] Дорофеев В.С., Ковров А.В., Крутий Ю.С., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г., Таций Р.М., Ушак Т.И. Новые методы расчета систем с дискретно-непрерывным распределением параметров / под ред. Н.Г. Сурьянинова. Одесса : ЭВЕН, 2012. 374 с.

[7] Крутий Ю.С., Сурьянинов Н.Г. Фундаментальные решения приведенного уравнения параметрических колебаний. *Збірник наукових праць УкрДУЗТ*, 2017. Вип. 167. С. 17–24.

[8] Егорычев О.А., Егорычев О.О., Хрупов А.А., Богданов А.В. Вывод частотного уравнения собственных колебаний упругой трехслойной пластинки, три края которой шарнирно оперты, а четвертый край жестко закреплен. *Вестник МГСУ*. № 3. 2008. С. 33–37.

[9] Surianinov M., Yemelianova T., Lazarieva D., Bazhanova A. Stability Analysis of a Three-Layer Shell with Lightweight Filler Supported By Rigidity Ribs. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*. Vol. 7. Issue 12. P. 462–469. December 2020. 2348–7968 | Impact Factor (2020) – 6.72. URL: www.ijiset.com.

[10] Устарханов О.М. Вопросы прочности трехслойных конструкций с регулярным дискретным заполнителем : автореф. … дисс. докт. техн. Наук : 05.23.17, 05.23.01. Российский государственный строительный университет. Ростов-на-Дону, 2000. 400 с.

[11] Belarbi M.-O. et al. / On the Free Vibration Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates. *A Layerwise Finite Element Formulation Latin American Journal of Solids and Structures.* 14. 2017. P. 2265–2290.

[12] Yuan W.X., Dawe D.J. Free vibration and stability analysis of stiffened sandwich plates. *Composite Structures.* 2004. № 63 (1). P. 123–137. DOI: 10.1016/ S0263-8223(03)00139-9.

[13] Al-Qablan H. Semi-analytical Buckling Analysis of Stiffened Sandwich Plates. *Journal of Applied Sciences.* 2010. № 10. P. 2978–2988. DOI: 10.3923/ jas.2010.2978.2988. URL: https://scialert.net/abstract/?doi=jas.2010.2978.2988.

[14] Зиненко Г.П. Устойчивость и колебания прямоугольных трехслойных пластин с большими вырезами : автореф. дисс. … канд. техн. наук / Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта. Днепропетровск, 1968. 12 с.

[15] Patel S.N. & Sheikh A.H. Buckling response of laminated composite stiffened plates subjected to partial in-plane edge loading. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2016. № 17. P. 5–6, 322–338. DOI: 10.1080/15502287.2016.1231235.

Ці дослідження не мають систематичного характеру, тому використання нових методів розв'язання задач на стійкість і вільні коливання підкріплених тришарових пластин, що сприяють отриманню найбільш точних розрахункових параметрів, є актуальною і перспективною задачею.

У роботі розглядається пружна стійкість і вільні згинальні коливання тришарової пластини з легким заповнювачем, яка підкріплена ребрами жорсткості. Відстань між ребрами, а також їхня жорсткість вважаються однаковими. Ребра розташовані симетрично відносно серединної поверхні тришарової пластини. Метою роботи є отримання диференціальних рівнянь стійкості та вільних коливань тришарової пластини симетричної будови з легким трансверсально-ізотропним заповнювачем, підкріпленої ребрами жорсткості у поздовжньому та поперечному напрямках, з урахуванням дії поздовжніх сил у серединних площинах зовнішніх шарів і ребрах.

1. Основні припущення, що прийняті при розрахунку тришарової пластини, яка підкріплена ребрами жорсткості

Розглядається тришарова пластина, що складається із двох зовнішніх несучих шарів, виконаних із міцного листового матеріалу малої товщини. Між шарами розміщується більш легкий, хоча і менш міцний заповнювач, який забезпечує спільну роботу і стійкість несучих шарів. У зв'язку з малою жорсткістю легких заповнювачів можна вважати, що поздовжні зусилля та моменти, які діють у поперечних перерізах пластини, сприймаються зовнішніми шарами, а заповнювач сприймає лише поперечні сили. Це рівносильно прийняттю модулів нормальної пружності та зсуву заповнювача у площині пластини рівними нулю. Легкий заповнювач розглядається як трансверсально-ізотропний[16]. Пластина підкріплена ребрами жорсткості у поздовжньому та поперечному напрямках (рис. 1). Відстань між ребрами, а також їхні жорсткості вважаються однаковими. З'єднання пластини з ребрами та ребер між собою приймається жорстким. Зовнішні сили, прикладені до серединних площин зовнішніх шарів і до ребер, не змінюються у процесі коливань.

[16] Александров А.Я., Бородин М.Я. Конструкция с заполнителями из пенопластов. Москва : Оборонгиз, 1962. 212 с.

Для зовнішніх несучих шарів пластини прийняті гіпотези Кірхгофа – Лява. Поперечні деформації зовнішніх шарів не враховуються[17], тому

$$\varepsilon_w = \frac{\delta w}{\delta z} = 0,\ w = w\,(x, y, t) \tag{1.1}$$

Нехтуємо напругою σ_z порівняно з напругою σ_x, σ_y, тому

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right); \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\mu^2}\gamma_{xy}$$

У зв'язку з тим, що товщина зовнішніх шарів мала порівняно з товщиною всієї пластини, при розгляді загальної втрати стійкості та вільних коливань можна знехтувати згинальною жорсткістю зовнішніх шарів (приймаємо $D = 0$) порівняно із загальною згинальною жорсткістю пластини[18].

Для заповнювача прийнятий лінійний закон зміни тангенціальних переміщень за товщиною[19]. Поперечні деформації заповнювача не враховуються, тобто

$$w_з = w_з\,(x, y, t). \tag{1.3}$$

Закон Гука для легкого трансверсально-ізотропного заповнювача має вигляд

$$\tau_{xz} = G_з\gamma_{xz},\ \ \tau_{yz} = G_з\gamma_{yz}. \tag{1.4}$$

---

[17] Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек : учебное пособие. Киев : Вища школа, 1980. 168 с.

[18] Куршин Л.М. Об учете изгибной жесткости внешних слоев трехслойной криволинейной панели, работающей на продольное сжатие. *Вопросы расчета элементов авиационных конструкций.* 1959. № 1. С. 80–85

[19] Галимов Н.К., Муштари Х.М. К теории трехслойных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1964. № 2. С. 35–47.

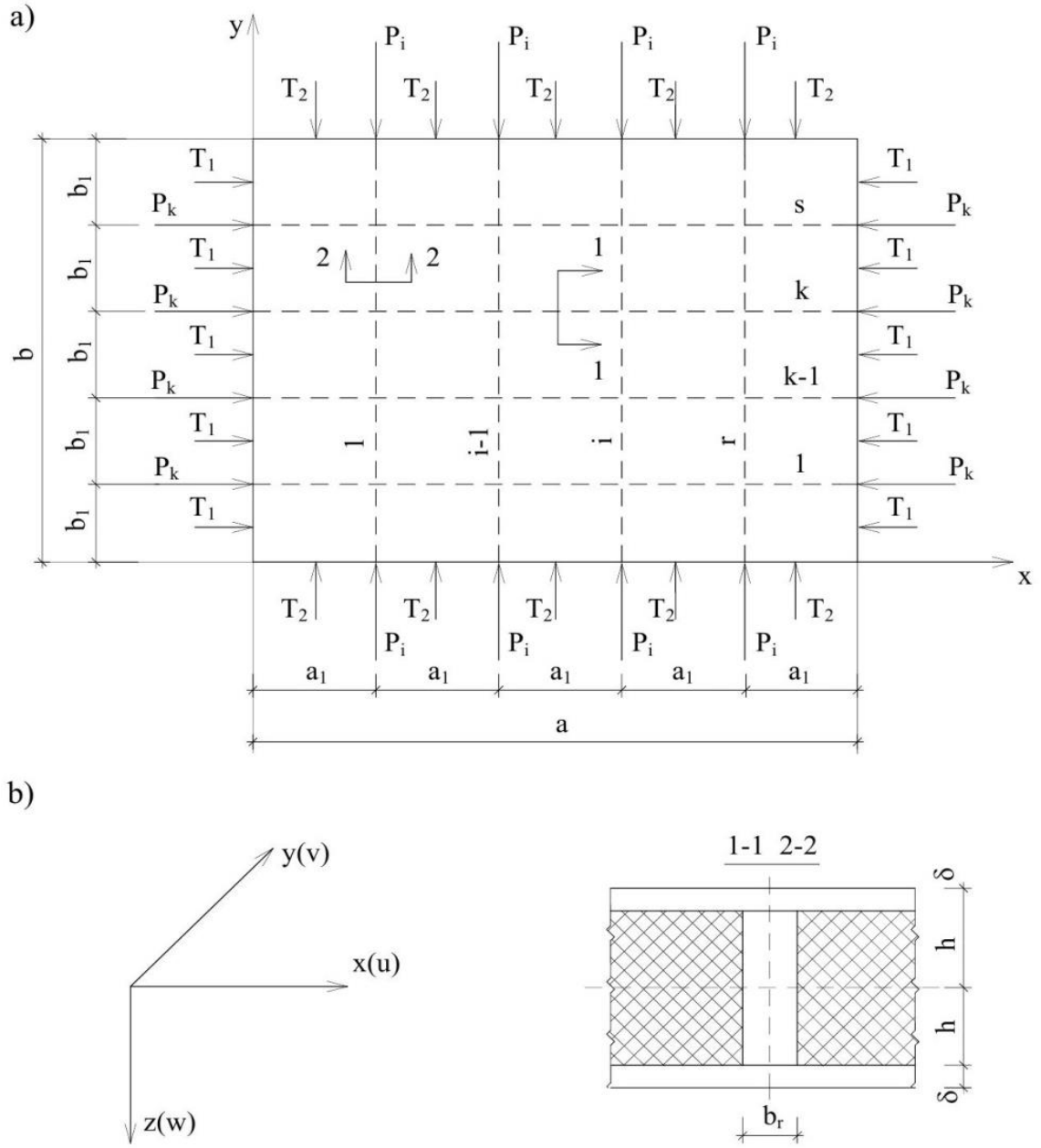

Рис. 1. Схема тришарової пластини з легким заповнювачем, яка підкріплена ребрами жорсткості: а) схема підкріпленої пластини у плані, б) розріз пластини за перерізами 1-1 та 2-2

З урахуванням прийнятих припущень вирази для переміщень запишуться таким чином:

для верхнього шару $(-h-\delta \le z \le -h)$

$$w_в = w;\ u_в = u_1 - (z+H)\frac{\partial w}{\partial x};$$
$$v_в = v_1 - (z+H)\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1.5)$$

для нижнього шару $(h \le z \le h+\delta)$

$$w_н = w;\ u_н = u_2 - (z-H)\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$v_н = v_2 - (z-H)\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1.6)$$

для заповнювача $(-h \le z \le h)$

$$w_з = w;\ u_з = \frac{u_1+u_2}{2} - \frac{z}{h}\left(\frac{u_1-u_2}{2} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$v_з = \frac{v_1+v_2}{2} - \frac{z}{h}\left(\frac{v_1-v_2}{2} - \frac{\delta}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (1.7)$$

де $H = h + 0{,}5\delta$.

Для ребер прийняті гіпотези Бернуллі та враховуються згин і кручення у вертикальній площині, а також деформації зсуву у вертикальній і горизонтальній площинах, приймаючи гіпотезу про лінійну зміну тангенціальних переміщень за товщиною ребра[20].

Закон Гука для ребер запишеться таким чином:

$$\sigma_x = E_p\varepsilon_x;\ \tau_{xz} = G_{xzp}\gamma_{xz};\ \text{(для ребер, паралельних осі } x\text{)},$$
$$\sigma_y = E_p\varepsilon_y;\ \tau_{yz} = G_{yzp}\gamma_{yz};\ \text{(для ребер, паралельних осі } y\text{)}. \qquad (1.8)$$

Вирази для переміщень ребер мають вигляд (1.7), як і для заповнювача. Переміщення u,v,w будемо вважати величинами одного порядку і малими порівняно з товщиною пластини.

При розгляді малих переміщень вирази для деформації запишуться у вигляді:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \qquad (1.9)$$
$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);\ \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

де ω_1, ω_2 – кути повороту перерізів ребер при крученні.

[20] Галимов Н.К., Муштари Х.М. К теории трехслойных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1964. № 2. С. 35–47.

У рівняннях (1.1–1.9) позначено:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненти напруженого стану тіла; E, G – модулі пружності зовнішніх шарів пластини; E_r, G_{xzr}, G_{yzr} – модулі пружності ребра; μ – коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів; $G_з$ – модуль зсуву заповнювача; $2h$ – товщина внутрішнього шару пластини; δ – товщина зовнішніх шарів пластини; u, v, w – компоненти переміщень за вісями *x, y, z*; $u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta$ – напівсума та напіврізниця тангенціальних переміщень зовнішніх шарів, які дорівнюють

$$u_\alpha = \frac{u_1 + u_2}{2}; u_\beta = \frac{u_1 - u_2}{2}; v_\alpha = \frac{v_1 + v_2}{2}; v_\beta = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

2. Диференціальні рівняння стійкості та вільних коливань ділянки пластини, замкненої між ребрами

Розглядаючи функціонал-дію за Остроградським – Гамільтоном[21]

$$S = \int_{t_B}^{t_A} (T - U)\, dt \tag{2.1}$$

на сукупності головних коливань одного й того самого періоду $2\pi / \omega$ та виконавши інтегрування за часом на проміжку $t_A - t_B = 2\pi / \omega$, дійдемо рівняння

$$\delta(T_{\max} - U_{\max}) = 0, \tag{2.2}$$

яке повинні задовольняти власні форми дійсних головних коливань підкріпленої пластини.

Для потенційної енергії деформації пластини маємо:

$$U_{пл} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{s+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left[\int_{-h-\delta}^{-h} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \tau_{12} \gamma_{12})\, dz + \right.$$
$$\left. + \int_{h}^{h-\delta} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \tau_{1.2} \gamma_{1.2})\, dz + \int_{-h}^{h} (\tau_{12} \varepsilon_{12} + \tau_{23} \varepsilon_{23})\, dz \right] dx dy, \tag{2.3}$$

де s, r – кількість ребер пластини у напрямку вісей *x* та *y*, $x_i, x_{i-1}, y_k, y_{k-1}$ – координати ділянки пластини, що замкнена між ребрами i, $i-1$ та k, $k-1$ (рис. 1).

---

[21] Емельянова Т.А. Дифференциальные уравнения свободных колебаний трехслойной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. *Теоретическая и прикладная механика :* сборник научных трудов. Минск : УП «Технопринт», 2002. С. 169–181.

Впроваджуючи у (2.3) вирази (1.2), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.9) і виконавши інтегрування по *z*, будемо мати з урахуванням (1.10):

$$U_{пл}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\{2B\left[\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\right)^2+2\mu\frac{\partial U_\alpha}{\partial x}\frac{\partial V_\alpha}{\partial y}+\right.$$
$$+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial U_\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\right)^2+2\mu\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\frac{\partial U_\beta}{\partial x}+$$
$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x}+\frac{\partial U_\beta}{\partial y}\right)^2\right]+2D\left[\left(V^2W\right)^2-2(1-\mu)\left(\frac{\partial W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial W}{\partial y\partial x}\right)^2\right)\right]+ \tag{2.4}$$
$$+\frac{2G_3}{h}\left(U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{2G_3}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\Bigg\}dxdy.$$

Для потенційної енергії деформації ребер, що паралельні вісі *y*, маємо:

$$U_p=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{K=1}^{S+1}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\left[\int_{-b_p/2}^{b_p/2}\int_{-h}^{h}\left(\tau_{13}\gamma_{13}+\sigma_2\varepsilon_2+\tau_{23}\gamma_{23}\right)dxdz+C_i\left(\omega_{iy}\right)^2\right]dy. \tag{2.5}$$

Враховуючи (1.7), (1.8), (1.9) і виконуючи інтегрування по *x* та *z*, отримаємо з урахуванням позначень (1.10):

$$U_p=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{K=1}^{S+1}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\left\{\frac{2G_{13p}b_p}{h}\left(U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{2G_{23p}b_p}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\right.$$
$$+2E_pb_ph\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\right)^2+\frac{2}{3}E_pb_ph\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right)^2+ \tag{2.6}$$
$$\left.+\frac{C_i}{4h^2}\left[\frac{\partial U_\beta}{\partial y}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right]\right\}dy$$

Аналогічно для ребер, що паралельні вісі *x*, будемо мати:

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{K=1}^{S}\int_{X_{i-1}}^{X_i}\left\{\frac{C_k}{4h^2}\left[\frac{\partial V_\beta}{\partial x}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x\partial y}\right]^2+\frac{2G_{23p}b_p}{h}\left(V_\beta - H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$+\frac{2G_{13}b_p}{h}\left(U_\beta - H\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+2E_pb_ph\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x}\right)^2+ \qquad (2.7)$$

$$\left.+\frac{2}{3}E_pb_ph\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right\}dy$$

де C_i, C_k – жорсткості ребер на кручення.

Кінетична енергія пластини:

$$T=\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{X_{i-1}}^{X_i}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\int_{t_B}^{t_A}\left[\frac{\rho_H}{2}\int_{-h-\delta}^{-h}\left(\left(\frac{\partial U_в}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V_в}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right)dz+\right.$$

$$+\frac{\rho_H}{2}\int_{h}^{h+\delta}\left(\left(\frac{\partial U_н}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V_н}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right)dz+ \qquad (2.8)$$

$$\left.+\frac{\rho_з}{2}\int_{-h}^{h}\left(\left(\frac{\partial U_з}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V_з}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dz\right]dxdydt.$$

Підставляючи у (2.8) вирази (1.5), (1.6), (1.7) та виконавши інтегрування по z, отримаємо з урахуванням позначень (1.10):

$$T=\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{X_{i-1}}^{X_i}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\int_{t_B}^{t_A}\left[(\rho_н\delta+\rho_з h)\left(\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2+\right.\right.$$

$$+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t}\right)^2+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial t}\right)^2\Bigg)+\left(\rho_н\delta+\frac{\rho_з h}{3}\right)\left(\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\right)^2\right)- \qquad (2.9)$$

$$\left.-\rho_з h\frac{\delta}{3}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t}+\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial t}\right)\right]dxdydt,$$

де $\rho_н$, $\rho_з$ – щільність матеріалу зовнішніх шарів і заповнювача, яка припадає на одиницю об'єму.

Кінетична енергія ребер, що паралельні вісі *y:*

$$T_p=\frac{\rho_p}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\int_{-h}^{h}\int_{-\frac{b_p}{2}}^{\frac{b_p}{2}}\int_{t_B}^{t_A}\left(\left(\frac{\partial U_p}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V_p}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right)dxdydzdt \qquad (2.10)$$

Вводячи у (2.10) вирази (1.7) та виконавши інтегрування по z та x, отримаємо з урахуванням позначень (1.10)

$$T_p = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\int_{t_B}^{t_A}\rho_p b_p h\left(\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\right)^2 - \frac{\delta}{3}\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} + \right.$$
$$+ \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\right)^2 - \qquad (2.11)$$
$$\left. - \frac{\delta}{3}\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}\right)^2\right) dydt$$

Аналогічно для ребер, що паралельні вісі χ:

$$T_p = \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{S}\int_{X_{i-1}}^{X_i}\int_{t_B}^{t_A}\rho_p b_p h\left(\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\right)^2 - \frac{\delta}{3}\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + \right.$$
$$+ \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\right)^2 - \qquad (2.12)$$
$$\left. - \frac{\delta}{3}\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} + \frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t}\right)^2\right) dxdt.$$

Якщо у серединних площинах зовнішніх шарів діє зовнішнє стискаюче навантаження $2T_1$, $2T_2$ (рис. 1), то

$$A_{пл} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{X_{i-1}}^{X_i}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k}\left[2T_1\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + 2T_2\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] dxdy. \qquad (2.13)$$

Якщо по кінцях ребер діють стискаючі зосереджені сили P_k, P_i, то

$$A_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{S}\int_{X_{i-1}}^{X_i} P_k\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{r}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{Y_{k-1}}^{Y_k} P_i\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 dy. \qquad (2.14)$$

Коли пластинка здійснює одне з головних коливань, то

$$w(x,y,t) = w(x,y)\sin\omega t\left(w \to u_\alpha \to u_\beta \to v_\alpha \to v_\beta\right). \qquad (2.15)$$

Для таких коливань максимальне значення потенційної енергії пластини та ребер буде мати вигляд

$$U_{\max}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\left\{2B\left[\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\right)^2+\right.\right.$$

$$+2\mu\frac{\partial U_\alpha}{\partial x}\frac{\partial V_\alpha}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial U_\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\right)^2+$$

$$\left.+2\mu\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\frac{\partial U_\beta}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x}+\frac{\partial U_\beta}{\partial y}\right)^2\right]+2D\left[\left(\nabla^2 W\right)^2-\right.$$

$$\left.-2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right]+\frac{2G_a}{h}\left(U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+$$

$$\left.+\frac{2G_a}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2-2T_1\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2-2T_2\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\left\{\frac{2G_{xzp}b_p}{h}\left(U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{2G_{yzp}b_p}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\right. \qquad (2.16)$$

$$+2E_p b_p h\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\right)^2+\frac{2E_p b_p h}{3}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2+$$

$$\left.+\frac{C_i}{4h^2}\left[\frac{\partial U_\beta}{\partial y}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]^2-P_i\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right\}dy+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{\frac{2G_{yzp}b_p}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\frac{2G_{xzp}b_p}{h}\left(U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$+2E_p b_p h\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x}\right)^2+\frac{2E_p b_p h}{3}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2+$$

$$\left.+\frac{C_k}{4h^2}\left[\frac{\partial V_\beta}{\partial x}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]^2-P_k\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right\}dx.$$

Вираз для максимальної кінетичної енергії отримаємо у вигляді

$$T_{\max}=\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\left\{\left(\rho_o\delta+\rho_a h\right)\omega^2\left[U_\alpha^2+V_\alpha^2+W^2+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\omega^2\left(\rho_o\delta+\frac{1}{3}\rho_a h\right)\left[U_\beta^2+V_\beta^2\right]-\frac{\rho_a h\delta}{3}\omega^2\left[U_\beta\frac{\partial W}{\partial x}+V_\beta\frac{\partial W}{\partial y}\right]\right\}dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\rho_p b_p h\omega^2\left[V_\alpha^2+\frac{1}{3}V_\beta^2-\frac{\delta}{3}V_\beta\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+U_\alpha^2+\frac{1}{3}U_\beta^2-\right. \qquad (2.17)$$

$$\left.-\frac{\delta}{3}U_\beta\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+W^2\right]dy+\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{s}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\rho_p b_p h\omega^2\left[U_\alpha^2+\frac{1}{3}U_\beta^2-\frac{\delta}{3}U_\beta\frac{\partial W}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+V_\alpha^2+\frac{1}{3}V_\beta^2-\frac{\delta}{3}V_\beta\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\delta^2}{12}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+W^2\right]dx.$$

Диференційні рівняння стійкості та вільних коливань ділянки пластини, що знаходиться між ребрами або між ребрами та краями пластини, з урахуванням дії сил у серединних площинах зовнішніх шарів отримаємо з варіаційного рівняння, яке побудоване підстановкою виразів (2.16) і (2.17) у рівняння (2.2).

Вважаючи $\delta u_\beta, \delta v_\beta, \delta w$ вільними у середині ділянки пластини, із варіаційного рівняння отримуємо три рівняння вільних поперечних коливань

$$U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{Bh}{G_3}\left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x\partial y}\right);$$

$$V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{Bh}{G_3}\left(\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x\partial y}\right); \qquad (2.18)$$

$$-2D\nabla^4 W-2BH\nabla^2\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}+\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\right)+2\mathrm{T}_1\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+2\mathrm{T}_2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+$$

$$+2\left(\rho_H\delta+\rho_3 h\right)\omega^2 W=0$$

У рівняннях (2.3–2.18) позначено: ρ_r – щільність матеріалу ребра, що доводиться на одиницю об’єму; ρ_a – щільність матеріалу заповнювача, яка доводиться на одиницю об’єму; ρ_o – щільність

матеріалу зовнішніх шарів пластини, що доводиться на одиницю об'єму; $B = \frac{E \cdot \delta}{1 - \mu^2}$ – жорсткість на розтяг зовнішніх шарів; $D = \frac{E \cdot \delta^3}{12 \cdot \left(1 - \mu^2\right)}$ – згинальна жорсткість пластини; C_k – крутильна жорсткість ребра, паралельного вісі x; C_i – крутильна жорсткість ребра, паралельного вісі y; T_1, T_2 – зусилля, які діють у серединних площинах зовнішніх шарів; P_i, P_k – зусилля, що діють у ребрах; ω – кутова частота коливань.

Якщо у рівнянні (2.18) покласти $\omega = 0$, отримаємо рівняння стійкості ділянки пластини, що знаходиться між ребрами.

3. Граничні умови й умови спряження ділянок пластини

Отримаємо граничні умови для кінців пластини $y = 0, b$ й умови для ребер, що паралельні вісі x. Для цього записуємо суми першого та третього контурних інтегралів, які входять до варіаційного рівняння, у розгорнутому вигляді та згрупуємо члени, що входять у ці вирази. Будемо мати рівняння (3.1).

Із рівняння (3.1) отримуємо граничні умови для кінців пластини $y = 0, b$ й умови для ребер, паралельних вісі x.

Розглянемо граничні умови для кінця $y = 0$.

1. Дві граничні умови пов'язані з прогинами та поворотами на контурі або із поперечною силою та моментами за статичних граничних умов. У разі шарнірного обпирання зовнішніх шарів або вільної кромки $\delta \frac{\partial W}{\partial y}$ буде довільною на кінці (3.2).

$$\sum_{i=1}^{r+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{2B\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}+\mu\frac{\partial U_\beta}{\partial x}\right)\delta V_\beta+B(1-\mu)\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x}+\frac{\partial U_\beta}{\partial y}\right)\delta U_\beta+\right.$$

$$+2D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\delta\frac{\partial W}{\partial y}W_y+\left[-2T_2\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{2G_з}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)-\right.$$

$$-2D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right)-(\rho_н\delta+\rho_з h)\frac{\delta^2}{6}\omega^2\frac{\partial W}{\partial y}+\rho_з h\frac{\delta}{3}\omega^2 V_\beta\Big]+$$

$$\left.+\delta W_0^b\right\}dx+\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1}^{S}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{\left[-\frac{C_k}{4h^2}\left(\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x^2}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{2G_{23}b_p}{h}\times\right.\right.$$

$$\times\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)-\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(V_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial W}{\partial y}\right)-2B\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}+\mu\frac{\partial U_\beta}{\partial x}\right)\Big|_{y_{k-1}}^{y_k}\Big]\delta\frac{\partial V_\beta}{\partial x}-$$

$$-\left[\frac{C_k}{4h^2}\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x^2}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{2G_{23}b_p H_p}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)-\right.$$

$$-\frac{\rho_p b_p h\delta}{3}\omega^2\left(V_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial W}{\partial y}\right)-2D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\Big|_{y_{k-1}}^{y_k}\Big]\delta\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial x}+ \qquad (3.1)$$

$$+\left[\frac{2G_{13}b_p}{h}\left(U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial x}W_x\right)--\frac{2E_p b_p h}{3}\left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x^2}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)-\right.$$

$$-\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(U_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial W}{\partial x}\right)+B(1-\mu)\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x}+\frac{\partial U_\beta}{\partial y}\right)\Big|_{y_{k-1}}^{y_k}\Big]\delta\frac{\partial U_\beta}{\partial x}+$$

$$+\left[\frac{2G_{13}b_p H}{h}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}-H\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)-\frac{E_p b_p h\delta}{3}\left(\frac{\partial^3 U_\beta}{\partial x^3}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right)-\right.$$

$$-\frac{\rho_p b_p h\delta\omega^2}{3}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)-2\rho_p b_p h\omega^2 W+P_k\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-$$

$$-\left[2T_2\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{2G_з H}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)+2D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+(\rho_н\delta+\rho_з h)\frac{\delta^2}{6}\omega^2\frac{\partial W}{\partial y}-\rho_з h\frac{\delta}{3}\omega^2 V_\beta\Big|_{y_{k-1}}^{y_k}\Big]\delta\frac{\partial W}{\partial x}\right\}dx=0.$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{y=0}=0 \qquad (3.2)$$

При защемлені зовнішніх шарів замість (3.2) будемо мати

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \tag{3.3}$$

Якщо прогини на контурі довільні (вільний край), то

$$\left[2T_1\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{2G_з}{h}H\left(V_\beta - H\frac{\partial W}{\partial y}\right) + 2D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + (\rho_н \delta + \rho_з h)\frac{\delta^2}{6}\omega^2\frac{\partial W}{\partial y} - \rho_з h\frac{\delta}{3}\omega^2 V_\beta\right]_{y=0} = 0. \tag{3.4}$$

За наявності опор замість (3.4) будемо мати

$$(W)_{y=0} = 0 \tag{3.5}$$

2. Дві інші граничні умови будуть пов'язані з переміщеннями U_β, V_β і залежатимуть від характеру закріплення кромки пластини у відношенні взаємних переміщень серединних площин зовнішніх шарів за нормаллю (V_β) та за дотичною до контуру (U_β).

Якщо взаємні переміщення зовнішніх шарів за нормаллю відсутні (жорстке закріплення), то

$$(V_\beta)_{y=0} = 0 \tag{3.6}$$

Якщо кінець вільно обпертий або вільний, то

$$\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y} + \mu\frac{\partial U_\beta}{\partial x}\right)_{y=0} = 0. \tag{3.7}$$

Якщо зовнішні шари закріплені від взаємних переміщень по дотичній до контуру, то

$$(U_\beta)_{y=0} = 0 \tag{3.8}$$

Якщо ці взаємні переміщення нічим не стиснуті, тоді

$$\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x} + \frac{\partial U_\beta}{\partial y}\right)_{y=0} = 0. \tag{3.9}$$

Розглянемо умови по лініях ребер.

Оскільки по лініях ребер $\delta V_{\beta k}$, δW_{yk}, $\delta U_{\beta k}$, δW_k довільні, то із (3.1) будемо мати

$$\left[-\frac{C_k}{4h^2}\left(\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x^2}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}+\frac{2G_{23p}b_p}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(V_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right)\right]_{y=y_k}-2B\left(\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}+\mu\frac{\partial U_\beta}{\partial x}\right)\right|_{y=y_{k-0}}^{y=y_{k+0}}=0, \tag{3.10}$$

$$\left[\frac{C_k}{4h^2}\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x^2}+\left(h-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right)+\frac{2G_{2.3.p}b_p}{h}H\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\delta\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(V_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right]_{y=y_k}+2D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{y=y_{k-0}}^{y=y_{k+0}}=0, \tag{3.11}$$

$$\left[\frac{2G_{13p}b_p}{h}\left(U_\beta-H\frac{\partial W}{\partial x}\right)-\frac{2E_p b_p h}{3}\left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x^2}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{2\rho_p b_p h\omega^2}{3}\left(U_\beta-\frac{\delta}{2}\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right]_{y=y_k}-B(1-\mu)\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x}+\frac{\partial U_\beta}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=y_{k-0}}^{y=y_{k+0}}=0, \tag{3.12}$$

$$\left[\frac{2G_{13p}b_p H}{h}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}-H\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)-\frac{E_p b_p h\delta}{3}\left(\frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x^2}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\rho_p b_p h\delta\omega^2}{3}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)-2\rho_p b_p h\omega^2 W+P_k\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]_{y=y_k}+$$
$$+\left[2T_2P_k\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{2G_з H}{h}\left(V_\beta-H\frac{\partial W}{\partial y}\right)+2D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\rho_и\delta+\rho_з h\right)\frac{\delta^2}{6}\omega^2\frac{\partial W}{\partial y}-\rho_з h\frac{\delta}{3}\omega^2 V_\beta\right]\Bigg|_{y=y_{k-0}}^{y=y_{k+0}}=0. \tag{3.13}$$

У (3.10) – (3.13) та надалі індекси $y=y_{k+0}$, $y=y_{k-0}$ за відповідних виразів вказують на те, що ці вирази беруться вище та нижче k-го ребра.

Граничні умови для кінця $x=0$ та умови для ребер, що паралельні вісі y, записуються аналогічно.

При розгляді ребер не прямокутного поперечного перерізу основні рівняння та граничні умови по кінцях пластини будуть мати той самий вигляд, але зміняться умови по лініях ребер.

Отримаємо умови по лініях ребер двотаврового поперечного перерізу, що паралельні вісі y. Будемо враховувати деформації зсуву та згину стінки двотавра у площин *yoz* і деформації згину та кручення полиць двотавра у площині *yoz*, а також згин стінки двотавра у площині *xoz*.

Потенційна енергія ребер при деформації у площині *yoz* буде мати вигляд

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\left[\frac{2G_{23p}d}{h_0}\left(V_\beta - H\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \frac{2E_p dh_0}{3}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y} - \frac{t_n}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2E_p t_n b_n\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\right)^2 + \frac{E_p b_n t_n^{\,3}}{6}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + C_i\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right)\right]dy. \qquad (3.14)$$

Тут d, $2h_0$ – товщина та висота стінки двотавра, b_n, t_n – ширина та товщина полиць двотавра, C_i – сумарна жорсткість полиць двотавра при крученні, $H = h_0 + \frac{t_n}{2} = h + \frac{\delta}{2}$.

При обчисленні потенційної та кінетичної енергії стінки двотавра при деформації у площині *xoz,* розглядаємо її як пластину, переміщення точок якої у місцях примикання до зовнішніх шарів дорівнюють переміщенням відповідних точок зовнішніх шарів. Діючи аналогічно[22] для потенційної енергії деформації у площині *xoz*, будемо мати

$$U_p^{\,1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\frac{E_p d^3}{2\left(1-\mu^2\right)H^2}\left(U_\beta - H\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dx. \qquad (3.15)$$

Кінетична енергія ребер двотаврового перерізу дорівнює:

$$T_p = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{S+1}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\int_{t_B}^{t_A}\left\{\rho_p d\left[h_0\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\right)^2 - \frac{t_n}{3}\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial y} + \frac{t_n^{\,2}}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t}\right)^2 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right) + H\left(\frac{34}{35}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\right)^2 - \frac{12H}{35}\frac{\partial U_\beta}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{H^2}{70}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}\right)^2\right)\right] + \qquad (3.16)$$
$$\left. + \rho_p b_n t_n\left(\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial t}\right)^2 + \frac{t_n^{\,2}}{12}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right)\right\}dy.$$

[22] Емельянова Т.А. Дифференциальные уравнения свободных колебаний трехслойной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. *Теоретическая и прикладная механика :* сборник научных трудов. Минск : УП «Технопринт», 2002. С. 169–181.

Діючи аналогічно, як і для ребер прямокутного перерізу, отримаємо такі умови по лініях ребер двотаврового поперечного перерізу, що паралельні вісі y:

$$\left[\frac{E_p d^3}{2H^2\left(1-\mu^2\right)}\left(U_\beta - H\frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{4\rho_p dH\omega^2}{35}\left(17U_\beta - 3H\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right]_{x=x_i} - \\ -2B\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x} + \mu\frac{\partial V_\beta}{\partial y}\right)\Bigg|_{x=x_{i-0}}^{x=x_{i+0}} = 0, \tag{3.17}$$

$$\left[\frac{E_p d^3}{2H\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial U_\beta}{\partial x} - H\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) + C_i\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2} - \frac{\rho_p dH^2\omega^2}{35}\times\right. \\ \left.\times\left(12U_\beta - H\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right]_{x=x_i} + 2D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=x_{i-0}}^{x=x_{i+0}} = 0, \tag{3.18}$$

$$\left[\frac{2G_{23p}d}{h_0}\left(V_\beta - H\frac{\partial W}{\partial y}\right) - \frac{2E_p dh_0}{3}\left(\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial y^2} - \frac{t_n}{2}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) - \right. \\ \left. -2E_p b_n t_n\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial y^2} - \frac{2\rho_p dh_0\omega^2}{3}\left(V_\beta - \frac{t_n}{2}\frac{\partial W}{\partial y}\right) - 2\rho_p b_n t_n\omega^2 V_\beta\right]_{x=x_i} - \\ -B\left(1-\mu\right)\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x} + \frac{\partial U_\beta}{\partial y}\right)\Bigg|_{x=x_{i-0}}^{x=x_{i+0}} = 0, \tag{3.19}$$

$$\left[\frac{2G_{2.3.p}dH}{h_0}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y} - H\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) - \frac{E_p dh_0 t_n}{3}\left(\frac{\partial^3 V_\beta}{\partial y^3} - \frac{t_n}{2}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) - \right. \\ -\frac{E_p b_n t_n^3}{6}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - \frac{\rho_p dh_0 t_n\omega^2}{3}\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y} - \frac{t_n}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + \frac{\rho_p b_n t_n\omega^2}{6}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \\ \left. -2\rho_p\left(dh_0 + b_n t_n\right)\omega^2 W + P_i\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]_{x=x_i} + \left[2T_1\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{2G_з H}{h}\times\right. \\ \times\left(U_\beta - H\frac{\partial W}{\partial x}\right) + 2D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \left(2-\mu\right)\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right) + \\ \left. +\left(\rho_н\delta + \rho_з h\right)\frac{\delta^2}{6}\omega^2\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\rho_з h\delta}{3}\omega^2 U_\beta\right]\Bigg|_{x=x_{i-0}}^{x=x_{i+0}} = 0. \tag{3.20}$$

При неврахуванні деформацій зсуву в ребрах матимемо такі умови по лініях ребер:

$$U_\beta = H\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad V_\beta = H\frac{\partial W}{\partial y}. \tag{3.21}$$

З урахуванням (3.21) умови по лініях ребер, що витікають із (3.1), матимуть вигляд:

$$\left[C_k\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2} + I_k\omega^2\frac{\partial W}{\partial y}\right]_{y=y_k} + \left[2BH\left(\frac{\partial V_\beta}{\partial y} + \mu\frac{\partial U_\beta}{\partial x}\right) + 2D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right]_{y=y_{k-0}}^{y=y_{k+0}} = 0, \tag{3.22}$$

$$\left[D_k\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P_k\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + I_k\omega^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2\rho_p b_p h\omega^2 W\right]_{y=y_k} + \left[2T\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{2G_з H}{h}\left(V_\beta + H\frac{\partial W}{\partial y}\right) + 2D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial y\partial x^2}\right) + BH(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 V_\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_\beta}{\partial x\partial y}\right) + (\rho_н\delta + \rho_з h)\frac{\delta^2}{6}\omega^2\frac{\partial W}{\partial y} - \rho_з h\frac{\delta}{3}\omega^2 V_\beta\right]_{y=y_{k-0}}^{y=y_{k+0}} = 0, \tag{3.23}$$

тут I_k – інерція обертання ребра

$$\left(U_\beta - H\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{y=y_k} = 0, \tag{3.24}$$

$$\left(V_\beta - H\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{y=y_k} = 0. \tag{3.25}$$

Умови (3.22) – (3.25) записані для ребер прямокутного перерізу без урахування деформацій зсуву ребер. У цьому разі умови (3.22) – (3.25) будуть справедливі не лише для ребер прямокутного перерізу, але і для ребер довільних перерізів, що мають жорсткості згину D_k та жорсткості кручення C_k.

ВИСНОВКИ

Розглянута пружна стійкість і вільні згинальні коливання тришарової пластини з легким трансверсально-ізотропним заповнювачем, яка підкріплена ребрами жорсткості у поздовжньому

та поперечному напрямках. Проаналізовано особливості напружено-деформованого стану підкріпленої тришарової пластини, що дозволило прийняти адекватні вихідні гіпотези та припущення.

Розроблений єдиний підхід до статичного та динамічного розрахунку на стійкість і вільні коливання підкріплених тришарових пластин як суцільної системи.

Отримані вирази для потенційної енергії деформації тришарової пластини та ребер, кінетичної енергії пластини та ребер, а також роботи зовнішнього стискаючого навантаження, яке діє у серединних площинах зовнішніх шарів і ребрах.

Використовуючи варіаційний принцип Остроградського – Гамільтона, ми отримали варіаційне рівняння руху тришарової пластини симетричної будови з легким трансверсально-ізотропним заповнювачем, підкріпленої ребрами у двох взаємно перпендикулярних напрямах, з урахуванням дії подовжніх сил у серединних площинах зовнішніх шарів і ребрах.

Враховуючи неоднорідність структури тришарової пластини за товщиною, при виведенні варіаційного рівняння було враховано роботу шару заповнювача за поперечних зсувів і стиснення, що призвело до необхідності проведення сполучення шарів пластини.

Аналізуючи варіаційне рівняння, ми отримали диференціальні рівняння вільних коливань ділянки пластини, замкненої між ребрами. Прийнявши кругову частоту вільних коливань $\omega = 0$, отримали рівняння стійкості ділянки пластини, замкненої між ребрами.

Встановлені граничні умови ділянки пластини, замкненої між ребрами, та за допомогою граничного переходу – умови по лініях ребер при неврахуванні деформацій зсуву в ребрах.

АНОТАЦІЯ

У роботі розглядається стійкість і вільні коливання тришарової пластини з легким трансверсально-ізотропним заповнювачем, підкріпленої ребрами жорсткості у поздовжньому та поперечному напрямках. Прийняті вихідні гіпотези та припущення. За допомогою варіаційного принципу Остроградського – Гамільтона отримані диференціальні рівняння стійкості та вільних коливань тришарової пластини симетричної будови з легким трансверсально-ізотропним заповнювачем, підкріпленої ребрами жорсткості у поздовжньому та поперечному напрямках з урахуванням дії поздовжніх сил у серединних площинах зовнішніх шарів і ребрах. Встановлені граничні умови ділянки оболонки, замкненої між

ребрами, а також умови по лініях ребр при неврахуванні деформацій зсуву в ребрах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Я., Куршин Л.И. Многослойные пластинки и оболочки. *Труды VII Всесоюзной конференции оболочек по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск, 1969 г.* Москва : Наука, 1970. С. 714–721.
2. Григолюк Э.И., Кассихин В.Н. Осесимметричные свободные колебания круговых трехслойных пластин. *Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек* : сборник научных трудов / под ред. Э.И. Григолюка. 1981. С. 185–195.
3. Прусаков А.П. Некоторые задачи изгиба круглых трехслойных пластин с легким заполнителем. *Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961 г.* Казань : Казанский гос. ун-т, 1961. С. 293–297.
4. Chun-Sheng Chen. Investigation on the Vibration and Stability of Hybrid Composite Plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2005. № 24 (16). P. 1747–1758. URL: https://doi.org/10.1177/07316 84405052186.
5. Алфутов Н.А., Трофимов В.В. Энергетический метод расчета оболочек на устойчивость, не требующий определения начального напряженного состояния. *Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск, 1969 г.* Москва : Наука, 1970. С. 52–57.
6. Дорофеев В.С., Ковров А.В., Крутий Ю.С., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г., Таций Р.М., Ушак Т.И. Новые методы расчета систем с дискретно-непрерывным распределением параметров / под ред. Н.Г. Сурьянинова. Одесса : ЭВЕН, 2012. 374 с.
7. Крутий Ю.С., Сурьянинов Н.Г. Фундаментальные решения приведенного уравнения параметрических колебаний. *Збірник наукових праць УкрДУЗТ*. 2017. Вип. 167. С. 17–24.
8. Егорычев О.А., Егорычев О.О., Хрупов А.А., Богданов А.В. Вывод частотного уравнения собственных колебаний упругой трехслойной пластинки, три края которой шарнирно оперты, а четвертый край жестко закреплен. *Вестник МГСУ.* № 3. 2008. С. 33–37.
9. Surianinov M., Yemelianova T., Lazarieva D., Bazhanova A. Stability Analysis of a Three-Layer Shell with Lightweight Filler

Supported By Rigidity Ribs. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology,* Vol. 7. Issue 12, P. 462–469. December 2020. 2348–7968 | Impact Factor (2020) – 6.72. URL: www.ijiset.com.

10. Устарханов О.М. Вопросы прочности трехслойных конструкций с регулярным дискретным заполнителем : автореф. дисс. … докт. техн. наук : 05.23.17, 05.23.01. Российский государственный строительный университет. Ростов-на-Дону, 2000. 400 с.

11. Belarbi M-O. et al. On the Free Vibration Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates. *A Layerwise Finite Element Formulation Latin American Journal of Solids and Structures.* № 14. 2017. P. 2265–2290.

12. Yuan W.X., Dawe D.J. Free vibration and stability analysis of stiffened sandwich plates. *Composite Structures.* 2004. № 63 (1). P. 123–137. DOI: 10.1016/S0263-8223(03)00139-9.

13. Al-Qablan H. Semi-analytical Buckling Analysis of Stiffened Sandwich Plates. *Journal of Applied Sciences.* 2010. № 10. P. 2978–2988. DOI: 10.3923/jas.2010.2978.2988; URL: https://scialert.net/abstract/?doi=jas.2010.2978.2988.

14. Зиненко Г.П. Устойчивость и колебания прямоугольных трехслойных пластин с большими вырезами : автореф. дисс. … канд. техн. наук / Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта. Днепропетровск, 1968. 12 с.

15. Patel S.N. & Sheikh A.H. Buckling response of laminated composite stiffened plates subjected to partial in-plane edge loading. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2016. № 17. P. 5–6, 322–338, DOI: 10.1080/15502287.2016.1231235.

16. Александров А.Я., Бородин М.Я. Конструкция с заполнителями из пенопластов. Москва : Оборонгиз, 1962. 212 с.

17. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек : учебное пособие. Киев : Вища школа, 1980. 168 с.

18. Куршин Л.М. Об учете изгибной жесткости внешних слоев трехслойной криволинейной панели, работающей на продольное сжатие. *Вопросы расчета элементов авиационных конструкций.* 1959. № 1. С. 80–85.

19. Галимов Н.К., Муштари Х.М. К теории трехслойных пластин и оболочек. *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1964. № 2. С. 35–47.

20. Емельянова Т.А. Дифференциальные уравнения свободных колебаний трехслойной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. *Теоретическая и прикладная механика* : сборник научных трудов. Минск : УП «Технопринт», 2002. С. 169–181.

Information about the authors:
Yemelianova Tetiana Anatoliyivna,
Candidate of Technical Sciences,
Senior Lecturer at the Construction Department
Kherson State Agrarian and Economic University
23, Stritenskaya str., Kherson, 73006, Ukraine

Kirichenko Victor Lukich,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor