ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра менеджменту та інформаційних технологій

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Освітній рівень бакалавр

факультет Архітектури та будівництва

Херсон – 2020

Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальностей: – 191 «Архітектура та містобудування», 192 «Будівництво та цивільна інженерія», 193 «Геодезія та землеустрій», 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» факультету архітектури та будівництва. Херсон: ДВНЗ «ХДАУ», 2020. 144 с.

Укладач: Тетяна БІЛОУСОВА, старший викладач кафедри менеджменту та інформаційних технологій.

Лекція 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Мета: засвоїти основні поняття матриць, визначників; методи обчислення визначників.

План лекції:

1. Матриці.
2. Визначники.
3. Поняття алгебраїчного доповнення.
4. Поняття ранга матриці.

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо кількість рядків не дорівнює кількості стовпців ($m \neq n$), то матриця називається ***прямокутною***, якщо $m = n$, то матриця ***квадратна***.

Елементи a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратної матриці складають ***головну діагональ***.

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо у неї всі елементи, окрім розташованих по головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця, у якій на головній діагоналі знаходяться одиниці, називається ***одиничною***.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця A^T називається ***транспонованою*** до матриці A, якщо в матриці A стовпці та рядки поміняти місцями.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається ***детермінантом*** або ***визначником*** матриці.

$$\det A = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Порядок визначника дорівнює кількості рядків або стовпців матриці.

Визначник другого порядку обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

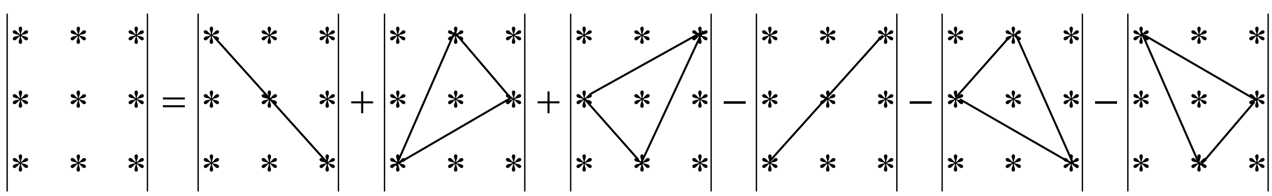
Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутника або за методом алгебраїчних доповнень.

Правило трикутника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Це правило зручно запам'ятати за допомогою наступної схеми:



Мінором $(n-1)$-го порядку елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник нової матриці, яка утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка і стовпця, які перетинаються на цьому елементі. Такий мінор позначається M_{ij}.

Наприклад, матриця третього порядку має дев'ять мінорів другого порядку:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ і т.д.}$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} вважають

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Метод алгебраїчних доповнень (***або метод розкладання визначника за елементами рядка або стовпця***) полягає в тому, що визначник обчислюють як суму добутків елементів a_{ij} деякого рядка (або стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Рангом матриці $rang(A)$ або $r(A)$ називається найбільший порядок мінора цієї матриці, відмінного від нуля.

Зауважимо, що ранг матриці не зміниться, якщо до нього застосувати елементарні перетворення, тому можна спочатку за допомогою елементарних перетворень привести до виду, коли під головною діагоналлю 0, а потім визначити ранг матриці як кількість ненульових рядків матриці.

Лекція 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Мета: розглянути основні методи розвязку систем лінійних алгебраїчних рівнянь: метод Крамера, метод Гаусса, матричний метод.

План лекції:
1. Поняття СЛАР.
2. Метод Крамера.
3. Матричний метод.
4. Метод Гаусса.
5. Теорема Кронекера-Капеллі.

1. Поняття СЛАР

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається сукупність рівностей вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має один чи більше розв'язків, і ***несумісною***, якщо вона не має розв'язків. Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має тільки один розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має більше одного розв'язку.

Розглянемо методи розв'язання систем на прикладі системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

2. Метод Крамера

Для системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

обчислюємо визначник, складений з коефіцієнтів біля невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Знаходимо визначники Δx, Δy, Δz, які утворюються із визначника Δ заміною в ньому відповідного стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Розв'язок системи знаходимо за допомогою ***формул Крамера:***

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Зауважимо, що можливі такі випадки:

– якщо $\Delta \neq 0$, то одержані значення (x, y, z) – єдиний розв'язок системи;
– якщо $\Delta = 0$ і $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, то система має безліч розв'язків;
– якщо $\Delta = 0$, але хоча б один із визначників Δx, Δy або Δz відмінний від нуля, то система не має розв'язків.

3. Матричний метод

Квадратна матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо виконується рівність

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця того ж порядку, що A та A^{-1}.

Якщо $\Delta A = 0$, то матриця називається ***виродженою.***

Якщо $\Delta A \neq 0$, то матриця ***невироджена*** та має обернену матрицю A^{-1}, і при тому єдину.

Запишемо систему лінійних рівнянь (1) в матричній формі:

$$A \cdot X = B,$$

де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – ***матриця-стовпець невідомих***;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – ***матриця-стовпець вільних членів*** (правої частини системи);

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – ***основна матриця системи***, елементами якої є коефіцієнти біля невідомих.

В рівнянні $A \cdot X = B$ помножимо обидві частини на A^{-1} зліва:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, то маємо

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Отже, матричний спосіб зводиться до відшукання оберненої матриці.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1) Знаходимо ΔA – визначник матриці A. Якщо $\Delta A = 0$, то матриця не має оберненої.
2) Транспонуємо матрицю A, одержуємо
3)

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4) Знаходимо ***союзну*** (***приєднану***) матрицю A^*, яка складається з алгебраїчних доповнень до елементів транспонованої матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

5) Обернена матриця утворюється діленням кожного елемента союзної матриці на визначник ΔA:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^*$$

Для знаходження розв'язку системи множимо матрицю A^{-1} на стовпець вільних членів B.

4. Метод Гаусса (метод послідовного вилучення невідомих)

Розширеною матрицею системи (1) називається матриця складена з коефіцієнтів при невідомих і правих чистин системи.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \qquad (2)$$

Елементарними перетвореннями називаються наступні дії:

1) перестановка місцями рядків (або стовпців);
2) множення і ділення довільного рядка на одне й те саме число;
3) додавання до кожного елемента деякого рядка відповідного елемента другого рядка, помноженого на одне й те саме число.

Суть методу Гаусса полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень розширену матрицю системи зводять до такого вигляду, коли елементи під головною діагоналлю основної матриці дорівнюють нулю.

Алгоритм методу Гаусса:

1) Запишемо розширену матрицю системи. Нехай це матриця (2). Припустимо, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. Якщо $a_{11} = 0$, то змінюємо порядок рядків, обравши першим той рядок, в якому перший елемент (коефіцієнт при x) не дорівнює 0. Для полегшення обчислень зручніше обрати першим рядком той, у якого перший елемент дорівнює 1. Після

перестановки рядків нумерацію елементів матриці будемо вважати таку як в (2).

2) Запишемо еквівалентну матрицю, у якої

а) Перший рядок переписуємо незмінним.

б) Другий рядок отримується так:

– множимо елементи першого рядка на $-a_{21}$;

– множимо елементи другого рядка на a_{11};

– складаємо елементи першого рядка з відповідними елемен-тами другого рядка.

Оскільки $a_{11} \cdot (-a_{21}) + a_{21} \cdot a_{11} = 0$, то перший елемент другого рядка буде дорівнювати 0 (тобто вилучається невідома x з другого рівняння).

в) Третій рядок отримується аналогічно:

– множимо елементи першого рядка на $-a_{31}$;

– множимо елементи третього рядка на a_{11};

– складаємо елементи першого рядка з відповідними елемен-тами третього рядка.

Отримаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_3 \end{array}\right) \tag{3}$$

3) Запишемо наступну еквівалентну матрицю, у якої

а) Перший та другий рядки переписуємо незмінними.

б) Третій рядок отримується так:

– множимо елементи другого рядка на $-c_{32}$;

– множимо елементи третього рядка на c_{22};

– складаємо елементи другого рядка з відповідними елементами третього рядка.

Отримаємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & d_3 \end{array}\right) \tag{4}$$

4) Запишемо систему рівнянь, відповідну матриці (4):

$$
\begin{cases}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\
\qquad\quad c_{22}y + c_{23}z = c_2 \\
\qquad\qquad\quad d_{33}z = d_3
\end{cases}
$$

З третього рівняння знаходимо значення невідомої z. Підставляючи значення z у друге рівняння, знаходимо значення y, значення x одержуємо аналогічно з першого рівняння.

5. Теорема Кронекера-Капеллі

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних алгеб-раїчних рівнянь була сумісна (мала розв'язок) необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці системи дорівнював рангу розширеної матриці системи:

$$r(A) = r(\overline{A}) = r$$

Зауваження:

1) якщо ранг r дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок;
2) якщо ранг r менше числа невідомих, то система має нескінчену множину розв'язків;
3) якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система розв'язків не має

Лекція 3. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Мета: засвоїти основні поняття векторної алгебри, дії над векторами.

План лекції:
1. Основні поняття вектора.
2. Операції над векторами.
3. Скалярний добуток векторів.
4. Векторний добуток векторів.
5. Мішаний добуток векторів.

1. Основні поняття вектора

Вектор – це величина, яка характеризується числовим значенням і напрямком в просторі.
Геометрично вектором позначається напрямлений відрізок.

Вектори бувають:
– зв’язані (якщо для них не допускається ніяке переміщення їх точки прикладання);
– ковзні (якщо їх точки прикладання можна переміщати тільки вздовж лінії дії);
– вільні (якщо їх можна переміщати в просторі паралельно їх первісного положення).

Надалі будемо розглядати тільки вільні вектори.

Вектор позначається так: $\overline{AB}$ (A – початок, B – кінець вектора) або $\overline{a}$.

Відстань між точками A та B, називається ***довжиною*** або ***модулем*** вектора $\overline{AB}$ та позначається $\left|\overline{AB}\right|$ або $\left|\overline{a}\right|$.

Нехай задана вісь l і вектор $\overline{AB}$ (рис. 1).
Проекція вектора на вісь – це число, що дорівнює довжині відрізка, початком якого є проекція початку вектора і кінцем – проекція кінця вектора:

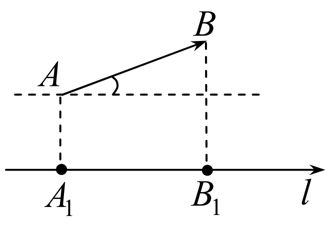


Рис. 1

$$np_l\,\overline{AB} = \left|A_1B_1\right| = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\left(\overline{AB}\,\hat{,}\,l\right)$$

Проекцією вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається скалярна величина

$$np_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\left(\overline{a} \hat{,} \overline{b}\right) \qquad (1)$$

Координати вектора – це проекції цього вектора на відповідні координатні осі (рис. 2).
Якщо точка A має координати (x_A, y_A, z_A), а точка B має координати (x_B, y_B, z_B), то координати вектора $\overline{AB}$ будуть такі

$$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \qquad (2)$$

або $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z)$, де $a_x = x_B - x_A$, $a_y = y_B - y_A$, $a_z = z_B - z_A$, причому a_x – проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь абсцис, a_y – проекція на вісь ординат, a_z – на вісь аплікат (рис. 2). Числа a_x, a_y, a_z називаються ***координатами*** або ***компонентами*** вектора.

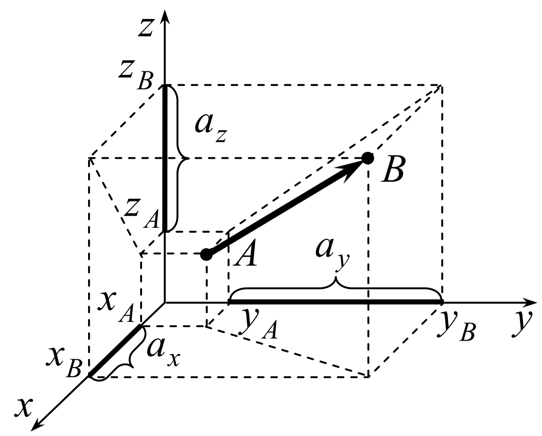


Рис. 2

Вектор $\overline{AB} = (a_x, a_y, a_z)$ можна представити як лінійну комбінацію векторів $\overline{i} = (1,0,0)$, $\overline{j} = (0,1,0)$, $\overline{k} = (0,0,1)$, які є одиничними векторами (ортами) координатних осей:

$$\overline{AB} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$$

Вектори b_1, b_2, b_3 лінійно незалежні (утворюють базис в тривимірному просторі), якщо визначник матриці, складеної з координат цих векторів, не дорівнює нулю.

Будь-який вектор $\overline{a}$ в просторі може бути лінійною комбінацією лінійно незалежних векторів b_1, b_2, b_3:

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{b}_1 + \lambda_2 \overline{b}_2 + \lambda_3 \overline{b}_3, \qquad (3)$$

де числа λ_1, λ_2, λ_3 називаються компонентами вектора $\overline{a}$ в базисі $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b_3}$. Цей вираз називають розкладом вектора $\overline{a}$ по векторах $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b_3}$.

Довжина вектора $\overline{AB}$ обчислюється за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (4)$$

Вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.
Вектори, які паралельні одній площині або належать одній площині, називаються ***компланарними***.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і рівні по довжині.

2. Операції над векторами

1). Сума векторів

Правило трикутника:

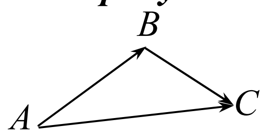


Рис. 3

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

Правило паралелограма:

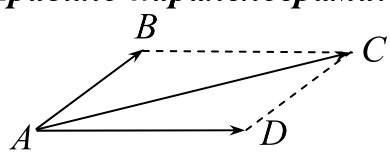


Рис. 4

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$$

Якщо $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x,\, a_y \pm b_y,\, a_z \pm b_z)$$

2). Множення вектора на скаляр (число)

Добутком вектора $\overline{a}$ на число λ називається новий вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, колінеарний з вектором $\overline{a}$, що має довжину в λ раз більшу ніж $\left|\overline{a}\right|$ та напрям вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний до $\overline{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Якщо $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ пов'язані співвідношенням $\overline{b} = \lambda \overline{a}$ ($\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$), то вони колінеарні.

3.Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\overline{a} \,\widehat{,}\, \overline{b}) \tag{5}$$

Скалярний добуток векторів в координатній формі:

$$\overline{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \tag{6}$$

Зауваження:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2) Необхідна і достатня умова ортогональності векторів ($\overline{a} \perp \overline{b}$): $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

4. Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається вектор

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = [\overline{a}, \overline{b}]$$

такий, що

1) довжина вектора $\overline{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис. 5), тобто $|\overline{c}| = |\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a} \,\widehat{,}\, \overline{b})$;

2) $\overline{c} \perp \overline{a}$ і $\overline{c} \perp \overline{b}$;

3) вектор $\overline{c}$ (рис. 5) напрямлений так, що якщо дивитись з кінця вектора $\overline{c}$, то поворот вектора $\overline{a}$ до вектора $\overline{b}$ повинен здійснюватись проти руху годинникової стрілки (така трійка векторів називається правою).

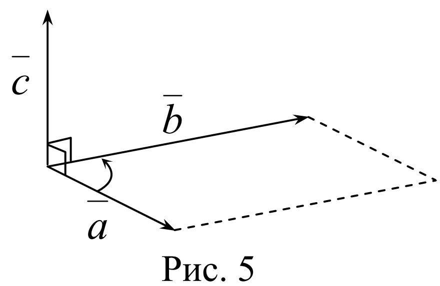


Рис. 5

Векторний добуток векторів в координатній формі:

$$\overline{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x \overline{i} + c_y \overline{j} + c_z \overline{k}, \tag{7}$$

де $c_x = a_y \cdot b_z - b_y \cdot a_z$; $c_y = -(a_x \cdot b_z - b_x \cdot a_z)$; $c_z = a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y$

Зауваження:

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -\left(\overline{b} \times \overline{a}\right)$

2) Необхідна і достатня умова колінеарності векторів ($\overline{a} \parallel \overline{b}$): $\overline{a} \times \overline{b} = 0$

5. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ називається число

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$$

Мішаний добуток векторів в координатній формі:

$$\overline{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \overline{b} = (b_x, b_y, b_z),\ \overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{8}$$

Зауваження.

1) $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) = \left(\overline{c} \times \overline{a}\right) \cdot \overline{b}$

2) $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ має знак „+”, якщо ця трійка векторів права, і знак „–” в протилежному випадку.

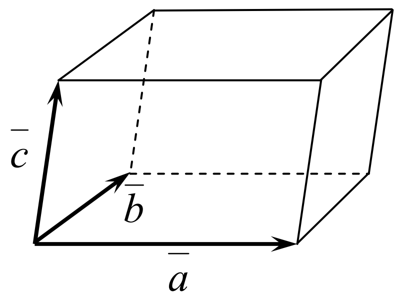


Рис. 6

3) Модуль мішаного добутку трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (рис. 6):

$$V_{парал-да} = \left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|$$

4)Тоді об’єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ (рис. 7):

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6} V_{парал-да} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|$$

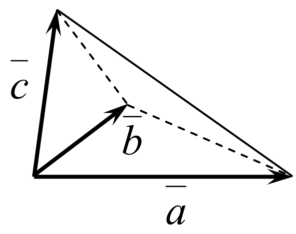


Рис. 7

5) Необхідна і достатня умова компланарності векторів: $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$

Лекція 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Мета: вивчити основні рівняння прямої на площині, умови паралельності та перпендикулярності прямих, рівняння кривих II порядку.

План лекції:
1. Рівняння прямої на площині.
2. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині.
3. Криві II порядку.

1. Пряма на площині

Всяке рівняння першого степеня на площині Oxy задає пряму лінію.

В декартовій системі координат рівняння прямої на площині можна задати в одному з наступних виглядів.

1) ***Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:***

$$y = kx + b,$$

де k – кутовий коефіцієнт (рис. 1);

$k = \mathrm{tg}\alpha$;

α – кут між прямою і додатнім напрямком осі Ox проти руху годинникової стрілки;

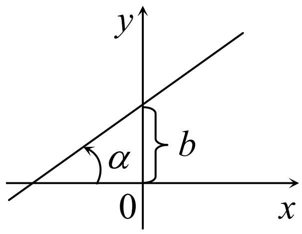


Рис. 1

b – відрізок, що відсікається на осі Oy від початку координат.

Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат.

Кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2), можна знайти як

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Рівняння прямої по її заданій точці (x_0, y_0) і кутовому коефіцієнту k можна знайти як

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

2) ***Канонічне рівняння прямої:***

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

де (x_0, y_0) – координати точки, що лежить на заданій прямій (рис. 2);
(m, n) – координати напрямного вектора, паралельного прямій.

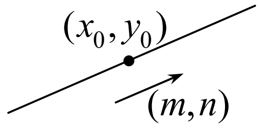


Рис. 2

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) (рис. 3), можна знайти як

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{2}$$

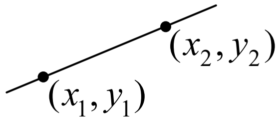


Рис. 3

3) ***Загальне рівняння прямої:***

$$Ax+By+C=0,$$

де (A, B) – координати вектора-нормалі, перпендикулярного до прямої (рис. 4);
C – вільний член.

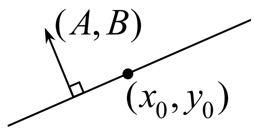


Рис. 4

Рівняння прямої по заданій точці (x_0, y_0) і вектору-нормалі (A, B) (рис. 4) можна знайти як

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

2. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині.

Кутом між прямими l_1 і l_2 (рис. 5) називається кут, на який треба повернути першу пряму навколо точки перетину цих прямих проти руху годинникової стрілки до збігу її з другою прямою.

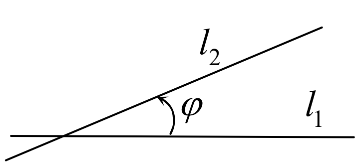


Рис. 5

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $l_1 : A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2 : A_2x+B_2y+C_2=0$, то кут φ між цими прямими можна знайти за формулою:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

Якщо дві прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом $l_1 : y = k_1 x + b_1$, $l_2 : y = k_2 x + b_2$, то кут φ між цими прямими можна знайти за формулою:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$$

Умова паралельності двох прямих:

$$k_1 = k_2 \qquad \text{або} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (k_1 \cdot k_2 = -1) \qquad \text{або} \qquad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

Координати точки перетину двох прямих знаходять розв'язуючи систему рівнянь, що задають ці прямі.

Відстань d ***від точки*** $M(x_M, y_M)$ ***до прямої*** $Ax + By + C = 0$ є довжиною перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму, і знаходиться за формулою:

$$d = \left| \frac{A x_M + B y_M + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|,$$

де в знаменнику береться знак, протилежний знаку вільного члена C.

Відхилом δ ***точки*** $M(x_M, y_M)$ ***від прямої*** $Ax + By + C = 0$ є число $+d$, коли точка M і початок координат знаходяться по різні сторони від прямої, і $-d$, коли вони знаходяться по одну сторону від прямої.

Якщо задані точки $P(x_P, y_P)$ і $Q(x_Q, y_Q)$, то ***координати точки*** M, ***яка ділить відрізок*** PQ ***у відношенні*** $\lambda = \dfrac{PM}{MQ}$, визначаються так:

3. Криві другого порядку на площині

Кривою лінією другого порядку називають лінію, яка задається рівнянням другого степеня. Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де A, B, C, D, E, F – деякі дійсні числа, причому хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля.

<u>Види кривих другого порядку</u>

1) ***Еліпс*** – це геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох фіксованих точок (***фокусів***) є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

***Канонічне рівняння еліпса*:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

де a, b – півосі еліпса (рис. 6, 7).

Точка O – центр еліпса.

Точки F_1, F_2 – фокуси еліпса (лежать на більшій осі еліпса).

Число ε (відношення відстані між фокусами до довжини більшої осі) – ***ексцентриситет*** (міра „сплюснутості” еліпса).

Для еліпса $0<\varepsilon<1$.

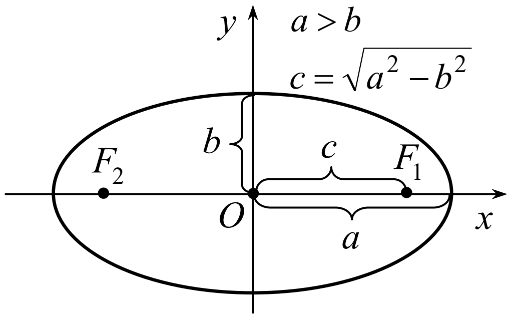


Рис. 6

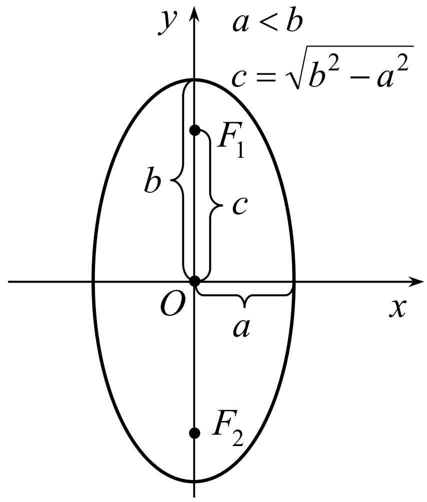


Рис. 7

2) ***Коло*** – це геометричне місце точок площини, рівновіддаленних від фіксованої точки (центра).

Канонічне рівняння кола (рис. 8)**:**

$$x^2+y^2=R^2$$

Точка O – центр кола. R – радіус кола.

Коло є частинним випадком еліпса, коли $a=b=R$. При цьому $c=0$, $\varepsilon=0$.

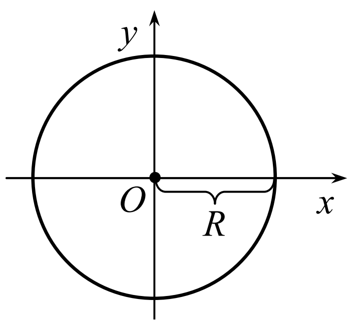


Рис. 8

3)Гіпербола – геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок (фокусів), є величиною сталою і меншою, ніж відстань між фокусами.

***Канонічне рівняння гіперболи*:**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (рис. 9);} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (рис. 10)}$$

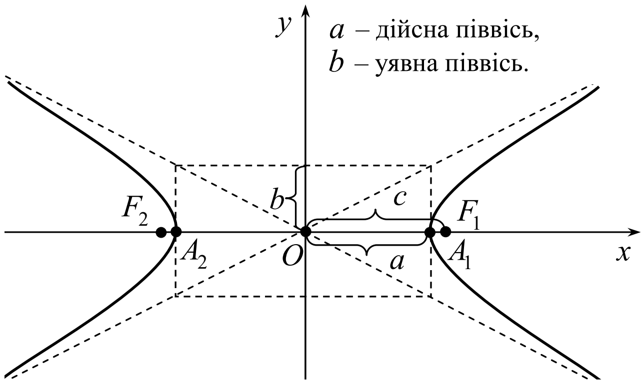


Рис. 9

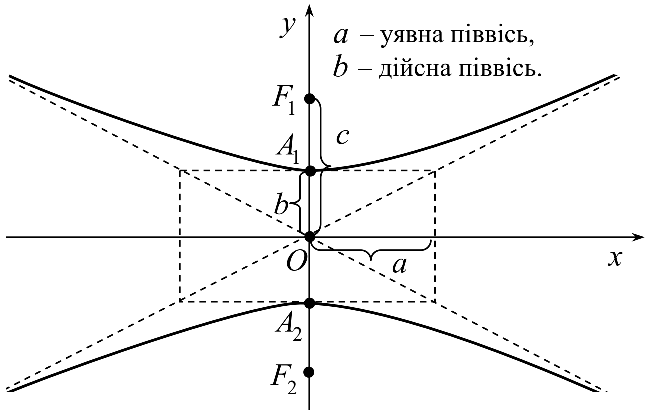


Рис. 10

Точка O – центр симетрії (центр основного прямокутника) гіперболи.
Точки A_1, A_2 – вершини гіперболи (лежать на дійсній осі).
Прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – асимптоти (діагоналі основного прямокутника) гіперболи.
Точки F_1, F_2 – фокуси гіперболи (лежать на дійсній осі), $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Ексцентриситет гіперболи (відношення відстані між фокусами до довжини дійсної осі) $\varepsilon > 1$.

4) ***Парабола*** – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (фокуса) та фіксованої прямої (***директриси***).

***Канонічне рівняння параболи*:**

$$y^2 = 2px \text{ (рис. 11)}$$
$$y^2 = -2px \text{ (рис. 12)}$$
$$x^2 = 2py \text{ (рис. 13)}$$
$$x^2 = -2py \text{ (рис. 14)}$$

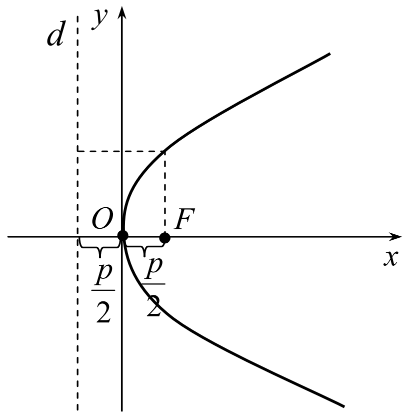


Рис. 11

де $p > 0$ – параметр параболи – відстань від фокуса до директриси.
Точка O – вершина параболи.
Точка F – фокус параболи (лежить на осі симетрії параболи).
Пряма d – директриса (перпендикулярна осі симетрії) параболи.
Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.

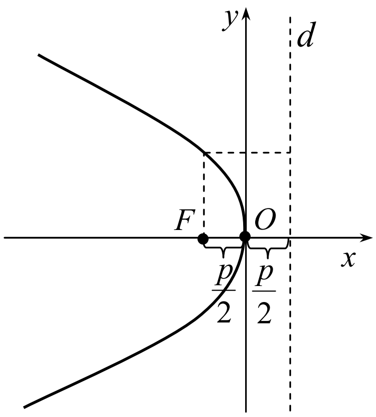


Рис. 12

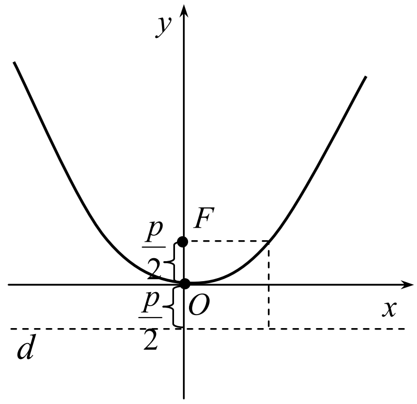


Рис. 13

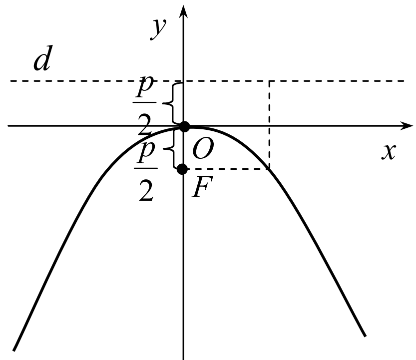


Рис. 14

5) Окремі випадки канонічних рівнянь кривих другого порядку:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – порожня множина точок (***уявний еліпс***);

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – крива вироджується в одну точку – $(0{,}0)$ (***дві уявні прямі, що перетинаються***);

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – крива розпадається на ***дві прямі, що перетинаються*** ($y=\pm\dfrac{b}{a}x$);

$x^2=a^2$ $(a\neq 0)$ або $y^2=b^2$ $(b\neq 0)$ – крива розпадається на ***дві паралельні прямі*** ($x=\pm a$ або $y=\pm b$);

$y^2=0$ або $x^2=0$ – крива розпадається на ***дві збіжні прямі***;

$x^2=-a^2$ $(a\neq 0)$ або $y^2=-b^2$ $(b\neq 0)$ – порожня множина точок (крива розпадається на ***дві уявні паралельні прямі***).

Лекція 5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

Мета: вивчити основні рівняння площини у просторі, рівняння прямої у просторі, взаємне розташування прямої та площини у просторі.

План лекції:
1. Рівняння площини.
2. Рівняння прямої в просторі.
3. Взаємне розташування прямої та площини у просторі.

1.Рівняння площини

1) ***Загальне рівняння площини:***

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де (A,B,C) – координати вектора-нормалі, перпендикулярного до площини (рис. 1).

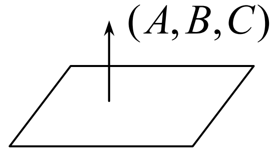


Рис. 1

Рівняння площини, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно до вектора з координатами (A,B,C), можна знайти як

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ можна знайти як

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

2) ***Рівняння площини у відрізках, що відтинаються на координатних осях:***

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де a,b,c – відрізки, що відтинаються площиною на осях Ox, Oy, Oz відповідно від початку координат.

Відстань від точки $M(x_M, y_M, z_M)$ ***до площини*** $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \left| \frac{A x_M + B y_M + C z_M + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

де в знаменнику береться знак, протилежний знаку вільного члена D.

2. Рівняння прямої в просторі

1) ***Канонічне рівняння прямої:***

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (3)$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, що належить цій прямій;

(m, n, p) – координати напрямного вектора, паралельного прямій.

2) **Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки** (x_1, y_1, z_1) **і** (x_2, y_2, z_2), можна знайти як

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4)$$

3) Загальні рівняння прямої (пряма задана як перетин двох непаралельних площин):

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, що належить заданій прямій;

$A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ – коефіцієнти із загальних рівнянь прямої.

3.Взаємне розташування прямої та площини у просторі

Приклад. Знаючи координати точок $A_1(1,1,2)$, $A_2(2,3,-1)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,1,3)$, знайти:

1) рівняння прямої A_1A_4;
2) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
3) рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;
4) рівняння проекції прямої A_1A_4 на площину $A_1A_2A_3$;
5) рівняння прямої, яка проходить через вершину A_3 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$;
6) рівняння площини, яка проходить через пряму A_1A_4 пара-лельно прямій A_2A_3;
7) величину кута між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$;
8) рівняння площини, яка проходить через точку A_3 перпендикулярно прямій A_1A_4;

Розв'язання.

1) За формулою (3) канонічне рівняння прямої, що проходить через точки A_1 і A_4:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$$

2) За формулою (2) рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$-5(x-1)-5(y-1)-5(z-2)=0 \;\Rightarrow\; (x-1)+(y-1)+(z-2)=0$$

Отже, рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$x + y + z - 4 = 0$$

3) Нехай площина $A_1A_2A_3$ – p_1. Шукана площина p_2 (рис. 2) проходить через точку A_1 і нехай має вектор-нормаль $\overline{n_2} = (A, B, C)$.

Тоді за формулою (1) рівняння площини p_2:

$$A(x-1) + B(y-1) + C(z-2) = 0 \qquad (5)$$

Напрямний вектор прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі): $\overline{s} = (-2,0,1)$.

Вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$ (рівняння площини знайдено п.2 задачі): $\overline{n_1} = (1,1,1)$.

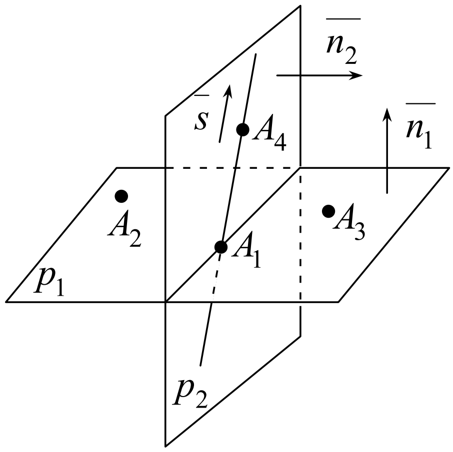


Рис. 2

За умовою задачі

$$p_1 \perp p_2 \;\Rightarrow\; \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \;\Rightarrow\; \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \;\Rightarrow\; 1 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C = 0$$

пряма $A_1A_4 \in p_2 \;\Rightarrow\; \overline{n_2} \perp \overline{s} \;\Rightarrow\; \overline{n_2} \cdot \overline{s} = 0 \Rightarrow\; A \cdot (-2) + B \cdot 0 + C \cdot 1 = 0$

Отже, маємо

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -2A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -3A \\ C = 2A \end{cases}$$

Підставивши B і C в рівняння (5), отримаємо

$$A(x-1) - 3A(y-1) + 2A(z-2) = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 - 3(y-1) + 2(z-2) = 0$$

Тоді рівняння шуканої площини p_2:

$$x - 3y + 2z - 2 = 0$$

4) Рівняння площини $A_1A_2A_3$ (площини p_1) знайдено п.2 задачі:

$$x + y + z - 4 = 0$$

Проекція прямої A_1A_4 на площину p_1 – A_1B (рис. 3), де точка B – проекція точки A_4 на площину p_1. Маємо

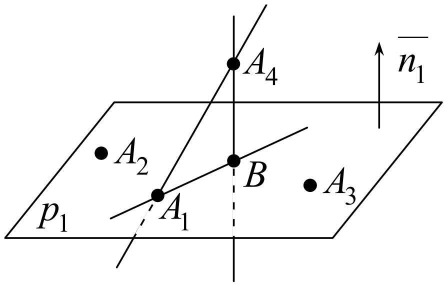


Рис. 3

$$A_4B \perp p_1 \;\Rightarrow\; \overline{n_1} \parallel A_4B$$

Вектор-нормаль площини p_1 $\overline{n_1} = (1{,}1{,}1)$ буде напрямним вектором прямої A_4B. За формулою (3) отримаємо рівняння прямої A_4B:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$$

Знайдемо координати точки B (як координати точки перетину прямої A_4B і площини p_1):

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{1} \\ \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{z-3}{1} \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x-z=-4 \\ x+y+z=4 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{2}{3},\ y=\frac{4}{3},\ z=\frac{10}{3}$$

Отже, $B\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right)$. Тоді рівняння прямої A_1B:

$$\frac{x-1}{-5/3} = \frac{y-1}{1/3} = \frac{z-2}{4/3} \Rightarrow \frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}$$

5) З умови задачі випливає, що вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$ (рівняння площини знайдено п.2 задачі) $\overline{n_1} = (1{,}1{,}1)$ буде напрямним вектором шуканої прямої l_1 (рис. 4). Тоді рівняння прямої l_1:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{1}$$

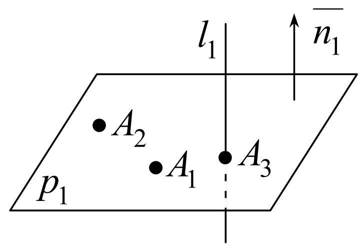


Рис. 4

6) Шукана площина – p_3 (рис. 5). Візьмемо на площині p_3 до-вільну точку $M(x,y,z)$.

За умовою задачі $A_1A_4 \in p_3$ і $A_2A_3 \parallel p_3$. Тоді вектори $\overline{A_1M}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_3}$ компланарні, а значить їх мішаний добуток дорівнює 0.

$\overline{A_1M} = (x-1, y-1, z-2)$;

$\overline{A_1A_4} = (-2{,}0{,}1)$;

$\overline{A_2A_3} = (0{,}-5{,}5)$.

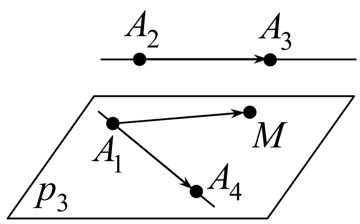


Рис. 5

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x+2y+2z-7=0$$

Отже, рівняння площини $p_3:\ x+2y+2z-7=0$.

7) Позначимо φ – кут між прямою A_1A_4 та площиною $A_1A_2A_3$ (рис. 6).

$\overline{A_1A_4} = (-2,0,1)$;

$\overline{n_1} = (1,1,1)$ – вектор-нормаль площини $A_1A_2A_3$ (рівняння площини знайдено в п.2 задачі).

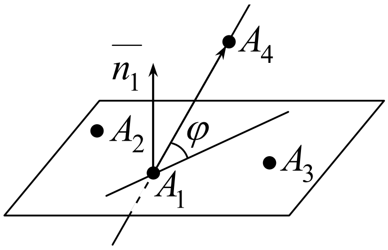


Рис. 6

Кут між векторами $\overline{A_1A_4}$ і $\overline{n_1}$:

$$\cos(\overline{A_1A_4}\,\hat{,}\,\overline{n_1}) = \frac{\overline{A_1A_4}\cdot\overline{n_1}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|\cdot\left|\overline{n_1}\right|} \quad \Rightarrow \quad \cos(90^{\circ}-\varphi) = \frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

Будемо вважати кут φ гострим, тоді

$$\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 15^{\circ}$$

8) Площина p_4 (рис. 7) – шукана площина. Так як $A_1A_4 \perp p_4$, то напрямний вектор прямої A_1A_4 (рівняння прямої знайдено в п.1 задачі) $\overline{s} = (-2,0,1)$ є вектором-нормаллю площини p_4. Тоді за формулою рівняння площини p_4:

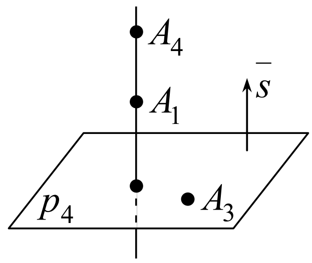


Рис. 7

$$-2(x-2)+0(y+2)+1(z-4)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-z=0$$

Лекція 6. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Мета: засвоїти основні поняття функції однієї змінної, границі та неперервності функції в точці.

План лекції:
1. Основні поняття функції однієї змінної.
2. Границя функції.
3. Види невизначеностей та їх розкриття.
4. Неперервність функції $y = f(x)$.

1. Функції однієї змінної

Змінна величина y називається ***функцією*** незалежної змінної x, якщо кожному значенню x із деякої множини X поставлено у відповідність єдине значення y.

Якщо y є функцією від x, то записують $y = f(x)$.

Змінна x називається ***аргументом*** функції $y = f(x)$.

Вираз $f(a)$ означає те значення $y = f(x)$, яке приймає функція y при $x = a$.

Множина X, що є сукупністю значень незалежної змінної x, для яких визначаються значення залежної змінної y, називається ***областю визначення*** функції (або ***областю існування***).

Геометрично, область визначення функції $y = f(x)$ є проекцією графіка функції на вісь Ox.

Сукупність значень y, які відповідають всім значенням $x \in X$, називається ***областю значень*** (або ***областю зміни***) функції.

Функція $y = f(x)$ називається ***однозначною***, якщо кожному значенню x відповідає одне єдине значення y, в протилежному випадку – ***многозначною***.

Елементарними функціями називаються степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні, обернено тригонометричні, гіперболічні функції, а також функції, що отримуються із вище перерахованих за допомогою арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозиції (операції взяття функції від функції), що застосовуються скінченне число разів.

2.Границя функції

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при x прямуючим до a ($x \to a$), якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від a, відповідні значення функції $y = f(x)$ достатньо мало відрізняються від числа A, і записується це так

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad \text{або} \qquad f(x) \to A \text{ при } x \to a$$

Зауваження:

1) a – може бути скінченним числом або ∞.
2) Якщо функція має границю при $x \to a$, то тільки одну.
3) Якщо значення функції $y = f(x)$ прямують до ∞ при $x \to a$, то кажуть, що границею функції при $x \to a$ є нескінченність і записують $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$$

Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Зауваження:

1) якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$;
2) якщо $f(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)} \to \infty$ при $x \to a$.

Властивості границі

1) $\lim\limits_{x \to a} C = C$, $C = const$
2) $\lim\limits_{x \to a} \big(\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)\big) = \alpha \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \beta \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

5) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\alpha}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\alpha}$

6) $\lim\limits_{x\to a}\log_{\alpha} f(x)=\log_{\alpha}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$

7) $\lim\limits_{x\to a}\alpha^{f(x)}=\alpha^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

8) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Теорема. Якщо функція монотонно зростає (убуває) і обмежена зверху (знизу), то вона має границю.

Якщо при знаходженні границі $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ маємо, що $f(x)\to\infty$ і $g(x)\to\infty$, то отримуємо ***невизначеність*** виду $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Аналогічно, з'являються інші види невизначеностей.

3. Види невизначеності:

$$\frac{\infty}{\infty};\ \frac{0}{0};\ 1^{\infty};\ \infty-\infty;\ 0\cdot\infty;\ 0^{0};\ \infty^{0}$$

1). Розкриття невизначеності - $\dfrac{\infty}{\infty}$

Невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при $x\to\infty$. Для розкриття цієї невизначеності треба чисельник і знаменник поділити на змінну в самому високому степені, який міститься в заданому виразі. Далі обчислюють знов, використовуючи властивості границі та властивості нескінченно великих і нескінченно малих функцій.

2).Розкриття невизначеності - $\dfrac{0}{0}$

1) Невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику і знаменнику многочлени, при x

прямуючим до якогось скінченного числа. В цьому випадку необхідно многочлени в чисельнику і в знаменнику розкласти на прості множники і скоротити.

2) Також невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись при обчисленні границі функції, у якої в чисельнику або/і знаменнику знаходиться ірраціональність, при x прямуючим до якогось скінченного числа. Тоді треба зробити перетворення для позбавлення ірраціональності.

3) Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ може утворитись і при обчисленні границі тригонометричних виразів. Для розкриття невизначеності в цьому випадку заданий вираз перетвореннями зводять до ***першої важливої границі***: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Наслідки першої важливої границі:

1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=\left|\begin{array}{l}\text{якщо } x\to 0,\\ \text{то } kx\to 0\end{array}\right|=k\cdot\lim_{kx\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k;$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{1}\cdot 1=1;$$

3). Розкриття невизначеності 1^{∞}

Невизначеність виду 1^{∞} утворюється при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$.

Позбавитись цієї невизначеності можна скориставшись одним з двох способів:

1) звести до ***другої важливої границі***: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

або її ***наслідків***: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$

2) застосувати формулу

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

4). Розкриття невизначеності $\infty - \infty$

При відніманні від нескінченності нескінченність того ж порядку виникає невизначеність виду $\infty - \infty$. Для її розкриття необхідно перетворити заданий вираз.

<u>Розкриття невизначеностей</u> $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0

Невизначеності виду $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 тотожними перетвореннями зводять до попередніх невизначеностей. Зокрема, невизначеність $0 \cdot \infty$ зводять до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, застосовуючи наступне перетворення:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \text{ або } \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

Для обчислень іноді стають в нагоді деякі ***додаткові важливі границі***:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_\alpha (1+x)}{x} = \log_\alpha e; \ \lim_{x \to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha, \ a > 0; \ \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k.$$

4. Неперервність функції $y = f(x)$

Якщо функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, яка дорівнює $f(x_0)$, то ця функція називається ***неперервною*** в точці x_0.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу ($\Delta x \to 0$) відповідає нескінченно малий приріст функції ($\Delta y \to 0$), тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Якщо $x \to x_0$ і $x < x_0$, то кажуть, що x прямує до x_0 зліва, і записують $x \to x_0 - 0$.

Якщо $x \to x_0$ і $x > x_0$, то кажуть, що x прямує до x_0 справа, і записують $x \to x_0 + 0$.

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ – границя функції в точці x_0 зліва.

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ – границя функції в точці x_0 справа.

Функція має границю в точці, якщо її односторонні границі (границя зліва і границя справа) в цій точці рівні між собою.

Теорема. Функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Функція називається ***неперервною на інтервалі*** (скінченному або нескінченному), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Зауваження. Якщо функція не існує в точці x_0 або не виконується умова теореми про неперервність, то кажуть що функція в точці x_0 має ***розрив***, а x_0 називають ***точкою розриву функції***.

Класифікація точок розриву

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив ***І роду (усувний)***, якщо

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$$

або

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, а $f(x_0)$ не існує (рис. 1.

В цьому випадку покладають, що $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

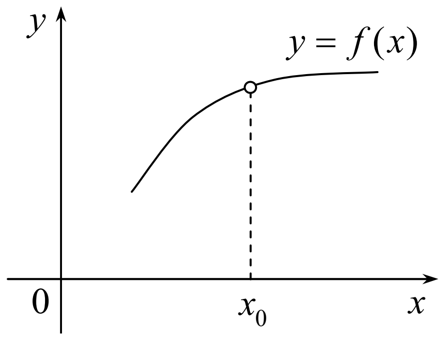


Рис. 1

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив ***І роду (неусувний)***, якщо

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$$

В цьому випадку різницю $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називають ***стрибком*** функції в точці x_0 (рис. 2).

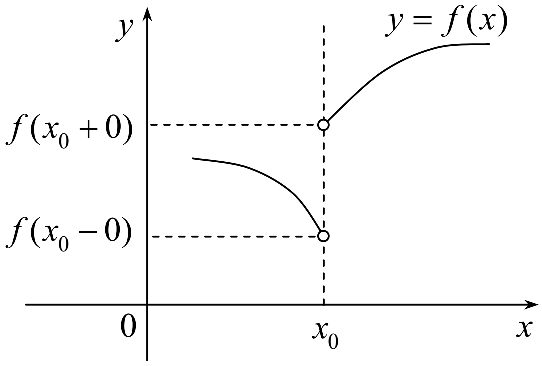


Рис. 2

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має розрив ***II роду***, якщо хоча б одна з границь $f(x_0 - 0)$ або $f(x_0 + 0)$ дорівнює нескінченності (рис. 3) або не існує.

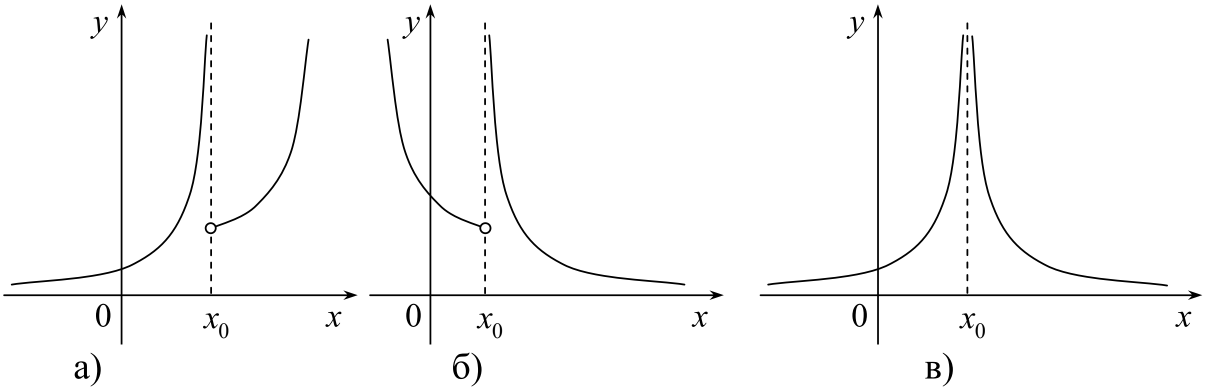


Рис. 3

Лекція 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

Мета: засвоїти поняття похідної функції, правил диференціювання, похідної функції, яка задана неявно та параметрично.

План лекції:
1. Поняття похідної функції. Правила диференціювання функції, таблиця похідних елементарних функцій.
2. Похідна складної функції.
3. Похідна функції, що задана неявно, параметрично та похідна степенево-показникової функції.
4. Похідна другого порядку.
5. Диференціал функції.

1. Поняття похідної функції

Похідною функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту функції Δy до приросту незалежної змінної Δx, коли Δx прямує до 0 (рис. 1). Тобто:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

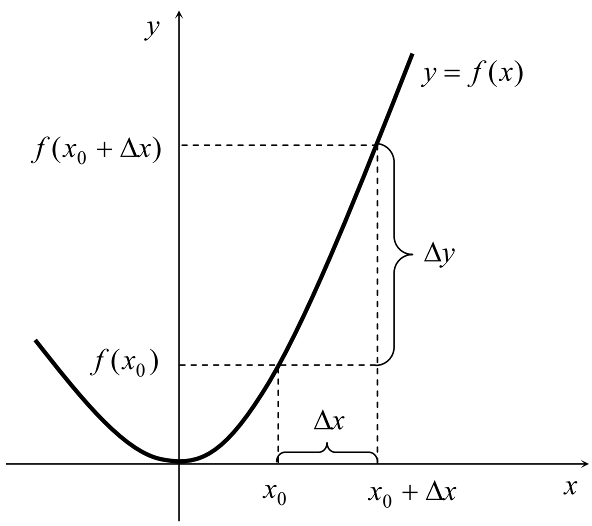


Рис. 1

Зауважимо, що за умови якщо ця границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ і позначають як

$$f'(x),\ \text{або}\ y',\ \text{або}\ y'_x,\ \text{або}\ \frac{dy}{dx}$$

Похідна показує „швидкість” зміни функції $y = f(x)$ (рис. 1).

Операція знаходження похідної функції називається ***диференціюванням*** цієї функції.

Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають диференційованою в точці x_0.

Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку (скінченного або нескінченного), то її називають диференційованою в цьому проміжку.

Геометричний зміст похідної

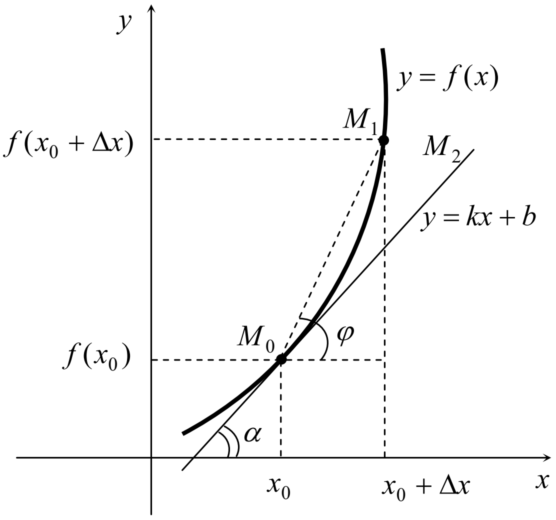


Рис. 2

Відношення приросту функції до приросту незалежної змінної

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi,$$

де φ – кут нахилу січної M_0M_1, а при $\Delta x \to 0$ січна M_0M_1 прямує до дотичної M_0M_2 до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 (рис. 2). Якщо α – кут нахилу дотичної M_0M_2, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Таким чином,

кутовий коефіцієнт k дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 є похідною цієї функції в точці x_0:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Фізичний зміст похідної

Якщо тіло рухається за законом $s = s(t)$, де s – шлях, а t – час, то середня швидкість руху від моменту часу t до $t + \Delta t$:

$$v_c = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Отже, дійсна швидкість в даний момент часу:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} v_c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

Таким чином:

швидкість в даний момент часу є похідною від пройденого шляху $s(t)$ по часу t: $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Аналогічно виводиться, що ***в даний момент часу***

прискорення є похідною від швидкості по часу: $a = \dfrac{dv}{dt}$;

теплоємність є похідною від кількості теплоти по температурі: $C = \dfrac{dw}{d\vartheta}$;

сила струму є похідною від кількості електрики по часу: $I = \dfrac{dQ}{dt}$.

Правила диференціювання функцій

Нехай дано функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

1.	$(Cu)' = Cu'$, $C = const$
2.	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
3.	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4.	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Похідні основних елементарних функцій

1.	$(c)' = 0$, $c = const$	6.	$(\sin x)' = \cos x$
2.	$(x)' = 1$	7.	$(\cos x)' = -\sin x$
3.	$(x^n)' = nx^{n-1}$, n – будь-яке дійсне число	8.	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

	$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	9.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
		10.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$, a – дійсне число, $a > 0$, $a \neq 1$ $(e^x)' = e^x$	11.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		12.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5.	$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2. Похідна складної функції

Якщо $y = f(u)$, а $u = u(x)$, то $y = f(u(x))$ називається ***складною функцією***. Змінна u називається проміжною.

Наприклад:

1) $y = \cos^5 x$ – складна функція, де $y = u^5$, $u = \cos x$;

2) $y = \operatorname{arctg} x^2$ – складна функція, де $y = \operatorname{arctg} u$, $u = x^2$;

Похідна складної функції $y = f(u(x))$ за змінною x:

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

Для знаходження похідних f'_u та u'_x використовуються вище наведені похідні основних елементарних функцій та правила диференціювання, де замість змінної x може бути будь-яка інша змінна (наприклад, u).

Таблиця диференціювання складної функції

$u = u(x)$

1.	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, n – будь-яке дійсне число	6.	$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
2.	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, a – дійсне число, $a > 0$, $a \neq 1$	7.	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	8.	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3.	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$	9.	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	10.	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	11.	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
5.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$		

3. Похідна функції, що задана неявно

Функція називається ***неявно заданою***, якщо змінні x і y зв'язані між собою рівнянням, що не виражене відносно y, тобто у вигляді $F(x, y) = 0$.

Наприклад:

$x^2 + y^2 = 1$ або $e^y \cdot \sin y = \cos x$.

Для знаходження ***похідної*** y'_x ***неявно заданої функції*** диференціюють ліву і праву частину заданої рівності, враховуючи, що y – це функція від x, а отриману рівність розв'язують відносно y'_x.

Похідна степенево – показникового виразу.

Логарифмічне диференціювання

Степенево – показникова функція має вигляд $y = u^v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, тобто u і v вирази, що містять незалежну змінну x.

Для знаходження похідної функції $y = u^v$ використовують ***спосіб логарифмічного диференціювання***. Цій спосіб полягає в тому, що задану функцію спочатку логарифмуємо

$$\ln y = \ln u^v,$$

тоді

$$\ln y = v \cdot \ln u.$$

$$(\ln y)' = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'$$

З останньої рівності:

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right),$$

де $y = u^v$.

Отже,

похідну степенево – показникової функції можна обчислити за формулою:

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right)$$

Похідна функції, заданої параметрично

Функція називається заданою ***параметрично***, якщо відповідні одна одній змінні x та y виражені через деякий параметр t:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

де t – належить деякому інтервалу; найчастіше цей інтервал $(-\infty; +\infty)$.

Похідна y_x' ***параметрично заданої функції***:

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$$

4. Похідна другого порядку

Похідну y' функції $y = f(x)$ називають похідною першого порядку. Похідну від першої похідної функції називають ***похідною другого порядку***:

$$y'' = (y')'$$

Другу похідну функції $y = f(x)$ ще позначають так:

$$f''(x),\ f_x'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Механічний зміст другої похідної

Так як прискорення a є похідною від швидкості $v(t)$ за часом t, то можна сказати, що прискорення є другою похідною від шляху $s(t)$ за часом t:

$$a = v_t' = (s_t')' = s_t''$$

Друга похідна функції, заданої параметрично

Друга похідна y_x'' ***параметрично заданої функції*** $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t) \end{cases}$

$$y_x'' = \frac{y_t'' \cdot x_t' - y_t' \cdot x_t''}{(x_t')^3}$$

Похідні вищих порядків

Похідною n***-го порядку*** функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають:

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n}$$

Правило Лопіталя розкриття невизначеності

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ або $\left(\frac{0}{0}\right)$ і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені та диференційовані в околі точки x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Зауваження. Правило Лопіталя можна застосовувати для знаходження границі неодноразово.

4. Диференціал функції

Так як для функції $y=f(x)$ похідна $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\Delta y=y'\Delta x+o(\Delta x)$, де нескінченно мала величина $o(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Умовно покладають, що приріст незалежної змінної є її диференціалом: $\Delta x=dx$. Таким чином, приріст функції

$$\Delta y=y'dx+o(\Delta x) \tag{1}$$

Диференціалом функції $y=f(x)$ називають головну лінійну частину приросту функції і позначають dy:

$$dy=y'dx \text{ або } dy=f'(x)dx$$

Зауваження 1. Враховуючи (1)

$$\Delta y\approx dy \tag{2}$$

Зауваження 2. Враховуючи, що $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, а $dy=f'(x_0)\Delta x$, із співвідношення (2) маємо

формулу для ***наближеного обчислення значення функції***

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \tag{3}$$

Лекція 8. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ЇХ ГРАФІКІВ

Мета: засвоїти загальну схему дослідження функції та побудови її графіка.

План лекції:
1. Схема повного дослідження функції $y = f(x)$.
2. Застосування похідної для дослідження функції.
3. Достатня умова монотонності функції.
4. Необхідні і достатні умови екстремуму.
5. Асимптоти.
6. Поняття комплексного числа

1. Схема повного дослідження функції $y = f(x)$

1) Знайти область визначення функції.
2) Дослідити функцію на парність, непарність (якщо $f(-x) = f(x)$, то функція парна і має віссю симетрії вісь Oy; якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція непарна і має центром симетрії початок системи координат).
3) Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
4) Знайти точки розриву функції; знайти односторонні границі зліва та справа від точок розриву.
5) Знайти асимптоти графіка функції.
6) Знайти критичні точки першого роду; інтервали зростання та спадання; точки екстремумів та екстремальні значення функції.
7) Знайти критичні точки другого роду; інтервали опуклості та угнутості графіка функції; точки перегину та значення функції в точках перегину.
8) Побудувати в системі координат знайдені асимптоти та всі отримані при дослідженні точки. Потім, враховуючи інтервали монотонності, опуклості та угнутості, побудувати графік функції.

2. Застосування похідної для дослідження функції

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Рівняння дотичної до графіка параметрично заданої функції $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру t_0:

$$y - y_0 = y_x'(t_0) \cdot (x - x_0)$$

Рівняння нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Рівняння нормалі до графіка параметрично заданої функції

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру t_0:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_x'(t_0)} \cdot (x - x_0)$$

3.Достатня умова монотонності функції

Нехай задана диференційована функція $y = f(x)$. Якщо в деякому інтервалі похідна $f'(x) > 0$, то функція в цьому інтервалі ***зростає***; якщо в деякому інтервалі $f'(x) < 0$, то функція в цьому інтервалі ***спадає***. Інтервали, в яких функція зростає або спадає, називаються ***інтервалами монотонності функції***.

Функція $y = f(x)$ в точці x_0 має ***максимум*** (***мінімум***), якщо значення функції в цій точці більше (менше) ніж її значення в деякому околі точки x_0.

Максимум ($y_{\max}$) і мінімум ($y_{\min}$) функції називають ***екстремумом функції***. Точку, в якій функція має максимум або мінімум, називають точкою екстремуму функції.

4.Необхідні і достатні умови екстремуму

Необхідна умова існування екстремуму функції

Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці x_0, то її похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює 0 або не існує.

Обернене твердження не вірне: для деякої точки може виконуватись умова, що похідна в цій точці дорівнює 0 або не існує, проте в цій точці може не існувати екстремуму.

Точки, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує (можливі точки екстремуму) називають ***критичними точками першого роду***.

Перша достатня умова існування екстремуму функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована. Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з „+” на „–”, то в точці x_0 функція має максимум; якщо з „–” на „+”, то мінімум; якщо знак не змінюється, то екстремуму немає.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у відрізку $[a;b]$, то в цьому від-різку завжди існують точки, в яких вона приймає найбільше і найменше значення. ***Найбільше*** і ***найменше*** значення функції знаходяться або всередині відрізка $[a;b]$ (в критичних точках, що належать цьому відрізку) або на кінцях відрізка $[a;b]$.

Друга достатня умова існування екстремуму функції

Нехай $f'(x_0) = 0$ і існує $f''(x_0)$. Тоді якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму, а якщо $f''(x_0) > 0$, то мінімуму.

Графік функції $y = f(x)$ називається ***опуклим*** (***угнутим***) в деякому проміжку, якщо усі точки графіка функції лежать нижче (вище) її дотичних в цьому проміжку.

Достатня умова опуклості графіка функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і двічі диференційована в деякому проміжку. Тоді якщо в цьому проміжку $f''(x) < 0$, то графік функції в цьому проміжку опуклий, а якщо $f''(x) > 0$, то угнутий.

Точка графіка функції, яка відокремлює його опуклу частину від угнутої називається точкою ***перегину***.
Точки, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує, називають ***критичними точками другого роду***.

Ознака перегину графіка функції

Точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, якщо вона є її критичною точкою другого роду і при переході через цю точку $f''(x)$ змінює знак.

5. Асимптоти

Асимптотою називають пряму лінію, до якої наближається графік функції $y = f(x)$, прямуючи у нескінченність.

Асимптоти можуть бути вертикальними, похилими і горизонтальними:

1) Якщо хоча б одна з односторонніх границь функції $y = f(x)$ в точці x_0

дорівнює ∞ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$), то пряма $x=x_0$ є ***вертикальною асимптотою*** графіка цієї функції.

Тобто вертикальна асимптота $x=x_0$, де x_0 – точка розриву другого роду функції $y=f(x)$.

2) Рівняння ***похилої асимптоти*** функції $y=f(x)$ шукають у вигляді

$$y=kx+b,$$

де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \tag{4}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x). \tag{5}$$

Зауважимо, що в загальному випадку треба розглядати окремо границі при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$.

Якщо не існує скінченного значення границі (4), то похилої асимптоти немає.

Якщо $k=0$, то похила асимптота перетворюється у горизонтальну.

3) Рівняння ***горизонтальної асимптоти*** функції $y=f(x)$

$$y=b,$$

де

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x). \tag{6}$$

Треба розглядати окремо границі при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$.

Якщо не існує скінченного значення границі (6), то горизонтальної асимптоти немає.

6. Поняття комплексного числа

Комплексним числом z називається вираз виду

$$z=x+iy,$$

де x та y – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця, що задовольняє умові $i^2=-1$. Числа x та y називаються відповідно дійсною і уявною частинами комплексного числа z і позначаються $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$.

Два комплексних числа вважаються *рівними*, якщо рівні їх дійсні і уявні частини: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Нехай задані комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, $(z_2 \neq 0)$;

4) $z^2 = \left(x + iy\right)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$;

5) $z^3 = \left(x + iy\right)^3 = x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - iy^3$.

Модуль $|z|$ та аргумент $\left(\operatorname{Arg} z\right)$ комплексного числа $z = x + iy$ є одними із його головних характеристик.

Модулем комплексного числа називається довжина вектора, що є геометричним зображенням цього числа на комплексній площині (рис. 15.1). Модуль комплексного числа обчислюється за формулою:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Вираз **аргументу** комплексного числа складається із суми, до складу якої входить головне значення аргументу $\left(\arg z\right)$ та доданок $2\pi k,\ \ k \in Z$.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ \ k \in Z,$$

де головне значення аргументу комплексного числа $z = x + iy$ обчислюється за формулою:

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Отже, аргумент комплексного числа *z* визначається неоднозначно, а з точністю до доданка $2\pi k,\ \ k \in Z$.

Геометричний зміст головного значення аргументу комплексного числа полягає у тому, що $\arg z$ дорівнює найменшому із кутів між додатним напрямком осі O*x* та вектором, що зображає комплексне число $z = x + iy$.

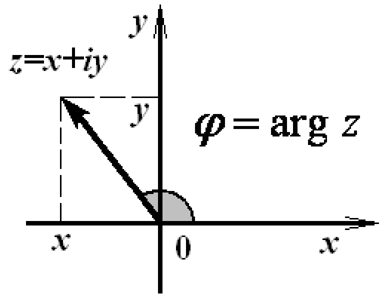


Рис.15.1

Із геометричного змісту зрозуміло, що головні значення аргументів комплексних чисел знаходяться у межах:

$$-\pi < \arg z \le \pi$$
$$\left(-\pi < \varphi \le \pi\right).$$

Форми комплексних чисел

Алгебраїчна: $z = x + iy$.

Показникова: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Тригонометрична: $z = |z| \cdot \left(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi\right)$.

Правила знаходження значень функції арктангенс:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x \ge 0,\ \ y \ge 0, \\ \pi - \operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, & x < 0,\ \ y \ge 0, \\ -\left(\pi - \operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|\right) & x < 0,\ \ y < 0, \\ -\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right| & x \ge 0,\ \ y < 0. \end{cases}$$

Лекція 9. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Мета: засвоїти основні поняття функції багатьох змінних , похідної функції багатьох змінних, похідної за напрямом, градієнта функції, розглянути методики знаходження найбільшого та найменшого значення функції.

План лекції:
1. Основні поняття про функцію багатьох змінних.
2. Диференціювання функції кількох змінних.
3. Похідна за напрямом.
4. Градієнт функції.

1. Основні поняття про функцію багатьох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значень двох незалежних одна від одної змінних величин x і y з деякої області D відповідає певне значення величини z, тоді величина z є ***функцією двох незалежних змінних*** x і y, яка визначена в області D. Позначається така функція:

$$z = f(x, y) \text{ або } z = z(x, y).$$

Значення функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ знаходять за формулою:

$$z_0 = z(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = z\Big|_{M_0}.$$

Графіком функції $z = f(x, y)$ є ***поверхня*** (рис. 1).

Область визначення (існування) функції $z = f(x, y)$ – це множина D всіх таких точок (x, y) площини Oxy (рис. 1), для яких вираз $f(x, y)$ має зміст і дає дійсні значення.

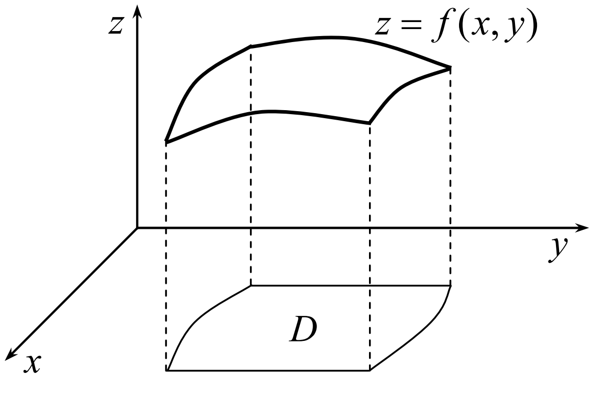
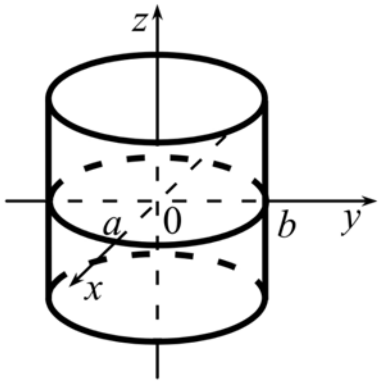
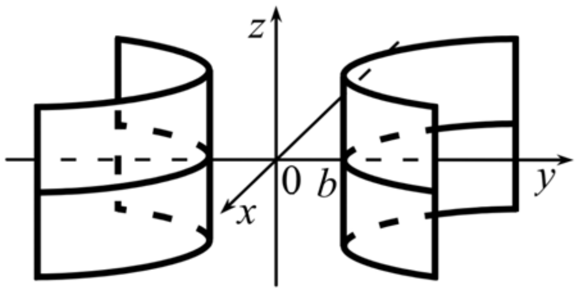
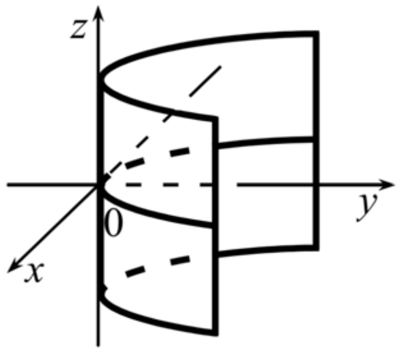
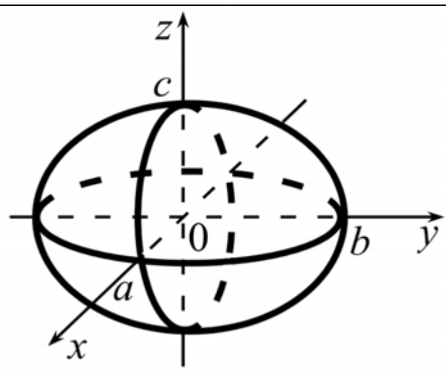


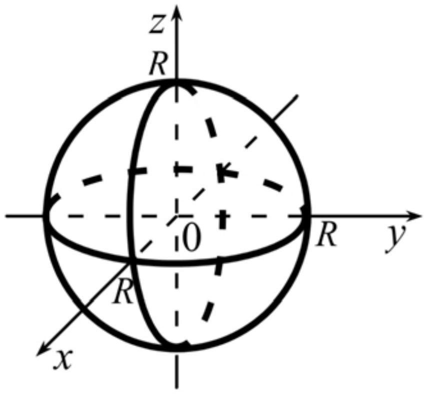
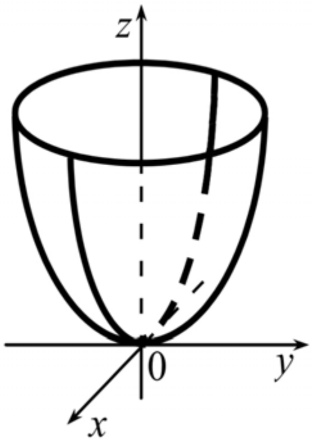
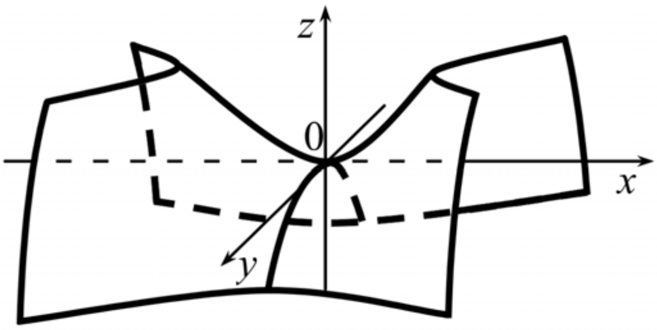
Рис. 1

Аналогічним чином визначається функція більшого числа змінних:
$u = f(x, y, z)$ – функція трьох незалежних змінних;

$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функція n незалежних змінних.

Поверхні другого порядку

Еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Частинний випадок: *круговий циліндр* $(a = b = R)$ $x^2 + y^2 = R^2$	 Рис. 2
Гіперболічний циліндр $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	 Рис. 3
Параболічний циліндр $x^2 = 2py$ $(p > 0)$	 Рис. 4
Тривісний еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	 Рис. 5

Сфера $$x^2+y^2+z^2=R^2$$	 Рис. 6
Еліптичний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$	 Рис. 7
Гіперболічний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$	 Рис. 8

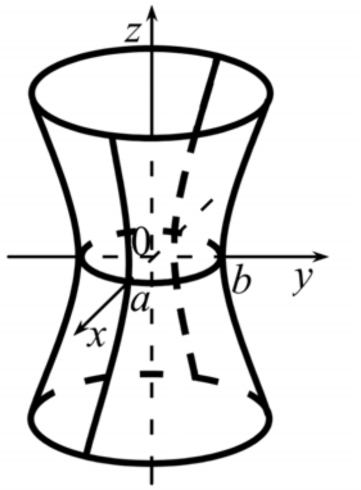
<table>
<tr>
<td>Однопорожнинний гіперболоїд
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$</td>
<td>

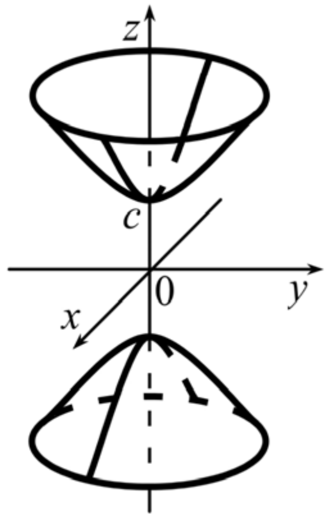
Рис. 9</td>
</tr>
<tr>
<td>Двопорожнинний гіперболоїд
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$</td>
<td>

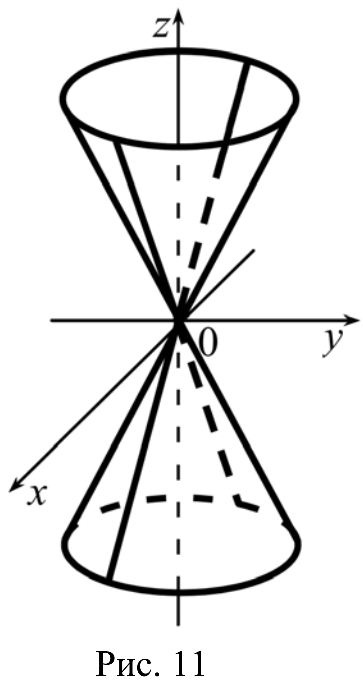
Рис. 10</td>
</tr>
<tr>
<td>Конус
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$</td>
<td>

Рис. 11</td>
</tr>
</table>

2. Диференціювання функції кількох змінних

Якщо одна із незалежних змінних функції $z = f(x, y)$, наприклад x, отримала приріст Δx, то різниця

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

називається частинним приростом функції z.

Відповідно, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ (що не дорівнює нескінченності), яка не залежить від способу прямування $\Delta x \to 0$, тоді ця границя називається ***частинною похідною (першого порядку)*** функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \text{ або } \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ або } z'_x, \text{ або } f'_x(x, y), \text{ або } f'_x.$$

Аналогічно визначається частинна похідна по змінній y: z'_y.

Так само визначаються частинні похідні функції трьох і більшого числа змінних.

Обчислення частинних похідних функції кількох змінних здійснюється як для функції однієї незалежної змінної, причому вважають всі незалежні змінні, крім тої по якій диференціюють, постійними величинами.

Приклад 1. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = \frac{y}{x}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}(y)'_y = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Частинні похідні другого порядку є частинними похідними від похідних першого порядку.

Частинні похідні другого порядку для функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x\right)'_x = f''_{xx}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y\right)'_y = f''_{yy}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x\right)'_y = f''_{xy}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y\right)'_x = f''_{yx}, \tag{4}$$

де (1) і (2) – ***“чисті похідні ”*** другого порядку;
(3) і (4) – “***мішані похідні ”*** другого порядку.

Приклад 2. Знайти похідні другого порядку від функції

$$z = \sin xy.$$

Розв’язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sin xy\right)'_x = \cos xy \cdot \left(xy\right)'_x = \cos xy \cdot y \cdot 1 = y \cos xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin xy\right)'_y = \cos xy \cdot \left(xy\right)'_y = \cos xy \cdot x \cdot 1 = x \cos xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y \cos xy\right)'_x = y \cdot (-\sin xy) \cdot \left(xy\right)'_x = y \cdot (-\sin xy) \cdot y \cdot 1 = -y^2 \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(x \cos xy\right)'_y = x \cdot (-\sin xy) \cdot \left(xy\right)'_y = x \cdot (-\sin xy) \cdot x \cdot 1 = -x^2 \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(y \cos xy\right)'_y = 1 \cdot \cos xy - y \cdot \sin xy \cdot \left(xy\right)'_y = \cos xy - xy \sin xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(x \cos xy\right)'_x = 1 \cdot \cos xy - x \cdot \sin xy \cdot \left(xy\right)'_x = \cos xy - xy \sin xy.$$

Якщо мішані частинні похідні одного порядку неперервні, тоді їх значення не залежать від порядку диференціювання.

Зокрема, для функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

3. Найбільше та найменше значення функції у замкненій області

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$.

Функція, обмежена і диференційована у замкненій області, досягає свого найбільшого та найменшого значення або всередині цієї області у ***стаціонарних точках*** (точках, в яких частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю), або на її границі.

Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції $z = f(x, y)$

1) Знайти стаціонарні точки, розв'язавши систему рівнянь (***необхідна умова екстремуму функції***):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

2) Обчислити у стаціонарних точках значення функції.
3) Знайти найбільше і найменше значення функції на кожній лінії, що обмежує задану область.
4) Порівняти всі отримані в пп. 2) – 3) значення і визначити найбільше і найменше з них.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 5x^2 + y^2 - 6xy$ у замкненій області D: $x + y \geq -1$, $x \leq 2$, $y \leq 2$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки, що належать області D:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x - 6y; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6x;$$

$$\begin{cases} 10x - 6y = 0 \\ 2y - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Зобразимо область D (рис. 12). Для зручності позначимо вершини заданої області, яка має вигляд трикутника (див. рис.9.13). Стаціонарна точка $(0;0)$ знаходиться всередині області D.

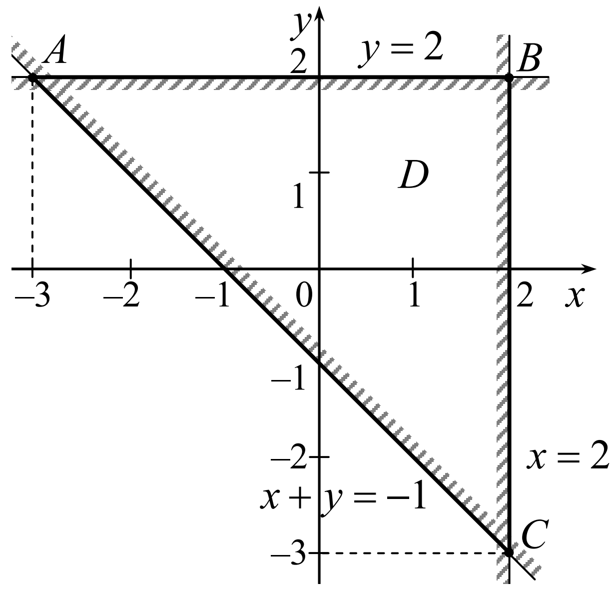


Рис. 12

Значення функції у цій точці: $z(0;0) = 0$.

Знайдемо найбільше та найменше значення функції на границі області D. Для цього розглянемо функцію на границі. Так як границя складається із трьох ліній, то розглянемо функцію на кожній з них окремо.

Розглянемо функцію z на границі AB. На лінії AB $y = 2$, отже функція z тут приймає вигляд: $z = 5x^2 + 4 - 12x$. Тобто задача зводиться до наступної: знайти найбільше та найменше значення функції від однієї незалежної змінної $z = 5x^2 + 4 - 12x$ на відрізку $[-3;2]$.

$$\frac{dz}{dx} = 10x - 12 \quad \Rightarrow \quad 10x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{5} \in [-3;2];$$

$$z\left(\frac{6}{5};2\right) = -3\frac{1}{5};\ z_A = z(-3;2) = 85;\ z_B = z(2;2) = 0.$$

Розглянемо функцію z на границі CB:

$$\begin{cases} x = 2, \\ -3 \le y \le 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = 20 + y^2 - 12y;$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y - 12 \quad \Rightarrow \quad 2y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 6 \notin [-3;2];$$

$$z_C = z(2;-3) = 65;\ z_B = z(2;2) = 0.$$

Розглянемо функцію z на границі AC:

$$\begin{cases} -3 \le x \le 2, \\ -3 \le y \le 2, \\ x + y = -1, \end{cases} \Rightarrow \quad z = 5x^2 + (-1-x)^2 - 6x(-1-x);$$

$$z = 12x^2 + 8x + 1;$$

$$\frac{dz}{dx} = 24x + 8 \quad \Rightarrow \quad 24x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3} \in [-3;2];$$

$$y = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3};$$

$$z\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3};\ z_A = z(-3;2) = 85;\ z_C = z(2;-3) = 65.$$

З усіх знайдених значень найбільше та найменше значення функції:

$$\max_D z(x,y) = z(-3;2) = 85; \quad \min_D z(x,y) = z\left(\frac{6}{5};2\right) = -3\frac{1}{5}.$$

3. Похідна за напрямом

Похідна від функції $u = f(x,y,z)$ ***за напрямом*** $\bar{l}$ характеризує швидкість зміни функції за цим напрямом і обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\widehat{\vec{l}, Ox}) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\widehat{\vec{l}, Oy}) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\widehat{\vec{l}, Oz}).$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $f(x,y) = x^3 - y^3$ у точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = (1,\sqrt{3})$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 3 \cdot 1 = 3; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = -3 \cdot 1 = -3.$$

Враховуючи $\vec{l} = (l_1, l_2) = (1;\sqrt{3})$, маємо

$$\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Ox) = \frac{l_1}{|\,l\,|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2};$$

$$\cos(\vec{l}\,\hat{,}\,Oy) = \frac{l_2}{|\,l\,|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_M = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

4. Градієнт функції

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, який показує напрямок найбільшого зростання функції і проекціями якого на координатні осі Ox, Oy, Oz є відповідно $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Приклад 5. Знайти градієнт функції $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$ у точці $M(1;1)$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy; \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 5; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = 4;$$

$$grad\ f\,\Big|_M = 5\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Лекція 10. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Мета: засвоїти поняття первісної функції, невизначеного інтеграла, , методів його обчислення.

План лекції:
1. Первісна функції. Поняття невизначеного інтеграла.
2. Методи інтегрування.
3. Інтегрування дробово-раціональних функцій.
4. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних виразів.

1.Первісна. Поняття невизначеного інтеграла

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Процес знаходження первісної для заданої функції називається ***інтегруванням***.

Наприклад. Для функції $f(x) = x^2$ первісною є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так як $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$. Але $F(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ теж є первісною для функції $f(x) = x^2$, так як $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2 = f(x)$.

Отже, якщо функція $f(x)$ має первісну, то вона має нескінченну кількість первісних $F(x) + C$, які відрізняються лише постійним доданком C.

Сукупність всіх первісних $F(x) + C$, де C – довільна постійна, називається ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$. Тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;
x (змінна, що стоїть під знаком диференціала) – змінна інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла

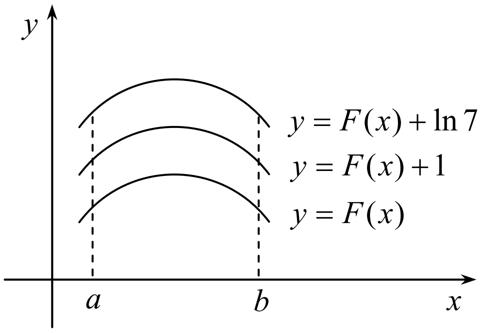


Рис. 1

Графік первісної функції $y = F(x)$ називають ***інтегральною кривою***. Невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ геометрично являє собою ***сімейство всіх інтегральних кривих*** $y = F(x) + C$, кожна з яких може бути отримана з однієї інтегральної кривої $y = F(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy.

Таблиця основних інтегралів

1.	$\int 0\, dx = C$	6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
2.	$\int dx = x + C$	7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, де n – будь-яке дійсне число, $n \neq -1$	8.	$\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
		9.	$\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, де a – дійсне число, $a > 0$, $a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + C$	11.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
		12.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$

13.	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$	15.	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	16.	$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right\|+C$
14.	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$	17.	$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left\|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$, де $k=const$
2. $\int\left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx$
3. $d\int f(x)dx=f(x)dx$
4. $\int dF(x)=F(x)+C$

2.Методи інтегрування

І). Метод безпосереднього інтегрування

Метод полягає в тому, що заданий інтеграл за допомогою властивостей невизначеного інтеграла зводиться до табличних інтегралів.

Приклад 1. Знайти $\int\frac{x^3+4x+2}{2x}dx$

Розв'язання. Підінтегральну функцію розкладемо на суму:

$$\int\frac{x^3+4x+2}{2x}dx=\int\left(\frac{x^3}{2x}+\frac{4x}{2x}+\frac{2}{2x}\right)dx=\int\left(\frac{x^2}{2}+2+\frac{1}{x}\right)dx$$

Застосуємо властивість 2 невизначеного інтеграла:

$$\int\left(\frac{x^2}{2}+2+\frac{1}{x}\right)dx=\int\frac{x^2}{2}dx+\int 2dx+\int\frac{1}{x}dx$$

До першого та другого інтеграли застосуємо властивість 1:

$$\int\frac{x^2}{2}dx+\int 2dx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int x^2dx+2\int dx+\int\frac{1}{x}dx$$

Отримали три табличних інтеграли. За формулами 3, 2, 4 відповідно таблиці основних інтегралів знаходимо:

$$\frac{1}{2}\int x^2 dx + 2\int dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C$$

Отже,

$$\int \frac{x^3+4x+2}{2x} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C$$

Щоб перевірити правильність відповіді треба отриманий після інтегрування вираз продиференціювати, якщо результат збігається з підінтегральною функцією, то відповідь правильна.

<u>II.) Метод заміни змінної</u>

1) $$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt$$

Підінтегральний вираз в правій частині може стати простим, який можна проінтегрувати користуючись властивостями інтеграла та таблицею основних інтегралів. Але після знаходження первісної треба повернутись до початкової змінної інтегрування x. Для цього треба для функції $x=\varphi(t)$ знайти обернену $t=\psi(x)$ і підставити в первісну.

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$

Розв'язання. Щоб позбутись квадратного кореня зробимо заміну $x=t^2$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = d(t^2) = (t^2)'dt = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{t^3+t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ t = \sqrt{x} \end{matrix} \right| = 2\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C$$

2) $$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int f(t)\,dt$$

Частинний випадок:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int \frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)} = \left| \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\,dx = d(\varphi(x)) = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

Розв'язання. Так як $(x^2+1)' = 2x$, то

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)'dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left| x^2+1=t \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+1)+C$$

3) В інтегралі $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f\big(\varphi(x)\big)\cdot d(\varphi(x))$ підстановку $\varphi(x)=t$ можна робити уявно і інтегрувати за складною змінною $\varphi(x)$. В такому випадку метод називається ***підведенням під знак диференціала***.

III.) Метод інтегрування частинами

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du,$$

де $u=u(x),\ \ v=v(x)$.

Формулу інтегрування частинами можна застосовувати декілька разів підряд.

Зміст цього методу полягає в тому, що за рахунок диференціювання функції u заданий інтеграл спрощується.

Інтеграли, які обчислюються методом інтегрування частинами:

1)	$\int P_n(x)\cdot\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cdot\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)\cdot a^{kx}\,dx$ $\int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx$	$u = P_n(x)$ $dv = \begin{cases} \sin kx\,dx \\ \cos kx\,dx \\ a^{kx}dx \\ e^{kx}dx \end{cases}$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; k, a – дійсні числа, $a>0$, $a\neq 1$

Приклад 4. Знайти $\int x\cos x\,dx$

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами. Зауважимо, що при знаходженні v не має потреби дописувати „$+C$", так як довільна постійна буде додана в самому кінці розв'язання. Отже,

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos x\,dx & v=\int dv=\int\cos x dx=\sin x \end{matrix} \right| = x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C$$

2)

$$\int P_n(x) \cdot \arcsin kx\, dx \qquad\qquad u = \begin{cases} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \operatorname{arctg} kx \\ \operatorname{arcctg} kx \\ \log_a kx \\ (\log_a kx)^m \end{cases}$$

$$\int P_n(x) \cdot \arccos kx\, dx$$

$$\int P_n(x) \cdot \operatorname{arctg} kx\, dx$$

$$\int P_n(x) \cdot \operatorname{arcctg} kx\, dx$$

$$\int P_n(x) \cdot \log_a kx\, dx$$

$$\int P_n(x) \cdot (\log_a kx)^m\, dx \qquad\qquad dv = P_n(x)\, dx$$

Приклад 5. Знайти $\int \ln x\, dx$

Розв'язання. В даному випадку многочлен $P_n(x) = 1$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx & v = \int dv = \int dx = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

3)

$$\int a^{kx} \cdot \sin mx\, dx$$

$$\int a^{kx} \cdot \cos mx\, dx$$

В результаті дворазового застосування методу інтегрування частинами отримаємо знов заданий інтеграл. Тоді ліву і праву частину рівності розв'язуємо як лінійне рівняння відносно заданого інтеграла.

В цьому випадку не важливо який з множників беремо за u, а який за dv, головне при повторному застосуванні формули розподілити функції подібним чином, як і при першому застосуванні.

3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дробово-раціональною функцією (або раціональним дробом) називається функція, у якої в чисельнику і знаменнику многочлен:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n; $Q_m(x)$ – многочлен степеня m.

Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менше степеня знаменника ($n < m$); в протилежному випадку ($n \geq m$) – неправильним.

1.) Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен у знаменнику

1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Перетворимо квадратний тричлен:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$$

де $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$, знак „$\pm$” береться залежно від того, чи буде вираз $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ додатнім або від’ємним. Тоді заданий інтеграл зводиться до табличного:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \left|\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} > 0\right| = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{k}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{b}{2a}}{k} + C;$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \left|\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} < 0\right| = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-k^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2k}\cdot \ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-k}{x+\frac{b}{2a}+k}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = |a > 0| = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left| \begin{array}{l} a<0 \\ k^2 = \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{c}{a} > 0 \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{x + \dfrac{b}{2a}}{k} + C.$$

Приклад 6. Знайти $\int \frac{x-1}{2x^2+8x+20} dx$

Розв'язання.

$$\int \frac{x-1}{2x^2+8x+20} dx = \left| \begin{array}{l} (2x^2+8x+20)' = 4x+8 \\ x-1 = \dfrac{1}{4}(4x+8) - 3 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{(4x+8)dx}{2x^2+8x+20} -$$

$$-3\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+20)}{2x^2+8x+20} - 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2+6} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln\left|2x^2+8x+20\right| - \frac{3}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

3. $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, $n \geq 2$, $n \in N$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \left| \begin{array}{l} ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}\right)\right) \\ t = x + \dfrac{b}{2a}; \quad s = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2} \end{array} \right| = \frac{1}{a^n} \int \frac{dt}{(t^2+s)^n}$$

Далі використовують рекурентну формулу:

$$\int \frac{dt}{(t^2+s)^n} = \frac{t}{2s(n-1)(t^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2s(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+s)^{n-1}}$$

4. $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$, $n \geq 2$, $n \in N$

Аналогічно як в **2.** отримаємо

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{A}{2a(1-n)} \cdot \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \cdot \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

2.)Інтегрування правильних раціональних дробів задопомогою розкладання на найпростіші раціональнідроби (методом невизначених коефіцієнтів)

Найпростіші правильні раціональні дроби (***елементарні дроби***) мають вигляд

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},\ \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

причому ax^2+bx+c не розкладається на множники (тобто $D=b^2-4ac<0$ і квадратний тричлен не має дійсних коренів).

Правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n<m$) можна представити у вигляді суми найпростіших дробів.

Для цього спочатку треба розкласти знаменник $Q_m(x)$ на найпростіші множники:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{k_j} \cdot \ldots}$$

Тоді кожному множнику вигляду $(x-a)^k$ в розкладі буде відповідати сума k найпростіших дробів:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

Кожному множнику вигляду $(ax^2+bx+c)^k$ в розкладі буде відповідати сума k таких найпростіших дробів:

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{B_kx+C_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Тоді раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ набуває вигляду:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{A_{k_1+1}}{x-a_2} + \frac{A_{k_1+2}}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1+k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{l+1}x + C_{l+1}}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \frac{B_{l+2}x + C_{l+2}}{(a_j x^2 + b_j x + c_j)^2} + \ldots + \frac{B_{l+k_j}x + C_{l+k_j}}{(a_j x^2 + b_j x + c_j)^{k_j}} + \ldots$$

Коефіцієнти A_i, B_i, C_i заздалегідь не визначені і потребують знаходження.

Приклад 7. Знайти $\displaystyle\int \frac{11x-4}{(x-2)(x^2+2x-8)}dx$

Розв'язання. Квадратний тричлен у знаменнику має дійсні корені $x=2$ і $x=-4$, а тому його можна розкласти: $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$.

Тоді

$$\int \frac{11x-4}{(x-2)(x^2+2x-8)}dx = \int \frac{11x-4}{(x-2)^2(x+4)}dx$$

Розкладемо підінтегральний раціональний дріб на суму найпростіших дробів. Множнику $(x-2)^2$ буде відповідати 2 дроби, а множнику $(x+4)$ – один:

$$\frac{11x-4}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x+4}$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти A_1, A_2, A_3.

В останній рівності в правій частині приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{11x-4}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{A_1(x-2)(x+4) + A_2(x+4) + A_3(x-2)^2}{(x-2)^2(x+4)}$$

Так як у дробів зліва та справа знаменники рівні, то прирівняємо тільки чисельники:

$$11x-4=A_1(x-2)(x+4)+A_2(x+4)+A_3(x-2)^2$$

Спосіб знаходження невизначених коефіцієнтів(метод порівняння коефіцієнтів)

Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частини рівності:

$$11x-4=A_1x^2+2A_1x-8A_1+A_2x+4A_2+A_3x^2-4A_3x+4A_3$$
$$11x-4=\left(A_1+A_3\right)x^2+\left(2A_1+A_2-4A_3\right)x-8A_1+4A_2+4A_3$$

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & x^2 & A_1+A_3=0 \\ \text{при} & x & 2A_1+A_2-4A_3=11 \\ \text{при} & x^0 & -8A_1+4A_2+4A_3=-4 \end{array}$$

З цих рівнянь отримуємо: $A_1=\dfrac{4}{3}$, $A_2=3$, $A_3=-\dfrac{4}{3}$.

3.) Інтегрування неправильних раціональних дробів

Якщо раціональний дріб неправильний, то за допомогою ділення кутом чисельника на знаменник (по правилу ділення многочленів) його представляють у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.

Приклад 8. Знайти $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+4x-1}dx$

Розв'язання. Представимо підінтегральну функцію у вигляді многочлена та правильного раціонального дробу:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+x-1 & x^2+4x-1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3+4x^2-x\quad} & x-2 \\ -2x^2+2x-1 & \\ -\ \underline{-2x^2-8x+2} & \\ 10x-3 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+4x-1}dx = \int\left(x-2+\frac{10x-3}{x^2+4x-1}\right)dx = \int xdx - 2\int dx +$$

$$+5\int \frac{2x+4-\frac{23}{5}}{x^2+4x-1}dx = \int xdx - 2\int dx + 5\int \frac{d(x^2+4x-1)}{x^2+4x-1} - 23\int \frac{dx}{(x+2)^2-5} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln\left|x^2+4x-1\right| - \frac{23}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right| + C$$

4. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних виразів.

I. Для інтегралів виду

$$\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx,$$
$$\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx,$$
$$\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$$

використовують формули

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right);$$
$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right);$$
$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right).$$

Приклад 9. Знайти $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$

Розв'язання.

$$\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 2x - \cos 8x\right)dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C$$

II. Для інтегралів виду

$$\int \sin^{2m} x \, dx,$$
$$\int \cos^{2n} x \, dx,$$
$$\int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x \, dx,$$

де $m, n \in N$, тобто степені є цілими додатними парними числами, використовують формули зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Приклад 10. Знайти $\int \sin^4 x dx$

Розв'язання. Так як $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$, то формулу зниження степеня треба застосувати двічі

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

III.

	Для інтегралів виду:	використовують підстановки:	
1)	$\int R(\sin x) \cdot \cos x \, dx$	$\sin x = t$,	$\cos x \, dx = dt$
2)	$\int R(\cos x) \cdot \sin x \, dx$	$\cos x = t$,	$\sin x \, dx = -dt$
3)	$\int R(\operatorname{tg} x) \, dx$	$\operatorname{tg} x = t$,	$x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{t^2 + 1}$

де $R(\sin x)$, $R(\cos x)$, $R(\operatorname{tg} x)$ означає раціональний вираз, що містить тільки відповідну тригонометричну функцію.

Приклад 11. Знайти $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$

Розв'язання. За допомогою перетворень приведемо підінтегральну функцію до вигляду $R(\cos x) \cdot \sin x$ і зробимо відповідну підстановку:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^4 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^4 x} \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{(1 - t^2)^2}{t^4} dt = -\int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1\right) dt = -\left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{2}{t} + t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C$$

IV. Для всіх інших інтегралів виду $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ використовують ***універсальну тригонометричну підстановку***:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,$$

враховуючи, що в цьому випадку

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Приклад 12. Знайти $\int \frac{1}{1-\sin x} dx$

Розв'язання.

$$\int \frac{1}{1-\sin x}\, dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

<u>Інтегрування деяких ірраціональних виразів</u>

I. Для інтегралів виду $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$**,** $m, n, \ldots r, s \in N$

використовують підстановку

$$x = t^k, \qquad dx = k \cdot t^{k-1} dt,$$

де k – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Приклад 13. Знайти $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx$

Розв'язання. Вирази $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x}$ можна представити відповідно як $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{1}{2}}$. Найменшим спільним кратним знаменників дробів, що стоять у степенях, є число 6. Отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx = \begin{vmatrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{vmatrix} = \int \frac{\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(t^6\right)^{\frac{2}{3}} - \left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^2}{t^4 - t^3} t^5 dt =$$

$$= 6\int \frac{t^7}{t^3(t-1)}dt = 6\int \frac{t^4}{t-1}dt = 6\int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C = \begin{vmatrix} t^6 = x \\ t = \sqrt[6]{x} \end{vmatrix} =$$

$$= 6\left(\frac{(\sqrt[6]{x})^4}{4} + \frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3} + \frac{(\sqrt[6]{x})^2}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| \right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C$$

II. Для інтегралів виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}} \right) dx$

або $\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, ..., (ax+b)^{\frac{r}{s}} \right) dx$

використовують підстановку

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ або $ax + b = t^k$ відповідно,

де k – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m}{n}$, ..., $\frac{r}{s}$.

використовують підстановку $x + k = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$

Лекція 11. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Мета: засвоїти основні поняття визначеного інтеграла, методів його обчислення, невласного інтеграла, застосування визначеного інтеграла.

План лекції:
1. Визначений інтеграл.
2. Методи обчислення визначеного інтеграла.
3. Невласні інтеграли.
4. Застосування визначеного інтеграла.

1. Визначений інтеграл

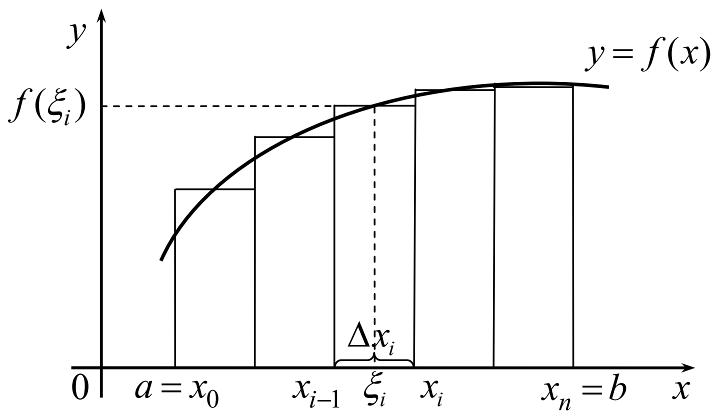


Рис. 1

Розглянемо функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин, в кожній з яких виберемо точку ξ_i.

Тоді площа деякого i-того сегменту (рис. 1):

$$S_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ називають ***інтегральною сумою***.

Якщо існує границя інтегральної суми при умові, що довжина відрізків розбиття нескінченно зменшується $\Delta x_i \to 0$, а їх кількість нескінченно збільшується $n \to \infty$, і ця границя не залежить ні від розбиття відрізка $[a;b]$, ні від вибору точки ξ_i, то така границя називається ***визначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Теорема існування. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ або обмежена і має скінченну кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

$\int\limits_a^b f(x)dx$ – це площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 1).

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$, $k = const$

2. $\int\limits_a^b \big(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\big)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_3(x)dx$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $a < c < b$ (рис. 2)

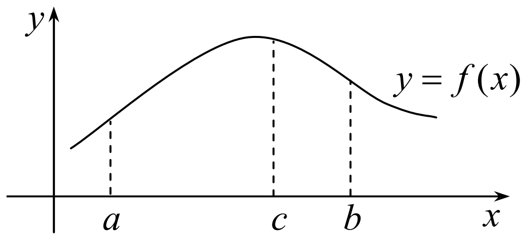


Рис. 2

6. Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) \geq 0$ (рис. 3), то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Якщо на відрізку $[a;b]$ $f(x) < 0$ (рис. 4), то $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$.

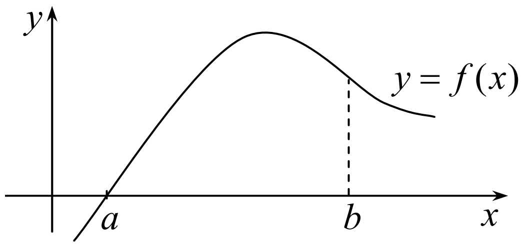


Рис. 3

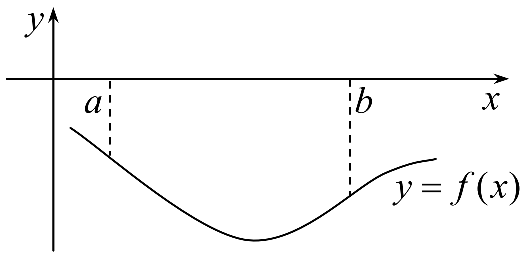


Рис. 4

7. Якщо функція $f(x)$ парна (рис. 5), тобто $f(-x) = f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ непарна (рис. 6), тобто $f(-x) = -f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

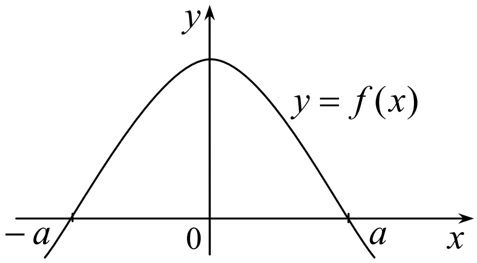


Рис. 5

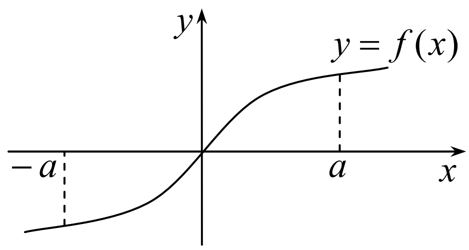


Рис. 6

8. Якщо на відрізку $[a;b]$ $f_1(x) < f_2(x)$ (рис. 7), то $\int\limits_{a}^{b} f_1(x)dx < \int\limits_{a}^{b} f_2(x)dx$.

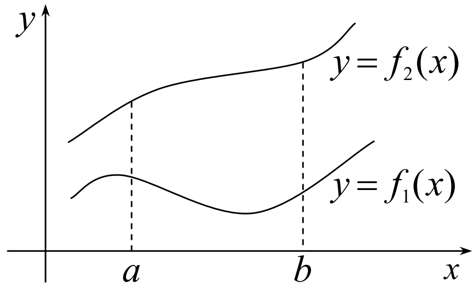


Рис. 7

<u>*Оцінка визначеного інтеграла*</u>

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і m – її найменше, а M – найбільше значення на цьому відрізку, то

$$m \cdot (b-a) \le \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \le M \cdot (b-a)$$

<u>*Середнє значення функції*</u>

Теорема. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому від-різку існує така точка c, що буде мати місце рівність

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

Похідна визначеного інтеграла від неперервної функції зі змінними межами інтегрування

Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовані на відрізку $[a;b]$, $f(t)$ неперервна при $\varphi(a)\le t\le\psi(b)$ і $\Phi(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$, то

$$\Phi'(x)=f(\psi(x))\cdot\psi'(x)-f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

2. Методи обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 8} e^{2x}dx$

Розв'язання.

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 8} e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{\ln 2}^{\ln 8}=\frac{1}{2}\left(e^{2\ln 8}-e^{2\ln 2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\ln 64}-e^{\ln 4}\right)=\frac{1}{2}(64-4)=30$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ \text{при }\; x_1=a, t_1=\alpha \\ \text{при }\; x_2=b, t_2=\beta \end{array}\right|=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

Розв'язання.

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \\ x = 3;\, t = 2 \\ x = 8;\, t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int_2^3 \left(t^2 - 1\right)dt = 2\left(\int_2^3 t^2 dt - \int_2^3 dt \right) =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^3 - t\Bigg|_2^3 \right) = 2\left(\left(9 - \frac{8}{3}\right) - (3-2) \right) = \frac{32}{3}$$

Інтегрування частинами

$$\int_a^b u\, dv = u \cdot v \Bigg|_a^b - \int_a^b v\, du,$$

де $u = u(x),\ v = v(x)$.

Приклад 3. Обчислити $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x\, dx$

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x \Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= (\pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0) + \cos x \Bigg|_0^{\pi} = \cos \pi - \cos 0 = -2$$

3. Невласні інтеграли.

Інтеграли з нескінченними межами(невласні інтеграли I роду):

1) $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) dx;$

2) $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) dx;$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx$, де c – будь-яка точка.

Якщо така границя існує і скінченна, то відповідний невласний інтеграл називається ***збіжним***. Якщо границя не існує або дорівнює ∞, то інтеграл називають ***розбіжним***.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Розв'язання. Так як верхня та нижня межі інтеграла нескінченні, то цей інтеграл невласний (I роду). Розіб'ємо його на два інтеграли з однією нескінченною межею і перейдемо до границь цих інтегралів:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim\limits_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{a}^{0} + \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{b} = \lim\limits_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}a\right) +$$

$$+ \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b - \operatorname{arctg}0\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

Отже, заданий інтеграл збігається.

Інтеграли від розривних функцій(невласні інтеграли II роду):

1) Якщо функція $f(x)$ не існує в точці a, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to a+0}\int\limits_{t}^{b} f(x)dx, \text{ де } t\in(a;b)$$

2) Якщо функція $f(x)$ не існує в точці b, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to b-0}\int\limits_{a}^{t} f(x)dx, \text{ де } t\in(a;b)$$

3) Якщо функція $f(x)$ не існує в точці c, $a<c<b$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to c-0}\int\limits_{a}^{t} f(x)dx + \lim\limits_{t\to c+0}\int\limits_{t}^{b} f(x)dx$$

Точка, в якій підінтегральна функція не існує, називається ***особливою точкою***.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Розв'язання. Так як підінтегральна функція не існує у верхній межі, тобто $x=1$ є особливою точкою, то заданий інтеграл – невласний інтеграл II роду. Отже, перейдемо до границі:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1-0} \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1-0} \arcsin x \Big|_0^b =$$

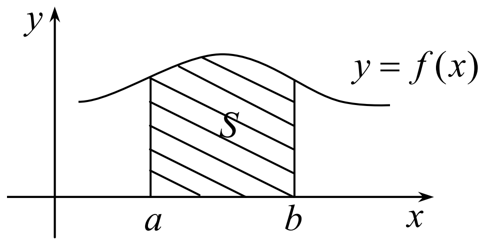
$$= \lim_{b\to 1-0} (\arcsin b - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Отримали, що інтеграл збігається.

4. Застосування визначеного інтеграла.

Застосування визначеного інтеграла . Обчислення площі

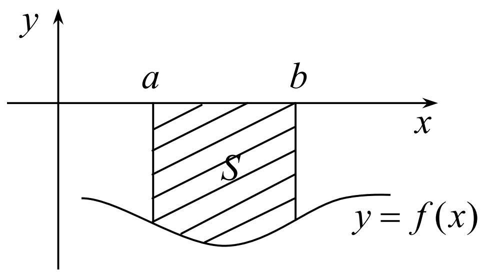
1)



$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Рис. 1

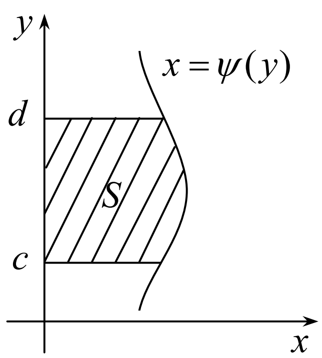
2)



$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

Рис. 2

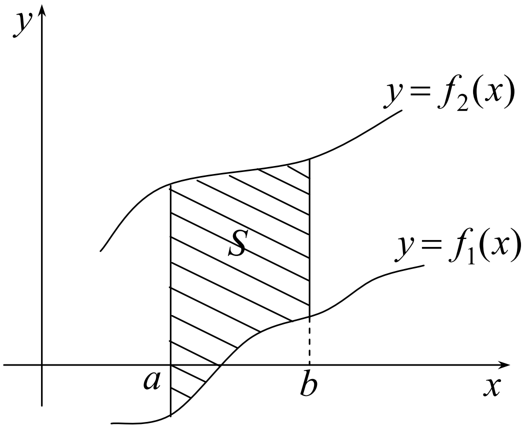
3)



$$S = \int\limits_c^d \psi(y)dy$$

Рис. 3

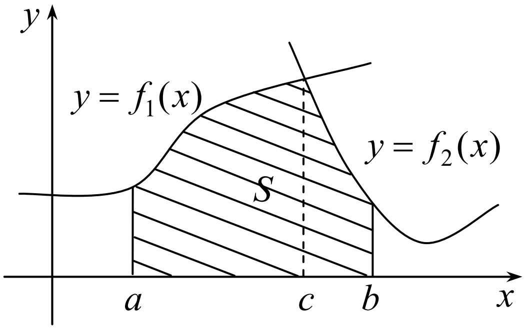
4)



$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx$$

Рис. 4

5)



$$S = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx$$

Рис. 5

Приклад 6. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - 3x$, прямими $x = 0$, $x = 4$ і віссю Ox.

Розв'язання. Спочатку будуємо задані лінії.

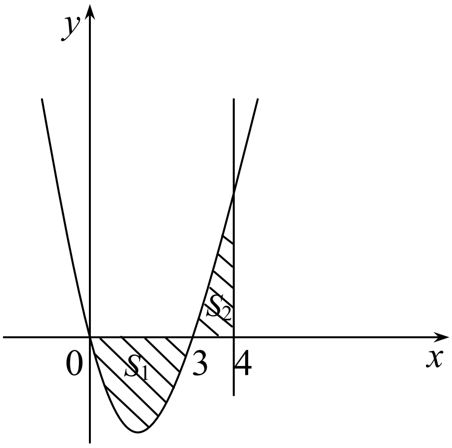


Рис. 6

Маємо дві замкнуті фігури (рис. 6). Отже, шукана площа складається з S_1 і S_2.

Враховуючи, що перша фігура знаходиться під віссю Ox, отримуємо

$$S = S_1 + S_2 = -\int_0^3 (x^2 - 3x)dx + \int_3^4 (x^2 - 3x)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 + \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^3 + \frac{x^3}{3}\Bigg|_3^4 - \frac{3x^2}{2}\Bigg|_3^4 = \frac{19}{3} \text{ (кв. од.)}$$

6) Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ де $t \in [t_1; t_2]$, то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Приклад 7. Знайти площу астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо графік. Для цього покладемо значення t від 0 до 2π і із заданої системи знайдемо точки астроїди з координатами (x, y).

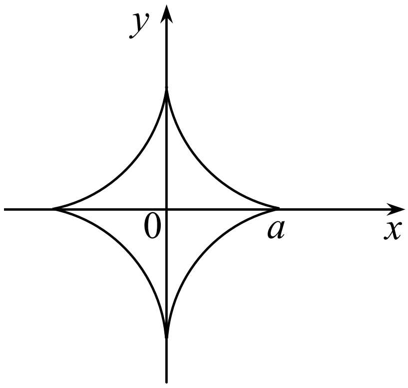


Рис. 7

Так як лінія симетрична (рис. 7), то достатньо обчислити площу для однієї чверті:

$t_1 = \dfrac{\pi}{2}$: $x_1 = 0$, $y_1 = a$

$t_2 = 0$: $x_2 = a$, $y_2 = 0$

$$x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$$

Тоді за відповідною формулою маємо:

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot (-3a\cos^2 t \cdot \sin t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t \, dt$$

Поступово знижуючи степінь підінтегрального виразу, отримаємо

$$S = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 4t + \cos^3 2t \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 4t + (1 - \sin^2 2t)\cos 2t \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t - \sin^2 2t \cos 2t \right) dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\sin 4t - \frac{\sin^3 2t}{6} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{8} \text{(кв. од.)}$$

7) Якщо функція задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, де $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, то

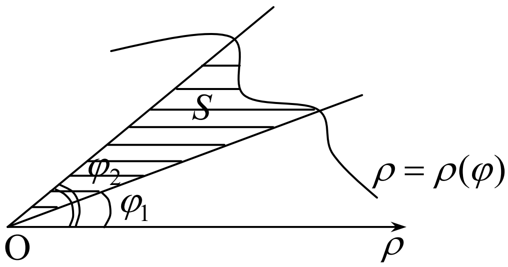


Рис. 8

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$$

Приклад 8. Знайти площу кардіоїди $\rho = a(\cos\varphi + 1)$, $a > 0$

Розв'язання. Побудуємо цю лінію (рис. 9).

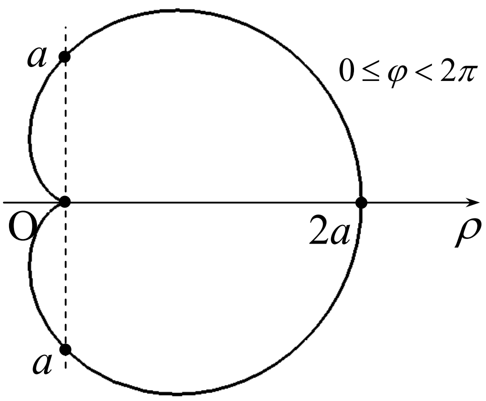


Рис. 9

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(\cos\varphi + 1)^2 d\varphi.$$

Так як фігура симетрична, то достатньо обчислити площу для $0 \le \varphi \le \pi$:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(\cos\varphi + 1)^2 d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 1)d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + 2\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{3\pi a^2}{2} \text{ (кв. од.)}$$

Обчислення довжини дуги

1) В декартовій системі координат довжина лінії $y = f(x)$, $x \in [x_1; x_2]$

$$L = \int_{x_2}^{x_2}\sqrt{1 + (y')^2}dx$$

Приклад 9. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $x \in [0;1]$.

Розв'язання. $y' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{4+e^{2x}-2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{e^{2x}+2+e^{-2x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^x\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_0^1\right)=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{e^2-1}{2e}\ \text{(од.)}$$

2) Довжина лінії, заданої параметрично $\begin{cases}x=x(t);\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in\left[t_1;t_2\right]$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$$

Приклад 10. Знайти довжину астроїди при $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t;\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$

Розв'язання. $x'=-3a\cos^2 t\cdot\sin t$, $y'=3a\sin^2 t\cdot\cos t$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\cdot\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cdot\cos t)^2}dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\cos t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\ dt=$$

$$=-\frac{3a}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3a}{4}(\cos\pi-\cos 0)=\frac{3a}{2}\ \text{(од.)}$$

3) Довжина лінії, заданої в полярній системі координат $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\ d\varphi$$

Приклад 11. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(\cos\varphi + 1)$

Розв'язання. Для цієї лінії $\varphi \in [0;2\pi]$

$$\rho' = -a\sin\varphi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-a\sin\varphi\right)^2 + \left(a(\cos\varphi + 1)\right)^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\cdot a\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 1}\, d\varphi = 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{\cos\varphi + 1}\, d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 8a \text{ (од.)}$$

Об'єм тіла обертання

Розглянемо тіло обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, $x \in [x_1; x_2]$ (рис. 10).

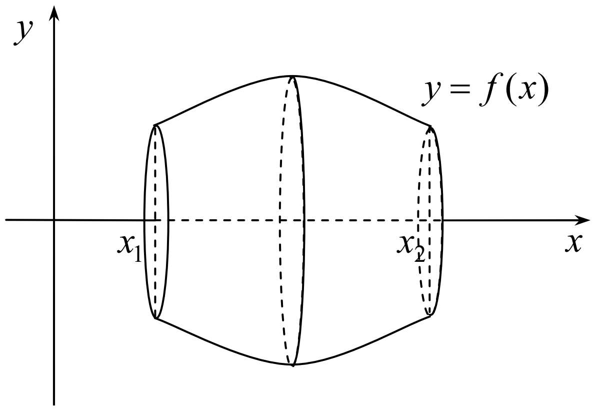


Рис. 10

Площа поперечного перерізу:

$$S = \pi R^2 = \pi y^2 = \pi\cdot(f(x))^2.$$

Тоді об'єм тіла обертання

$$V_{Ox} = \int_{x_1}^{x_2} S(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi(f(x))^2 dx$$

Аналогічно знаходиться об'єм тіла обертання навколо осі Oy.

Отже, об'єм тіла обертання:

$$V_{Ox} = \pi\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)\right)^2 dx; \qquad V_{Oy} = \pi\int_{y_1}^{y_2}\left(\psi(y)\right)^2 dy$$

Приклад 12. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо Ox фігури, обмеженої графіками функцій $y^2 = x$ і $x = 3$.

Розв'язання. Побудуємо графік (рис. 11).

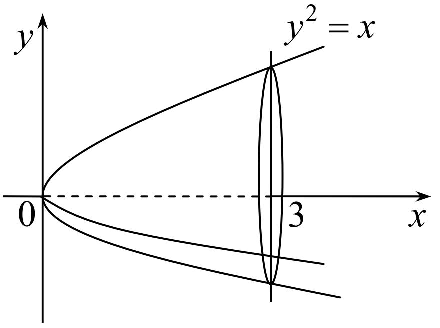


Рис. 11

$x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Підставимо $y^2 = x$ у формулу, отримаємо

$$V_{Ox} = \pi \int_0^3 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^3 = \frac{9\pi}{2} \text{ (куб. од.)}$$

Лекція 12. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І ПОРЯДКУ

Мета: засвоїти поняття диференціального рівняння , розглянути види диференціальних рівнянь першого порядку, методи їх розв'язку.

План лекції:
1. Поняття диференціального рівняння.
2. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.
3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
5. Диференціальні рівняння Бернуллі.

1 Поняття диференціального рівняння

Рівняння, в якому невідомим є функція $y = f(x)$, що входить в це рівняння під знаком похідної (або диференціала), називається ***звичайним диференціальним рівнянням***. Тобто, звичайне диференціальне рівняння – це співвідношення, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію y і її похідні (або диференціали):

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

Диференціальне рівняння може явно не містити незалежну змінну x і невідому функцію y, але обов'язково містить одну чи декілька її похідних (або диференціалів).

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить в це рівняння.

Наприклад: диференціальне рівняння
$y''' + 2y' + y = \cos x$ – третього порядку;
$x^2dx + y^2dy = 0$ – першого порядку;
$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 4 = 0$ – другого порядку.

Загальним розв'язком диференціального рівняння називають функцію y, яка при підстановці її у диференціальне рівняння перетворює його в тотожність.

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння n-го порядку (1) залежить від аргументу x та n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

Графічно цей розв'язок визначає сімейство інтегральних кривих.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1) може бути і не розв'язаним відносно y, тобто в неявному вигляді:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

тоді його називають ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння.

Процес знаходження розв'язку називається ***інтегруванням*** диференціального рівняння.

Якщо в загальному розв'язку (інтегралі) диференціального рівняння замість довільних сталих записати деякі визначені числові значення, то одержаний розв'язок називають ***частинним розв'язком*** цього рівняння.

Сталі C_1, C_2, ..., C_n зазвичай обирають так, щоб розв'язок диференціального рівняння задовольняв деяким умовам. Окремо виділяють наступну задачу.

Задача Коші (задача з початковими умовами)

Знайти такий розв'язок (частинний розв'язок) диференціального рівняння $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, щоб він задовольняв умовам (початковим умовам): $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, $y''\big|_{x=x_0} = y_0''$, ..., $y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$.

Зауважимо, що який порядок диференціального рівняння, стільки і початкових умов. Особливістю задачі Коші є те, що значення шуканої функції y і її похідних задаються при одному і тому ж значенні незалежної змінної $x = x_0$.

Для ***знаходження частинного розв'язку*** задачі Коші спочатку знаходять загальний розв'язок, а потім в нього підставляють початкові умови і знаходять сталі $C_1, C_2, ..., C_n$. Далі ці сталі підставляють в загальний розв'язок і отримують частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам.

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

де $y = f(x)$ – шукана функція, x – незалежна змінна.

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = \varphi(x, C)$$

або

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

Задача Коші: знайти розв'язок рівняння (2) при початковій умові $y\Big|_{x=x_0} = y_0$ (або ще записують $y(x_0) = y_0$).

Розв'язуючи рівняння (2), якщо це можливо, відносно похідної y', отримаємо рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

Рівняння (3) встановлює залежність між координатами точки на площині і кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка розв'язку в тій же точці. Отже, рівняння (3) визначає деяке поле напрямків, і задача його розв'язання полягає в тому, щоб знайти інтегральні криві, напрямок дотичних до яких у кожній точці площини збігався з напрямком цього поля.

<u>Основні види диференціальних рівнянь першого порядку</u>

2. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з ***відокремлюваними змінними***, якщо його можна представити у вигляді

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \tag{4}$$

або

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{5}$$

Зауважимо, що за допомогою перетворень, враховуючи що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, рівняння (4) та (5) зводяться одне до одного.

Особливістю рівнянь (4) та (5) є розділення множників так, що кожний з них є функцією тільки одного аргументу.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + y^2)dx - (1 + x^2)ydy = 0$$

Розв'язання. Так як коефіцієнти при dx та dy є добутками функцій тільки однієї змінної, то задане рівняння – з відокремлюваними змінними. Зведемо його до рівняння з відокремленими змінними. Для цього поділимо обидві частини рівності на $(1 + x^2)(1 + y^2)$:

$$\frac{dx}{1 + x^2} - \frac{ydy}{1 + y^2} = 0$$

Інтегруючи останнє рівняння (з відокремленими змінними) отримаємо:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{ydy}{1+y^2} = C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = C$$

Тоді загальний розв’язок:

$$\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$$

3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається ***однорідним***, якщо його можна представити у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6}$$

де права частина є функцією тільки від $\frac{y}{x}$.

В однорідному рівнянні (6) змінні не відокремлюються. Тому для знаходження загального розв’язку цього рівняння вводять нову змінну

$$\frac{y}{x} = z$$

Тоді $y = zx$. Знайдемо похідну функції y по змінній x: $y' = z'x + z$. Замінивши $\frac{y}{x}$ і y' в заданому однорідному рівнянні отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$xdy = (x+y)dx$$

Розв’язання. В цьому рівнянні змінні відокремити неможливо. Але можна привести до вигляду (6):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

Отже, задане рівняння – однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Зробимо в останньому рівнянні заміну: $\frac{y}{x} = z$, $y' = z'x + z$. Тоді

$$z'x + z = 1 + z \quad \Rightarrow \quad z'x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x = 1$$

$$dz = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int dz = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad z = \ln|x| + C$$

Підставимо замість змінної z її значення $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

Отже, загальний розв'язок:

$$y = x\ln|x| + Cx$$

4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{7}$$

Зауважимо, що y та y' входять в це рівняння в першому степені.

В загальному випадку $Q(x) \neq 0$. Якщо $Q(x) = 0$, то лінійне рівняння називається однорідним і є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння можна знайти за допомогою підстановки:

$$y = u \cdot v,$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – деякі функції, що мають неперервні перші похідні.

Тоді y' має вигляд:

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Підставимо y та y' в рівняння (11), отримаємо

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

Згрупуємо доданки в лівій частині рівності наступним чином:

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' + P(x) \cdot v\right) = Q(x)$$

Цей метод розв'язання полягає в тому, що функцію v визначають так, щоб коефіцієнт при u в рівнянні перетворювався в нуль. Тоді останнє рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} v' + P(x) \cdot v = 0 \\ u' \cdot v = Q(x) \end{cases}$$

Із цієї системи знаходять спочатку функцію v, потім u.

Знайдемо функції v і u в загальному вигляді.

З першого рівняння системи маємо:

$$v' = -P(x)v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -P(x)v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\int P(x)dx \quad \Rightarrow \quad v = e^{-\int P(x)dx}$$

Зауважимо, що знайдена функція v є частинним розв’язком першого рівняння системи. Підставляємо v в друге рівняння системи і знаходимо u:

$$u' = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad \Rightarrow \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

Тоді загальний розв’язок лінійного рівняння (11) можна виразити формулою:

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx} \tag{8}$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x^2 y' - 3xy = 4$$

Розв’язання. Звільнимо y' від коефіцієнту. Для цього поділимо обидві частини рівняння на x^2:

$$y' - \frac{3}{x} y = \frac{4}{x^2}$$

Отримали рівняння виду (7) – лінійне диференціальне рівняння першого порядку, де $P(x) = -\frac{3}{x}$, $Q(x) = \frac{4}{x^2}$. Для знаходження розв’язку цього рівняння не будемо використовувати готову формулу, а виведемо його самі.

Розв’язок будемо шукати у вигляді $y = uv$. Звідси $y' = u'v + uv'$. Підставимо y та y' в останнє рівняння, отримаємо

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{3}{x} uv = \frac{4}{x^2}$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) = \frac{4}{x^2}$$

Покладаючи, що вираз у дужках повинен дорівнювати 0, отримаємо систему

$$\begin{cases} v' - \dfrac{3}{x} v = 0 \\ u'v = \dfrac{4}{x^2} \end{cases}$$

Розв’язуючи перше рівняння системи, враховуючи, що v є частинним розв’язком, маємо

$$v' = \frac{3}{x} v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = \frac{3}{x} v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = \frac{3}{x} dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3}{x} dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = 3\ln|x| \;\Rightarrow\; v = \pm x^3$$

Підставимо v в друге рівняння системи і розв’яжемо його:

$$\pm u' x^3 = \frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \pm\frac{4}{x^5} \;\Rightarrow\; du = \pm\frac{4}{x^5}\,dx$$

$$\int du = \pm 4\int \frac{dx}{x^5} \;\Rightarrow\; u = \mp\frac{1}{x^4} \pm C$$

Підставимо u і v у розв'язок:

$$y = \left(C - \frac{1}{x^4}\right)x^3$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = Cx^3 - \frac{1}{x}$$

5. Диференціальні рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння першого порядку, яке можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{9}$$

де $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Таке рівняння заміною $z = y^{1-n}$ зводиться до лінійного диференціального рівняння виду (7):

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x)$$

Розв'язуючи останнє лінійне диференціальне рівняння першого порядку знаходимо z, а тоді з рівності $z = y^{1-n}$ знаходимо y.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$yy' + y^2 = x$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на *y*, отримаємо рівняння виду (9):

$$y' + y = xy^{-1},$$

де $P(x) = 1$, $Q(x) = x$.

Зробимо заміну $z = y^2$. Тоді маємо

$$\frac{1}{2}z' + z = x \;\Rightarrow\; z' + 2z = 2x$$

Отримали лінійне рівняння виду (7). Для скорочення обчислень загальний розв'язок знайдемо за готовою формулою (8), де $P(x) = 2$, $Q(x) = 2x$:

$$z=\left(\int 2xe^{\int 2dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int 2dx}=\left(\int 2xe^{2x}dx+C\right)\cdot e^{-2x}$$

Обчислюючи інтеграл $\int 2xe^{2x}dx$ методом інтегрування частинами, отримаємо

$$z=\left(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)\cdot e^{-2x}=x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}$$

Так як $z=y^2$, то загальний розв'язок має вигляд

$$y=\pm\sqrt{x-\frac{1}{2}+Ce^{-2x}}$$

Лекція 13. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІІ ПОРЯДКУ

Мета: засвоїти поняття диференціального рівняння ІІ порядку , розглянути види диференціальних рівнянь ІІ порядку, методи їх розв'язку.

План лекції:
1. Диференціальне рівняння другого порядку..
2. Диференціальні рівняння другого порядку,що допускають зниження порядку.
3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.
4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. Диференціальне рівняння другого порядку

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

Загальний розв'язок має вигляд
$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

Задача Коші: знайти розв'язок рівняння (1), що задовольняє початковим умовам $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$.

Для рівнянь другого порядку умови можуть бути задані і при різних значеннях аргументу. Така задача вже буде називатись крайовою.

2. Диференціальні рівняння другого порядку,що допускають зниження порядку

І. *Рівняння, що містить тільки похідну другого порядку і неза-лежну змінну:*

$$y'' = f(x) \tag{2}$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння вводять допоміжну функцію:
$$y' = P,$$
де функція $P = P(x)$. Тоді $y'' = P'$. При підстановці в рівняння (2) отримуємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$P' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad dP = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dP = \int f(x)dx$$

$$P = \int f(x)dx + C_1$$

Тоді

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx$$

$$y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$$

II. <u>*Рівняння, яке не містить в явному вигляді шукану функцію* y *:*</u>

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{3}$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння, як і в попередньому випадку, вводять допоміжну функцію:

$$y' = P,$$

де функція $P = P(x)$.

Тоді при підстановці $y'' = P'$ в рівняння (3) воно зводиться до диференціального рівняння першого порядку відносно функції P:

$$F(x, P, P') = 0$$

Далі загальний розв'язок останнього рівняння P треба підставити в рівність $y' = P$. Знову отримуємо диференціальне рівняння першого порядку, з якого знаходимо y.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$$

Розв'язання. В заданому рівнянні відсутня сама функція y, а присутні тільки її похідні і аргумент. Отже, введемо нову функцію $y' = P$, $y'' = P'$:

$$(1 + x^2)P' - 2xP = 0$$

Отримали рівняння першого порядку. Звільнимо P' від коефіцієнту:

$$P' - \frac{2x}{1 + x^2}P = 0 \quad \Rightarrow \quad P' = \frac{2x}{1 + x^2}P$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Зведемо його до рівняння з відокремленими змінними, інтегруючи яке отримаємо функцію P:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2}P \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{2x}{1 + x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dP}{P} = \int \frac{2x}{1 + x^2}dx$$

$$\ln|P| = \ln(1 + x^2) + \ln \overline{C}_1 \quad \Rightarrow \quad P = C_1(1 + x^2)$$

Так як $y' = P$, враховуючи що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad dy = C_1(1+x^2)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int C_1(1+x^2)dx$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$$

III. *<u>Рівняння, яке не містить в явному вигляді аргумент x:</u>*

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{4}$$

Для знаходження розв'язку цього рівняння вводять наступну допоміжну функцію:

$$y' = Z,$$

де функція $Z = Z(y)$. Враховуючи, що y залежить від x, а тому за правилом диференціювання складної функції y'' має вигляд:

$$y'' = \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dZ}{dy} \cdot y' = \frac{dZ}{dy} \cdot Z$$

Підставляючи y' і y'' в рівняння (4) отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$F(y, Z, \frac{dZ}{dy} \cdot Z) = 0$$

З останнього рівняння треба знайти Z, далі підставити в рівність $y' = Z$ і знайти функцію y.

3.Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Так як все нижче наведене розповсюджується і на рівняння n-го порядку, то для спрощення пояснень розглянемо
<u>лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку</u>:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{5}$$

де a_0, a_1, a_2 – деякі дійсні числа.

Особливістю цього рівняння є те, що шукана функція y і всі її похідні входять до рівняння в першому степені (тому воно називається лінійним), справа в рівнянні стоїть 0 (тому воно називається однорідним).

Загальний розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{6}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв'язки рівняння, C_1, C_2 – довільні сталі.

Частинні розв’язки шукають у вигляді $y = e^{kx}$, де k – деяке число, яке треба знайти. Якщо цю рівність підставити в (5), то отримаємо рівняння, яке називають

характеристичним рівнянням:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \tag{7}$$

а його розв’язки – характеристичними показниками.

Для знаходження загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння треба спочатку скласти характеристичне рівняння, для цього в рівнянні (7) заміняємо y'' на k^2, y' на k, y на 1. Отримаємо рівняння виду (7), яке розв’язуємо відносно k. В залежності від розв’язків характеристичного рівняння k_1, k_2 складаємо загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння виду (6). Можливі наступні випадки:

1) якщо корені характеристичного рівняння дійсні числа, не рівні між собою ($k_1 \neq k_2$), то загальний розв’язок має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2) якщо корені характеристичного рівняння дійсні числа, рівні між собою ($k_1 = k_2 = k$), то загальний розв’язок має вигляд

$$y = e^{kx} \cdot (C_1 + C_2 x)$$

3) якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені числа виду $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$, де $i = \sqrt{-1}$, $a, b \in R$, то загальний розв’язок має вигляд

$$y = e^{ax} \cdot (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Розв’язання. Функція y і її похідні входять до рівняння в першому степені, перед ними сталі коефіцієнти, аргумент x в явному вигляді відсутній, права частина рівняння дорівнює 0. Отже, задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

Корені цього рівняння $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ дійсні, не рівні між собою числа, тому загальний розв’язок заданого рівняння

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 4y' = 0$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k(k+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0,\ k_2 = -4$$

Корені дійсні, не рівні між собою числа, тому загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} \text{ або } y = C_1 + C_2 e^{-4x}$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння заданого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 2$$

Так як корені дійсні і рівні між собою, то загальний розв'язок

$$y = e^{2x} \cdot (C_1 + C_2 x)$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння заданого лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має комплексні корені

$$k^2 - 2k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2i$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^{x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

4.Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами відрізняється від попереднього лише тим, що його правою частиною є функція від x. Знов таки, для спрощення пояснень, розглянемо
лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіці-єнтами другого порядку зі спеціальною правою частиною:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (8)$$

де a_0, a_1, a_2, α, β – деякі дійсні числа, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку виду (8) можна представити у вигляді

$$y = y_0 + y_ч,$$

де y_0 – загальний розв’язок відповідного лінійного однорідного рівняння $a_0 y''+a_1 y'+a_2 y=0$;

$y_ч$ – деякий частинний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння.

Частинний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y_÷$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Для цього використовуючи вид правої частини неоднорідного рівняння (8), визначають його загальний вигляд з невизначеними коефіцієнтами. Потім знаходять його першу та другу похідні і підставляють в задане неоднорідне рівняння (так як цей частинний розв’язок повинен задовольняти заданому рівнянню). Далі, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях незалежної змінної x в лівій та правій частині рівності, знаходять невизначені коефіцієнти.

Для визначення загального вигляду частинного розв’язку неоднорідного рівняння (8) $y_ч$ розглядають праву частину цього рівняння:

$$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right) \tag{9}$$

Тоді

– якщо число $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв’язок шукають у вигляді

$$y_ч=e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x\right),$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – повні многочлени однакового степеня, рівного найвищому степеню многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$.

– якщо число $\alpha+\beta i$ є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв’язок шукають у вигляді

$$y_ч=xe^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x\right), \text{ коли } \alpha+\beta i=k_1\neq k_2,$$

або

$$y_ч=x^2e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x\right), \text{ коли } \alpha+\beta i=k_1=k_2.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y''-2y'+y=xe^{2x}$$

Розв’язання. Задане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв’язок будемо шукати у вигляді $y=y_0+y_ч$, де y_0 – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, $y_ч$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$y''-2y'+y=0$$

Коренями його характеристичного рівняння $k^2-2k+1=0$ є $k_1=k_2=1$.

Так як корені характеристичного рівняння рівні між собою, то загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0=e^x\cdot\left(C_1+C_2x\right)$$

Розглянемо праву частину заданого неоднорідного рівняння: xe^{2x}. Порівнюючи з загальним випадком (9), маємо, що $\alpha=2$, $\beta=0$. Зауважимо, що коефіцієнтом при e^{2x} є многочлен першого степеня: $P_1(x)=x$.

Так як $\alpha+\beta i=2\neq k_{1,2}$, тобто не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, і многочлени $p(x)$ і $q(x)$ мають бути першого степеня, то частинний розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y_ч=e^{2x}\left(Ax+B\right),$$

де $Ax+B$ – повний многочлен першого степеня. Коефіцієнти A і B треба знайти. Для цього знайдемо першу та другу похідну частинного розв'язку:

$$y_ч'=2e^{2x}\left(Ax+B\right)+Ae^{2x};\quad y_ч''=4e^{2x}\left(Ax+B\right)+4Ae^{2x}$$

Підставимо $y_ч$, $y_ч'$ і $y_ч''$ в задане неоднорідне рівняння:

$$4e^{2x}\left(Ax+B\right)+4Ae^{2x}-2\left(2e^{2x}\left(Ax+B\right)+Ae^{2x}\right)+e^{2x}\left(Ax+B\right)=xe^{2x}$$

Спростивши це рівняння отримаємо:

$$Ax+2A+B=x$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{ll|l} \text{при} & x & A=1 \\ \text{при} & x^0 & 2A+B=0 \quad\Rightarrow\quad B=-2 \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок такий:

$$y_ч=e^{2x}\left(x-2\right)$$

Тоді загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд

$$y=e^x\cdot\left(C_1+C_2x\right)+e^{2x}\left(x-2\right)$$

Приклад 7. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y''-2y'=x^2-x,\ y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=-2$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами: $y=y_0+y_ч$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння y_0:

$$y''-2y'=0 \quad\Rightarrow\quad k^2-2k=0 \quad\Rightarrow\quad k_1=0,\ k_2=2 \quad\Rightarrow\quad y_0=C_1+C_2e^{2x}$$

Для знаходження частинного розв'язку $y_ч$ розглянемо праву частину неоднорідного рівняння, яка є многочленом другого степеня: $x^2 - x$. Тут $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Так як $\alpha + \beta i = 0$ є одним з коренів характеристичного рівняння однорідного рівняння, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$y_ч = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) \text{ або } y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Тоді

$$y_ч' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_ч'' = 6Ax + 2B$$

підставимо в задане неоднорідне рівняння і знайдемо коефіцієнти A, B, C:

$$6Ax + 2B - 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = x^2 - x$$

$$-6Ax^2 + 6Ax - 4Bx + 2B - 2C = x^2 - x$$

$$\begin{array}{l|l}
\text{при } x^2 & -6A = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{6} \\
\text{при } x & 6A - 4B = -1 \Rightarrow B = 0 \\
\text{при } x^0 & 2B - 2C = 0 \Rightarrow C = 0
\end{array}$$

Отже,

$$y_ч = -\frac{1}{6}x^3$$

Загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3$$

Знайдемо частинний розв'язок заданого рівняння, що задовольняє початковим умовам $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = -2$. Тобто треба знайти коефіцієнти C_1 і C_2. Для цього знайдемо похідну загального розв'язку:

$$y' = 2C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2,$$

і підставимо в y та y' задані початкові умови. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -1$$

Розв'язок задачі Коші:

$$y = 1 - e^{2x} - \frac{1}{6}x^3$$

Лекція 14. ЧИСЛОВІ РЯДИ

Мета: засвоїти основні поняття числового ряда , знакозмінного числового ряда та ознак збіжності числових рядів.

План лекції:
1. Числові ряди.
2. Ознаки збіжності числового ряду.
3. Знакозмінні числові ряди.

1. Числові ряди

Рядом називають суму нескінченної кількості доданків і записують, використовуючи символ суми:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ називають членами ряду.

u_n називають n-м членом ряду або ***загальним членом ряду***.

Членами ряду можуть бути числа або функції, тоді відповідні ряди будуть називатися числовими або функціональними.

Нехай задана нескінченна послідовність чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

називають ***числовим рядом***.

Ряд вважається заданим, якщо відомий загальний член a_n у вигляді функції від його номеру n: $a_n = f(n)$.

Наприклад. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$. Тут загальний член ряду $a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$, отже, ряд записується: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Іноді задається лише декілька перших членів ряду. Тоді аналізуючи ці перші члени ряду треба знайти його загальний член.

Наприклад:

1) $1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$

2) $2+6+18+54+...=2+2\cdot 3+2\cdot 9+2\cdot 27+...=$
$=2\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+...$

Тоді загальний член ряду як функція від номера n: $a_n=2\cdot 3^{n-1}$.

Маємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 3^{n-1}$.

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+...$

В знаменниках дробів маємо арифметичну прогресію $3, 7, 11, 15, ...,$ n-й член якої $c_n=c_1+4(n-1)=3+4(n-1)=4n-1$. Тоді загальний член ряду $a_n=\frac{1}{4n-1}$, отже, ряд записується: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-1}$.

Сума n перших членів ряду називається n-ю ***частковою сумою*** ряду:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n$$

Часткові суми

$S_1=a_1$,

$S_2=a_1+a_2$,

$S_3=a_1+a_2+a_3$,

...

$S_n=a_1+a_2+...+a_n$,

...

утворюють числову послідовність $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Якщо послідовність часткових сум має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ця границя називається ***сумою ряду*** і можна записати: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

В цьому випадку ряд називається ***збіжним***.

Якщо границя $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$ або не існує, то ряд називається ***розбіжним*** (і суми не має).

Приклад 1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$

Розв'язання. Представимо загальний член ряду у вигляді

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

тоді часткові суми мають вигляд:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right),$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

...

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Отже, сума ряду

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Заданий ряд збігається.

Геометричний ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$$

де $a, aq, aq^2, aq^{n-1}, \ldots$ – нескінченна геометрична прогресія з першим членом a і знаменником q.

При $|q| < 1$ ряд збігається і має суму $S = \dfrac{a}{1-q}$.

При $|q| \geq 1$ ряд розбіжний.

Гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

де кожен член ряду, починаючи з другого, є середнім гармонічним двох сусідніх членів.

Цей ряд розбіжний.

Узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхлє)

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+...+\frac{1}{n^k}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k},$$

де k – деяка стала.

При $k>1$ ряд збіжний.

При $k\le 1$ ряд розбіжний.

Деякі властивості числових рядів

1) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається і його сума S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}k\cdot a_n$, де k – деяка стала, також збігається і його сума дорівнює $(k\cdot S)$.

2) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ збігаються і мають суми відповідно S_a і S_b, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ також збігається і має суму $(S_a\pm S_b)$.

3) Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, то його залишок, який отримується відкиданням перших m членів, $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ також збігається. І навпаки, якщо збігається залишок ряду, то збігається весь ряд.
Тобто відкидання або додавання скінченного числа начальних членів ряду не впливає на збіжність ряду.
Зауважимо, що із розбіжності ряду випливає розбіжність його залишку і навпаки.

2. Ознаки збіжності числового ряду

Необхідна ознака збіжності ряду

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, то границя його загального члена a_n прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Наслідок (**достатня ознака розбіжності ряду**): якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

Наприклад. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, тому цей ряд розбіжний.

Зауважимо, що є розбіжні ряди, для яких виконується умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тобто з цієї умови не можна зробити висновок про збіжність ряду, але якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Достатні ознаки збіжності для рядів з додатними членами

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***додатним***, якщо всі його члени a_n, $n = \overline{1,\infty}$, додатні.

Ознака порівняння. Нехай маємо два додатних ряди:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2}$$

і, починаючи з деякого номера n, члени ряду (1) не перевищують відповідних членів ряду (2), тобто виконується умова

$$a_n \leq b_n.$$

Якщо ряд (2) збігається, то збігається і ряд (1).
Якщо ряд (1) розбігається, то розбігається і ряд (2).

Для застосування ознаки порівняння при дослідженні заданого ряду на збіжність обирають для нього допоміжний ряд. Зауважимо, що в якості допоміжного ряду для порівняння вибирають геометричний, або гармонічний, або інший ряд, збіжність чи розбіжність якого вже заздалегідь відома. При цьому ряд з меншими відповідними членами треба обирати розбіжний, а з більшими членами – збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

Розв'язання. Заданий ряд додатний: $\frac{1}{n^n} > 0$ при $n = 1,2,3,...$

Для задач дослідження на збіжність рядів рекомендується спочатку перевіряти необхідну ознаку збіжності ряду: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбіжний, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним, і треба застосувати достатню ознаку.

В нашому випадку

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)}} = 0$$

Отже, застосуємо достатню ознаку порівняння. Члени заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^n} + ...$$

порівняємо з відповідними членами геометричного ряду (зі знаменником $\frac{1}{2}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

Починаючи з третього, члени заданого ряду менші членів допоміжного ряду:

$$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}, \frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}, ..., \frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}, ...$$

Так як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збіжний, то за ознакою порівняння заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ теж збіжний.

Ознака порівняння в граничній формі. Якщо для рядів (1) і (2) існує скінченна і відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то ряди (1) і (2) або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Зауважимо, що для дослідження ряду за ознакою порівняння зазвичай обирають допоміжний ряд з членами, найближчими до членів заданого ряду ($a_n \sim b_n$).

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

Розв'язання. Ряд додатний, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. Застосуємо достатню ознаку порівняння. Розглянемо розбіжний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

Так як ця границя скінченна і відмінна від нуля, то за ознакою порівняння в граничній формі заданий ряд теж є розбіжним.

Ознака Даламбера. Якщо для додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд збігається;
при $q > 1$ ряд розбігається;
при $q = 1$ за цією ознакою неможливо визначити збіжність чи розбіжність ряду, треба застосовувати іншу ознаку.

Зауваження: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, то ряд розбіжний і границя його загального члена не дорівнює нулю.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}$

Розв'язання. Ряд додатний. Перевірити необхідну умову збіжності тут важко, як і вибрати допоміжний ряд для порівняння, тому одразу застосуємо ознаку Даламбера. Складемо a_{n+1} член ряду: $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(2n+3)!}$.

Далі знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(2n+3)!}}{\dfrac{3^n}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot 3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=0<1$$

Отже, за ознакою Даламбера заданий ряд збіжний.

Радикальна ознака Коші. Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

то при $q<1$ ряд збігається;
при $q>1$ ряд розбігається;
при $q=1$ за цією ознакою неможливо визначити збіжність чи розбіжність ряду, треба застосовувати іншу ознаку.

Радикальну ознаку Коші доцільно використовувати тоді, коли загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$

Розв'язання. Ряд додатний. Перевіримо необхідну умову збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}-1\right)2n}=e^{-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n+1}}=0$$

Отже треба розглянути достатню ознаку збіжності. Загальний член ряду містить в показнику степеня n, а тому зручніше одразу застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<1$$

Таким чином, за радикальною ознакою Коші заданий ряд збіжний.

Інтегральна ознака Коші. Нехай треба дослідити на збіжність до-датний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, де загальний член a_n є функцією від його номера: $a_n=f(n)$. Замінимо аргумент n на x. За умови, що при $x=1,2,3,...$

функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає, розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо цей інтеграл збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним.

Якщо інтеграл розбігається (дорівнює ∞ або не існує), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

Інтегральна ознака Коші є найбільш сильною ознакою і її використовують у випадках, коли за іншими ознаками неможливо встановити збіжність чи розбіжність.

3. Знакозмінні числові ряди

Ряд називається ***знакозмінним***, якщо він містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд, складений із абсолютних величин його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***умовно збіжним***, якщо він збігається, а ряд, складений із абсолютних величин його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, розбігається.

Сума ряду, який збігається абсолютно, не змінюється від до-вільної перестановці його членів. Знакозмінний ряд, який збігається умовно, не володіє цією властивістю.

Щоб дослідити на збіжність знакозмінний ряд рекомендується спочатку перевірити (якщо це можливо) необхідну умову збіжності ряду, потім скласти ряд з абсолютних величин його членів і застосувати одну з достатніх ознак збіжності додатних рядів.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ в залежності від n може бути як додатнім, так і від'ємним. Тому цей ряд знакозмінний.

Розглянемо додатний ряд складений з абсолютних величин членів заданого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$$

Скористаємось ознакою порівняння додатних рядів. Так як $|\sin n| \le 1$, то

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ збігається.

Звідси випливає, що збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$, і при тому абсолютно.

Ряд, члени якого по черзі мають додатний та від'ємний знаки, називається ***знакопочерговим***:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$$

Знакопочергові ряди є частинним випадком знакозмінних рядів.

Для дослідження на збіжність знакопочергового ряду використовують наступну ознаку.

Теорема Лейбніца. Знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$ збігається, якщо

1) його члени монотонно спадають по абсолютній величині: $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$;
2) границя абсолютної величини загального члену ряду прямує до нуля: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Зауважимо, що якщо не виконується друга умова теореми Лейбніца ($\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$), то ряд розбігається (так як не виконується необхідна умова збіжності ряду).

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)^2}$.

Розв'язання. Заданий ряд – знакопочерговий. Перевіримо умови теореми Лейбніца:

1) $\frac{1}{4} > \frac{1}{25} > \frac{1}{64} > ... > \frac{1}{(3n-1)^2} > ...$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} = 0$

Тоді за теоремою Лейбніца заданий ряд збігається. Дослідимо характер збіжності ряду. Для цього розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$. За ознакою порівняння в граничній формі (порівнявши з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) або за інтегральною ознакою Коші (обчисливши невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2} dx$) маємо, що ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ збігається. Тому заданий ряд збігається абсолютно.

Лекція 15. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Мета: засвоїти основні поняття функціонального ряда, області збіжності функціональних рядів, поняття степеневого ряда.

План лекції:
1. Функціональні ряди.
2. Степеневі ряди.
3. Розклад функцій в степеневі ряди.

4. Функціональні ряди

Ряд називається ***функціональним***, якщо його члени є функціями, наприклад від аргументу x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

Якщо в цьому функціональному ряді покласти $x = x_0$, то він перетвориться у числовий ряд.

Якщо такий числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається, то точка $x = x_0$ називається ***точкою збіжності*** цього функціонального ряду, в проти-лежному випадку – точкою розбіжності.
Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називається ***областю збіжності*** цього ряду.

Отже, областю збіжності функціонального ряду є проміжок на числовій осі.

В загальному випадку при дослідженні на збіжність функціо-нального ряду можна використовувати ті ж правила, що і для знако-змінного числового ряду.

Приклад 1. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-3)^n}.$$

Розв'язання. Розглянемо ряд із абсолютних величин членів заданого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{|x-3|^n}$. Останній ряд має додатні члени, а тому можемо застосувати до нього одну з ознак збіжності додатних рядів. Для цього ряду доцільно застосувати ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}|x-3|^n}{|x-3|^n|x-3|\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{|x-3|\sqrt{n}}=\frac{1}{|x-3|}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{|x-3|}$$

За ознакою Даламбера ряд буде збігатись, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$. Звідси

$$\frac{1}{|x-3|}<1 \;\Rightarrow\; |x-3|>1 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x-3>1 \\ x-3<-1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<2 \end{array}\right.$$

Дослідимо ряд в точках $x=4$ і $x=2$.

Якщо $x=4$, заданий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(4-3)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$, а для такого числового ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\neq 0$, тому в точці $x=4$ заданий функціональний ряд розбігається.

Якщо $x=2$, маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(2-3)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$ – знакопочерговий ряд, для нього теж не виконується необхідна умова збіжності. Тому точка $x=2$ теж не входить до області збіжності.

Таким чином, область збіжності заданого функціонального ряду $x\in(-\infty;2)\bigcup(4;+\infty)$.

2. Степеневі ряди

Степеневим рядом називають функціональний ряд виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\ldots+a_n(x-c)^n+\ldots \qquad (2)$$

Числа $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ називаються коефіцієнтами степеневого ряду.

При $c=0$ маємо більш поширений частинний випадок:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (3)$$

Ряд (2) називають рядом за степенями $(x-c)$, а ряд (3) – рядом за степенями x.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, що задовольняє нерівності $|x - c| < |x_0 - c|$.

Наслідок: для степеневого ряду існує ***інтервал збіжності*** з центром в точці $x = c$: $|x - c| < R$ або $c - R < x < c + R$. Всередині інтервалу збіжності $(c - R; c + R)$ ряд збігається абсолютно, а зовні – розбігається (рис. 1). На кінцях інтервалу збіжності в точках $x = c \pm R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись, тому збіжність в цих точках потребує спеціального дослідження.

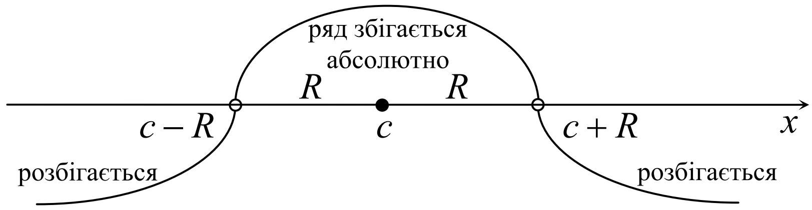


Рис. 1

Число R – половина довжини інтервалу збіжності – називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду.

В частинних випадках радіус збіжності R може дорівнювати 0 (тоді степеневий ряд збігається лише в точці $x = c$) або ∞ (тоді степеневий ряд збігається на всій числовій осі).

Інтервал збіжності степеневого ряду знаходять аналогічно, як і для функціонального ряду: будують ряд з абсолютних величин членів заданого ряду та застосовують одну з достатніх ознак збіжності числових рядів, зокрема ознаку Даламбера.

Якщо жоден з коефіцієнтів степеневого ряду $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ не дорівнює нулю (тобто степеневий ряд повний), то з ознаки Даламбера маємо формулу для знаходження радіусу збіжності такого ряду:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Приклад 2. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n+1)}.$$

Розв'язання. Маємо ряд за степенями x, тому це степеневий ряд виду (3), у якого центр інтервалу збіжності знаходиться в початку координат

($c=0$), а, отже, інтервал збіжності цього ряду $(-R;R)$. Заданий ряд повний, тобто містить всі цілі додатні степені x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)}=1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{32}+...+\frac{x^n}{2^n(n+1)}+...$$

Тому скористаємось формулою знаходження радіусу збіжності:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|};\quad |a_n|=\frac{1}{2^n(n+1)};\quad |a_{n+1}|=\frac{1}{2^{n+1}(n+2)}$$

Маємо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)}=2$.

Перевіримо збіжність заданого ряду на кінцях інтервалу $(-2;2)$.

В точці $x=2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$. За ознакою порівняння в граничній формі цей ряд поводиться так само, як і гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, який розбігається, тому $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ теж розбігається. Отже точка $x=2$ не входить до інтервалу збіжності.

В точці $x=-2$ степеневий ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Цей ряд є знакопочерговим. Для нього виконуються умови теореми Лейбніца: $\dfrac{1}{1}>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>...$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, тому він збігається, але збігається умовно (так як ряд з абсолютних величин цього ряду розбігається).

Інтервал збіжності заданого ряду $x\in[-2;2)$.

Приклад 3. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1}.$$

Розв'язання. Маємо неповний степеневий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1}=\frac{1}{2}+\frac{(x-1)^3}{9}+\frac{(x-1)^6}{65}+...+\frac{(x-1)^{3n}}{8^n+1}+...$$

Розглянемо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-1|^{3n}}{8^n+1}$ і застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{3(n+1)}}{8^{n+1}+1} \cdot \frac{8^n+1}{|x-1|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{3n} \cdot |x-1|^3}{|x-1|^{3n}} \cdot \frac{8^n+1}{8^n \cdot 8+1} =$$

$$= |x-1|^3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{8^n}}{8+\frac{1}{8^n}} = |x-1|^3 \cdot \frac{1}{8}$$

Щоб ряд збігався, за ознакою Даламбера повинна виконуватись умова: $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. Звідси маємо

$$|x-1|^3 \cdot \frac{1}{8} < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-1| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x-1 < 2 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 3$$

При $x=3$ заданий ряд має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{8^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{8^n+1}$. Для цього ряду $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n}{8^n+1} = 1 \neq 0$, тому він розбігається.

При $x=-1$ заданий ряд має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3n}}{8^n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{8^n+1}$. Для цього ряду теж не виконується необхідна умова збіжності, тому він розбігається.

Отже, інтервал збіжності заданого ряду $x \in (-1;3)$.

3. Розклад функцій в степеневі ряди

Довільна функція $y = f(x)$, нескінченно диференційована в деякому інтервалі $(c-R; c+R)$, може бути розкладена в цьому інтервалі в збіжний до неї степеневий ***ряд Тейлора***:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots,$$

$n = 0,1,2,...$, за умови, що залишок цього ряду прямує до нуля.

Інакше кажучи, ряд Тейлора дає розвинення функції в степеневий ряд в околі точки $x = c$.

Якщо $c = 0$, то отримуємо ***ряд Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + ..., \quad x \in (-1; 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \quad x \in [-1; 1]$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2) \cdot ... \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + ..., \quad x \in (-1; 1)$$

Використовуючи ці формули, можна в деяких випадках розкласти функцію в ряд Маклорена, не обчислюючи похідні для знаходження коефіцієнтів ряду.

Лекція 16. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Мета: засвоїти основні поняття теорії ймовірностей , поняття ймовірностей, основні теореми теорії ймовірностей.

План лекції:
1. Поняття теорії ймовірностей.
2. Основні поняття комбінаторики.
3. Ймовірність події. Основні теореми теорії ймовірностей.
4. Схема випробувань із повторюваннями.
5. Додатки.

1. Поняття теорії ймовірностей

Випробування – реальний або мислений експеримент, результати якого піддаються спостереженню.

Подія – результат випробування.

Неможлива подія – подія, яка в даному експерименті не може відбутись (V).

Достовірна подія – подія, яка в результаті випробування неодмінно відбудеться (U).

Випадкова подія – подія, яка в результаті випробування може відбутись або не відбутись $(A, B, C, D, \ldots)$.

Елементарні події — наслідки випадкового експерименту, з яких під час експерименту відбувається рівно один.

Простір елементарних подій – множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитись випробування.

Сумою подій B і C називається подія A така, що $A = B + C$ або $A = B \cup C$, якщо при випробуванні відбудеться принаймні одна з цих подій B або C.

Різницею подій B і C називається подія A така, що $A = B - C$ або $A = B \setminus C$, якщо відбудеться подія B і не відбудеться подія C.

Добутком подій B і C називається подія A, така що $A = B \cdot C$ або $A = B \cap C$, якщо в результаті випробування відбудеться як подія B, так і подія C.

Несумісними в даному випробуванні називаються події B і C, якщо відповідні їм множини елементарних подій не містять однакових елементів. Це означає, що коли одна подія відбулась, друга подія відбутись не може.

Повну групу подій в даному випробуванні утворюють події $A_1, A_2, \ldots, A_n$, якщо вони несумісні і в результаті випробування неодмінно відбудеться одна з них, а отже їх сума є достовірною подією.

Протилежними називають події A і $\overline{A}$, якщо вони несумісні і утворюють повну групу подій.

2. Основні поняття комбінаторики

Різні множини, складені з будь-яких елементів, що відрізняються складом елементів або порядком, називаються ***сполуками*** або ***комбінаціями*** цих елементів.

Сполуки бувають трьох видів: перестановки, розміщення, сполучення.

Перестановки – це комбінації (сполуки), складені з одних і тих же n різноманітних елементів і відмінні лише порядком їхнього розташування.
Кількість перестановок з n елементів позначається та обчислюється наступним чином:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Розміщеннями називають будь-який упорядкований набір m елементів із заданих n. Тобто це вибірка m елементів із n з урахуванням порядку (одна вибірка відрізняється від іншої або самими елементами, або їхнім порядком).
Кількість розміщень m елементів із n без повторення:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Кількість розміщень m елементів із n з повторенням:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Сполученнями називають будь-який неупорядкований набір, який містить m елементів із заданих n. Тобто це вибірка m елементів із n без

урахування порядку (одна вибірка відрізняється від іншої тільки самими елементами).
Кількість сполучень m елементів із n без повторення:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Кількість сполучень m елементів із n із повторенням:

$$\overline{C}_m^n = C_{n-1+m}^m = C_{n-1+m}^{n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Часто доцільно використовувати такі властивості сполучень:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 3) $C_n^n = C_n^0 = 1$;
2) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$; 4) $C_n^1 = n$.

3.Ймовірність події. Основні теореми теорії ймовірностей

Ймовірністю події A називається числова міра об'єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається ймовірність як $P(A)$ і дорівнює відношенню числа сприятливих цій події елементарних результатів випробування (m) до загального числа всіх рівноможливих несумісних елементарних результатів, що утворюють повну групу подій (n):

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Приклад 1. Абонент, набираючи номер телефону, забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони різні. Яка ймовірність, що набрані абонентом цифри правильні.

Розв'язання. Нехай подія $\grave{A}$ полягає у тому, що набрані абонентом дві цифри правильні.

Загальне число всіх можливих елементарних результатів випробування – це число розміщень 2 цифр із 10 існуючих (так як маємо вибірку з урахуванням порядку): $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$.

Число сприятливих результатів випробування: $m = 1$. Тоді за формулою (1)

$$P(A) = \frac{1}{90}.$$

Властивості ймовірності

1. Ймовірність достовірної події $P(U) = 1$.
2. Ймовірність неможливої події $P(V) = 0$.
3. Ймовірність будь-якої випадкової події $0 < P(A) < 1$.

Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{2}$$

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Теорема. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що утворюють повну групу, дорівнює 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Теорема. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1:

$$P\left(A\right) + P\left(\overline{A}\right) = 1. \tag{3}$$

Випадкові події A і B називаються ***залежними***, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події.

Ймовірність події B, яка обчислена при умові появи події A, називають ***умовною ймовірністю*** події B, і позначають $P_A(B)$.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A і B дорівнює добутку ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність другої, розрахованої в припущенні, що перша подія вже відбулась:

$$P\left(A \cdot B\right) = P\left(A\right) \cdot P_A\left(B\right) = P\left(B\right) \cdot P_A\left(A\right). \tag{4}$$

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно залежні, то ймовірність їх сумісної появи знаходиться за формулою:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n).$$

Події A і B називаються ***незалежними***, якщо поява однієї не змінює ймовірність появи другої, тобто

$$P_A(B) = P(B), \quad P_B(A) = P(A).$$

Теорема. Якщо події A і B незалежні, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

Наслідок. У випадку скінченної кількості незалежних у сукупності подій формула множення ймовірностей приймає вигляд:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Дві події називаються ***сумісними***, якщо поява однієї з них не виключає появу другої в одному і тому ж випробуванні.

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{6}$$

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї із незалежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ знаходиться за формулою:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n). \tag{7}$$

Теорема. Нехай подія A може настати при умові настання однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A знаходиться за ***формулою повної ймовірності***:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A). \tag{8}$$

Події $B_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ називаються ***гіпотезами.***

Теорема. Умовна ймовірність гіпотези знаходиться за формулою Байеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{P(A)} = \tag{9}$$

$$= \frac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) P_{B_n}(A)}.$$

Приклад 2. Деталі, виготовлені цехом заводу, попадають для перевірки їх стандартності до одного із двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Розв'язання. Виділимо такі події:

A – придатна деталь признана стандартною;

гіпотези: B_1 – деталь перевіряв перший контролер;

B_2 – деталь перевіряв другий контролер.

За умовою задачі $P(B_1)=0,6$; $P(B_2)=0,4$.

За формулою повної ймовірності (8):

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=$$
$$=0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98=0,956.$$

За формулою Байеса (9):

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,6\cdot 0,94}{0,956}=0,59.$$

4. Схема випробувань із повторюваннями

Якщо усі n випробувань проводити в однакових умовах і ймовірність появи події A в усіх випробуваннях однакова і дорівнює p, та не залежить від появи або не появи A в інших випробуваннях, то таку послідовність незалежних випробувань називають ***схемою Бернуллі***.

Ймовірність $P_n(m)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться m раз, виражається **формулою Бернуллі**:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (10)$$

де $q=1-p=P(\overline{A})$, $m=0,1,2,...,n.$

Число m появи події A у n повторних незалежних випробуваннях називається **частотою.**

Формулу (10) доцільно застосовувати, якщо $n\le 10.$

Частота m_0 настання події у n незалежних випробуваннях називається ***найймовірнішою кількістю*** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np-q\le m_0\le np+p\,. \qquad (11)$$

Розподіл може мати одне або два найймовірніших числа.

Зауваження. Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p, то кількість випробувань n, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A з'явиться хоча б один раз, знаходять за формулою

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}.$$

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, подія A відбудеться m раз, подається такою наближеною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x); \qquad (12)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірність із задовільною точністю $P_n(m)$, якщо $n > 10$ і $p > 0{,}1$.

Формула Пуассона. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A) = p$ і $0 < p < 0{,}1$, а n велике, то

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np. \qquad (13)$$

Зауваження. Користуючись таблицями значень функції $\phi(x)$, слід пам'ятати, що функція $\phi(x)$- парна, тобто $\phi(-x) = \phi(x)$, та коли $x \geq 4$, $\phi(x) \approx 0$ з точністю до 0,0001. Таблиця функції $\phi(x)$ для додатних значень x наведена в додатку 1.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p, визначається формулою

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (14)$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ − функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Зауваження. Слід враховувати, що функція $\Phi(x)$ − непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і, якщо $x \geq 4$, $\Phi(x) \approx 0,5$ з точністю до 0,0001. Таблиця функції $\Phi(x)$ для додатних значень x наведена в додатку 2.

З інтегральної теореми Муавра-Лапласа одержується наближена рівність обчислення **відхилення відносної частоти від ймовірності.**

Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - P\right| < \varepsilon\right) \approx \left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (15)$$

Приклад 3. Прилад складено з 10 блоків. Надійність кожного з них становить $0,8$. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що:

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовить не менше двох блоків.

Розв’язання. Вихід з ладу блоків є послідовністю випробувань Бернуллі. Нехай подія A − відмова блока, тоді за умовою задачі $q = 0,8$, $p = 1 - q = 1 - 0,8 = 0,2$, $n = 10$, значення m коливається від 2 до 10, тому можна скористатися формулою Бернуллі (11.10):

а) $m = 2:\ P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8 = 0,202$;

б) $m \geq 1:\ P_{10}(m \geq 1) = 1 - P_{10}(0) = 1 - 0,8^{10} = 0,8926$;

в) $m \geq 2:\ P_{10}(m \geq 2) = 1 - \left(P_{10}(0) + P_{10}(1)\right) =$

$= 1 - \left((0,8)^{10} + C_{10}^1 \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9\right) = 0,6244.$

5. Додатки

Додаток 1

Таблиця значень функції $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	**0,3989**	**0,3989**	**0,3988**	**0,3986**	**0,3984**	**0,3982**	**0,3980**	**0,3977**	**0,3973**
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,2637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	**0,2420**	**0,2396**	**0,2371**	**0,2347**	**0,2323**	**0,2299**	**0,2275**	**0,2251**	**0,2227**	**0,2203**
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	**0,0540**	**0,0529**	**0,0519**	**0,0508**	**0,0498**	**0,0488**	**0,0478**	**0,0468**	**0,0459**	**0,0449**
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	**0,0044**	**0,0043**	**0,0042**	**0,0040**	**0,0039**	**0,0038**	**0,0037**	**0,0036**	**0,0035**	**0,0034**
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,d\,z$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971

Продовження додатку 2

0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732	∞	0,5
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		

Лекція 17. ДИСКРЕТНІ ТА НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Мета: засвоїти поняття випадкової величини , числових характеристик та законів розподілу випадкових величин.

План лекції:
1. Випадкові величини.
2. Числові характеристики випадкової величини.
3. Закони розподілу.

1.Випадкові величини

Випадкова величина – величина, яка внаслідок випробування може приймати лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і обумовлене випадковими причинами.

Випадкові величини доцільно позначати великими літерами $X, Y, Z, \ldots$, а їх можливі значення малими літерами:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad Z : z_1, z_2, \ldots, z_n.$$

Випадкові величини бувають ***дискретними*** і ***неперервними***

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина, що приймає окремі значення з певними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини можна перенумерувати.

Неперервною називають випадкову величину, яка може приймати всі значення із певного скінченого або нескінченного проміжку.

Функцією розподілу називають функцію, яка описує ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1}$$

Функція розподілу – неспадна, неперервна зліва; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Щільність ймовірностей неперервної випадкової величини називають похідну першого порядку від функції розподілу і позначають:

$$f(x) = F'(x). \tag{2}$$

$f(x)$ – невід'ємна функція, для якої

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \qquad P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx;$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

2.Числові характеристики випадкової величини

<u>Математичне сподівання</u>

Математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини і визначається за формулами:
для *дискретної* випадкової величини

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,; \tag{3}$$

для *неперервної* на $[a;b]$ випадкової величини

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx, \tag{4}$$

де $M(X)$ – оператор математичного сподівання.

Фізичний зміст: математичне сподівання – середнє значення випадкової величини, тобто значення, яке може бути використано замість випадкової величини в наближених обчисленнях або оцінках.

<u>*Властивості математичного сподівання*</u>

1. $M(C) = C,\ C$ – стала;
2. $M(CX) = CM(X)$;
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Дисперсія

Дисперсія випадкової величини характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного сподівання і
дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсія *дискретної* випадкової величини знаходиться за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i; \qquad (5)$$

дисперсія *неперервної* випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \qquad (6)$$

Основні властивості дисперсії

1. $D(C) = 0$;
2. $D(CX) = C^2 D(X)$;
3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$;
4. $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Дисперсію доцільно знаходити за властивістю (4). Причому для *дискретних* випадкових величин:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i; \qquad (7)$$

для *неперервних* випадкових величин:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx. \qquad (8)$$

Для оцінки розсіяння можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення крім дисперсії , можуть використовуватися інші характеристики. До їх числа відносять ***середнє квадратичне відхилення***.

Середнє квадратичне відхилення дискретної величини X називають квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (9)$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної величини визначається за формулою (9).

3. Закон розподілу

Закони розподілу дискретних випадкових величин

№	Закон розподілу X та його математичний запис	$M(X)$	$D(X)$
1.	Біноміальний $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, m=0,1,2,...,n$	np	npq
2.	Пуассона $P(X=m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, $a>0$.	a	a
3.	Геометричний $P(X=m)=pq^{m-1}$, $m=1,2,...$.	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
4.	Гіпергеометричний $P(X=m)=\dfrac{C_k^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}$, $m=0,1,2,...,n$, $k>n$.	$\dfrac{kn}{N}$	$\dfrac{nk(n-k)}{N^2}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Величина X розподілена ***рівномірно*** на проміжку $(a;b)$, якщо усі її можливі значення належать цьому проміжку і ***щільність*** її ймовірностей на цьому проміжку постійна, тобто

$$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b), \\ 0, & x\notin(a;b). \end{cases} \tag{10}$$

Випадкова величина, розподілена рівномірно, має такі числові характеристики:

$$M(X)=\frac{b+a}{2}; \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Випадкову величину називають розподіленою за ***показниковим законом***, якщо ***щільність*** її ймовірностей має вигляд

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \tag{11}$$

Випадкова величина, розподілена за показниковим законом, має такі числові характеристики:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}; \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};$$

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Нормальний закон розподілу задається щільністю

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{12}$$

Параметри a і σ, що входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{13}$$

Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, у проміжок $(\alpha;\beta)$ використовують функцію Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt; \qquad (14)$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \beta}{\sigma}\right). \qquad (15)$$

Для визначення відхилення нормально розподіленої випадкової величини X за абсолютною величиною менше заданого додатного числа ε використовується формула:

$$P\left(\left|X - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (16)$$

Лекція 14. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Мета: засвоїти основні поняття статистичної вибірки, числових характеристик статистичного розподілу вибірки.

План лекції:
1. Основні поняття.
2. Графічне подання вибіркових даних.
3. Чисельні характеристики статистичного розподілу вибірки.

1. Основні поняття

Математична статистика – розділ математики, який займається розробкою методів збору та обробки експериментальних даних для одержання наукових та практичних висновків.

Теорія ймовірностей є *теоретичною основою* математичної статистики.

Генеральна сукупність – множина однотипних об'єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню.

Вибірка (вибіркова сукупність) – підмножина об'єктів, одібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності.

При формуванні вибірки використовують наступні ***види відбору:***
- ***індивідуальний***, при якому у вибіркову сукупність вибирають по одній одиниці з генеральної сукупності;
- ***груповий*** або ***серійний***, при якому вибирається група (серія) одиниць;
- ***комбінований***, тобто сполучення перших двох видів відбору.

Розрізняють чотири основних ***способи формування вибірки***:

1) ***випадковий відбір*** (повторний чи безповторний), при якому вибірка формується виключно випадково;

2) ***механічний*** (***систематичний***) відбір, при якому у вибірку попадають одиниці з певними порядковими номерами (цей спосіб відбору є без повторним);

3) ***типовий відбір*** передбачає, що генеральна сукупність поділяється на однорідні групи і з кожної групи випадковим або механічним способом формується вибірка (типовий відбір може бути повторним і без повторним).

Нехай із генеральної сукупності добута вибірка, причому об'єкт x_1 спостерігався n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів, $x_k - n_k$ разів і $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – *об'єм вибірки*.

Спостережувані значення x_i називають ***варіантами***, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку, – ***варіаційним рядом***; кількість спостережень n_i називають ***частотами***, а їх відношення до об'єму вибірки – ***відносними частотами***:

$$w_i = \frac{n_i}{n}. \tag{1}$$

Дискретним статистичним розподілом вибірки називається відповідність між варіантами та їх частотами або відносними частотами.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
w_i	w_1	w_2	$\cdots$	w_k

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Інтервальним статистичним розподілом вибірки називають відповідність між проміжками варіаційного ряду та їх частотами або відносними частотами.

$\left(z_{i-1}, z_i\right]$	$\left(z_0, z_1\right]$	$\left(z_1, z_2\right]$	$\cdots$	$\left(z_{m-1}, z_m\right]$
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_m

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

$(z_{i-1}, z_i]$	$(z_0, z_1]$	$(z_1, z_2]$	$\cdots$	$(z_{m-1}, z_m]$
w_i	w_1	w_2	$\cdots$	w_m

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1.$$

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$ (X – деяка кількісна ознака досліджувального явища):

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – число варіант, менших за x.

Властивості емпіричної функції:

1) значення емпіричної функції належить відрізку $[0;1]$;

2) $F^*(x)$ – неспадна функція;

3) якщо x_1 – найменша варіанта, а x_k – найбільша, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають ***теоретичною функцією розподілу***.

Зауважимо, що $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а $F^*(x)$ визначає відносну частоту цієї ж події.

Якщо вихідні статистичні дані згруповані в дискретний варіаційний ряд, то емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2; \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3; \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 1, & x > x_k. \end{cases}$$

2. Графічне подання вибіркових даних

Усі статистичні розподіли можуть бути представлені графічно. Завдяки цьому можна побачити характерні зміни ряду розподілу, не користуючись аналізом цифрових даних.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $\left(x_i;\, n_i\right),\ i=1,\,2,...,\,k$ координатної площини.

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_i;\, w_i)$, $i=1,\,2,...,k$.

Гістограмою частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $\left[z_{j-1}, z_1\right)$, $j=1,\,2,...,\,m$, а їх висота $n_j=\dfrac{n_j}{z_j-z_{j-1}}$. Площа кожного такого прямокутника дорівнює n_i.

Гістограмою відносних частот називається східчаста фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні проміжки $\left[z_{j-1}, z_1\right)$, а їх висотами $n_j=\dfrac{w_j}{z_j-z_{j-1}}$.

3. Чисельні характеристики статистичного розподілу вибірки

Генеральною середньою $\overline{x_\Gamma}$ називається середнє арифметичне значень варіант x_i генеральної сукупності:

$$\overline{x_\Gamma}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\,, \tag{2}$$

якщо варіанти x_i, $i=\overline{1,N}$ мають відповідні частоти $N_1, N_2,..., N_k$, причому $N_1+N_2+...+N_k=N$, то

$$\overline{x_\Gamma}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}x_iN_i\,, \tag{3}$$

де N – об'єм генеральної сукупності.

Вибірковою середньою $\overline{x}$ статистичного розподілу вибірки називається середнє арифметичне значення її варіант $x_i,\ i=\overline{1,n}$ з урахуванням їх частот ($n_1, n_2, ..., n_k$, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), тобто

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{4}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\,. \tag{5}$$

Генеральною дисперсією $D_Г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення варіант генеральної сукупності x_i від генеральної середньої $\overline{x_Г}$, тобто

$$D_Г(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_Г)^2\ , \tag{6}$$

якщо варіанти мають відповідні частоти, то

$$D_Г(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x}_Г)^2\,. \tag{7}$$

Генеральне середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_Г = \sqrt{D_Г(x)}\,. \tag{8}$$

Вибірковою дисперсією статистичного розподілу вибірки називають середнє арифметичне значення квадратів відхилень його варіант x_i від вибіркового середнього $\overline{x}$, тобто

$$D(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i\,. \tag{9}$$

Для обчислення генеральної чи вибіркової дисперсії зручніше використовувати формулу

$$D(x) = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \tag{10}$$

де $\overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i$.

Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D(x)}. \tag{11}$$

Якщо варіанти статистичного розподілу рівновіддалені, розрахунки числових характеристик можна спростити, користуючись *умовними варіантами*

$$u_k = \frac{x_k - C}{h},$$

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i n_i,$$

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h + C,$$

$$D(u) = \overline{u^2} - (\overline{u})^2, \tag{12}$$

$$D(x) = D(u) \cdot h^2,$$

де h – різниця між будь-якими двома сусідніми варіантами; C – умовний нуль (значення варіанти вибірки з найбільшою частотою)

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман – М.: Наука, 1986. – 444 с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Вища математика: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. Ч.2 / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. – К.:КНЕУ, 1999. – 396 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа. 1977. – 479с.
5. Коваленко И.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Н. Коваленко, А.Н. Филиппова – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
6. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко –М.:1981. – 304 с.
7. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис – М.: Наука, 1973. – 640 с.
8. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
9. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.1 / Н.С. Пискунов – М.: Наука, 1985. – 348 с.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2 / Н.С. Пискунов – М.: Наука, 1976. – 576 с.