КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

ПЕРШОГО КУРСУ АГРОНОМІЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

СПЕЦІАЛЬНОСТІ «КАРАНТИН І ЗАХИСТ РОСЛИН»

ЛЕКЦІЯ 1

Тема: Визначники другого та третього порядку. методи розв'язування систем лінійних рівнянь

План

1. Визначники другого та третього порядку та їх властивості.
2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь .

1. *Визначником другого порядку* називається число, що обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{1}$$

2. *Визначником третього порядку* називається число, що обчислюється наступним чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Визначники другого порядку знаходимо за правилом (1). Згрупувавши окремо додатні та від'ємні добутки, отримаємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - .$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(3)

Формула (3) називається правилом Саррюса або *правилом трикутника*:

Зауваження 2. Для скорочення обчислень визначник n-го порядку доцільно розкладати за елементами рядка або стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. До нулів не треба знаходити алгебраїчних доповнень, тому що добуток нуля на його алгебраїчне доповнення дорівнює нулю. Властивість 6 дозволяє робити еквівалентні перетворення визначника і одержувати якомога більше нулів в деякому рядку або стовпці. Звідси маємо наступний алгоритм обчислення визначника n-го порядку.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити визначник третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно теореми 1 розкладемо цей визначник по елементам першого стовпця. Маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2A_{11} + 3A_{12} + (-4)A_{13} = 2\cdot(1)^{1+1}\cdot M_{11} + 3\cdot(1)^{1+2}\cdot M_{12} - 4\cdot(1)^{1+3}\cdot M_{13} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(4\cdot 2 - (-3)\cdot 5) - 3(5\cdot 2 - (-3)\cdot 6) - 4(5\cdot 5 - 4\cdot 6) =$$

$$= 2(8+15) - 3(10+18) - 4(25-24) = 2\cdot 23 - 3\cdot 28 - 4\cdot 1 = -42.$$

Приклад 2. Обчислити визначник третього порядку методом зниження порядку: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Додамо до елементів другого рядка відповідні елементи першого рядка, помножені на -2, а до елементів третього рядка відповідні елементи першого рядка, помножені на 3. Отримаємо

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix}.$$

Так як елементи a_{21} і a_{31} дорівнюють нулю, то розкладемо останній визначник по елементам першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} = A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 7\cdot 10 - (-1)\cdot(-2) = 70 - 2 = 68.$$

Приклад 3. Методом зниження порядку обчислити визначник четвертого порядку: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Так як другий стовпчик містить найбільшу кількість нулів, то розкладемо визначник по елементам другого стовпця.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot A_{12} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32} + 0\cdot A_{42} = 5\cdot(-1)^{1+2}\cdot M_{12} =$$

$$= -5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -5\cdot\big(1\cdot(1\cdot(-3) - 0\cdot 2) - 2\cdot(3\cdot(-3) - 0\cdot 4) + 1\cdot(3\cdot 2 - 1\cdot 4)\big) = -5(-3+18+6-4) = -85$$

Приклад 4. Методом зниження порядку обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Віднімемо від першого стовпця четвертий:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

В отриманому визначнику додамо четвертий рядок до першого:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

В останньому визначнику додамо до четвертого рядка перший, потім від другого рядка віднімемо відповідні елементи першого, помножені на 7:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 11 & -8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 11 & -8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо останній визначник по першому стовпчику:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 11 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -14 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & 7 \\ 11 & -8 & -2 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник третього порядку можна обчислити за формулою (6). Але простіше додати до першого рядка суму другого та третього і розкласти по елементам першого рядка. Отримаємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-14 & 5 & -5\\ 5 & 3 & 7\\ 11 & -8 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 7\\ 11 & -8 & -2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 7\\ -8 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-6+56)=100.$$

Приклад 5. Методом зниження порядку обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -4 & 1 & 7\\ 2 & 4 & -8 & 0\\ 4 & 5 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Винесемо з другого рядка спільний множник 2:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -4 & 1 & 7\\ 2 & 4 & -8 & 0\\ 4 & 5 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & -4 & 1 & 7\\ 1 & 2 & -4 & 0\\ 4 & 5 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix}.$$

Тепер, додавши до елементів другого стовпця відповідні елементи першого, помножені на -2, а до елементів третього стовпця – елементи першого, помножені на 4, одержимо

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix}3 & -4 & 1 & 7\\ 1 & 2 & -4 & 0\\ 4 & 5 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & -10 & 13 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 18 & 1\\ 5 & -10 & 23 & 2\end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник розкладемо по елементам другого рядка:

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix}3 & -10 & 13 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 18 & 1\\ 5 & -10 & 23 & 2\end{vmatrix}=2\cdot1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-10 & 13 & 7\\ -3 & 18 & 1\\ -10 & 23 & 2\end{vmatrix}$$

У визначнику третього порядку віднімемо від третього рядка перший, потім додамо до другого стовпця третій, помножений на 2, отримаємо:

$$\Delta=-2\cdot\begin{vmatrix}-10 & 13 & 7\\ -3 & 18 & 1\\ -10 & 23 & 2\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}-10 & 13 & 7\\ -3 & 18 & 1\\ 0 & 10 & -5\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}-10 & 27 & 7\\ -3 & 20 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{vmatrix}.$$

Останній визначник розкладемо по елементам третього рядка:

$$\Delta=-2\cdot\begin{vmatrix}-10 & 27 & 7\\ -3 & 20 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{vmatrix}=-2\cdot(-5)\cdot\begin{vmatrix}-10 & 27\\ -3 & 20\end{vmatrix}=10\cdot(-200+81)=-1190.$$

Методи розв'язання систем лінійних рівнянь.
Матричний метод

Матричним методом можуть бути розв'язані тільки ті системи, у яких число рівнянь збігається з числом невідомих і визначник матриці коефіцієнтів відмінний від нуля (матриця *A* невироджена).

Із цих умов слідує, що $r(A)=r(\overline{A})=m$ і, отже, система сумісна й визначена.

Розв'язок системи можна одержати так:

$$A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}L.$$

Використовуючи властивості добутку матриць і властивість оберненої матриці

$$\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}L,$$

$$E\cdot X=A^{-1}L,$$

$$X=A^{-1}L.$$

Тобто, для одержання стовпця невідомих потрібно обернену матрицю матриці коефіцієнтів системи помножити на стовпець вільних членів.

*Матричний метод годиться для розв'язання будь-яких систем, у яких матриця A квадратна й невироджена***.**

Метод Гаусса

Цей метод розв'язання систем лінійних рівнянь придатний для розв'язання систем з будь-яким числом рівнянь і невідомих.

Суть методу Гаусса полягає в перетворенні заданої системи рівнянь за допомогою елементарних перетворень в еквівалентну систему східчастого трикутного виду.

Отримана система містить усі невідомі в першому рівнянні. У другому рівнянні відсутнє перше невідоме, у третьому рівнянні відсутні перше й друге невідомі й т.д.

Якщо система сумісна й визначена (єдиний розв'язок), то останнє рівняння містить одне невідоме. Знайшовши останнє невідоме, з попереднього рівняння знаходимо ще одне - передостаннє. Підставляючи отримані величини невідомих, ми послідовно знайдемо розв'язок системи.

Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь, що використовуються для приведення системи до трикутного виду, є наступні перетворення:- перестановка місцями двох рівнянь;- множення обох частин одного з рівнянь на будь-яке число, відмінне від нуля;

- додаток до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на будь-яке число.

Елементарні перетворення переводять дану систему лінійних алгебраїчних рівнянь в еквівалентну систему.

Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо всякий розв'язок першої системи є розв'язком іншої системи і навпаки.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Розв’язати систему матричним методом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо обернену матрицю для матриці коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Обчислимо визначник, розкладаючи по першому рядку:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(2-1) + 1(-4-1) + 1(2+1) = -1.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то A^{-1} існує.

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1- & 1 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Обернена матриця знайдена вірно. Знайдемо розв’язок системи

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}L = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Приклад 2. Розв’язати систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв’язання. Визначник системи не дорівнює нулю. Тому система сумісна й визначена (єдиний розв’язок). Виконаємо перетворення.

Перше рівняння залишимо без зміни. Для того, щоб позбутися від першого невідомого у другому й третьому рівняннях, до них додамо перше, помножене на -2 у першому випадку і на -1 - у другому

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Тепер позбудемося від другого невідомого в третьому рівнянні. Для цього друге рівняння помножимо на -2 і додамо до третього. Одержимо еквівалентну заданої систему трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ -x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему знизу вверх. Із третього рівняння маємо x_3= 3 і, підставляючи його в друге рівняння, знаходимо x_2= 2. Поставивши знайдені невідомі в перше рівняння, одержимо x_1= 1. Таким чином, одержимо рішення системи: x_1=1, x_2=2, x_3=3

Питання для перевірки знань

1. Що таке система лінійних рівнянь?
2. Суть матричного методу розв'язання систем лінійних рівнянь.
3. Що таке не вироджена матриця?
4. Яка матриця називається сумісною (несумісною)?
5. Що являє собою метод Гаусса?

Індивідуальні завдання

Вияснити, чи сумісна система лінійних рівнянь та знайти її розв'язок методом Гаусса (перший стовпець) та за формулами Крамера (другий стовпець).

.	$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$	.	$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$
.	$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + 2z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 3. \end{cases}$	.	$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$
.	$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15. \end{cases}$	.	$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = -10, \\ x + 3y - 3z = 13, \\ x + z = 0. \end{cases}$

Лекція 2

Тема. Основи векторної алгебри. Вектори в просторі

План

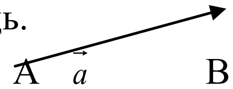
1. Скалярні та векторні величини..
2. Основні поняття про вектори.
3. Дії над векторами. Множення векторів.

1. Під скалярною величиною розуміють таку величину, яка може бути виміряна або охарактеризована числом (маса, об’єм, площа). Скалярні величини бувають постійні та змінні.

Під векторними величинами розуміють такі величини, які характеризуються, як числом так і напрямком.

2.Означення. Геометрична векторна величина, яка задається направленим відрізком, називається вектором.

Позначається вектор $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, $\vec{a}$, $\bar{\ }$. Точка A – початок вектора, B – його кінець.



Довжину вектора називають його модулем і позначають: $|\overrightarrow{AB}|, AB, |\vec{a}|, a.$.

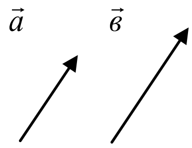
Вектор, довжина якого дорівнює 0, називають нульовим вектором. Позначають $(A\vec{A})^o$, AA^o, 0. Т.Я. початкова та кінцева точки нульового вектора співпадають, то його напрямок у просторі невизначений.

Одиничним вектором називається вектор довжина якого дорівнює одиниці.

Два вектори наз. колінеарними , якщо вони розташовані на одній або паралельних прямих. Розрізняють: протилежно напрямлені ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{в}$) та співнапрямлені ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{в}$) колінеарні вектори.

Два вектори наз. рівними ($\vec{a}=\vec{в}$), якщо вони: а) колінеарні;

б) співнапрямлені;



Три вектори , $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, називаються ***лінійно-незалежними***, якщо вони не лежать в одній площині.

Базисом у тривимірному просторі R^3 називається впорядкована трійка будь-яких лінійно-незалежних векторів.

Якщо $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - базис в R^3, то будь-який інший вектор, наприклад $\bar{d}$, єдиним образом розкладається по цьому базису

$$\bar{d} = d_a\bar{a} + d_b\bar{b} + d_c\bar{c} \ ,$$

де числа d_a, d_b, d_c знаходяться єдиним чином і називаються координатами вектора $\bar{d}$ в базисі $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Базис $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називається ***прямокутним*** (***ортогональним***), якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно перпендикулярні. Якщо вони до того ж мають довжину, рівну одиниці, то базис називається ***ортонормованим***.

У просторі $\boldsymbol{R}^3$ звичайно використовують прямокутну декартову систему координат ***Oxyz***, де будь-яка точка ***M*** простору, що має координати ***x*** (абсцису), ***y*** (ординату) і ***z*** (аплікату), позначається $\boldsymbol{M(x, y, z)}$.

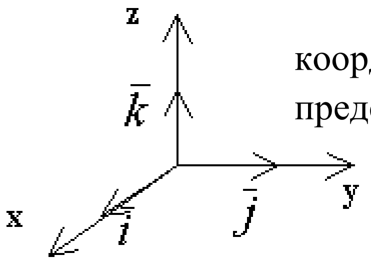


Рис. 2

Вільний вектор, наприклад $\bar{d}$, заданий у координатному просторі ***Oxyz***, може бути представлений у вигляді

$$\bar{d} = x_d\bar{i} + y_d\bar{j} + z_d\bar{k}.$$

Тут x_d, y_d, z_d - проекції вектора $\bar{d}$ на відповідні вісі координат (координати вектора), $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орти цих вісей.

Пишуть $\bar{d} = \{x_d, y_d, z_d\}$.

Довжина вектора визначається по формулі

$$|\bar{d}| = \sqrt{x_d^2 + y_d^2 + z_d^2}.$$

Добутком вектора $\bar{a}$ ***на дійсне число m*** називається вектор $\bar{b} = m\bar{a} = \bar{a}m$, що задовольняє умовам:

1. $\{x_b, y_b, z_b\} = \{m \cdot x_a, m \cdot y_a, m \cdot z_a\}$.
2. $|\bar{b}| = |m| \cdot |\bar{a}|$.
3. $\bar{b} \,||\, \bar{a}$.
4. $\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$, если $m > 0$; $\bar{b} \uparrow\downarrow \bar{a}$, если $m < 0$.

Отже, якщо вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні, то $\dfrac{x_b}{x_a} = \dfrac{y_b}{y_a} = \dfrac{z_b}{z_a} = m$.

Сумою двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, спрямований з початку вектора $\bar{a}$ в кінець вектора $\bar{b}$ при умові, що початок $\bar{b}$ збіжиться з кінцем вектора $\bar{a}$. Якщо вектори задані їхніми розкладаннями по базисних ортах, то при додаванні векторів складаються їхні відповідні координати.

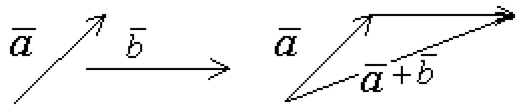


Рис. 3

Сума будь-якого кінцевого числа векторів може бути знайдена *за правилом багатокутника* (рис. 4):

щоб побудувати суму кінцевого числа векторів, досить сполучити початок кожного наступного вектора з кінцем попереднього й побудувати вектор, що з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього.

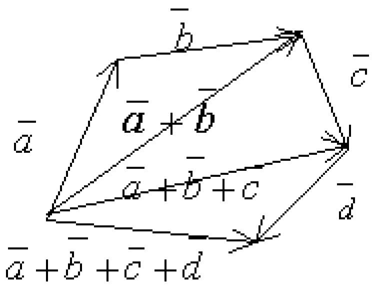


Рис. 4

Різницею векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називають вектор $\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)$. Другий доданок є вектором, протилежним вектору $\bar{b}$ по напрямку, але рівним йому по довжині.

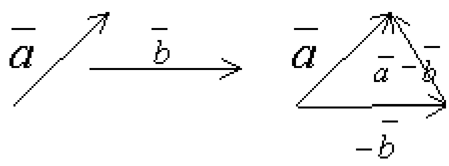


Рис. 5

Таким чином, операція віднімання векторів заміняється на операцію додавання

$$\bar{a}-\bar{b}=(x_a-x_b)\bar{i}+(y_a-y_b)\bar{j}+(z_a-z_b)\bar{k}.$$

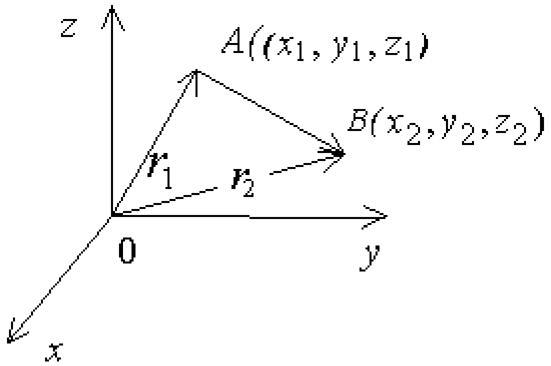


Рис. 6

Вектор $\overline{OA}$, початок якого перебуває на початку координат, а кінець - у точці ***A*** ($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{z_1}$), називають радіус-вектором точки ***A*** й позначають $\bar{r}_1(A)$ або просто $\bar{r}_1$. Оскільки його координати збігаються з координатами точки ***A***, то його розкладання по ортах має вигляд

$$\bar{r}_1 = x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}.$$

Вектор $\overline{AB}$, що має початок у точці ***A***($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{z_1}$) і кінець у точці ***B***($\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\boldsymbol{z_2}$), може бути записаний у вигляді $\overline{AB}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$,

де $\bar{r}_2$ - радіус-вектор точки ***B***; $\bar{r}_1$ - радіус-вектор точки ***A***.

Тому розкладання вектора по ортах має вигляд

$$\overline{AB}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y\quad-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}.$$

Його довжина дорівнює відстані між точками ***A*** і ***B***

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y\quad-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Приклад 1. У трикутнику ABC сторона AB точками M і N розділена на три рівні частини: $|AM|=|MN|=|NB|$. Знайти вектор $\overline{CM}$, якщо

$\overline{CA} = a, \overline{CB} = b$. **Розв'язання.** Маємо $\overline{AB} = b - a$. А тому $\overline{AM} = \dfrac{b-a}{3}$. Оскільки $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, то $\overline{CM} = a + \dfrac{b-a}{3} = \dfrac{2a+b}{3}$.

Приклад 2. Знайти вектор $a = \overline{AB}$, якщо A(1;3;2) і B(5;8;-1).

Розв'язання. Проекціями вектора $\overline{AB}$ на вісі координат являються різниці відповідних координат точок B і A: $a_x = 5 - 1 = 4, a_y = 8 - 3 = 5$, $a_z = -1 - 2 = -3$. А тому $\overline{AB} = 4i + 5j - 3k$.

Питання для перевірки знань

1. Що таке вектор?
2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними?
3. Правило додавання (віднімання) векторів.
4. Поняття про направляючі косинуси, спосіб їх відшукання.
5. Що таке нормований вектор?
6. Що таке радіус-вектор?

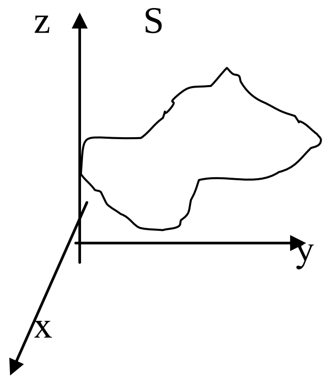
Лекція 3

Тема . Аналітична геометрія у просторі

План

1. Площина. Поняття площини у просторі. Нормальне рівняння площини. Геометричний зміст рівняння першого ступеня.
2. Дослідження загального рівняння площини. Приведення загального рівняння першого ступеня до нормального вигляду.
3. Рівняння площини, яка проходить через задану точку. Рівняння пучка площин.
4. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
5. Відстань від точки до площини.

1.Нехай задана прямокутна система координат O*xyz* та поверхня *S* у просторі.



Рівняння F(x,y,z)=0 наз. рівнянням поверхні S, заданою у системі координат *Oxyz*, якщо йому задовольняють координати будь-якої точки M(*x*,*y*,*z*), яка належить поверхні та не задовольняють координати будь-якої точки, яка не належить поверхні S. М(x,y,z) поточна точка поверхні. Простішою поверхнею є площина.

Умова того, що три точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ лежать на одній прямій: $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$.

Рівняння прямої у відрізках (a і b - відрізки):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Якщо положення прямої відносно осей координат визначати довжиною перпендикуляра p, опущеного з початку координат на пряму, і кутом α, утвореним цим перпендикуляром з додатнім напрямом осі абсцис (рис. 4), то рівняння прямої має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (7)$$

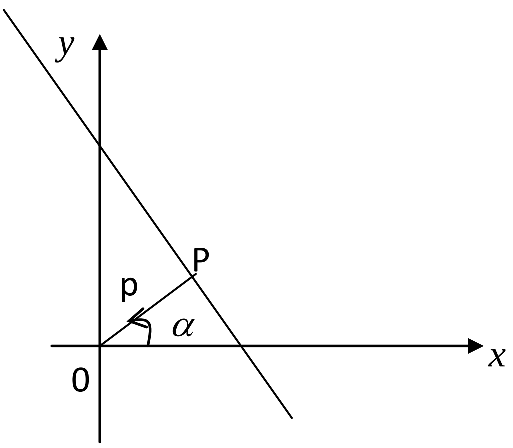


Рис. 4

Рівняння (7) – нормальне. В нормальному рівнянні прямої сума квадратів коефіцієнтів при x і y рівна 1, а вільний член від'ємний.

Всяке рівняння прямої загального вигляду $Ax + By + C = 0$ може бути зведеним до нормального вигляду (1) множенням усіх членів на **нормуючий множник** М, що визначається формулою $M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (8)

Знак нормуючого множника вибирається протилежним знаку вільного члена С загального рівняння прямої. Якщо до нормального виду зводиться рівняння виду $Ax + By = 0$, то для нормуючого множника можна взяти як знак плюс, так і знак мінус. Відстань від точки до прямої визначається за формулою:

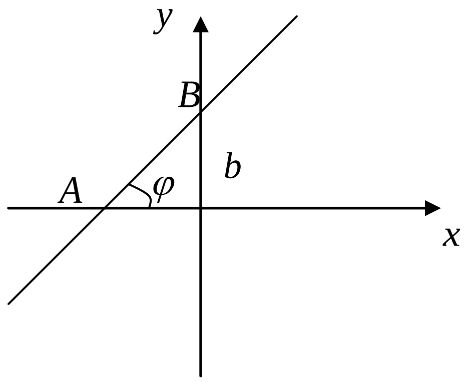
$$d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Визначити, які з точок $M_1(4;-2)$, $M_2(3;2)$ і $M_3(-6;4)$ лежать на прямій $3x + 5y - 2 = 0$ і які не лежать на ній.

Розв'язання. Підставимо координати цих точок у рівняння даної прямої: $3\cdot 4+5(-2)-2=0,\ 3\cdot 3+5\cdot 2-2\neq 0,\ 3(-6)+5\cdot 4-2=0$, тобто точки M_1 і M_2 лежать на прямій, точка M_2 не лежить на прямій.

Приклад 2. Побудувати пряму $3x-4y+7=0$, визначивши координати двох яких-небудь її точок.



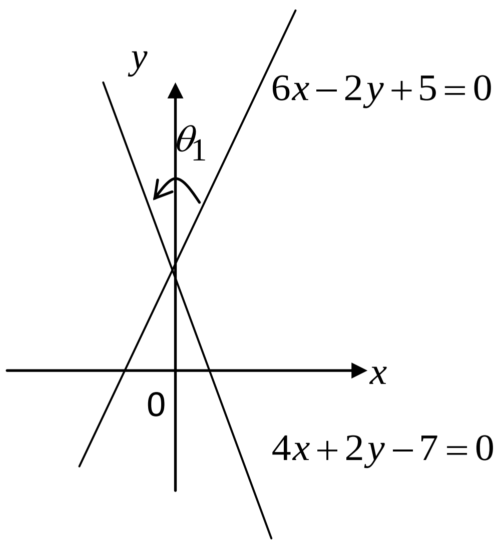
Мал. 2

Розв'язання. У якості двох точок, що визначають пряму, можна взяти точки перетину їх з осями координат. Нехай А – точка перетину з віссю Ох (рис. 2); ордината її рівна 0, для знаходження абсциси підставимо в рівняння прямої значення $y=0$, отримаємо $x=-\frac{7}{3};A\left(-\frac{7}{3};0\right)$.

Аналогічно, для визначення координат точки перетину прямої з віссю ординат підставимо в рівняння прямої значення $x=0$, отримаємо $y=\frac{7}{4};B\left(0;\frac{7}{4}\right)$. Побудуємо знайдені точки A і B і з'єднаємо їх прямою. Це і буде шукана пряма.

Приклад 3. Обчислити кут між прямими $6x-2y+5=0$ і $4x+2y-7=0$.

Розв'язання. Побудуємо дані прямі. Нехай кут θ_1 - шуканий (рис. 3).



Мал. 3

Тоді за k_1 у формулі (3) треба прийняти кутовий коефіцієнт прямої $6x-2y+5=0$.

Знайдемо кутові коефіцієнти k_1 і k_2:

$$y+3x+\frac{5}{2}, k_1=3; y=-2x+\frac{7}{2}, k_2=-2.$$

Підставляючи в формулу (3) значення коефіцієнтів, отримаємо:

$$tg\theta_1=\frac{-2-3}{1+3(-2)}=1; \theta_1=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 4. Знайти відстань від початку координат до прямої $5x-12y+26=0$.

Розв'язання. У рівнянні прямої нормального виду р представляє собою відстань від початку координат до прямої. Значить, необхідно звести рівняння даної прямої до нормального виду. Знайдемо нормуючий множник *M*:

$$M=-\frac{1}{\sqrt{25+144}}=-\frac{1}{13}.$$

Множачи усі члени даного рівняння на *M*, отримаємо

$$-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0, p=2.$$

Питання для перевірки знань

1. Що таке пряма лінія?
2. Формула визначення кута між двома прямими на площині.
3. Що називається кутовим коефіцієнтом?
4. Умова паралельності двох прямих.
5. Умова перпендикулярності двох прямих.

ЛЕКЦІЯ 4

Тема. Лінії другого порядку

План

1. Порядок лінії. Загальне рівняння ліній 2 – го порядку.
2. Коло: його нормальне та загальне рівняння.
3. Еліпс: його означення, канонічне рівняння, форма, ексцентриситет.
4. Гіпербола: її означення, канонічне рівняння, асимптоти, форма, ексцентриситет.
5. Парабола: її означення, канонічне рівняння, форма
6. Паралельний перенос системи координат. Нормальні рівняння ліній 2 – го порядку.

КОЛО, ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛА, ЕКСЦЕНТРИСИТЕТ, ПАРАБОЛА, АСИМПТОТА.

1. Лінія, яка задана рівнянням *2* – го порядку відносно змінних *x* та у наз. лінією другого порядку: $У=Х-1$ – го порядку; $У=Х^2-2$ – го порядку.

Лінія першого порядку - це пряма, її загальне рівняння: $Ax+By+C=0$.

У лівій частині цього рівняння знаходиться многочлен першої степені відносно змінних *x* та *y,* який має запис у стандартному виді. За аналогією можна записати загальне рівняння ліній більш вищого порядку.

Загальне рівняння ліній 2 – го порядку буде мати вид:
$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, де A,B,C – одночасно не дорівнюють 0, Та $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

До основних ліній 2 – го порядку відносяться: коло, еліпс, гіпербола та парабола. Також лінією 2 – го порядку може бути пара перехресних прямих:

$X^2 – У^2=0$ $У=\pm X$ точка O(0;0) графіка лінії 2 – го порядку може бути пустою множиною $X^2+У^2+1=0$. Колом називається геометричне місце точок площини, які рівновіддалені від заданої точки , яка називається центром кола на задану відстань , що називається радіусом кола.

Приклад. Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$ і зробити рисунок.

Розв'язання. Тут $a_{11} = 29$, $a_{12} =-12$, $a_{22} = 36$. Тому

$$tg2\alpha=\frac{-24}{29-36}=\frac{24}{7},\quad \Rightarrow\quad \frac{24}{7}=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\quad \Rightarrow\quad 12tg^2\alpha+7tg\alpha-12=0;$$

розв’язуючи останнє рівняння, одержимо $tg\alpha=-\frac{4}{3}$ и $tg\alpha=\frac{3}{4}$.

Вибираємо: нехай $tg\alpha=\frac{3}{4}$, тоді $\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$.Вибираємо: нехай $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, тоді $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.Формули перетворення координат запишуться у вигляді:

$$x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y',$$

$$y=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'.$$

Підставляємо вирази "старих" координат через "нові" у вихідне рівняння кривої і, пробивши досить громіздкі, але прості перетворення, одержуємо:

$$20x'^2+45y'^2+8x'-126y'-91=0,$$

або, виділяючи повний квадрат по x' і y' можемо записати:

$$20\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+45\left(y-\frac{7}{5}\right)^2=180,$$

звідси: $$\frac{\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2}{9}+\frac{\left(y'-\frac{7}{5}\right)^2}{4}=1.$$

Введемо нові координати $x'' = x' + \frac{1}{5}$, $y'' = y' - \frac{7}{5}$, і в цих координатах рівняння матиме вид

$$\frac{x''^2}{3^2} + \frac{y''^2}{2^2} = 1,$$

тобто дана крива є еліпс із півосями $a = 3$ і $b = 2$. Зробимо рисунок (рис. 9).

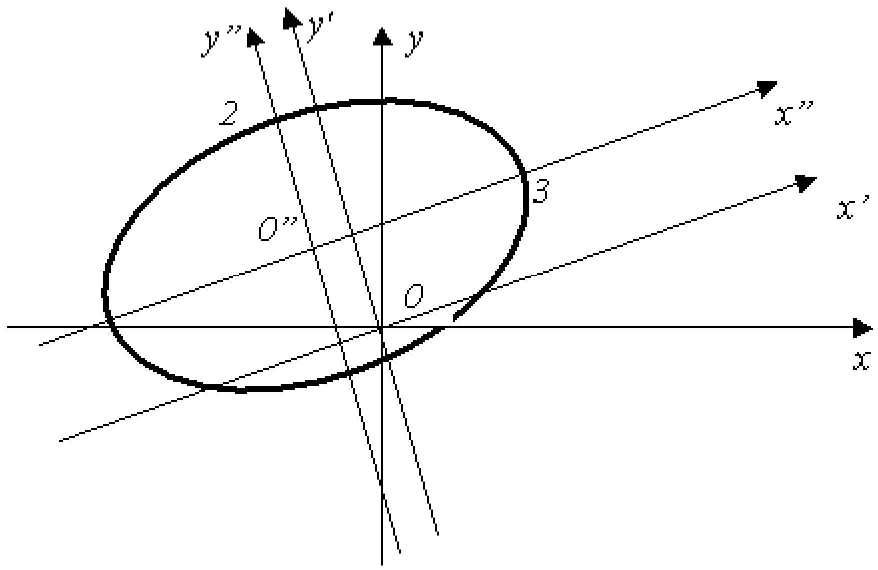


Рис. 9

Приклади розв’язання задач

Приклад 1. Знайти центр і радіус кола, що проходить через точки A(1;5), B(-4;0), C(4;-4). Написати його рівняння.

Розв'язання. Нехай R- радіус шуканого кола, а його центр знаходиться в точці (a,b), тоді рівняння кола можна записати у в канонічному вигляді, де a,b,R поки невідомі. Оскільки точки A, B, C лежать на колі, то їх координати задовольняють канонічному рівнянню:

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (5-b)^2 = R^2, \\ (-4-a)^2 + (0-b)^2 = R^2, \\ (4-a)^2 + (-4-b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Із отриманої системи визначаємо величини $a,b,R.$ Розкриваючи дужки і приводячи подібні, запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 10b + 26 = R^2, \\ a^2 + b^2 + 8a + 16 = R^2, \\ a^2 + b^2 - 8a + 8b + 32 = R^2. \end{cases}$$

Віднімаючи з 2-го рівняння спочатку перше, а потім останнє, отримуємо

$$\begin{cases} 10a+10b-10=0, \\ 16a-8b-16=0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a+b=1, \\ 2a-b=2. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $a=1, b=0.$ Підставляючи ці значення в одне з рівнянь системи, отримаємо $R^2=25,$ тобто $R=5.$

Таким чином, шукане коло має рівняння

$$(x-1)^2+y^2=25.$$

Його центр С (1;0), а радіус $R=5.$

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду рівняння кривої $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$.

Розв'язання. 1. Скориставшись формулами перетворення координат при повороті осей координат, отримаємо такі перетворення рівняння кривої:

$$6(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-$$
$$-12(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-26(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+11=0,$$

або
$$\left(6\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha\right)x'^2+\left(8\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha\right)y'^2+$$
$$+\left[16\sin\alpha\cos\alpha+6\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\right]x'y'-(12\cos\alpha+26\sin\alpha)x'-$$
$$(26\cos\alpha-12\sin\alpha)y'+11=0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при $x'y'$, маємо:

$$16\sin\alpha\cos\alpha+6\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=0 \text{ або } 3tg^2\alpha-8tg\alpha-3=0.$$

Звідси $tg\alpha_1=3, tg\alpha_2=-\dfrac{1}{3}$. Приймемо $tg\alpha=3,$ тоді $\sin\alpha=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Візьмемо додатні значення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$. Тоді рівняння матиме вигляд

$$9x'^2-y'^2-9\sqrt{10}x'+\sqrt{10}y'+11=0,$$
$$9\left(x'^2-\sqrt{10}x'\right)-\left(y'^2-\sqrt{10}y'\right)=-11.$$

2. Вирази у дужках доповнимо до повних квадратів:

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{45}{2}-\frac{5}{2}-11,$$

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=9.$$

Прийнявши за новий початок точку $O'\left(\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, застосуємо формули перетворення координат $x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{2}$, $y' = y'' + \frac{\sqrt{10}}{2}$, отримаємо $9x''^2 - y''^2 = 9$, або $x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$ (рівняння гіперболи).

Питання для перевірки знань

1. Що таке коло?
2. Що таке еліпс?
3. Поняття про ексцентриситет, фокуси еліпса.
4. Канонічне рівняння еліпса.
5. Поняття про параболу, канонічне рівняння параболи.
6. Яка крива називається гіперболою? Ексцентриситет гіперболи.
7. Схема перетворення рівнянь лінії другого порядку до канонічного вигляду.

Лекція 5

Тема: Функціональна залежність, границі функції. поняття функціональної залежності. область визначення функції. границі функції. розкриття невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; $(\infty - \infty)$ при обчисленні границь.

План
1. Вступ.
2. Основні визначення.
3. Границя функції. Теореми про границі.
4. Обчислення границі функції. Розкриття неозначеностей.

АРГУМЕНТ, ФУНКЦІЯ, ГРАФІК, ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ, НЕСКІНЧЕННО МАЛІ І НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ВЕЛИЧИНИ, НЕОЗНАЧЕНІСТЬ, ПЕРША І ДРУГА ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ.

Вступ. Аграрні науки будуються на вивченні залежностей, які існують як в природі, на статистичних та інших законах. Математика є тим універсальним засобом за допомогою якого можна охарактеризувати реально існуючі залежності і використовувати їх для наукових досліджень. Для того, щоб оволодіти аграрними науками, треба знати закони генетики, хімії, економіки. Усі ці науки в тій чи іншій мірі використовують математики. Тому необхідно серйозно вивчати математику.

Прикладна математика є самостійною дисципліною, основні положення і методи якої широко використовуються в спеціальних дисциплінах рибогосподарського напрямку.

Мета дисципліни: навчитись самостійно застосовувати математичні методи і виконувати розрахунки.

Прикладна математика складається з таких розділів: “Елементи вищої математики”, “Теорія ймовірностей” та “Математична статистика”.

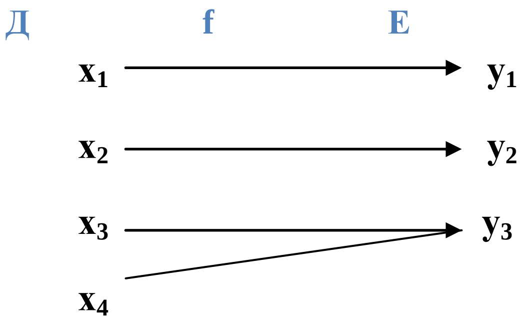
Основні визначення. Змінна величина y, називається <u>*функцією*</u> від змінної величини x, якщо кожному можливому значенню x відповідає єдине та певне значення змінної величини y.

У цьому випадку говорять, що змінні величини x і y знаходяться у функціональній залежності та позначаються: $y = f(x)$.

Змінна величина x називається <u>*аргументом*</u> або незалежною величиною.

Змінна величина y називається <u>*функцією*</u> або залежною величиною.

Множину **Д** називають <u>*областю визначення функції*</u>, а множину **Е** – <u>*областю значення функції*</u>.



Якщо елементи множини **Д** і **Е** є числами, то функція є числовою. В подальшому під поняттям функції будемо розуміти однозначну числову функцію. Числова послідовність також є функцією, яка задається на множині натуральних чисел. Числову послідовність задають формулою загального члена: $a_{n=f(n)}$, $D(f) = N$

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}$$

ОЗНАЧЕННЯ: *Областю визначення функції* називається множина значень аргументу при яких функція визначена або має сенс.

ОЗНАЧЕННЯ: *Областю значень функції* називається множина значень функції, які вона отримає у своїй області визначення аргументу.

Приклад: $Y = \sqrt{\lg(x-1)}$, $\lg(x-1) \geq 0$, $x-1 \geq 1$, $x \geq 2$. $D(y) = [2;+\infty)$

Способи задання функції:

1. Табличний – складається зі задання функції за допомогою таблиці, у першій строчці якої розташовані значення аргументу, а у другій відповідні йому значення функції.
2. Графічний – складається зі задання функції за допомогою графіка функції.

<u>*Графіком функції*</u> $y = f(x)$ називається множина точок (x, y) координатної площини, координати якої задовольняють функціональну залежність $y = f(x)$.

3. Аналітичний – складається зі задання функції $y = f(x)$ за допомогою формули.

Для того щоб задати функцію аналітичним способом у загальному випадку необхідно задати вираз $y = f(x)$ та вказати область визначення функції. Наприклад: $y=x^2, x \in R$.

Складна функція. Роздивимося функцію $y=f(u)$, де змінна u в свою чергу є функцією $u = \varphi(x)$ і тоді в кінцевому випадку ми отримаємо функцію $y=f(\varphi(x))$, яка є функцією незалежної змінної x .*Складною функцією* називається функція від функції. Наприклад $y = \ln((\sin^2 x)$, представимо цю функцію у виді ланцюжка елементарних функцій; $y = \ln u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

3. Границя функції. Теореми про границі. Початкові відомості про границі зустрічаються в шкільному курсі математики. Так в алгебрі – сума нескінченої спадної геометричної прогресії, а в геометрії – довжина кола, площа круга, поверхні та об’єми круглих тіл.

В курсі математики поняття границі є одним з основних. За допомогою границі вводяться похідна і означений інтеграл.

Приклад. Розглянемо числову послідовність (X_n):

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, ..., \frac{n}{2 \cdot n + 1}, ...$Із збільшенням номера n члени послідовності (X_n) наближаються до числа $\frac{1}{2}$, залишаючись весь час менше $\frac{1}{2}$, тобто послідовності (X_n)обмежена цим числом. Тобто при $n \to \infty$, $x_n \to \frac{1}{2}$

Звідки витікає, що збільшенням номера n різниця $\left| X_n - \frac{1}{2} \right|$ за абсолютною величиною спадає і може стати менше любого наперед заданого, як завгодно малого додатного числа (ϵ) . Число $\frac{1}{2}$ назвали границею змінної x і позначили через a.

<u>ОЗНАЧЕННЯ:</u> число a називається границею змінної величини x, якщо починаючи з деякого її значення і для всіх послідуючих значень, модуль різниці $|x - a|$ спадає і надалі продовжує залишатися менше любого,

як завгодно малого, наперед заданого числа **є** $(\epsilon \succ 0, \epsilon \to 0)$.Позначається: $\lim x = a$

Якщо незалежна змінна x наближається до своєї границі a, то відповідно змінна $y = f(x)$наближається до своєї границі **А**, тобто функція $y = f(x)$має границю **А**.

ОЗНАЧЕННЯ: Число **А** називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого числа $\epsilon \succ 0$можна вказати таке $\delta \succ 0$, що для будь-якого x, яке задовольняє нерівність $0 \prec |x - a| \prec \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| \prec \epsilon$.Позначається $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ або $f(x) \to A, x \to a$

Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

ОЗНАЧЕННЯ: Функція $y = f(x)$ наз. *нескінченно малою* точки $x = a$, якщо границя функції в цій точці на нескінченність дорівнює нулю, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, також $x = a$. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = 0$ - нескінченно мала на нескінченність.

ОЗНАЧЕННЯ: функція $y = f(x)$ наз. *нескінченно великою* у точці $x = a$, якщо для любого додатного числа **М** існує додатне число δ, що для всіх $x \neq a$, які задовольняють умові $|x - a| \prec \delta$виконується нерівність $|f(x)| \succ M$.

Якщо функція $y = f(x)$є нескінченно мала в деякій точці (на нескінченність) то функція $\frac{1}{f(x)}$ буде величиною нескінченно великою в цій точці і навпаки.

Залежність між нескінченно малими та нескінченно великими функціями іноді записують у символічній формі: $\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty$.

Теореми про границі

Якщо існують границі функцій $f(x)$і $g(x)$ при$x \to a$, то існує також і границя їх суми яка дорівнює сумі границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

Доказ: нехай

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ тоді $\lim\limits_{x \to a}[(f(x) + g(x)) - (A + B)] = \lim\limits_{x \to a}[(f(x) - A) + (g(x) - B)] = 0$

Тому, $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x)] = A + B = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$при $x \to a$, то існує також і границя їх добутку, яка дорівнює добутку границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

Доказ: нехай $\lim_{x\to a} f(x)=A,\ \lim_{x\to a} g(x)=B,$ та $f(x)-A=\beta(x), x\to a$

$$g(x)-B=\gamma(x), x\to a\,,$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[(A+\beta(x))\cdot(B+\gamma(x))\right]=\lim_{x\to a} A\cdot B+\lim_{x\to a} A\cdot\gamma(x)+\lim_{x\to a} B\cdot\beta(x)+$$

$$+\lim_{x\to a}\beta(x)\cdot\gamma(x)=A\cdot B+0+0+0=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x\to a$ і границя функції $g(x)$ відмінна від 0, то існує також і границя відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$, яка дорівнює відношенню границь функцій $f(x)$ і $g(x)$: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Сталий множник можна винести за знак границі:

$$\lim_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

Обчислення границі функції. Розкриття неозначеностей. Можна показати, що границя функції в довільній точці її області визначення дорівнює значенню функції в цій точці. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Приклад: $\lim_{x\leftarrow 0}\frac{2^x+\sqrt{x^2+1}}{\cos x}=\frac{2^0+1}{\cos 0}=2$

В цьому випадку кажуть, що границя не містить неозначеностей.

До таких випадків відносяться границі виду: $\frac{c}{0}=\infty \qquad \frac{c}{\infty}=0$

Приклади: $\lim_{x\to 0} ctgx=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{0}=\infty,\ \lim_{x\to 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}=2^{\infty}$

Також є випадки при обчисленні границі, при яких виникають так наз. Неозначеності до яких відносяться: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}

4. Неозначеність виду $\frac{0}{0}$: щоб розкрити неозначеність виду $\frac{0}{0}$, необхідно чисельник і знаменник скоротити на множник $x-a$.

Приклад: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\cdot x^2+5x-3}{x^2-9}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\cdot(2x+1)}{(x-3)\cdot(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{7}{5}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$$

2. Неозначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$: щоб розкрити неозначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, необхідно чисельник і знаменник скоротити на найвищу степінь змінної величини, яка входить до даної функції.

Приклад: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-2}{3-2x-2x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{5x^2}{x^2}+\dfrac{7x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}-2}=\dfrac{5+0-0}{0-0-2}=-\dfrac{5}{2}$

5. Неозначеність виду $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$: щоб розкрити неозначеності цих видів їх за допомогою алгебраїчних перетворень приводять до неозначеностей $\dfrac{0}{0}$ та $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Перша та друга важливі границі.

Перша важлива границя:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$$

Приклади: $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg\,3x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos 3x}{\sin 3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\left|\begin{array}{l}\arcsin x=y\\ x=\sin y\\ \arcsin x=0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

$$x\approx\sin x\approx\arcsin x\approx tgx$$

Друга важлива границя:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\ \approx 2{,}17$, e - називається основою натурального логарифму.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Друга чудова границя містить неозначеність виду 1^{∞}. Тому границі, що містять таку неозначеність зводять до другої чудової границі.

Приклад:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}=(1)^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+1)-1-1}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{3x+1}\cdot\frac{x+1}{2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x-1}{3x+1}}=e^{\frac{-1}{3}}.$$

Контрольні питання до теми

1. Що називається функцією від змінної величини x ?
2. Що називається областю визначення і областю значень функції?
3. Яка функція називається складною?
4. Що називається границею змінної величини х?
5. Що називається границею функції?
6. Які функції називаються нескінченно малими і нескінченно великими?
7. Основні теореми про границі функції.
8. Як розкрити неозначеність $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$?
9. Перша і друга важливі границі.

ЛЕКЦІЯ 6

ТЕМА: Похідна функції. таблиця похідних. поняття екстремуму функції, схема дослідження функції на екстремум.

План

1. Означення похідної. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

2. Правила диференціювання.

3. Похідна складної функції. Диференціал функції. Похідні вищих порядків.

4. Дослідження функції.

Диференціювання функції, Диференціал, інтервали монотонності функції, екстремум.

1. Означення похідної. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

Нехай на деякому проміжку Х визначена функція $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументу довільний приріст $\Delta x \neq 0$ такий, щоб точка $x_0 + \Delta x \in X$. Функція набуде при цьому приросту $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною (або похідною першого порядку, першою похідною) функції

$y = f(x)$, $x \in X$, в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля.

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Позначення похідної: $f'(x)$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Процес знаходження похідної називають диференціюванням. Якщо функція

має похідну у деякій точці, то її називають диференційованою в цій точці.

Механічний зміст похідної – це миттєва швидкість в момент часу t при нерівномірному прямолінійному русі, тобто $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Розглянемо таблицю похідних основних елементарних функцій:

1. $C' = 0$ 2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}, n \neq 0$ 3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$ 4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

5. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, a > 0$, $\left(e^x\right)' = e^x, x \in R$ 6. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x}\log_a e, a > 0, a \neq 1, x > 0$,

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$

7. $(\sin x)' = \cos x$ 8. $(\cos x)' = -\sin x$ 9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$

10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in z$ 11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, -1 < x < 1$ 13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, x \in R$

2. Правила диференціювання.

1) Сталий множник можна виносити за знак похідної $(cf)' = c(f)'$

2) Похідна суми (різниці) декількох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій $(f \pm g)' = f' \pm g'$

3) Похідна добутку двох функцій дорівнює $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

4) Похідна частки, за умови, що знаменник, не дорівнює нулю, дорівнює$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}, g \neq 0$

Приклад. Знайти похідну функції:

1) $y = 3x^2 + \ln x + 3,\ y' = (3x^2)' + (\ln x)' + (3)' = 3(x^2)' + \frac{1}{x} + 0 = 3 \cdot 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$.

2) $y = \sin x \cdot x^3$. $y' = (\sin x)' \cdot x^3 + (x^3)' \cdot \sin x = \cos x \cdot x^3 + 3x^2 \cdot \sin x$

3. Похідна складної функції. Диференціал функції. Похідні вищих порядків.

Нехай $y = f(u)$, де $u=\varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ – внутрішньою, або проміжним аргументом.

Якщо $y = f(u)$ і $u=\varphi(x)$ – диференційовані функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'u \cdot u'x$

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Приклад. Знайти похідну складної функції $y = tg2x$. Зовнішня функція $y = tg(u)$, внутрішня $a = 2x$. $y' = (tg(2x))' \cdot (2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2$

Означення. Добуток $f(x) \cdot \Delta x$ називається диференціалом функції $y = f(x)$; його позначають символом dy, тобто $dy = f'(x)\Delta x$. Так як $(x)' = 1$, отже $dx = \Delta x$, таким чином диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. З огляду на це формулу для диференціала можна записати так: $dy = f'(x) \cdot dx$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \cos x$.

$y' = -\sin x$, $dy = -\sin x \cdot dx$.

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку*

і являє собою деяку нову функцію. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ другого порядку від функції $y = f(x)$ і позначається $y'' = f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Похідна від похідної *(n-1)* порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається похідною *n*- го порядку і позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$.

$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, *n=1, 2, 3…*

Приклад. Знайти похідну третього порядку для функції $y = 7x^6$.

$$y' = \left(7x^6\right)' = 7\left(x^6\right)' = 42x^5;\; y'' = \left(42x^5\right)' = 42\left(x^5\right)' = 42\cdot 5\cdot x^4 = 210x^4;$$

$$y''' = \left(210\cdot x^4\right)' = 210\cdot 4x^3 = 840\cdot x^3.$$

4. Дослідження функції.

а) Зростання та спадання функції. Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$). Функція спадна на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$).

Теорема. Якщо похідна диференційованої функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку. Якщо похідна диференційованої функції від'ємна всередині деякого проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

Приклад. Знайти проміжки зростання та спадання функції $y = 8x - x^2$.

Область визначення функції – вся числова вісь $-\infty < x < +\infty$. Знайдемо похідну функції $y' = 8 - 2x$. Розв'яжемо нерівність $y' > 0$; $8 - 2x > 0$, $x < 4$

Проміжок спадання *(-∞;4).*

При визначенні проміжку спадання функції маємо $8 - 2x < 0$, тобто $x > 4$; *(4;+∞)*

б) Екстремуми функції. *Екстремумом* функції називається максимум або мінімум функції. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0 $(f'(x_0) = 0)$ і диференційована в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з “+” на ”-“, то при $x = x_0$ функція має максимум;

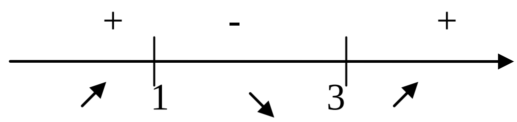
2) змінює знак з ”-“ на “+”, то функція має в цій точці мінімум;

3) не змінює свого знаку, то функція в точці $x = x_0$ не має екстремуму.

Приклад. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

D(y)=(- ∞*;+*∞*)*. Знаходимо $y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$.

Так як похідна скрізь неперервна, то інших критичних точок для заданої функції не існує.



$x_1 = 1$ $f'(0) = 3 > 0$ $2 \in (1;3)$ $f'(2) = 4 - 8 + 3 \prec 0.$ $0 \in (-\infty;1)$; $X_{max} = 1$

$x_2 = 3$, $4 \in (3;+\infty)$ $f'(4) = 16 - 16 + 3 = 3 > 0$ $X_{min} = 3$.

в) Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину.

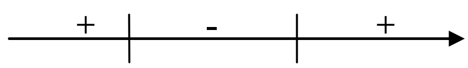
Якщо в усіх точках проміжку $(a;b)$ для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $(f''(x) > 0)$, то графік функції вгнутий. Якщо в усіх точках проміжку $(b;c)$ друга похідна від’ємна $(f''(x) < 0)$, то графік функції випуклий. Якщо друга похідна при переході через точку x_0 міняє свій знак з “+” на “-” або навпаки, то x_0 - є точкою перегину, якщо $x_0 \in D(y)$.

Приклад. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x$.

$y' = 8x^3 + 9x^2 - 6x + 3$; $y'' = 24x^2 + 18x - 6$; $y'' = 0$, $24x^2 + 18x - 6 = 0$

$4x^2 + 3x - 1 = 0$ $D = 25$

$x_1 = \frac{-3+5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $x_2 = \frac{-3-5}{8} = -1$



$\bigcup$ -1 $\bigcap$ 1/4$\bigcup$

$-2 \in (-\infty;-1)$, $f''(-2) = 24 \cdot 4 - 36 - 6 = 54 > 0$, $f(0) = -6 < 0$, $f(1) = 24 + 18 - 6 = 36 > 0$

Графік функції вгнутий $(-\infty;-1) \cup \left(\frac{1}{4};+\infty\right)$, графік функції опуклий $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$.

$x=-1$і $x = \frac{1}{4}$ - точки перегину, так як при переході через них друга похідна міняє знак.

Контрольні запитання

1. Що називається похідною функції $y = f(x)$?
2. Який фізичний зміст похідної?
3. Який геометричний зміст похідної?
4. Напишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
5. Сформулюйте правила диференціювання функцій.
6. Чому дорівнює похідна складної функції?
7. Похідна n – го порядку функції $y = f(x)$.
8. Яка функція називається зростаючою (спадною) на інтервалі?
9. Яка точка називається точкою максимуму функції?
10. Яка точка називається точкою мінімуму функції?
11. Що називається екстремумом функції?

Список літератури:

1. Вища математика. У 3-х частинах. Навчальний посібник./ В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С.Дронь, О.С.Кондур.-2-е вид., стереот.- Чернівці: Рута, 2002., частина 3.
2. Сборник задач по математике для втузов. Спец. курси / Под ред. А.В. Ефимова. -М.: Наука, 1984.

ЛЕКЦІЯ 7

Тема: Невизначений та визначений інтеграли.

ПЛАН

1 . Поняття первісної функції та невизначеного інтегралу. Властивості невизначеного інтегралу.
2. Формули інтегрування основних елементарних функцій.
3. Означення та властивості визначеного інтегралу.
4. Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона - Лейбніца.
5. Диференціальні рівняння. Частинний та загальний розв'язок.

Рівняння.

ПЕРВІСНА, ІНТЕГРАЛ, ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, НЕВИЗНАЧЕНИИ ІНТЕГРАЛ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ.

1. Поняття первісної функції та невизначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу. Диференціальне обчислювання ставило своєю задачею до даної функції $F'(x)$ знайти її похідну $F'(x) = f(x)$ або диференціал

$d(F'(x)) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Поставимо оборотну задачу: нехай задана функція $f(x)$, яка є похідною $F'(x)$. Треба знайти функцію $F(x)$.

Означення 1 : Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в будь - якій точці цього проміжку її похідна дорівнює : $F'(x) = f'(x) \Rightarrow d(F'(x)) = F'(x)\,dx = f(x)dx$.

Приклад: $f(x) = 4x^3$, $F(x) = x^4 + c$. Первісними для функції $f(x) = 4x^3$ будуть також $x^4 + 1, x^4 - 5, x^4 + 120, \ldots, x^4 + c$ так як похідні всіх функцій $= 4x^3$.Таким чином, операція знаходження первісних не є однозначною. Відшукання первісної функції за даною похідною $f(x)$ або за диференціалом $f(x)dx$ є дія обернена диференціюванню - інтегрування.

Означення 2: Сукупність первісних для функції $f(x)$ або для диференціала $f(x)dx$ називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x)dx = F(x) + C$, якщо $d[F(x) + C] = f(x)dx$.

$\int$ - символ інтеграла; $f(x)$ - підінтегральна функція; $f(x)\,dx$ - підінтегральний вираз; C - довільна стала невизначеного інтеграла;

З точки зору геометрії, первісна функції є сукупність кривих, які мають зсув за віссю ординат.

Приклад: $\int 2xdx = x^2 + c$.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int d(F(x)) = F(X) + c$.

2. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, а похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$d\int f(x)dx = f(x)dx$,, $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$.

3. Сталий множник підінтегрального виразу можна виносити за знак невизначеного інтеграла: $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$..

4.Невизначений інтеграл алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів цих функцій:

$$\int [f(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u = \varphi(x)$- будь - яка відома функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)dx = F(u)+C$.

2. *Формули інтегрування основних елементарних функцій.*

1. $\int du = u + c$

2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c (n \neq -1)$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + c$

4. $\int a^n du = \dfrac{a^n}{\ln a} + c$

5 $\int e^u du = e^u + c$

6. $\int$ sinudu= -cosu +c

7. $\int$ cosudu = sinu + c

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + c$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$

10. $\int$ tgudu= -ctgu+c

11. $\int$ ctgudu=ln$|\sin u| + c$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin u + c$

13. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctgu + c$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

15. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u - a}{u + a}\right| + c$

16. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a + u}{a - u}\right| + c$

3. Означення та властивості визначеного інтеграла.

Означення: Якщо границя інтегральної суми існує і не залежить від способу поділу *[a;Ь]* і від вибору точки в середині кожного із відрізків, то ця границя називається визначеним інтегралом функції *y =f* (x) на проміжку *[a; Ь]*.

Позначається: $$\int_a^b f(x)dx = \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}}{Lim} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k, \partial e$$

а - нижня границя, в — верхня границя.

Геометричний зміст визначеного інтеграла - він чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, яка розташована над віссю Ох і обмежена лініями *y =f*(x), *x=a, x=в, y=0.*

Механічний зміст визначеного інтеграла - це величина шляху, який проходить точка за час A? зі змінною швидкістю *V = f (t)* при нерівномірному прямолінійному русі.

Основні властивості:

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$, 2. $\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, 4. $\int_a^a f(x)dx = 0$

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4. *Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона — Лейбніца.*

1. Нехай точка рухається прямолінійно за час x проходить відстань F(X), Тоді за час від моменту а до моменту в (тобто, за час b-a) точка пройде відстань F(b)- F(a).

2. З іншого боку: швидкість точки V =F'(x). Позначимо F'(x} = *f* (x), при чому

F(x) - первісна для *f(x)*

3. Таким чином, отримаємо: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$

Для обчислення визначеного інтеграла від функції *f (x)* в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл F*(X)* використовують формулу Ньютона - Лейбніца, тобто визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної при верхній і нижній межах інтегрування.

Приклад:

$$\int_2^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 3$$

5. *Диференціальні рівняння. Частинний та загальний розв 'язок. Рівняння.* Частинним розв'язком рівняння *F(x,y,y') = 0* або *y' - f (x,y)* на проміжку X називається функція *y* = φ(x), яка після її підстановки в це рівняння разом зі своєю похідною φ′ перетворює його в тотожність відносно *xєX* . Рівняння *Ф(x,y)* = 0, яке визначає цей розв'язок як неявну функцію, називається інтегралом або частинним інтегралом диференціального рівняння. На площині з вибраною декартовою прямокутною системою

координат рівняння *Ф(x,y)* = О визначає деяку криву, яка називається інтегральною кривою.

Загальним розв'язком диференціального рівняння *F(x,y,y') = 0* або *y' = f (x,y)* називається така функція *y* = φ *(x,C),* яка при довільному значенні параметра С є розв'язком цього рівняння. Рівняння *Ф(x,y,C)* = О, яке визначає загальний розв'язок як неявну функцію, називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Приклад: y′=sin2x

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x$$

Це є загальний розв'язок рівняння.

$$dy = \sin 2x dx$$

Контрольні питання:

$$\int dy = \int \sin 2x dx$$

1. Що називається первісною для функції /(*)?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Властивості невизначеного інтеграла.
4. Формули інтегрування основних елементарних функцій.
5. Що називається визначеним інтегралом від функції?
6. Які властивості має визначений інтеграл?
7. Формула Ньютона-Лейбніца?
8. Яке рівняння називається диференціальним?
9. Що називається загальним і частинним розв'язком диференціального рівняння?

Список рекомендованої літератури:

1. К.Г.Валєєв «Вища математика». Навчальне - методичний посібник. Київ 2002.
2. І.П.Васильченко «Вища математика». Підручник. Київ 2000.
3. Т.В.Ковальчук, В.Є.Мартиненко «Вища математика для економістів». Підручник. Київ2005.

4.В.А.Засуха, В.П.Лисенко «Прикладна математика». Підручник. Київ 2005.

5. Н.С.Пискунов «Дифференциальное й интегральное исчисление». Москва 1972.

б.И.И.Лихолетов «Высшая математика». Минск 1976

7. В.А.Кудрявцев, В.П.Демидович «Краткий курс высшей математики». М:

Лекція 8

ТЕМА: Диференціальні рівняння

1.Диференціальні рівняння. Частинний та загальний розв'язок. Рівняння.

1. *Диференціальні рівняння. Частинний та загальний розв 'язок. Рівняння.* Частинним розв'язком рівняння $F(x,y,y') = 0$ або $y' - f(x,y)$ на проміжку X називається функція $y = \varphi(x)$, яка після її підстановки в це рівняння разом зі своєю похідною φ' перетворює його в тотожність відносно $x \epsilon X$. Рівняння $\Phi(x,y) = 0$, яке визначає цей розв'язок як неявну функцію, називається інтегралом або частинним інтегралом диференціального рівняння. На площині з вибраною декартовою прямокутною системою

координат рівняння $\Phi(x,y) =$ O визначає деяку криву, яка називається інтегральною кривою.

Загальним розв'язком диференціального рівняння $F(x,y,y') = 0$ або $y' = f(x,y)$ називається така функція $y = \varphi(x,C)$, яка при довільному значенні параметра С є розв'язком цього рівняння. Рівняння $\Phi(x,y,C) =$ O, яке визначає загальний розв'язок як неявну функцію, називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Приклад: $y' = \sin 2x$

Це є загальний розв'язок рівняння.

$$\frac{dy}{dx} = \sin 2x$$

$$dy = \sin 2x dx$$

$$\int dy = \int \sin 2x dx$$

$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

Контрольні питання:

1.Яке рівняння називається диференціальним?

2. Що називається загальним і частинним розв'язком диференціального рівняння?

Список рекомендованої літератури:

3. К.Г.Валєєв «Вища математика». Навчальне - методичний посібник. Київ 2002.
4. І.П.Васильченко «Вища математика». Підручник. Київ 2000.
3. Т.В.Ковальчук, В.Є.Мартиненко «Вища математика для економістів». Підручник. Київ2005.

4.В.А.Засуха, В.П.Лисенко «Прикладна математика». Підручник. Київ 2005.

5. Н.С.Пискунов «Дифференциальное й интегральное исчисление». Москва 1972.

б.И.И.Лихолетов «Высшая математика». Минск 1976

7. В.А.Кудрявцев, В.П.Демидович «Краткий курс высшей математики». М:

Лекція 9

Тема: Дискретні та неперервні випадкові величини

План

1. Випадкові величини.
2. Поняття дискретної випадкової величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини.
3. Числові характеристики дискретної випадкової величини та їх властивості.

4. Закони розподілу ймовірностей випадкової величини.

5. Неперервні випадкові величини

ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, ДИСКРЕТНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА, МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ, ДИСПЕРСІЯ, СЕРЕДНЄ КВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ.

1. Випадкові величини. Розглянемо події, які заключаються в появі того чи іншого числа. Наприклад: при киданні грального кубика могли з'явитися числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наперед визначити число очок на грані кубика неможливо, тому що воно залежить від багатьох випадкових величин, які повністю не можуть бути враховані. Отже число очок є величина випадкова, а число 1, 2, 3, 4, 5 і 6 є можливі значення цієї величини.

Випадковою називається величина, яка в результаті випробувань може набувати різних числових значень. Випадкові величини поділяються на дискретні і неперервні.

2. Поняття дискретної випадкової величини. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Випадкова величина називається дискретною, якщо вона приймає значення деякої числової послідовності (скінченої або нескінченної). Випадкові величини позначають прописними великими буквами X, Y, Z, а їх можливі значення x, y, z.

Наприклад: якщо випадкова величина X має три можливі значення, то вони будуть позначені x_1, x_2, x_3.

Приведемо приклад дискретної випадкової величини: кількість зерен в колоссі пшениці, кількість яблук на дереві. В цих випадках випадкова величина приймає окремі, ізольовані можливі значення.

На перший погляд можна вважати, що для задання дискретної випадкової величини достатньо перерахувати всі її можливі значення. В дійсності це не так: випадкові величини можуть мати однаковий перелік можливих значень, а ймовірності їх - різні. Тому для задання дискретної випадкової величини недостатньо перерахувати всі можливі її значення, треба ще й вказати їх ймовірності.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями і їх ймовірностями; його можна задати таблично, аналітичне (у вигляді формули) і графічно.

При табличному заданні закону розподілу дискретної випадкової величини перша строчка таблиці містить можливі значення, а друга - їх ймовірності.

X x_1, x_2 ... x_n

P p_1 p_2 ... p_n

Приймаючи до уваги, що в одному випробуванні випадкова величина приймає одне і тільки одне можливе значення, заключаємо, що події $X = x_1$, $X = x_2, \ldots, X = x_p$, утворюють повну групу подій; отже сума ймовірностей

другої строчки рівна 1.

$$P_1+p_2 + \ldots + p_n = 1$$

3. Числові характеристики дискретної випадкової величини та їх властивості. Дискретна випадкова величина має такі числові характеристики: математичне сподівання (очікування), дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на її ймовірності.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математичне сподівання ще називають центром розсіювання випадкової величини.

Приклад: Дано ряд розподілу дискретної випадкової величини X:

X	1	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Знайти M(X).

Розв'язання : $M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}7$

Математичне сподівання має такі властивості:

1) M(C)=C (C - стала)
2) M(CX)=CM(X)
3) M(X+У)=M(X)+M(У)
4) M(X*У)=M(X)*M(У), якщо X і У - незалежні випадкові величини.

Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрати різниці випадкової величини і її математичного сподівання.

$$D(X) = M(X-M(x))^2$$

Теорема: Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання.

$$D(X) = M(x^2)-(M(x))^2$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається корінь квадратний із дисперсії. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення є мірою розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Приклад: Дана дискретна випадкова величина

X	4	5	6
P	0,4	0,5	0,1

Знайти: D(X); σ(X).

Розв'язання

Знаходимо $M(X) = 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}1 = 1{,}6 + 2{,}5 + 0{,}6 = 4{,}7$

$D(X) = (4 - 4{,}7)^2 \cdot 0{,}4 + (5 - 4{,}7)^2 - 0{,}5 + (6 - 4{,}7)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}49 \cdot 0{,}4 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 1{,}69 \cdot 0{,}1 =$

$= 0{,}196 + 0{,}045 + 0{,}169 = 0{,}41$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}41} = 0{,}64$

Властивості дисперсії:

1) D(C)=0 (C - стала величина)
2) $D(CX)=C^2D(X)$
3) D(X+У)=O(X)+B(У)
4) D(X-y)=D(X)-D(Y)

4. Інтегральна функція розподілу та її властивості. Згадаємо, що дискретна випадкова величина задається переліком усіх її можливих значень і їх ймовірностей. Такий спосіб задання не являється загальним і його не можна використовувати для неперервних випадкових величин.

Розглянемо випадкову величину **x** можливі значення якої заповнюють повністю інтервал (a;b). Чи можливо скласти перелік всіх можливих значень **x**? Звичайно цього зробити не можна. Цей приклад вказує на доцільність дати загальний спосіб задання любих типів випадкових величин.

Для задання любого типу випадкової величини вводять інтегральну функцію розподілу.

Нехай **x** – дійсне число. Ймовірність події, суть якої в тому, що випадкова величина **X** приймає значення менше **x**, тобто ймовірність події **X**$\prec$ **x** позначимо через $F(x)$. Якщо **x** буде змінюватися, то буде змінюватися і $F(x)$.

<u>Інтегральну функцію розподілу</u> називають функцією $F(x)$, яка визначає для кожного значення **x** ймовірність того, що випадкова величина **X** прийме значення, яке менше **x**, тобто $F(x) = P(X \prec x)$.

Геометрично цю рівність можна пояснити так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке зображається на числовій осі точкою, яка лежить лівіше точки **x**.

Тепер можна дати означення неперервної випадкової величини.

Випадкова величина називається <u>неперервною (абсолютно неперервною)</u> якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dt \qquad x \in R.$$

Властивості інтегральної функції

1. Значення інтегральної функції належить відрізку [0;1]

$$0 \le F(x) \le 1$$

2. $F(x)$ - неспадна функція, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 \succ x_1$.

3. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a;b) то: а) $F(x) = 0$ при $x \le a$

б) $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

2. Диференціальна функція розподілу та її властивості. Ми розглянули задання неперервної випадкової величини за допомогою інтегральної функції. Цей спосіб не є єдиним. Наприклад випадкову величину можна задати, користуючись диференціальною функцією розподілу.

<u>Диференціальною функцією розподілу</u> $f(x)$ називають першу похідну від інтегральної функції:

$$f(x) = F'(x)$$

Отже інтегральна функція являється первісною для диференціальної. Зауважимо, що опису розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини диференціальна функція не використовується.

Властивості диференціальної функції:

1. Диференціальна функція невід’ємна $f(x) \ge 0$.

2. Невласний інтеграл від диференціальної функції в межах $(-\infty;+\infty) = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Згадаємо формули, які вказують на зв’язок між інтегральною та диференціальною функціями.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$f(x) = F'(x)$$

Функцію $f(x)$ також називають щільністю розподілу ймовірностей.

3. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал. Знаючи обидві функції розподілу: інтегральну та диференціальну, можна обчислити ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке належить заданому інтервалу.

Теорема: Ймовірність того, що неперервна випадкова величина **x** прийме значення, яке належить інтегралу (a;b), дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції, взятому в межах від a до b.

$$P(a \prec X \prec b) = \int_a^b f(x)dx .$$

Наслідок: Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (a;b) дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі:

$$P(a \prec X \prec b) = F(b) - F(a)$$

Наприклад: Випадкова величина задана інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + x \le 3 \\ 1 \quad при \quad x \succ 3 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування **x** прийме значення , яке належить інтервалу (0;2).

$$P(0 \prec x \prec 2) = F(2) - F(0) = (\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P(0 \prec x \prec 2) = 0{,}5 .$$

4. Числові характеристики неперервної випадкової величини. Розглянемо також числові характеристики неперервних випадкових величин.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини **X** можливі значення якої належать відрізку [a;b] називають визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b Xf(x)dx$$

Якщо можливі значення належать всій осі **x**, то :

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} Xf(x)dx$$

Дисперсією неперервної випадкової величини **X** називають <u>математичне сподівання квадрата її відхилення.</u>

$$D(X) = \int_{a}^{b} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$$

Якщо можливо значення **X** належать всій осі **x**, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається рівністю:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

<u>Приклад:</u> Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини **X**, заданою інтегральною функцією.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0 \\ x, & при \quad 0 \prec x \le 1 \\ 1, & при \quad x \succ 1 \end{cases}$$

$$f(x) \succ F'(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0 \\ 1, & при \quad 0 \prec x \le 1 \\ 0, & при \quad x \succ 1 \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{0}^{1} x \cdot 1dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

Лекція 10

Тема: Статистичне опрацювання вибірки. точкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу генеральної сукупності.

План

1. Визначення математичної статистики.
2. Вибірка розподіл вибірки.
3. Варіаційний ряд. Види рядів.
4. Характеристика варіаційних рядів. Графічне зображення рядів.
5. Емпірична функція розподілу та її властивості.
6. Метод умовних варіацій.

ГЕНЕРАЛЬНА СУКУПНІСТЬ, ВИБІРКА, ВАРІАНТА, ВАРІАЦІЙНИЙ РЯД, ВАРІАЦІЯ.

1. Визначення математичної статистики. Математична статистика вивчає методи, які дають змогу за результатами випробувань робити певні ймовірнісні висновки.

Задача математичної статистики полягає в створенні методів збору і обробки статистичних даних для одержання наукових і практичних висновків.

Математична статистика – це розділ прикладної математики.

У науці, техніці й виробництві, включаючи агарарні, маємо справу із системами багатьох об’єктів, явищ. Наприклад, ферма складається з великої кількості тварин. Такі великі системи досліджуються методами математичної статистики.

Математична статистика вивчає закономірності властивостей систем, до складу яких входять багато об’єктів. Вона являє собою науку про методи обробки великої кількості дослідних даних із метою одержання адекватних (достовірних) висновків і використовується в біології, агрономії, зооінженерії, ветеринарії та інших галузях науки, техніки, виробництва.

В аграрних галузях, як і в інших, методами математичної статистики проводять систематизацію і аналіз числових даних, спостережень і досліджень над біологічними організмами, рослинами та тваринами, а також узагальнення виробничих показників сільського господарства, у тому числі тваринництва.

Математична статистика набула широкого застосування у селекційних та племінних дослідах із метою вдосконалення якостей рослин і тварин.

2. Вибірка. Розподіл вибірки. Нехай задано скінчену множину **A**, що складається із однотипних елементів (наприклад, партія деяких виробів). Треба вивчити кількісну чи якісну ознаку елементів множини **А**. Множину **А** називають генеральною сукупністю. Експеримент полягає в тому, що ми вибираємо навмання один із елементів множини **А**, реєструємо деяку його характеристику **Х** (наприклад довжину, вагу) і повертаємо цей елемент до множини.

Група об'єктів, відібраних у відповідний спосіб, називається вибірковою сукупністю або випадковою вибіркою об'єму **n**. Результати вибірки розглядають, як послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин x_1, x_2, ..., x_n.

За допомогою вибірки оцінюють генеральну сукупність по ймовірносним властивостям.

Випадково вибраний об'єкт після перевірки необхідної ознаки можна повернути (повторна вибірка) або не повертати (безповоротна вибірка) в генеральну сукупність.

3. Варіаційний ряд. Види рядів. Статистичний ряд графічно подається полігоном розподілу.

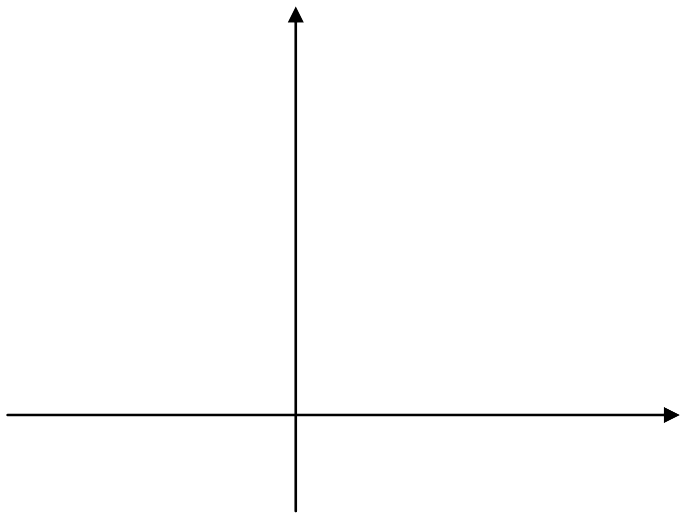
Щоб побудувати його, на осі абсцис відкладають значення x_i, а на осі ординат – відповідні їм частоти(відносні частоти). Здобуті точки сполучають відрізками.

Коли x – неперервна величина і обсяг вибірки, результати вибірки подають інтервальним рядом . Для цього область реалізацій розбивають на n інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Здобутий ряд геометрично подається гістограмою. Для її побудови на осі абсцис відкладають інтервали, а на них як на оновах будують прямокутники висота яких пропорційна до частоти (відносної частоти інтервалу). Гістограма має певне уявлення про графік щільності розподілу.

Наприклад: Побудувати полігон частот для вибірки, поданої у вигляді частот.

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	8

n = 1+3+2+8 = 14



Приклад: Побудувати гістограму та полігон відносних частот вибірки, поданої у вигляді таблиці частот.

інтервал	(-3;-2)	(-2;-1)	(-1;0)	(0;1)	(1;2)	(2;3)	(3;4)	(4;5)
n_i	3	10	15	24	25	13	7	3

Розв’язання: Середини інтервалів:

-2,5; -1,5; -0,5; 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5.

Об’єм вибірки: n = 3+10+15+24+25+13+7+3 = 100

Побудуємо полігон:

z_i	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{3}{100}$

4. Характеристика варіаційних рядів. Графічне зображення рядів. Нехай із генеральної сукупності зроблено вибірку об’єму n. Значення x_i вибірки називають варіантами. Запишемо значення варіант в порядку зростання. Дістанемо варіаційний (або статистичний) ряд. При цьому x_i повторюється n_i раз ($i = 1,\ 2,\ ...,\ k$), то число n_i - називається частотою варіанти x_i, а число $\frac{n_i}{n}$ - частотою варіанти x_i.

Відхилення значень ознаки одне від одного називається варіаціями.

Статистичним розподілом вибірки називається перелік варіант і відповідних частот або відносних частот.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

- статистичний ряд частот

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

- статистичний ряд відносних частот

Ознаки елементів ряду, можуть приймати як дискретні (цілі числа), так і неперервні (будь-які числа, у тому числі дробові) значення.

Залежно від того, дискретно чи неперервно, у вузькому чи широкому інтервалі змінюються ознака, матимемо безінтервальні та інтервальні ряди відповідно.

У безінтервальних рядах частота n_i відноститься до конкретних значень ознаки x_i, а в інтервальним – до окремих інтервалів, на які розбивається значення ознаки в межах від $x_{\min}$ до $x_{\max}$.

Із варіаційного ряду будується кумулятивний ряд шляхом послідовного додавання частот: до частоти першого класу додається частота другого класу; до одержаної суми додають частоту третього клас і т.д.

5. Емпірична функція розподілу та її властивості. Закон розподілу всіх x_i визначається функцією $F^t(x)$, яка називається емпіричною функцією розподілу.

$$F^t(x) = \frac{n_x \prec x}{n}$$

$n_x \prec x$ - число елементів вибірки значення яких менші числа x.

Емпіричну функцію розподілу $F^t(x)$ можна використовувати як оцінку (наближене значення) функції розподілу $F(x)$ випадкової величини x (генеральної сукупності).

Функція $F^t(x)$ має всі властивості функції розподілу $F(x)$.

1. $0 \le F^t(x) \le 1$

2. $F^t(x)$ - неспадна функція

3. $F^t(x)$ - неперервна зліва

4. $F^t(x) = 0$ при $x \prec x_j$, де x_j - найменша варіанта

5. $F^t(x) = 1$ при $x \succ x_k$, де x_k - найбільша варіанта.

Медіаною Me називають варіанту, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні по числу варіант.

Мода – це елемент, який найчастіше трапляється у виборці.

6. Метод умовних варіацій. Нехай задано закон розподілу вибірки

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

При великих значеннях x_i, для зручності обчислень можна ввести допоміжну випадкову величину Y.

$Y = \dfrac{x - C}{h}$, де C - число, яке називають хибним нулем.

Вибір цього числа довільний. Але, звичайно, в якості C вибирають середнє значення випадкової величини або значення випадкової величини, яка має найбільшу частоту.

h - крок (відстань між сусідніми варіантами).

Приклад:

x_i	126	128	130	133	135
n_i	3	6	10	9	12

$C = 130 \quad h = 2$

$Y = \dfrac{x - C}{h}$ $\qquad Y_1 = \dfrac{126 - 130}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

$$Y_2 = \frac{128 - 130}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$Y_3 = 0$$

$$Y_4=\frac{133-130}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$Y_5=\frac{135-130}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

Y_i	-2	-1	0	1,5	2,5
n_i	3	6	10	9	12

Контрольні питання:

1. Що вивчає математична статистика та її роль в наукових та виробничих дослідах?
2. Що називається генеральною сукупністю?
3. Яка функція називається емпіричною? Перелічити її властивості.
4. Що називається вибіркою?
5. Дати означення варіаційного ряду. На які види поділяються ряди?
6. Що називається статистичним розподілом вибірки?
7. Чим графічно задається статистичний ряд?
8. Що називається модою та медіаною?
9. В чому полягає суть методу хибного (несправжнього)нуля?

Лекція 11
Тема: Основи кореляційного та регресивного аналізу

План

1. Лінійна кореляція та лінія регресії.
2. Коефіцієнт кореляції. Розрахунок прямих регресії.
3. Нелінійна кореляційна залежність. Метод найменших квадратів.

КОРЕЛЯЦІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ, РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ, КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ, КОРЕЛЯЦІЙНЕ ВІДНОШЕННЯ.

1. Лінійна кореляція та лінія регресії. Часто доводиться мати справу з більш складною залежністю, ніж функціональна. Якщо кожному значенню однієї величини відповідає множина можливих значень іншої, то такі залежності належать до <u>кореляційних залежностей.</u>

Статистичною називають залежність, при якій зміна однієї із величин призводить до зміни розподілу іншої. Якщо при зміні однієї із величин змінюється середнє значення другої, то статистичну залежність називають кореляційною.

Нехай вивчається зв'язок між випадковими величинами *Y* та *X*. Нехай кожному значенню *X* відповідає декілька значень *Y*: $y_1, y_2, ..., y_k$. Середнє арифметичне цих чисел є число $\overline{y_k} = \frac{y_1 \cdot y_2 \cdot ... \cdot y_k}{k}$, яке називають умовним середнім, що відповідає значенню $X = x$.

Кореляційне залежністю *Y* від *X* називають функціональну залежність умовної середньої $\overline{y_x}$ від x: $y_x = f(x)$. Це рівняння називають рівнянням регресії *Y* на X; функцію *f(x)* називають регресією *Y* на *X*, а її графік - лінією регресії *Y* на *X*. Аналогічно означаються умовна середня x_y та кореляційна залежність *X* від Y: $x_y = ky + m$.

Математична статистика розв'язує дві основні задачі теорії кореляції:

а) встановити форму кореляційного зв'язку, тобто вид функції регресії (лінійна, квадратична, показникові і т.д.). Якщо при цьому функції (лінії) регресії *Y* на *X* і *X* на *Y* - прямі, то кореляцію називають лінійною;

б) оцінити тісноту (силу) зв'язку, яка оцінюється за величиною розсіювання значень навколо умовної середньої. Чим більше розсіюваність, тим слабша залежність.

2. Коефіцієнт кореляції. Розрахунок прямих регресії. Рівняння регресії *Y* на *X* при лінійному кореляційному зв'язку можна записати у вигляді $y_x = ax + b$. Кутовий коефіцієнт *a* називають вибірковим коефіцієнтом регресії і позначаються через ρ_{yx}. Коефіцієнти a та b за допомогою методу найменших квадратів знаходять із системи : $\begin{cases} b\sum x_i + a\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \\ nb + a\sum x_i = \sum y_i \end{cases}$

Приклад. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії Y на X за даними $n = 5$ спостережень:

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Для підрахунку коефіцієнтів системи складемо розрахункову таблицю:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	5,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x_i^2 = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Із системи отримаємо значення a та b: $a = \dfrac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x^2)}$,

$$b = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x^2)}.$$

Підставивши значення сум із таблиці, отримаємо:

$$a = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} \approx 0{,}202, \quad b = \frac{57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{62{,}5} \approx 1{,}024.$$

Тому шукане рівняння регресії Y на X має вид: $\overline{y_x} = 0{,}202x + 1{,}024$.

Вибіркове рівняння прямої регресії (Y на X) прийнято записувати ще в іншій формі: $\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_в \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$, де $\overline{y_x}$ - умовна середня, $\overline{x}$ та $\overline{y}$ - вибіркова середня ознак X та Y, σx та σy - вибіркове середнє квадратичне відхилення, $\rho_в$ - вибірковий коефіцієнт кореляції, який обчислюється за формулою: $\rho_в = \dfrac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{n\sigma_x \sigma_y}$.

Приклад. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці:

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22
				1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах, вибравши за «хибні» нулі $C_1 = 30$ та $C_2 = 36$.

v	u					n_v
	-2	-1	0	1	2	
-2	4	6				10
-1		8	10			18
0			32	3	9	44
1			4	12	6	22
2				1	5	6
n_v	4	14	46	16	20	$n=100$

Знайдемо $\bar{u}$ та $\bar{v}$: $\bar{u} = \dfrac{(\sum n_u \cdot u)}{n} = \dfrac{(4\cdot(-2)+14\cdot(-1)+46\cdot 0+16\cdot 1+20\cdot 2)}{100} = 0{,}34$

$$\bar{v} = \frac{(\sum n_v \cdot v)}{n} = \frac{(10\cdot(-2)+18\cdot(-1)+44\cdot 0+6\cdot 2)}{100} = -0{,}04$$

Знайдемо допоміжні величини $\bar{u}^2 = (0{,}34)^2$ та $\bar{v}^2 = (-0{,}04)^2$;

$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1{,}26 - 0{,}34^2} \approx 10{,}7$; $\quad \sigma_v = \sqrt{1{,}04 \cdot 0{,}04^2} \approx 1{,}02$

Обчислимо:

$$\sum n_{uv} \cdot uv = 4\cdot(-2)\cdot(-2)+6\cdot(-2)\cdot(-1)+8\cdot(-1)\cdot(-1)+10\cdot(-1)\cdot 0+32\cdot 0\cdot 0+4\cdot 1\cdot 0+3\cdot 0\cdot 1+12\cdot 1\cdot 1+$$
$$+1\cdot 2\cdot 1+9\cdot 0\cdot 2+6\cdot 1\cdot 2+5\cdot 2\cdot 2 = 82$$

Знайдемо шуканий вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$\rho_в = \frac{\sum n_{uv} \cdot uv - n\overline{uv}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{82 - 100\cdot 0{,}34\cdot(-0{,}04)}{100\cdot 1{,}07\cdot 1{,}02} = 0{,}76$$

Знайдемо кроки h_1 та h_2 (різниці між двома сусідніми варіантами): $h_1 = 25 - 20 = 5$; $h_2 = 26 - 16 = 10$.

Знайдемо $\bar{x}$ та $\bar{y}$, враховуючи, що $C_1 = 30$, $C_2 = 36$:

$\bar{x} = \bar{u}\cdot h_1 + C_1 = 0{,}34\cdot 5 + 30 = 31{,}70$; $\quad \bar{y} = \bar{v}\cdot h_2 + C_2 = (-0{,}04)\cdot 10 + 36 = 35{,}60$

Обчислимо: $\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u = 5\cdot 1{,}07 = 5{,}35$; $\sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v = 10\cdot 1{,}02 = 10{,}2$.

Тоді шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X буде:

$\bar{y}_x - 35{,}60 = 0{,}76\cdot\dfrac{10{,}2}{5{,}35}\cdot(x - 31{,}70)$, або $\bar{y}_x = 1{,}45x - 10{,}36$.

3. Нелінійна кореляційна залежність. Метод найменших квадратів. Якщо відображені на площині XOY групи точок (x,y) і (x,y)

розміщуються, нагадуючи деякі криві, то доцільно вважати, що між досліджуваними величинами існує нелінійна залежність. Тепер знову виникло завдання підібрати таку криву, яка б на основі методу найменших квадратів мала найменші відхилення від точок, здобутих при спостереженні, знайти її рівняння і визначити тісноту зв'язку.

Розглянемо деякі найпростіші види нелінійної кореляційної залежності. Нехай зі зростанням однієї випадкової величини умовні середні другої спадають, але не на ту саму величину, як це буває в разі лінійної залежності,

а розмір зміни ніби згасає. У такому разі можна вважати, що залежність гіперболічна:

$$\bar{y}_x = \frac{a}{x} + b, \text{ або } \bar{x}_y = \frac{c}{y} + d$$

Параметри a і b за методом найменших квадратів визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}n_{x_i} + b\sum_{i=1}^{m}n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m}\bar{y}_{x_i}n_{x_i} \\ a\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i^2}n_{x_i} + b\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}\bar{y}_{x_i}n_{x_i} \end{cases}$$

Аналогічно складається система рівнянь у разі, коли x_y гіперболічно залежить від y.

Нехай зі зростанням однієї випадкової величини умовні середні другої зростають (спадають), досягають максимуму (мінімуму), а потім спадають (зростають). Тоді можна вважати, що між ними існує параболічна залежність виду:

$$y_x = a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ або } x_y = b_2y^2 + b_1y + b_0$$

За методом найменших квадратів для визначення значень параметрів a_2, а,, a_0 потрібно скласти і розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_i} + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i} + a_0\sum_{i=1}^{m} n_{x i} = \sum_{i=1}^{m} \overline{y_{x_i}} n_{x_i}, \\ a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^3 n_{x_1} + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_1} + a_0\sum_{i=1}^{m} x_i n_{x_i} = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y}_{x_i} n_{x_i}, \\ a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^4 n_{x_i} + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^3 n_{x_i} + a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_{x_1} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \overline{y}_{x_1} n_{x_1} \end{cases}$$

У разі нелінійної кореляційної залежності тіснота зв'язку між величинами характеризується кореляційним відношенням. <u>Кореляційним відношенням</u> називається відношення середніх квадратичних відношень умовних середніх до загального середнього квадратичного відхилення:

$$\eta_{\frac{y}{x}} = \frac{\delta_y}{s_y}; \quad \eta_{\frac{x}{y}} = \frac{\delta_x}{s_x}, \text{ де } \delta_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(\overline{y}_{x_i} - \overline{y})^2 n_{x_i}}{n}}; \quad \delta_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k}(\overline{x}_{y_j} - \overline{x})^2 n_{y_j}}{n}}$$

Кореляційне відношення набуває значення на відрізку [0;1]. Якщо кореляційне відношення дорівнює нулю, то кореляційний зв'язок відсутній, якщо η =1, то випадкові величини зв'язані функціональною залежністю. Зі зростанням значення η тіснота кореляційного зв'язку збільшується.

Приклад: У результаті обстеження одержано статистичний розподіл ЗО однотипних підприємств по добовому виробленню продукції *X і* собівартості одиниці цієї продукції Y. Установити форму залежності між *X* і Y, знайти рівняння ліній регресії і оцінити тісноту зв'язку

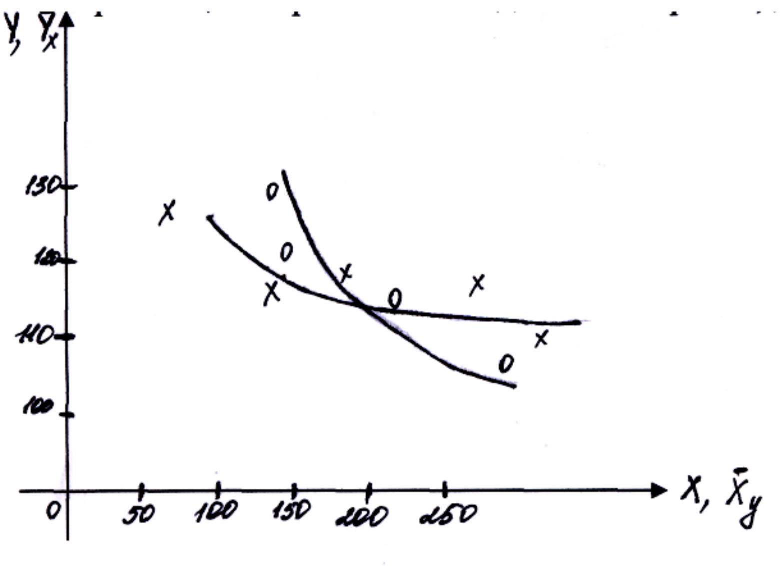
Розв'язання: Знаходимо умовні середні значення y_{xi} і x_{yJ}. Результати обчислень заносимо в таблицю. У цій самій таблиці зроблено перехід до умовних змінних.

Y / x	100	110	120	130	n_{x_i}
50			1	3	4
100		3	3		6
150		6	2	1	9
200	1	4		1	6
250	4	1			5
n_{y_j}	5	14	6	5	30

Переходячи до умовних змінних, ураховуємо, що $C_1 = 150$, $\Delta x = 50$, $C_2 = 110$, $\Delta y = 10$.

V / u	-1	0	1	2	n_{x_i}	$\overline{y}_{x_i}$
-2			1	3	4	127,5
-1		3	3		6	155
0		6	2	1	9	114,4
1	1	4		1	6	111,7
2	4	1			5	102
n_{y_j}	5	14	6	5	30	
$\overline{x}_{y_j}$	240	160,7	108,3	100		

На рисунку зобразимо на координатній площині множини точок (x_i, y_{xi}) і (x_{yj}, y_j) відповідно значками «х» і «о». Згідно з рисунком кожна із груп точок розміщена приблизно на деякій гіперболі, дещо відхиляючись від неї.



Рівняння гіперболи $\overline{y}_x = f(x)$ шукаємо у вигляді $\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b$. Для визначення коефіцієнтів відповідної системи рівнянь складаємо таблицю:

x_i	n_{x_i}	$\frac{n_{x_i}}{x_i}$	$\frac{n_{x_i}}{x_i^2}$	$\overline{y}_{x_i}$	$\overline{y}_{x_i} n_{x_i}$	$\frac{\overline{y}_{x_i} n_{x_i}}{x_i}$
50	4	0,08	0,0016	127,5	510	10,2
100	6	0,06	0,0006	115	690	6,9
150	9	0,06	0,0004	114,4	1030	6,86
200	6	0,03	0,00015	111,7	670	3,35
250	5	0,02	0,00008	102	510	2,04
Сума	30	0,25	0,00283	-	3410	29,35

Невідомі параметри a і b знайдемо із системи рівнянь.

$$\begin{cases} 0{,}25a + 30b = 3410 \\ 0{,}00283a + 0{,}25b = 29{,}35 \end{cases}$$

Розв'язок системи $a \approx 1250$, $b \approx 103{,}3$. Рівняння регресії має вигляд:

$$\overline{y}_x = \frac{1250}{x} + 103{,}3.$$

Аналогічно можна скласти систему рівнянь і знайти рівняння регресії

$$\overline{x}_y = \frac{c}{y} + d.$$

Складаючи відповідну систему рівнянь і розв'язуючи її, дістаємо

$$\overline{x}_y = \frac{36998}{y} - 175$$

Тісноту зв'язку між випадковими величинами оцінимо з допомогою кореляційних відношень.

Необхідні для розрахунків параметри знайдемо з допомогою умовних моментів розподілу:

$$\bar{u} = \frac{1}{15}; \quad \bar{u}^2 = \frac{8}{5}; \quad \bar{v} = \frac{11}{30}; \quad \bar{v}^2 = \frac{31}{30};$$

$$\bar{x} = \frac{1}{15} \cdot 50 + 150 \approx 153; \quad \bar{y} = 10 \cdot \frac{11}{30} + 110 \approx 114;$$

$$s_x = 50\sqrt{\frac{8}{5} - \left(\frac{1}{15}\right)^2} \approx 63; \quad s_y = 10\sqrt{\frac{31}{30} - \left(\frac{11}{30}\right)^2} \approx 9{,}5;$$

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(\bar{y}_i - 114)^2 n_{x_i}}{30}} \approx 7{,}2; \quad \delta_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{4}(\bar{x}_{y_j} - 153)^2 n_{y_j}}{30}} \approx 47.$$

Отже, $\eta_{\frac{y}{x}} = \frac{7{,}2}{9{,}5} \approx 0{,}76; \quad \eta_{\frac{x}{y}} = \frac{47}{63} \approx 0{,}75.$

З огляду на значення кореляційних відношень можна стверджувати, що між добовим виробітком продукції і собівартістю одиниці продукції існує досить істотна кореляційна залежність.

Контрольні питання:

1. Яка залежність *Y* від *X* називається кореляційною?
2. Яке рівняння називається рівнянням регресії У на Х?
3. Що називається вибірковим коефіцієнтом регресії?
4. В чому полягає суть методу найменших квадратів?

Список літератури:

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1986.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. Пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высш.шк.,1986.
3. Венецкий И.Г., Венецкая В.Й. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. - М.: Статистика, 1974.
4. Венцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задача по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1972.
7. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.: Высш. шк., 1971.

8. Зайченко Ю.Л. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975.
9. Захаров Б.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.Л. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1983.
10. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Статистика, 1979.
11. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая

статистика. - М.: Высш. шк. 1973.
12. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. - М.: Высш. шк., 1975.
13. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968.
14. Н.Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. - М.: Наука, 1970.
15. Солодовников А.С. Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1983.