

Інструктивно-методичні матеріали

**ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ/ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ
з навчальної дисципліни
ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ**

	(назва навчальної дисципліни)
освітній рівень	молодший бакалавр, бакалавр
	(бакалавр, магістр)
спеціальність	071 «Облік і оподаткування», 051 «Економіка», 073 «Менеджмент. Менеджмент ІТ», 281 «Публічне управління та адміністрування». 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»
	(шифр і назва спеціальності)
факультет	Економічний
	(назва факультету)

Інструктивно-методичні матеріали до практичних/лабораторних занять з навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» для здобувачів першого рівня вищої освіти спеціальності:

- 071 «Облік і оподаткування», 051 «Економіка»,
- 073 «Менеджмент. Менеджмент ІТ»
- 281 «Публічне управління та адміністрування»,
- 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Розробник: Ірина ДЕБЕЛА, к.с.-г.н., доцент кафедри менеджменту та інформаційних технологій.

ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Коцептуальні аспекти моделювання економічних явищ та процесів.	-
2	Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі. Класифікація моделей.	-
3	Тема 3. Детерміновані економіко-математичні моделі з єдиним критерієм оптимальності.	4
4	Тема 4. Мережеві(потоків) моделі та методи їх розв'язку.	2
5	Тема 5. Детерміновані моделі динамічного програмування.	4
6	Тема 6. Нелінійні математичні моделі задач економіки.	2
7	Тема 7. Оптимізаційні методи економетричного моделювання.	-
8	Тема 8. Теорія ігор та прийняття рішень в умовах невизначеності.	4
9	Тема 9. Системи масового обслуговування	
	Усього годин	16

ТЕМИ ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Коцептуальні аспекти моделювання економічних явищ та процесів.	-
2	Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі. Класифікація моделей.	-
3	Тема 3. Детерміновані економіко-математичні моделі з єдиним критерієм оптимальності.	4
4	Тема 4. Мережеві(потоків) моделі та методи їх розв'язку.	-
5	Тема 5. Детерміновані моделі динамічного програмування.	-
6	Тема 6. Нелінійні математичні моделі задач економіки.	-
7	Тема 7. Оптимізаційні методи економетричного моделювання.	4
8	Тема 8. Теорія ігор та прийняття рішень в умовах невизначеності.	-
9	Тема 9. Системи масового обслуговування	-
	Усього годин	8

Практичне заняття №1. Графічний метод розв’язку ЗЛП

Задачі для розгляду на практичному занятті.

№1. Деяке виробниче підприємство спеціалізується на виробництві двох видів продукції — А та В. На виготовлення продукції використовується два види сировини 1 та 2. Норми витрат сировини кожного виду і прибуток фірми від реалізації одиниці продукції подано в табл. 1.

Таблиця 1

Сировина	Норми витрат сировини на одиницю продукції		Виробничий запас сировини
	А	В	
1	3	5	450
2	4	2	280
Прибуток	10	8	

Відомо, що тижневий попит на продукцію типу А перевищує попит на продукцію В не більш як на 10 одиниць, а продаж продукції типу В не перевищує 70 одиниць на тиждень.

Необхідно визначити такі тижневі обсяги виробництва продукції двох типів, що максимізують прибуток фірми.

Побудуємо економіко-математичну модель задачі та розв’яжемо її графічно.

Розв’язання.

Алгоритм графічного методу розв’язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прями, які є межами півплощин - нерівностей системи, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (3.2) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник розв’язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = \text{grad}Z = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора \vec{N} .
6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора \vec{N} (для задачі на $\max Z$) або в протилежному напрямі (для задачі на $\min Z$), знаходимо вершину багатокутника розв’язків, де цільова функція набирає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Побудова математичної моделі. Позначимо x_1 — кількість продукції типу А, виготовлених фірмою за тиждень, а x_2 — кількість продукції типу В. Цільова функція задачі — максимум прибутку фірми від реалізації продукції:

$$Z = 10x_1 + 8x_2 \rightarrow \max .$$

Обмеження задачі враховують норми витрат сировини 1 та 2 для виготовлення продукції та попит на продукцію:

Загалом економіко-математичну модель цієї задачі можна записати так:

$$Z = 10x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

$$\text{за умов: } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 450; \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280; \\ x_1 - x_2 \leq 10; \\ x_2 \leq 70. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Маємо загальну економіко-математичну модель, що є моделлю ЗЛП, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто у визначенні такої області, де водночас виконуються всі обмеження моделі. Замінімо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис. 3.1.). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — ні. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 3.1. її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. Інакше таким зображенням є інша півплощина.

Умова невід'ємності змінних $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат.

Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі — шестикутник $OABCDE$. Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку багатокутника $OABCDE$, в якій цільова функція Z набирає найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор \vec{N} завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами $(x_1 = c_1; x_2 = c_2)$. У нашій задачі вектор $\vec{N} = (10; 8)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції Z , а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $10x_1 + 8x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора \vec{N} і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то пересуватимемо пряму $10x_1 + 8x_2 = 0$ паралельно самій собі згідно з напрямом вектора \vec{N} доти, доки не визначимо останню спільну точку прямої і багатокутника розв'язків, що і відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 1. видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та

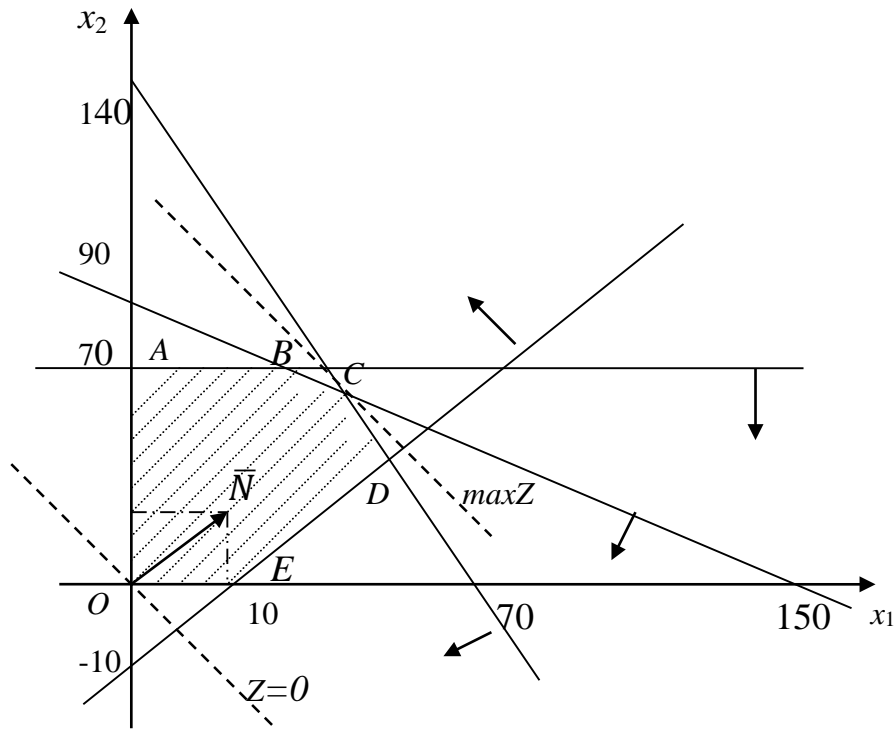


Рис.1

багатокутника $OABCDE$ є \vec{N} точка C . Координати цієї точки є оптимальним планом задачі, тобто такими обсягами виробництва продукції видів А та В, що забезпечують максимум прибутку від їх реалізації за даних умов.

Координати точки C є розв'язком системи рівнянь :

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 450; \\ 4x_1 + 2x_2 = 280, \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 35,7$; $x_2 = 68,6$.

Отже, $X^* = (36; 68)$; $\max Z = 10 \cdot 36 + 8 \cdot 68 = 904$.

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 36 одиниць продукції типу А та 68 — типу В, то вона отримає максимальний прибуток — 904 грошові одиниці. Це потребуватиме повного використання тижневих ресурсів сировини 1 та 2

Індивідуальні завдання до практичної роботи №1.

Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} & \boxed{1.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97, \\ x_1 + 7x_2 \geq 77; \end{cases} \\ & Z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min (\max) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{2.} \begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19; \end{cases} \\ & Z = x_1 + 5x_2 \rightarrow \min (\max) \end{aligned}$$

$$\boxed{3.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71; \end{cases}$$

$$\boxed{4.} \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \geq 17, \\ x_1 + 2x_2 \leq 34, \\ -x_1 + 9x_2 \geq 17; \end{cases}$$

$$Z = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{5.} \quad & -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ & 5x_1 - 7x_2 \leq 27, \\ & x_1 + 4x_2 \geq 27; \end{aligned}$$

$$Z = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{7.} \quad & -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ & 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ & 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \end{aligned}$$
$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{9.} \quad & 10x_1 - x_2 \geq 57, \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\ & 7x_1 - 7x_2 \leq 15; \end{aligned}$$
$$Z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{11.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 97, \\ & x_1 + 7x_2 \geq 77; \end{aligned}$$
$$Z = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{13.} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 53, \\ & x_1 - x_2 \leq 3, \\ & 7x_1 + 3x_2 \geq 71; \end{aligned}$$
$$Z = x_1 + 7x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{15.} \quad & -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ & 5x_1 - 7x_2 \leq 27, \\ & x_1 + 4x_2 \geq 27; \end{aligned}$$
$$Z = x_1 + 8x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{17.} \quad & -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ & 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ & 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \end{aligned}$$
$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{19.} \quad & 10x_1 - x_2 \geq 57, \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\ & 7x_1 - 7x_2 \leq 15; \end{aligned}$$
$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{21.} \quad & -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ & 5x_1 - 7x_2 \leq 27, \end{aligned}$$

$$Z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{7.} \quad & 11x_1 - 3x_2 \geq 24, \\ & 9x_1 + 4x_2 \leq 110, \\ & -2x_1 + 7x_2 \geq 15; \end{aligned}$$
$$Z = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{8.} \quad & 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ & x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ & -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \end{aligned}$$
$$Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{10.} \quad & 4x_1 - x_2 \geq 7, \\ & 9x_1 + 8x_2 \leq 157, \\ & -3x_1 + 11x_2 \geq 17; \end{aligned}$$
$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{12.} \quad & 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ & -x_1 + 4x_2 \geq 19; \end{aligned}$$
$$Z = 7x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{14.} \quad & 7x_1 - 5x_2 \geq 17, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 34, \\ & -4x_1 + 9x_2 \geq 17; \end{aligned}$$
$$Z = x_1 + 9x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{17.} \quad & 11x_1 - 3x_2 \geq 24, \\ & 9x_1 + 4x_2 \leq 110, \\ & -2x_1 + 7x_2 \geq 15; \end{aligned}$$
$$Z = 7x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{18.} \quad & 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ & x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ & -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \end{aligned}$$
$$Z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{20.} \quad & 4x_1 - x_2 \geq 7, \\ & 9x_1 + 8x_2 \leq 157, \\ & -3x_1 + 11x_2 \geq 17; \end{aligned}$$
$$Z = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\begin{aligned} \boxed{22.} \quad & 11x_1 - 3x_2 \geq 24, \\ & 9x_1 + 4x_2 \leq 110, \end{aligned}$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 27;$$

$$Z = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$-2x_1 + 7x_2 \geq 15;$$

$$Z = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{23.} \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{24.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{25.} \begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\ 7x_1 - 7x_2 \leq 15; \end{cases}$$

$$Z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{27.} \begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 7, \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157, \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 17; \end{cases}$$

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{27.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 97, \\ x_1 + 7x_2 \geq 77; \end{cases}$$

$$Z = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{28.} \begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19; \end{cases}$$

$$Z = 7x_1 + x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{29.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71; \end{cases}$$

$$Z = x_1 + 7x_2 \rightarrow \min (\max)$$

$$\boxed{30.} \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \geq 17, \\ x_1 + 2x_2 \leq 34, \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 17; \end{cases}$$

$$Z = x_1 + 9x_2 \rightarrow \min (\max)$$

Практичне заняття №2. Симплексний метод розв'язку ЗЛП

Задачі для розгляду на практичному занятті.

Приклад 2. Продукція чотирьох видів А, В, С і D проходить послідовну обробку на двох видах виробничого обладнання. Норми часу на обробку одиниці продукції кожного виду та ціна одиниці продукції наведені в табл. 2.

Таблиця 2.

Обладнання	Тривалість обробки одиниці продукції, год.			
	А	В	С	Д
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2
Ціна одиниці продукції, гр.од.	73	70	55	45

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу роботи виробничого обладнання. Вартість однієї години роботи обладнання становить 10 грошових одиниць для обладнання 1 і 15 грошових одиниць — для обладнання 2. Термін роботи обладнання обмежений і для обладнання 1 становить 900 годин, а для верстата 2 — 760 годин.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, з метою отримання максимального загального прибутку від реалізації готової продукції.

Розв'язання.

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$.

Якщо усі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або з'ясовують що оптимального плану не існує.

4. Перехід до нового опорного плану виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій починаючи з п.3.

Позначимо x_j — план виробництва продукції j -го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Обмеженнями задачі буде ресурс часу використання обладнання для виробництва продукції:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 900 \text{ (год.)};$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 760 \text{ (год.)}.$$

Критерієм оптимальності є загальний прибуток від реалізації готової продукції, який розраховується як різниця між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду. Відповідно, цільова функція задачі матиме вигляд:

$$\max Z = (73 - (2 \cdot 10 + 3 \cdot 15))x_1 + (70 - (3 \cdot 10 + 2 \cdot 15))x_2 + \\ + (55 - (4 \cdot 10 + 1 \cdot 15))x_3 + (45 - (2 \cdot 10 + 2 \cdot 15))x_4;$$

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4.$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \rightarrow \max$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 900; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 760; \\ x_j \geq 0; j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу симплекс-методом, попередньо записавши систему обмежень задачі в канонічному вигляді.

Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6 , економічний зміст яких можна інтерпретувати як частину ресурсів не задіяну для виробництві продукції:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 900; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 760; \\ x_j \geq 0; j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6.$$

Канонічна система обмежень задачі у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 900 \\ 760 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори \vec{A}_5 та \vec{A}_6 *одичні* та лінійно незалежні, то саме з них складається початковий базис у даній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6 , що відповідають одиничним базисним векторам, називаються *базисними*, решту — вільними змінними задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 900, \quad x_6 = 760.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням $X_0 = (0; 0; 0; 0; 900; 760)$ - є опорним планом задачі і для цього початкового плану цільова функція має вигляд:

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$$

Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Бази c	$C_{баз}$	План	8	10	0	-5	0	0	θ
			x_1	$\leftarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\leftarrow x_5$	0	900	2	(3)	4	2	1	0	300
x_6	0	760	3	2	1	2	0	1	380
$Z_j - c_j \geq 0$		0	-8	\uparrow - 10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j , за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - c_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8;$$

$$Z_2 - c_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10;$$

$$Z_3 - c_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0;$$

$$Z_4 - c_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5;$$

$$Z_5 - c_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$Z_6 - c_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z , якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0$.

Після обчислення всіх оцінок *опорний план перевіряють на оптимальність*.

Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на *max*) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на *min*), то визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на *max* або додатна в задачі на *min*), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ від'ємні, тобто не задовольняють умову оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють зміною базису, тобто через виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису вибираємо змінну x_2 , оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка з-поміж тих, які не задовольняють умову оптимальності ($|-10| > |-8|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика « x_2 » знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці маємо, що $\min \theta = \{900/3; 760/2\} = 300$, і тому з базису виключаємо змінну x_5 , а число $a_{12} = 3$ — розв’язувальний елемент. Будуємо другу симплексну таблицю, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Бази c	$C_{баз}$	План	8	10	0	-5	0	0	θ
			$\leftarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	10	300	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	450
$\leftarrow x_6$	0	160	5/3	0	-5/3	2/3	- 2/3	1	96
$Z_j - c_j \geq 0$		3000	$\uparrow -4/3$	0	40/3	35/3	10/ 3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «Сбаз», а решту елементів нової таблиці розраховують за правилами:

1. Кожний елемент розв’язувального (напрямого) рядка необхідно поділити на розв’язувальний елемент і отримані числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв’язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв’язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за правилом прямокутника.

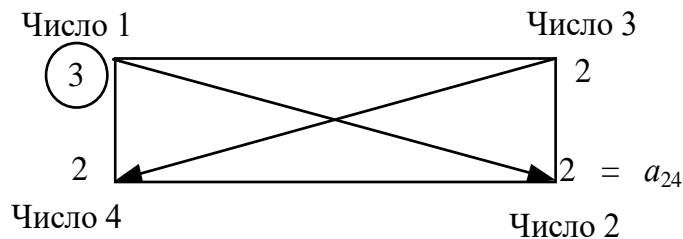
Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв’язувальний елемент (число 1); 2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати; 3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають за такою формулою:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2} - \text{Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24} , який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика « x_4 ». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) : 3 = 2/3$. Це значення записуємо в стовпчик « x_4 » у другому рядку другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі й елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$.

Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Бази c	$C_{баз}$	План	8	10	0	-5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	236	0	1	2	2/5	3/5	- 2/5
x_1	8	96	1	0	-1	2/5	-2/5	3/5
$Z_j - c_j \geq 0$		3128	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (x_1 = 96; x_2 = 236; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 0; x_6 = 0),$$

$$\text{або } X^* = (96; 236; 0; 0; 0; 0);$$

$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 3128.$$

Отже, оптимальний план виробництва продукції передбачає випуск 96 одиниць продукції типу А та 236 одиниць продукції типу В. Випуск продукції виду С і Д за оптимальним планом не передбачається (економічно не вигідний). Максимальний прибуток за даних умов складає 3128 гр.од. При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Індивідуальне завдання до практичного заняття №2

Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом.

1. $-2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \rightarrow \min,$
 $-2x_2 + x_4 + x_5 = -3,$
 $x_3 - 2x_4 = 2,$
 $x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 5,$
 $x_1 + x_2 \geq -3$
 $x_j \geq 0, j=1, \dots, 5.$

2. $-8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 15x_4 \rightarrow \min,$
 $-x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \leq 25,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 10,$
 $10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \leq 27,$
 $x_j \geq 0, j=1, \dots, 4.$

3. $3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10$

4. $-2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min,$
 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_3 &\geq 14, \\ 2x_2 + x_3 &\geq 7, \\ x_j &\geq 0, j=1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 7, \\ 3x_1 + 2x_3 &\geq 18, \\ x_j &\geq 0, j=1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{5.} \quad &x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ &2x_1 + x_2 \geq 1, \\ &2x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ &x_j \geq 0, j=1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{7.} \quad &-x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min, \\ &7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ &x_j \geq 0, j=1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{7.} \quad &x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ &x_1 - x_2 + x_3 \leq 2, \\ &x_j \geq 0, j=1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{8.} \quad &x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ &x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ &x_j \geq 0, j=1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{9.} \quad &x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ &2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ &x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{10.} \quad &-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ &2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ &2x_1 - 5x_2 + 7x_3 \leq 3, \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{11.} \quad &x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 7x_4 \rightarrow \max, \\ &2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1, \\ &5x_1 - 7x_2 + x_3 - x_4 \leq 2, \\ &4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ &x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{12.} \quad &5x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\ &2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ &5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{13.} \quad &2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \rightarrow \min, \\ &2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 7, \\ &2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 17, \\ &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{14.} \quad &4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \rightarrow \min, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ &x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ &x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ &x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4, \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{15.} \quad &2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \rightarrow \min, \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 10, \\ &2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 4, \\ &x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{17.} \quad &2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ &2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\ &3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4, \\ &x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{17.} \quad &5x_1 - x_2 - 4x_3 \rightarrow \max, \\ &-x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ &-x_1 + x_2 \geq 1, \\ &x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \\ &x_1 - x_3 \leq 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{18.} \quad &4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ &x_1 + 7x_2 \geq 12, \\ &x_j \geq 0, j = 1,2,3. \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} \boxed{19.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2, \\ & 3x_1 + x_3 \leq 5, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{20.} \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 7, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{21.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \rightarrow \min, \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 7, \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 17, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{22.} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \rightarrow \min, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ & x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ & x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{23.} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \rightarrow \min, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 10, \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 4, \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{24.} \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\ & 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 4, \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{25.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10 \\ & 2x_1 + 4x_3 \geq 14, \\ & 2x_2 + x_3 \geq 7, \\ & x_j \geq 0, j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{27.} \quad & -2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ & x_1 + x_2 \leq 7, \\ & 3x_1 + 2x_3 \geq 18, \\ & x_j \geq 0, j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{27.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ & 2x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ & x_j \geq 0, j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{28.} \quad & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min, \\ & 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25, \\ & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ & x_j \geq 0, j=1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{29.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2, \\ & 3x_1 + x_3 \leq 5, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{30.} \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ & -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 7, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Лабораторна робота №1-2. Транспортна задача лінійного програмування (4 год)

Задачі для розв'язування на лабораторному занятті.

Приклад. Постачальником деякого однорідного товару є чотири комерційні підприємства A_1, A_2, A_3, A_4 , що мають запас товару у кількості a_1, a_2, a_3, a_4 відповідно. Роздрібні торговельні підприємства B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 подали замовлення на закупівлю товару у кількості b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 відповідно. Тарифи перевезень одиниці вантажу від постачальника до споживача задані платіжною матрицею p_{ij} . Знайти такий план перевезення товару від постачальників до споживачів, щоб сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

$$\begin{array}{l} a_1 = 222 \\ a_2 = 188 \\ a_3 = 210 \\ a_4 = 380 \end{array} \quad \begin{array}{l} b_1 = 125 \\ b_2 = 75 \\ b_3 = 200 \\ b_4 = 380 \\ b_5 = 220 \end{array} \quad p_{ij} = \begin{pmatrix} 23 & 21 & 11 & 8 & 3 \\ 7 & 17 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 16 & 8 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 21 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

1. Перевіримо умову задачі на збалансованість:

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j = 1000 \text{ - сумарні запаси товару рівні сумарним потребам споживачів,}$$

тобто маємо задачу закритого типу і необхідна та достатня умова існування роз'язку цієї задачі виконана.

2. Опорний план задачі представимо таблицею, що заповнена за методом найменшої вартості.

a_i / b_j	$b_1 = 125$	$b_2 = 75$	$b_3 = 200$	$b_4 = 380$	$b_5 = 220$	u_i
$a_1 = 222$	23	21	11	$\begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 220 \\ 3 \end{matrix}$	$u_1 = 8$
$a_2 = 188$	7	17	$\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 188 \\ 2 \end{matrix}$	4	$u_2 = 2$
$a_3 = 210$	$\begin{matrix} 125 \\ 2 \end{matrix}$	16	8	$\begin{matrix} 85 \\ 4 \end{matrix}$	3	$u_3 = 4$
$a_4 = 380$	3	$\begin{matrix} 75 \\ 9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 200 \\ 21 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 105 \\ 8 \end{matrix}$	4	$u_4 = 8$
v_j	$v_1 = -2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 13$	$v_4 = 0$	$v_5 = -5$	

3. Як видно з таблиці, кількість заповнених клітинок

$(m+n-1) = 8$. Перевіримо опорний план на оптимальність, для цього визначимо потенціали і запишемо їх у таблицю:

$$\begin{array}{l} u_1 + v_4 = 8 \quad u_2 + v_4 = 2 \quad u_3 + v_1 = 2 \quad u_4 + v_2 = 9 \\ u_1 + v_5 = 3 \quad u_3 + v_4 = 4 \quad u_4 + v_3 = 21 \\ v_4 = 0 \quad u_4 + v_4 = 8 \end{array}$$

Умова оптимальності для вільних клітинок таблиці ($u_i + v_j \leq p_{ij}$) порушується для клітинок a_1b_3 , a_2b_3 , a_3b_3 , та a_4b_1 , тобто оцінки не задовольняють нерівність $\Delta_{ij} = u_i + v_j - p_{ij} > 0$:

$$\begin{array}{l} \Delta_{13} = 8+13 - 11 = 10 > 0; \\ \Delta_{23} = 2+13 - 5 = 10 > 0; \\ \Delta_{33} = 4+13 - 8 = 9 > 0; \\ \Delta_{41} = 8+(-2) - 3 = 3 > 0 \end{array}$$

Отже, опорний план задачі є не оптимальним і є змога його покращити, виконавши перерозподіл вантажів.

Найбільше значення мають оцінки $\Delta_{13} = 10$ та $\Delta_{23} = 10$. Обираємо клітинку a_2b_3 за вершину циклу перерозподілу вантажів.

Новий план транспортної задачі матиме вигляд:

ai / bj	b ₁ = 125	b ₂ = 75	b ₃ = 200	b ₄ = 380	b ₅ = 220	u _i	
a ₁ = 222	23	21	11	$\begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 220 \\ 3 \end{matrix}$	u ₁ = 0	
a ₂ = 188	7	17	$\begin{matrix} 188 \\ 5 \end{matrix}$	2	4	u ₂ = -16	
a ₃ = 210	$\begin{matrix} 125 \\ 2 \end{matrix}$	16	$\begin{matrix} + \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 85 \\ 4 \end{matrix}$	-	3	u ₃ = -4
a ₄ = 380	3	$\begin{matrix} 75 \\ 9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 12 \\ 21 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 293 \\ 8 \end{matrix}$	+	4	u ₄ = 0
v _j	v ₁ = 6	v ₂ = 9	v ₃ = 21	v ₄ = 8	v ₅ = 3		

Знову перевіряємо план на оптимальність:

$$\begin{aligned} u_1 + v_4 &= 8 & u_2 + v_3 &= 5 & u_3 + v_1 &= 2 & u_4 + v_2 &= 9 \\ u_1 + v_5 &= 3 & & & u_3 + v_4 &= 4 & u_4 + v_3 &= 21 \\ u_4 &= 0 & & & & & u_4 + v_4 &= 8 \end{aligned}$$

У клітинках таблиці a_1b_3 , a_3b_3 , та a_4b_1 порушується умова оптимальності. Значення оцінок у цих клітинках

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= 0 + 21 - 11 = 10 > 0; \\ \Delta_{33} &= -4 + 21 - 8 = 9 > 0; \\ \Delta_{41} &= 0 + 6 - 3 = 3 > 0 \end{aligned}$$

Для подальшого покращення плану задачі обираємо клітинку a_1b_3 і побудуємо цикл перерозподілу вантажів.

ai / bj	b ₁ = 125	b ₂ = 75	b ₃ = 200	b ₄ = 380	b ₅ = 220	u _i	
a ₁ = 222	23	21	11	$\begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 220 \\ 3 \end{matrix}$	u ₁ = 4	
a ₂ = 188	7	17	$\begin{matrix} 188 \\ 5 \end{matrix}$	2	4	u ₂ = -3	
a ₃ = 210	$\begin{matrix} - \\ 125 \\ 2 \end{matrix}$	16	$\begin{matrix} 12 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 73 \\ 4 \end{matrix}$	+	3	u ₃ = 0
a ₄ = 380	$\begin{matrix} + \\ 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 75 \\ 9 \end{matrix}$	21	$\begin{matrix} 305 \\ 8 \end{matrix}$	-	4	u ₄ = 4
v _j	v ₁ = 2	v ₂ = 5	v ₃ = 8	v ₄ = 4	v ₅ = -1		

Обчислюємо потенціали і перевіряємо умову оптимальності.

$$\begin{aligned} u_1 + v_4 &= 8 & u_2 + v_3 &= 5 & u_3 + v_1 &= 2 & u_4 + v_2 &= 9 \\ u_1 + v_5 &= 3 & & & u_3 + v_3 &= 8 & u_4 + v_4 &= 8 \\ u_3 &= 0 & & & u_3 + v_4 &= 4 & & \end{aligned}$$

$$\Delta_{13} = 4 + 8 - 11 = 0 > 0; \Delta_{41} = 4 + 2 - 3 = 3 > 0$$

ai / bj	b ₁ = 125	b ₂ = 75	b ₃ = 200	b ₄ = 380	b ₅ = 220	u _i
a ₁ = 222	23	21	11	2	220	u ₁ = 0
a ₂ = 188	7	17	188	5	4	u ₂ = -7
a ₃ = 210	2	16	12	198	3	u ₃ = -4
a ₄ = 380	125	75	21	180	4	u ₄ = 0
v _j	v ₁ = 3	v ₂ = 9	v ₃ = 12	v ₄ = 8	v ₅ = 3	

$$\begin{aligned}
 u_1 + v_4 &= 8 & u_2 + v_3 &= 5 & u_3 + v_3 &= 8 & u_4 + v_1 &= 3 \\
 u_1 + v_5 &= 3 & & & u_3 + v_4 &= 4 & u_4 + v_2 &= 9 \\
 u_4 &= 0 & & & & & u_4 + v_4 &= 8
 \end{aligned}$$

Маємо одну не задовільну оцінку $\Delta_{13} = 4+8 -11 = 0 >0$, тому будемо ще одну таблицю.

ai / bj	b ₁ = 125	b ₂ = 75	b ₃ = 200	b ₄ = 380	b ₅ = 220	u _i		
a ₁ = 222	23	21	2	11	8	220	u ₁ = -1	
a ₂ = 188	7	17	188	5	2	4	u ₂ = -7	
a ₃ = 210	2	16	10	8	200	4	u ₃ = -4	
a ₄ = 380	125	3	75	9	21	180	8	u ₄ = 0
v _j	v ₁ = 3	v ₂ = 9	v ₃ = 12	v ₄ = 8	v ₅ = 4			

Остання таблиця містить оптимальний план транспортної задачі, так як умова оптимальності виконується для усіх клітинок таблиці. Оптимальний план представимо у вигляді матриці:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 220 \\ 0 & 0 & 188 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 200 & 0 \\ 125 & 75 & 0 & 180 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{min} = 2 \cdot 11 + 220 \cdot 3 + 188 \cdot 5 + 10 \cdot 8 + 200 \cdot 4 + 125 \cdot 3 + 75 \cdot 9 + 180 \cdot 8 = 4992.$$

Індивідуальні завдання до лабораторної роботи №1-2

Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів

$$\begin{aligned}
 1. \quad a_1 &= 200, & b_1 &= 90, \\
 a_2 &= 150, & b_2 &= 100, \\
 a_3 &= 150, & b_3 &= 70, \\
 & & b_5 &= 110; & b_4 &= 130,
 \end{aligned}
 \quad C = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 12 & 20 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad a_1 &= 300, & b_1 &= 180, \\
 a_2 &= 280, & b_2 &= 140, \\
 a_3 &= 220, & b_3 &= 190, \\
 b_5 &= 170; & b_4 &= 120,
 \end{aligned}
 \quad C = \begin{bmatrix} 12 & 21 & 9 & 10 & 16 \\ 13 & 15 & 11 & 13 & 21 \\ 19 & 26 & 12 & 17 & 20 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
3. \ a_1 = 250, & b_1 = 180, \\
a_2 = 200, & b_2 = 120, \\
a_3 = 150, & b_3 = 90, \\
b_4 = 105, & b_5 = 105;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 17 & 20 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
4. \ a_1 = 400, & b_1 = 200, \\
a_2 = 250, & b_2 = 170, \\
a_3 = 350, & b_3 = 230, \\
& b_4 = 225, \\
& b_5 = 175;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 13 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22 \\ 20 & 17 & 13 & 18 & 21 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
5. \ a_1 = 150, & b_1 = 160, \\
a_2 = 200, & b_2 = 70, \\
a_3 = 150, & b_3 = 90, \\
& b_4 = 80, \\
& b_5 = 100;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
6. \ a_1 = 280, & b_1 = 170, \\
a_2 = 300, & b_2 = 120, \\
a_3 = 220, & b_3 = 190, \\
& b_4 = 140, \\
& b_5 = 180;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 28 & 12 & 7 & 18 & 7 \\ 35 & 14 & 12 & 15 & 3 \\ 30 & 16 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
7. \ a_1 = 150, & b_1 = 180, \\
& a_2 = 250, & b_2 = 120, \\
& a_3 = 200, & b_3 = 90, \\
& & b_4 = 105, \\
& & b_5 = 105;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
8. \ a_1 = 250, & b_1 = 300, \\
& a_2 = 400, & b_2 = 160, \\
& a_3 = 350, & b_3 = 220, \\
& & b_4 = 180, \\
& & b_5 = 140;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 7 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 16 & 19 & 40 & 15 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
9. \ a_1 = 150, & b_1 = 100, \\
& a_2 = 150, & b_2 = 70, \\
& a_3 = 200, & b_3 = 130, \\
& & b_4 = 110, \\
& & b_5 = 90;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
10. a_1 = 280, & b_1 = 190, \\
a_2 = 220, & b_2 = 140, \\
a_3 = 300, & b_3 = 180, \\
& b_4 = 120, \\
& b_5 = 170;
\end{array}
\quad
C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
11. a_1 = 200, & b_1 = 120, \\
a_2 = 250, & b_2 = 180, \\
a_3 = 150, & b_3 = 105, \\
& b_4 = 90, \\
& b_5 = 105;
\end{array}
\quad
C = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
12. a_1 = 350, & b_1 = 120, \\
a_2 = 400, & b_2 = 110, \\
a_3 = 250, & b_3 = 230, \\
& b_4 = 170, \\
& b_5 = 200;
\end{array}
\quad
C = \begin{bmatrix} 5 & 13 & 18 & 17 & 8 \\ 6 & 10 & 15 & 6 & 3 \\ 24 & 21 & 9 & 16 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
13. a_1 = 250, & b_1 = 120, \\
a_2 = 250, & b_2 = 110, \\
a_3 = 200, & b_3 = 85, \\
& b_4 = 195, \\
& b_5 = 190;
\end{array}
\quad
C = \begin{bmatrix} 13 & 7 & 16 & 4 & 11 \\ 20 & 9 & 6 & 10 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
14. a_1 = 250, & b_1 = 160, \\
a_2 = 180, & b_2 = 120, \\
a_3 = 270, & b_3 = 100, \\
& b_4 = 150, \\
& b_5 = 170;
\end{array}
\quad
C = \begin{bmatrix} 14 & 11 & 9 & 13 & 18 \\ 6 & 5 & 14 & 4 & 14 \\ 7 & 19 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
15. a_1 = 350, & b_1 = 160, \\
a_2 = 300, & b_2 = 160, \\
a_3 = 350, & b_3 = 180, \\
& b_4 = 220, \\
& b_5 = 280;
\end{array}
\quad
C = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 10 & 14 & 18 \\ 17 & 6 & 4 & 11 & 9 \\ 12 & 8 & 19 & 10 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
16. a_1 = 250, & b_1 = 150, \\
a_2 = 350, & b_2 = 170, \\
a_3 = 300, & b_3 = 190, \\
& b_4 = 210, \\
& b_5 = 180;
\end{array}
\quad
C = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 16 & 10 & 16 \\ 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 19 & 15 & 10 & 13 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
17. a_1 = 220, \quad b_1 = 160, \\
\quad a_2 = 400, \quad b_2 = 180, \\
\quad a_3 = 280, \quad b_3 = 170, \\
\quad \quad \quad b_4 = 200, \\
\quad \quad \quad b_5 = 190;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 20 & 17 & 13 & 2 & 17 \\ 6 & 10 & 9 & 4 & 15 \\ 3 & 7 & 13 & 6 & 23 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
18. a_1 = 160, \quad b_1 = 170, \\
\quad a_2 = 400, \quad b_2 = 190, \\
\quad a_3 = 240, \quad b_3 = 140, \\
\quad \quad \quad b_4 = 180, \\
\quad \quad \quad b_5 = 120;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 6 & 13 & 14 & 18 & 14 \\ 25 & 14 & 7 & 5 & 16 \\ 11 & 4 & 10 & 18 & 9 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
19. a_1 = 300, \quad b_1 = 190, \\
\quad a_2 = 330, \quad b_2 = 150, \\
\quad a_3 = 370, \quad b_3 = 240, \\
\quad \quad \quad b_4 = 200, \\
\quad \quad \quad b_5 = 220;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 16 & 8 & 11 \\ 21 & 10 & 8 & 15 & 23 \\ 19 & 10 & 4 & 9 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
20. a_1 = 280, \quad b_1 = 170, \\
\quad a_2 = 340, \quad b_2 = 160, \\
\quad a_3 = 280, \quad b_3 = 190, \\
\quad \quad \quad b_4 = 200, \\
\quad \quad \quad b_5 = 180;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 14 & 9 \\ 15 & 11 & 6 & 17 & 11 \\ 13 & 18 & 10 & 12 & 22 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
21. a_1 = 200, \quad b_1 = 90, \\
\quad a_2 = 150, \quad b_2 = 100, \\
\quad a_3 = 150, \quad b_3 = 70, \\
\quad \quad \quad b_4 = 130, \\
\quad \quad \quad b_5 = 110;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 12 & 20 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
22. a_1 = 160, \quad b_1 = 170, \\
\quad a_2 = 400, \quad b_2 = 190, \\
\quad a_3 = 240, \quad b_3 = 140, \\
\quad \quad \quad b_4 = 180, \\
\quad \quad \quad b_5 = 120
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 8 & 11 \\ 1 & 10 & 8 & 15 & 3 \\ 9 & 10 & 4 & 9 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
23. a_1 = 280, \quad b_1 = 190, \\
\quad a_2 = 220, \quad b_2 = 140, \\
\quad a_3 = 300, \quad b_3 = 180, \\
\quad \quad \quad b_4 = 120, \\
\quad \quad \quad b_5 = 170;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
24. a_1 = 250, \quad b_1 = 160, \\
\quad a_2 = 350, \quad b_2 = 170, \\
\quad a_3 = 300, \quad b_3 = 200, \\
\quad \quad \quad b_4 = 210, \\
\quad \quad \quad b_5 = 180;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 16 & 10 & 16 \\ 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 19 & 15 & 10 & 13 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
25. a_1 = 260, \quad b_1 = 190, \\
\quad a_2 = 220, \quad b_2 = 140, \\
\quad a_3 = 320, \quad b_3 = 180, \\
\quad \quad \quad b_4 = 120, \\
\quad \quad \quad b_5 = 170;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 26 \\ 5 & 11 & 16 & 19 & 38 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
26. a_1 = 250, \quad b_1 = 150, \\
\quad a_2 = 300, \quad b_2 = 170, \\
\quad a_3 = 350, \quad b_3 = 190, \\
\quad \quad \quad b_4 = 210, \\
\quad \quad \quad b_5 = 180;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 17 & 19 & 16 & 10 & 16 \\ 13 & 12 & 18 & 12 & 20 \\ 19 & 15 & 21 & 13 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
27. a_1 = 180, \quad b_1 = 180, \\
\quad a_2 = 320, \quad b_2 = 150, \\
\quad a_3 = 300, \quad b_3 = 180, \\
\quad \quad \quad b_4 = 120, \\
\quad \quad \quad b_5 = 170;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
28. a_1 = 250, \quad b_1 = 150, \\
\quad a_2 = 350, \quad b_2 = 170, \\
\quad a_3 = 300, \quad b_3 = 190, \\
\quad \quad \quad b_4 = 210, \\
\quad \quad \quad b_5 = 180;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 17 & 9 & 16 & 10 & 6 \\ 13 & 12 & 18 & 12 & 2 \\ 19 & 15 & 10 & 13 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
29. a_1 = 280, \quad b_1 = 180, \\
\quad a_2 = 340, \quad b_2 = 140, \\
\quad a_3 = 280, \quad b_3 = 170, \\
\quad \quad \quad b_4 = 200, \\
\quad \quad \quad b_5 = 200
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 16 & 8 & 11 \\ 21 & 10 & 8 & 15 & 23 \\ 19 & 10 & 4 & 9 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{l}
30. a_1 = 250, \quad b_1 = 160, \\
\quad a_2 = 180, \quad b_2 = 120, \\
\quad a_3 = 270, \quad b_3 = 100, \\
\quad \quad \quad b_4 = 150, \\
\quad \quad \quad b_5 = 170;
\end{array}
\quad C = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 9 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 14 \\ 7 & 19 & 11 & 6 & 13 \end{bmatrix};$$

Практичне заняття №3. Оптимальний маршрут перевезення вантажів

Задачі для розгляду на практичному занятті.

Приклад 3. Нехай транспортна мережа містить 10 пунктів-вузлів, частина з яких з'єднана магістралями. На рис. 2 показано мережу доріг і вартість перевезення одиниці вантажу між окремими пунктами мережі, які проставлені біля відповідних ребер. Необхідно визначити маршрут доставки вантажу із пункту 1 у пункт 10, який забезпечить найменші транспортні витрати.

У задачі є обмеження – рухатися лише у напрямку стрілок. Введемо позначення: k - номер кроку ($k=1, 2, 3, 4$), 1-й крок – перевезення з пунктів 7, 8, 9 до кінцевого пункту; 2-й крок - перевезення з пунктів 5, 7 до пунктів 7, 8, 9; 3-й крок - перевезення з пунктів 2, 3, 4 до пунктів 5, 7; 4-й крок - перевезення з пункту 1 до пунктів 2, 3, 4;

i - пункт, з якого здійснюються перевезення ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 7, 8, 9$);

j - пункт, у який доправляється вантаж ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 7, 8, 9, 10$);

C_{ij} - вартість перевезення вантажу із пункту i в пункт j .

$F_k(i)$ - мінімальні витрати на перевезення вантажу на k -му кроці розв'язку задачі із пункту i до кінцевого пункту.

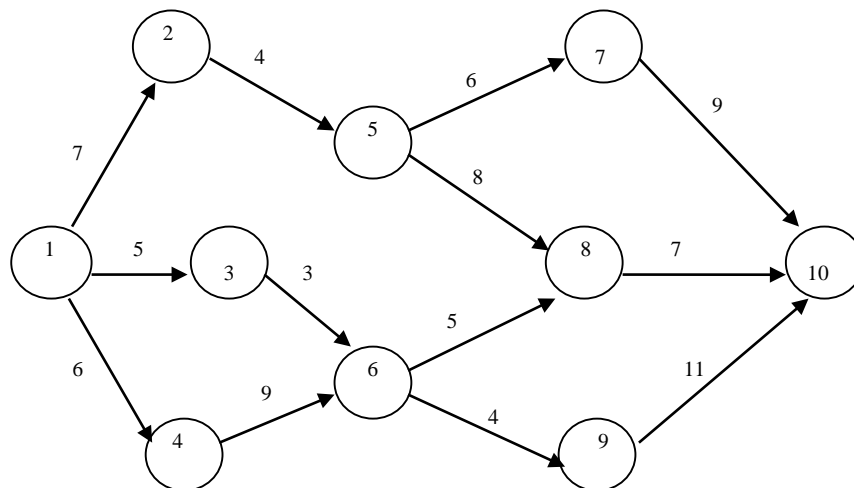


Рис. 2 Модель транспортної мережі.

Для першого кроку управління ($k=1$) функція Беллмана представляє собою вираз:
 $F_1(i) = C_{i10}$, де $i = 7, 8, 9$.

Для наступних кроків:

$$F_k(i) = \min \{C_{ij} + F_{k-1}(j)\}$$

На четвертому кроці $i = 1$, функція Беллмана представляє собою мінімально можливі витрати на переміщення вантажу з пункту 1 до 10 пункту. Оптимальний маршрут визначається у результаті аналізу кроків у зворотному порядку.

Приклад. Розв'яжемо сформульовану вище задачу, вхідні дані якої представлено на рис. 2.

Розв'язок.

I етап. Умовна оптимізація.

1-й крок. $k=1$; $F_1(i) = C_{i10}$, де $i = 7, 8, 9$

i / j	10	$F_1(i)$	j^*
7	9	9	10
8	7	7	10
9	11	11	10

2-й крок. $k=2$; $F_2(i) = \min_j \{C_{ij} + F_1(j)\}$.

Усі можливі переміщення вантажу на другому кроці і результати розрахунку приведені у таблиці:

i / j	7	8	9	$F_2(i)$	j^*
5	7+9	8+7	-	15	7; 8
7	-	5+7	4+11	12	7

3-й крок. $k=3$; $F_3(i) = \min_j \{C_{ij} + F_2(j)\}$.

i / j	5	7	$F_3(i)$	j^*
2	4+15	-	19	5
3	-	3+12	15	7
4	-	9+12	21	7

4-й крок. $k=4$; $F_4(i) = \min_j \{C_{ij} + F_3(j)\}$.

i / j	2	3	4	$F_4(i)$	j^*
1	7+19	5+15	7+21	20	3

II етап. Безумовна оптимізація.

На попередньому етапі отримано, що мінімальні витрати на перевезення вантажів з пункту 1 до 10 пункту складають $F_4(i)=20$. даний результат досягається при переміщенні оптимальним маршрутом: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 10$.

Індивідуальні завдання до практичного заняття №3

Нехай транспортна мережа складається із десяти пунктів-вузлів, частина яких з'єднана магістралями. На рис.1 показано мережа доріг, вартість перевезення одиниці вантажу між окремими пунктами представлена у таблиці 3.

Необхідно визначити маршрут доставки вантажу із пункту 1 у пункт 10, який забезпечить мінімальні транспортні витрати.

Таблиця 3.

Вартість перевезення одиниці вантажу	Пункти призначення вантажів												
	1,2	1,3	1,4	2,5	3,6	4,6	5,7	5,8	6,8	6,9	7,10	8,10	9,10
	K+5	K+3	K+2	K+2	K-1	K+4	K+7	K+7	K+1	K+8	K+9	K-2	K+4

Практичне заняття №4. Оптимальний розподіл інвестицій

Задачі для розгляду на практичному занятті.

Приклад: на розвиток трьох підприємств виділено 5 млн. гривень. Відома ефективність капіталовкладень у кожне підприємство, задана значенням нелінійної функції $g_i(x_i)$ представленої у таблиці 4.

Необхідно розподілити виділені засоби між підприємствами таким чином, щоб отримати максимальний сумарний прибуток. Для спрощення розрахунку вважаємо, що розподіл коштів здійснюється у цілих числах $x_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ млн. грн.

Таблиця 4.

x	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	7,4
4	5,2	7,2	7,7
5	5,9	7,4	7,9

Розв'язок:

1 етап. Умовна оптимізація.

1-й крок: $k=3$. припустимо, що усі кошти у розмірі 5 млн. грн. віддано третьому підприємству. У цьому випадку максимальний прибуток, як видно з таблиці 5, складе $g_3(x_3)=7,9$ тис.грн., тобто рекурентне співвідношення матиме вигляд: $F_3(C_3) = g_3(x_3)$.

Таблиця 5.

C_3 / x_3	0	1	2	3	4	5	$F_3(C_3)$	X_3^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	-	2,8	-	-	-	-	2,8	1
2	-	-	5,4	-	-	-	5,4	2
3	-	-	-	7,4	-	-	7,4	3
4	-	-	-	-	7,7	-	7,7	4
5	-	-	-	-	-	7,9	7,9	5

2-й крок: $k=2$. визначимо оптимальну стратегію при розподілі грошових засобів між другим і третім підприємствами. Рекурентне співвідношення Беллмана на цьому кроці:

$$F_2(C_2) = \max_{x_2 \leq C_2} \left\{ g_2(x_2) + F_3(\underbrace{C_2 - x_2}_{x_3 = C_2 - x_2}) \right\},$$

Таблиця 6.

C_2 / x_2	0	1	2	3	4	5	$F_2(C_2)$	X_2^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+2,8	2+0	-	-	-	-	2,8	0
2	0+5,4	2+2,8	3,2+0	-	-	-	5,4	0
3	0+7,4	2+5,4	3,2+2,8	4,8+0	-	-	7,4	1
4	0+7,7	2+7,4	3,2+5,4	4,8+2,8	7,2+0	-	8,7	2
5	0+7,9	2+7,7	3,2+7,4	4,8+5,4	7,2+2,8	7,4+0	10,2	3

3-й крок. $k=1$. визначаємо оптимальну стратегію при розподілі грошових засобів між другим і першим підприємствами, використовуючи наступне рекурентне співвідношення для розрахунку сумарного прибутку:

$$F_1(C_1) = \max_{x_1 \leq C_1} \left\{ g_1(x_1) + F_2(\underbrace{C_1 - x_1}_{X_2 = C_1 - X_1}) \right\},$$

на основі якого складено таблицю 7

Таблиця 7.

C_1 / x_1	0	1	2	3	4	5	$F_1(C_1)$	X_1^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+2,8	2,2+0	-	-	-	-	2,8	0
2	0+5,4	2,2+2,8	3+0	-	-	-	5,4	0
3	0+7,4	2,2+5,4	3+2,8	4,1+0	-	-	7,7	1
4	0+8,7	2,2+7,4	3+5,4	4,1+2,8	5,2+0	-	9,7	1
5	0+10,2	2,2+8,7	3+7,4	4,1+5,4	5,2+2,8	5,9+0	10,8	1

II етап. Безумовна оптимізація.

Визначаємо компоненти оптимальної стратегії.

1-й крок. За даними таблиця 7 максимальний прибуток при розподілі 5 млн. грн. між трьома підприємствами складає: $C_1 = 5$; $F_1(C_1=5)=10,8$. при цьому першому підприємству треба виділити $X_1^*=1$ млн. грн.

2-й крок. Визначаємо розмір грошових засобів, які залишились на долю другого і третього підприємств:

$$C_2 = C_1 - X_1^* = 5 - 1 = 4 \text{ млн. грн.}$$

За таблицею 6 знаходимо, що оптимальний варіант розподілу 4 млн. грн. між другим і третім підприємством складає:

$$F_2(C_2=4)=8,7 \text{ при виділенні другому підприємству } X_2^*=2 \text{ млн. грн.}$$

3-й крок. Визначаємо величину грошових засобів які лишилися на частку третього підприємства:

$$C_3 = C_2 - X_2^* = 4 - 2 = 2 \text{ млн. грн.}$$

За даними таблиці 3.4. знаходимо:

$$F_3(C_3=2)=5,4 \text{ і } X_3^* = 2 \text{ млн. грн.}$$

Висновок: Таким чином, оптимальний план інвестування підприємств:

$X^* = (1, 2, 2)$, який забезпечить максимальний прибуток, рівний:

$$F(5) = g_1(1) + g_2(2) + g_3(2) = 2,2 + 3,2 + 5,4 = 10,8 \text{ млн. грн}$$

Індивідуальні завдання до практичного заняття №3

На розвиток підприємств виділено 5 млн. грн. відома ефективність капіталовкладень у кожне підприємство, яка задана значенням нелінійної функції $g_i(x_i)$, яка представлена у таблиці 8. Необхідно розподілити виділені кошти між підприємствами таким чином, щоб отримати максимальний сумарний прибуток. Для спрощення розрахунків вважатимемо, що розподіл інвестиційних вкладень здійснюється у цілих числах, тобто, $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Таблиця 8.

Інвестиції (млн.грн.), x_i	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
1	k,k	k	k,(k-2)
2	k+1	(k+1),k	(k+3),(k+2)
3	(k+2),(k-1)	(k+2),(k+1)	(k+4),(k-1)
4	(k+3),k	(k+4),k	(k+4),(k+4)
5	(k+3),(k+4)	(k+4),(k+2)	(k+4),(k+5)

Практичне заняття №5. Вибір оптимальної стратегії оновлення обладнання.

Задачі для розгляду на практичному занятті.

Приклад. Знайти оптимальну стратегію експлуатації обладнання впродовж 7 років (t), якщо річний прибуток $r(t)$ і залишкова вартість $S(t)$, в залежності від строку експлуатації обладнання, приведені у таблиці 9. Вартість нового обладнання $P = 13$, а вік обладнання на початок експлуатаційного періоду складає 1 рік.

Таблиця 9

t	0	1	2	3	4	5	7
$r(t)$	8	7	7	7	7	5	5
$S(t)$	12	10	8	8	7	7	4

Розв'язок.

1 етап. Умовна оптимізація

1-й крок. $k=7$. для першого кроку можливі стани системи $t = 1, 2, 3, 4, 5, 7$. функціональне управління має вигляд (4.5):

$$F_7(1) = \max \begin{cases} 7 \\ 10 - 13 + 8, \end{cases} = 7 \quad (C)$$

$$F_7(2) = \max \begin{cases} 7 \\ 8 - 13 + 8, \end{cases} = 7 \quad (C)$$

$$F_7(3) = \max \begin{cases} 6 \\ 8 - 13 + 8, \end{cases} = 6 \quad (C)$$

$$F_7(4) = \max \begin{cases} 6 \\ 7 - 13 + 8, \end{cases} = 6 \quad (C)$$

$$F_7(5) = \max \begin{cases} 5 \\ 6 - 13 + 8, \end{cases} = 5 \quad (C)$$

$$F_7(7) = \max \begin{cases} 5 \\ 4-13+8, \end{cases} = 5 \quad (C)$$

2-й крок. $k = 5$. можливі стани системи $t = 1, 2, 3, 4, 5$. функціональне рівняння має вигляд (4.4):

$$F_5(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_6(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_6(1), & (Z) \end{cases}$$

$$F_5(1) = \max \begin{cases} 7+7 \\ 10-13+8+7, \end{cases} = 14 \quad (C)$$

$$F_5(2) = \max \begin{cases} 7+6 \\ 8-13+8+7, \end{cases} = 13 \quad (C)$$

$$F_5(3) = \max \begin{cases} 6+6 \\ 8-13+8+7, \end{cases} = 12 \quad (C)$$

$$F_5(4) = \max \begin{cases} 6+5 \\ 7-13+8+7, \end{cases} = 11 \quad (C)$$

$$F_5(5) = \max \begin{cases} 5+5 \\ 6-13+8+7, \end{cases} = 10 \quad (C)$$

3-й крок. $k = 4$. можливі стани системи $t = 1, 2, 3, 4$ функціональне рівняння має вигляд:

$$F_4(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_5(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_5(1), & (Z) \end{cases}$$

$$F_4(1) = \max \begin{cases} 7+13 \\ 10-13+8+14, \end{cases} = 20 \quad (C)$$

$$F_4(2) = \max \begin{cases} 7+12 \\ 8-13+8+14, \end{cases} = 19 \quad (C)$$

$$F_4(3) = \max \begin{cases} 6+11 \\ 8-13+8+14, \end{cases} = 17 \quad (C/Z)$$

$$F_4(4) = \max \begin{cases} 6+10 \\ 7-13+8+14, \end{cases} = 16 \quad (C/Z)$$

4-й крок. $k = 3$. можливі стани системи $t = 1, 2, 3$ функціональне рівняння має вигляд:

$$F_3(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_4(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_4(1), & (Z) \end{cases}$$

$$F_3(1) = \max \begin{cases} 7+19 \\ 10-13+8+20, \end{cases} = 26 \quad (C)$$

$$F_3(2) = \max \begin{cases} 7+17 \\ 8-13+8+20, \end{cases} = 24 \quad (C)$$

$$F_3(3) = \max \begin{cases} 6+16 \\ 8-13+8+20, \end{cases} = 23 \quad (Z)$$

5-й крок. $k = 2$. можливі стани системи $t = 1, 2$ функціональне рівняння має вигляд:

$$F_2(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_3(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_3(1), & (Z) \end{cases}$$

$$F_2(1) = \max \begin{cases} 7 + 24 \\ 10 - 13 + 8 + 26, \end{cases} = 31 \quad (C/Z)$$

$$F_2(2) = \max \begin{cases} 7 + 23 \\ 8 - 13 + 8 + 26, \end{cases} = 30 \quad (C)$$

7-й крок. $k = 1$. можливі стани системи $t = 1$ функціональне рівняння має вигляд:

$$F_1(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_2(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_2(1), & (Z) \end{cases}$$

$$F_1(1) = \max \begin{cases} 7 + 30 \\ 10 - 13 + 8 + 31, \end{cases} = 37 \quad (C)$$

Результати обчислень функції Беллмана приведені у таблиці 10

Таблиця 10.

k / t	1	2	3	4	5	7
1	37					
2	21	30				
3	27	24	23			
4	20	19	17	17		
5	14	13	12	11	10	
7	7	7	7	7	5	5

У таблиці виділено значення функції, яке відповідає стану «заміна обладнання».

II етап. Безумовна оптимізація.

Безумовна оптимізація починається з кроку $k = 1$ (7-й крок). Максимально можливий дохід від експлуатації обладнання за роки з 1-го по 7-й складає $F_1(1) = 37$, за умови не заміни обладнання. Тоді, до початку 2-го року вік обладнання збільшиться на одиницю і складатиме $t_2 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ і оптимальне управління при $k = 2$, тобто, максимум доходу від експлуатації з 2-го по 7-й роки, буде якщо обладнання не замінюється.

На початок 3-го року при $k = 3$: $t_3 = t_2 + 1 = 2 + 1 = 3$ – для отримання максимуму прибутку за наступні роки треба провести заміну обладнання на початку 3-го року.

На початок 4-го року при $k = 4$ вік обладнання буде $t_4 = 1$, бо провели заміну обладнання на попередньому кроці і для отримання максимуму прибутку за наступні роки не треба проводити заміну обладнання.

Далі відповідно:

$k = 5$: $t_5 = t_4 + 1 = 2$ - для отримання максимуму прибутку не треба проводити заміну обладнання.

$k = 7$: $t_7 = t_5 + 1 = 2 + 1 = 3$ - для отримання максимуму прибутку не треба проводити заміну обладнання.

Таким чином за 7 років експлуатації обладнання заміну треба провести один раз – на початку 3-го року експлуатації.

Індивідуальні завдання до практичного заняття №4

Знайти оптимальну стратегію експлуатації обладнання впродовж 7 років (t), якщо річний прибуток $R(t)$ і залишкова вартість $S(t)$, в залежності від строку експлуатації обладнання, приведені у таблиці 10. Вартість нового обладнання $P = 18$, а вік обладнання на початок експлуатаційного періоду складає 1 рік.

Таблиця 10.

t	0	1	2	3	4	5	7
R(t)	8+k	8+k-1	8+k-1	8+k-2	8+k-2	8+k-3	8+k-3
S(t)	12+k	12+k-2	12+k-4	12+k-4	12+k-5	12+k-7	12+k-8

ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ЕКОНОМІКИ. (2 ГОД)

Практичне заняття №6. Метод Лагранжа

Задачі для розгляду на практичному занятті.

Приклад. Розв'язати задачу методом Лагранжа.

Попит на продукцію, що виготовляється на двох видах обладнання, становить 120 одиниць. Собівартість виробництва продукції на обладнанні кожної групи залежить від обсягу виробництва – відповідно x_1, x_2 – та подається у вигляді для першої групи: $3x_1 + 4x_1^2$; для другої групи: $5x_2^2$. знайти оптимальний план виробництва продукції на кожній групі обладнання, який за умови задоволення попиту потребує найменших витрат, пов'язаних із собівартістю продукції.

Розв'язок.

Математична модель задачі:

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 120 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Функція Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(120 - x_1 - x_2)$$

Прирівнявши до нуля частинні похідні цієї функції за невідомими параметрами x_1, x_2, λ отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 3 + 8x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 120 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему маємо:

$$x_1 = 66,5, \quad x_2 = 53,5; \quad \lambda = 535$$

Отже, на першій групі обладнання необхідно випускати 66,5, а на другій 53,5 одиниць продукції. При цьому мінімальні витрати становитимуть:

$$Z = 3 \cdot 66,5 + 4 \cdot (66,5)^2 + 5 \cdot (53,5)^2 = 32199,75 \text{ (грошових одиниць).}$$

Індивідуальні завдання до практичного заняття № 6.

На виробництво трьох видів продукції А, В, С витрачаються три види ресурсів, найменування яких, норми витрат на одиницю продукції, сумарний запас, а також розмір прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежить від обсягу виробництва відбиває таблиця 11.

Таблиця 11.

Ресурси	Продукція			Запас ресурсів
	А	В	С	
Матеріальні	4+k	5+k	7+k	120
Трудові	3+k	6+k	8+k	150
Фінансові	2+k	1+k	4+k	100
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2+2x_2$	$3x_3^2+6$	
Обсяг виробництва	X_1	X_2	X_3	

Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, за умови повного використання ресурсів.

ТЕМА 7. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ. (4 ГОД)

Лабораторна робота №3. Застосування моделі динамічного ряду для дослідження зміни економічних показників у часі

Задачі для розв'язку на лабораторному занятті.

Приклад: Проаналізувати показники реалізації борошняних виробів у Херсонській області за період з 1998 – 2004 р.р.

Роки	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Об'єм реалізації	17,1	17,7	18,4	19,5	20,0	21,0	21,6

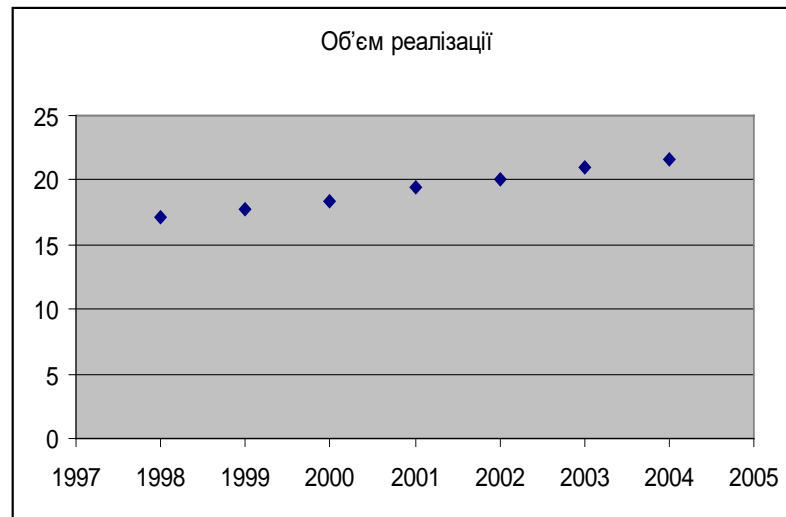
Провести економетричний аналіз. Знайти рівняння найбільш вдалої моделі, використовуючи ПП MS Excel.

Розв'язок:

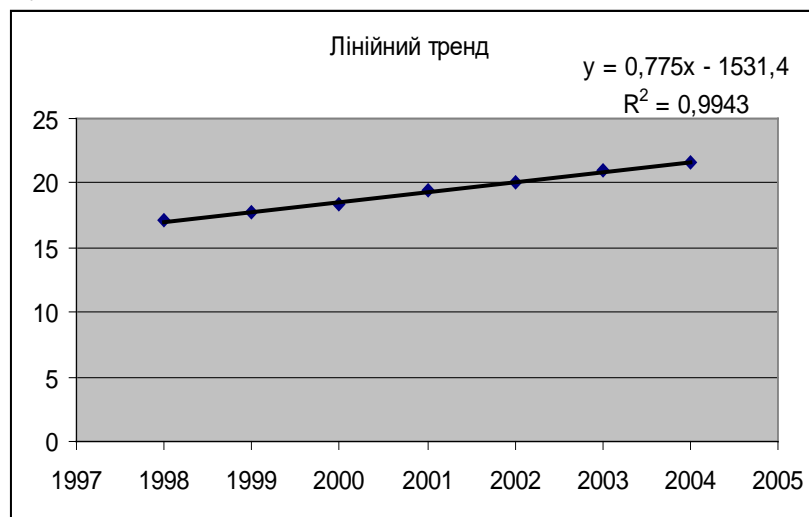
Дані таблиці показують, що реалізація борошняних виробів зростала на протязі досліджуваного періоду, хоча зростання було не рівномірним. Очевидно, існує ряд факторів, під впливом яких змінюється величина реалізації. Одні з них можуть бути суттєвими, інші не суттєвими, крім того вплив не кожного фактора можна врахувати при побудові економетричної моделі. Наша задача полягає у виборі такої функції апроксимації реальних даних, яка б дала найбільш повне уявлення про головну тенденцію ряду динаміки.

Для даного ряду можна знайти наступні числові характеристики: середнє значення – 19,328, стандартна похибка – 0,635, медіана – 19,5, стандартне відхилення – 1,679, дисперсія вибірки – 2,819, ексцес - 1,461, асиметричність – 0,025, ширина інтервалу – 4,5, максимум – 21,6, мінімум – 17,1, сума – 135,3. (курси: «Математична статистика», «Статистика» II семестр).

Для наглядного зображення ряду використовуємо точкову діаграму MS Excel.



Для вирівнювання показників будемо використовувати наступні функції апроксимації (лінії тренду до існуючої точкової діаграми MS Excel): лінійну, параболічну, степеневу.



Величина R^2 – показує величину достовірності апроксимації трендом реальних даних динамічного ряду. Чим ближче цей показник до 1 тим точніше лінія тренду зображує наявну тенденцію динаміки.

Адекватність і надійність:

Побудуємо розрахункову таблицю для лінійної функції $y_T = 0,775x + 16,229$:

	y_{ϕ}	y_T	$ y_{\phi} - y_T $	k	$(y_{\phi} - y_T)^2$	$(y_T - y_{cp})^2$
1	17,1	17,004	0,096	0,56	0,0092	5,4056
2	17,7	17,779	0,079	0,44	0,0062	2,4025
3	18,4	18,554	0,154	0,83	0,0237	0,6006
4	19,5	19,329	0,171	0,88	0,0292	0
5	20	20,104	0,104	0,52	0,0108	0,06006
6	21	20,879	0,121	0,58	0,0146	2,4025
7	21,6	21,654	0,054	0,25	0,0029	5,4056
			Σ	4,06	0,0966	16,8174

$$\bar{y} = 19,329; \quad \bar{k} = \frac{4,06}{7} = 0,58\%; \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{0,0966}{5}} = 0,139; \quad F = \frac{16,8174 \cdot 5}{0,0966} = 870,5$$

За таблицями Фішера знаходимо критичне значення: $F_{кр}(0,05;1;5) = 6,61$.

Зробивши аналогічні розрахунки для параболічної функції ($y_T = 16,265 + 0,751x + 0,003x^2$) отримаємо:

$$\bar{k} = \frac{4,02}{7} = 0,57\%; \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{0,0957}{4}} = 0,155; \quad F = \frac{16,8183 \cdot 4}{2 \cdot 0,0966} = 351,5$$

$$F_{кр}(0,05;2;4) = 6,94$$

Виходячи з розрахованих показників можна зробити висновок: середня похибка апроксимації для обох моделей менше 5 % і $F > F_{кр}$ – обидві моделі адекватні і надійні, але середньоквадратичне відхилення лінійної функції менше середньоквадратичного параболічної функції, тому формула лінійного тренду є більш вдалою моделлю і її можна використовувати для прогностичних розрахунків реалізації борошняних виробів на наступні періоди:

Роки	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Об'єм реалізації	17,1	17,7	18,4	19,5	20,0	21,0	21,6	21,654	22,429

Індивідуальне завдання до лабораторної роботи №3

На основі даних таблиці 12) показників динамічного ряду провести економетричний аналіз:

- зобразити динамічний ряд графічно;
- побудувати модель динаміки досліджуваного показника, використавши для апроксимації лінійну, параболічну, степеневу функції;
- виконати оцінку побудованих моделей на адекватність і надійність,
- вибрати найбільш вдалу модель;
- скласти прогноз показника на два роки.

№	Показники	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
1	Витрати обігу, %	12,3	12,5	11,6	11,4	10,9	10,5	10,1
2	Собівартість продукції, грн.	3,1	3,2	3,3	3,5	3,7	3,9	3,8
3	Рентабельність, %	2,3	3,1	3,3	4,5	4,6	4,9	5,1
4	Преміальний фонд, тис.грн.	16,2	16,1	18,4	20,4	20,7	20,9	21,5
5	Витрати обігу, тис. грн.	5,2	5,1	3,4	4,1	3,7	2,8	2,5
6	Транспортні витрати, тис.грн.	21,6	20,7	18,4	14,8	14,4	12,8	13,2
7	Прибуток від реалізації, тис. грн.	8,4	10,6	11,7	14,4	15,9	17,8	18,5
8	Площа торгових приміщень, кв.м.	4,1	4,3	4,9	5,1	6,4	7,3	8,7
9	Кількість співробітників, чол.	149	187	190	201	212	247	290
10	Продуктивність праці, тис.грн.	121	125	149	154	159	164	172
11	Витрати обігу, тис. грн.	21,4	20,8	17,5	14,3	13,1	11,4	10,7
12	Об'єм реалізації, млн. грн.	19,5	19,6	18,3	17,8	19,4	25,7	28,7
13	Об'єм продукції на душу населення, грн.	14,6	14,8	14,9	15,3	15,7	16,2	15,9
14	Товарообіг магазину, млн. грн.	2,1	2,4	2,9	3,1	2,9	3,1	2,8
15	Кількість торгових точок, шт.	18	24	29	48	52	67	79
16	Населення районного центру, тис.чол.	22	25	29	34	36	37	38

17	Рівень витрат підприємства.	0,25	0,27	0,15	0,12	0,12	0,11	0,10
18	Обіг товарів, дні.	25	19	21	17	18	19	19
19	Величина прибутку на душу населення, грн.	89	145	187	195	198	200	201
20	Попит на товари довгострокового вжитку, %	54	53	58	64	68	71	77
21	Прибуток від продажу меблів, тис. грн.	39	48	57	89	91	97	95
22	Прибуток від реалізації кондитерських виробів, млн.грн.	80	84	90	98	97	94	91
23	Випуск автомобілів, тис.шт.	21	54	61	78	84	89	92
24	Витрати підприємства на амортизацію, тис.грн.	279	348	491	597	622	674	669
25	Витрати підприємства на оплату лікарняних, тис.грн.	24,6	34,2	35,7	41,1	43,2	53,1	36,3
26	Об'єм реалізації цукру, тис.грн.	14,12	14,11	14,14	16,14	15,19	15,17	15,15
27	Об'ємреалізації м'яса, млн.грн.	22,4	22,2	19	17	16	14	11
28	Об'єм реалізації молочної продукції, млн.грн.	97	89	82	76	77	65	58
29	Об'єм реалізації хліба, млн.грн.	221	227	241	258	311	324	336
30	Об'єм реалізації риби, млн.грн.	2,15	2,18	2,19	3,17	4,16	5,15	6,17

Лабораторна робота №4. Побудова регресійних моделей

Задачі для розв'язку на лабораторному занятті.

Приклад 1: побудувати економетричну модель парної регресії за даними таблиці.

Y	X
2,5	18,0
2,7	15,3
2,9	15,7
2,7	16,3
2,6	17,7
2,7	15,3
2,5	18,0
2,7	15,3
2,9	15,7
2,7	16,3

1. Розрахунок даних для обчислення параметрів моделі регресії представимо у вигляді таблиці:

x_i	y_i	x_i^2	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$x_i y_i$	\hat{y}_i	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
18,0	2,5	324	2,6896	0,0361	45	2,54	0,0014	0,0235
15,3	2,7	234,09	1,1236	0,0001	41,31	2,79	0,0074	0,0093
15,7	2,9	246,49	0,4356	0,0441	45,53	2,75	0,0227	0,0035
16,3	2,7	265,69	0,0036	0,0001	44,01	2,69	0,0000	0,0000
17,7	2,6	313,29	1,7956	0,0081	46,02	2,56	0,0013	0,0157
15,3	2,7	234,09	1,1236	0,0001	41,31	2,79	0,0074	0,0093
18,0	2,5	324	2,6896	0,0361	45	2,54	0,0014	0,0235
15,3	2,7	234,09	1,1236	0,0001	41,31	2,79	0,0074	0,0093
15,7	2,9	246,49	0,4356	0,0441	45,53	2,75	0,0227	0,0035
16,3	2,7	265,69	0,0036	0,0001	44,01	2,69	0,0000	0,0000
163,6	26,9	2687,9	11,424	0,169	439,03	26,88	0,0718	0,0976

$$\bar{x} = 16,36 \quad \bar{y} = 2,69$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{10} \cdot 439,03 - 16,36 \cdot 2,69}{\frac{1}{10} \cdot 2687,9 - (16,36)^2} = -0,0924; \quad b_0 = 2,69 - (-0,0924) \cdot 16,36 = 4,2$$

Шукане рівняння парної регресії матиме вигляд: $\hat{y} = 4,2 - 0,0924 \cdot x$

Визначення коефіцієнтів кореляції та детермінації:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{11,424}{10}} = 1,069 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{0,169}{10}} = 0,13$$

$$r_{yx} = \frac{1,069}{0,13} \cdot (-0,0924) = -0,76; \quad R^2 = (-0,76)^2 = 0,577$$

Оцінка адекватності регресійної моделі за критерієм Фішера:

$$MSR = 0,097 \quad MSE = \frac{0,0718}{8} = 0,009$$

$$F = \frac{0,097}{0,009} = 10,97 \quad F_{кр} = 5,32$$

$F > F_{кр}$ - отримана модель парної регресії адекватна дійсності.

Оцінка значимості параметрів моделі регресії за критерієм Ст'юдента:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = MSE = 0,009 \quad \hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{0,009} = 0,094$$

$$\hat{\sigma}_{b_1} = \sqrt{\frac{0,009}{11,424}} = 0,028 \quad \hat{\sigma}_{b_0} = \sqrt{\frac{0,009 \cdot 2687,9}{10 \cdot 11,424}} = 0,460$$

$$t_1 = \frac{-0,0924}{0,028} = -3,3 \quad t_2 = \frac{4,2}{0,460} = 9,13 \quad t_{кр} = \pm 2,31$$

Так, як $|t_i| > t_{кр}$, то параметри побудованої економетричної моделі простої регресії статистично значимі (за критерієм Ст'юдента).

Точковий прогноз y_{n+1} :

$$x = p \cdot \bar{x} = 0,95 \cdot 16,36 = 15,542, \quad \hat{y}_{n+1} = 4,2 - 0,0924 \cdot 15,542 = 2,76$$

Інтервали довіри для залежної змінної при $\alpha = 0,05$:

$$\hat{y}_{n+1} \pm 2,31 \cdot 0,094 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(15,542 - 16,36)^2}{11,424}\right)}$$

$$\hat{y}_{n+1} \pm 0,234$$

Висновок: отримана економетрична модель простої лінійної регресії однозначно встановлює зв'язок між залежною змінною (витрати обігу) і незалежною змінною (вантажобіг) і є адекватною реальним даним ($R^2 = 0,577$).

Коефіцієнти регресії статистично значимі, що уможливило отримання прогнозних величин залежної змінної у межах $[\hat{y}_{n+1} - 0,234; \hat{y}_{n+1} + 0,234]$ - довірчого інтервалу.

Приклад 2: побудувати лінійну модель множинної регресії за даними, представленим у таблиці:

Y	X ₁	X ₂	X ₃
78,5	7	26	6
74,3	1	29	15
104,3	11	56	8
87,6	11	31	8
95,9	7	52	6
109,2	11	55	9
102,7	3	71	17
72,5	1	31	21
93,1	2	54	18
115,9	21	47	4
83,8	1	40	23
113,3	11	66	9
109,4	10	68	8

Y – залежна змінна; X₁, X₂, X₃ – незалежні змінні - фактори.

Модель представити у виді найкращого рівняння регресії, виключивши з нього фактори, які мультиколінеарні між собою.

Для побудови рівняння регресії скористатися процедурою Регресія з надбудови Excel Аналіз даних.

Для дослідження мультиколінеарності використати процедуру Кореляція з надбудови Excel Аналіз даних.

Рішення.

1. Для вихідних даних рівняння регресії має вид: $Y = a_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3$.

2. Для оцінки мультиколінеарності будується кореляційна матриця – «Excel» - «Аналіз даних» - «Кореляція».

	Y	X ₁	X ₂	X ₃
Y	1			
X ₁	0,73	1		
X ₂	0,82	0,23	1	
X ₃	-0,53	-0,83	-0,13	1

Аналіз цієї матриці показує, що найбільший коефіцієнт кореляції 0,83 між факторами X₁ і X₃, тобто вони мультиколінеарні між собою і рівняння регресії не може містити одночасно обидва фактори.

3. Проводимо регресійний аналіз за допомогою процедури Регресія, включаючи усі незалежні змінні.

Результат регресійного аналізу буде мати вид.

$$a_0 = 47,80324515; b_1 = 1,718461602; b_2 = 0,654962481; b_3 = 0,278687661.$$

$$Y = 47,80324515 + 1,718461602 * X_1 + 0,654962481 * X_2 + 0,278687661 * X_3$$

Коефіцієнт детермінації R-квадрат = 0,982911198 тобто, майже на 98% зміни залежної змінної Y пов'язано зі зміною факторів X₁, X₂, X₃.

Значення критерію Фішера $F=172,5535632$

5. Виключаємо із розгляду змінну X₃, (мультиколінеарна з X₁) і знову проводимо регресійний аналіз.

Наступне рівняння регресії матиме вигляд:

$$Y = 52,57734888 + 1,468305742 \cdot X_1 + 0,662250491 \cdot X_2$$

Коефіцієнт детермінації R -квадрат = 0,9786 - зменшився, тому що із розгляду була виключена одна незалежна змінна. Значення критерію Фішера $F=229,5036971$ збільшилося, що дозволяє зробити висновок про доцільне виключення змінної X_3 .

6. Подальше виключення незалежних змінних неможливе, тому що не існує більше факторів мультиколінеарних між собою. Щоб у цьому переконатися, треба виконати ще один крок регресійного аналізу, виключивши один із факторів, наприклад, X_2 .

Як видно, спостерігається різке зменшення величини коефіцієнта детермінації R -квадрат = 0,533948024 і відповідно зменшується значення критерію Фішера $F = 12,60251766$.

Отже, найкраще рівняння регресії матиме вигляд:

$$Y = 52,57734888 + 1,468305742 \cdot X_1 + 0,662250491 \cdot X_2$$

Для цього рівняння критерій Фішера має таке числове значення: $F=229,5036971$, а критичне значення критерію Фішера - $F_{0,05kp}(3;9)=3,9$.

$F > F_{0,05kp}$ – отримана багатofакторна модель лінійної регресії значима і адекватна до дійсності за F -критерієм Фішера.

Індивідуальне завдання до лабораторної роботи №3

На основі даних спостережень, таблиця 12, побудувати економетричну модель множинної регресії:

На основі даних таблиця 12 побудувати економетричну модель:

- оцінити параметри моделі за методом найменших квадратів;
- визначити коефіцієнти кореляції та детермінації;
- оцінити значимість регресійної моделі за критерієм Фішера;
- оцінити значимість параметрів моделі регресії;
- виконати точкове прогнозування y_{n+1} для $x = p \cdot \bar{x}$, де $p=0,95$;
- обчислити інтервали довіри для залежної змінної при $\alpha = 0,05$.

- Таблиця 12.

1	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23

2	Y	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
	X	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3

3	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23

4	Y	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
	X	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76

-

5	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23

6	Y	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
	X	28,13	17,55	19,52	18,13	12,21	22,97	16,38	16,66	20,09	15,98

7	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
8	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
9	Y	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
10	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
11	Y	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
12	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
13	Y	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34
14	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34
15	Y	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36
16	Y	62,00	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34
17	Y	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
18	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
19	Y	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36
20	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
21	Y	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34
22	Y	62,00	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
23	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2

	X	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76
24	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
25	Y	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36
	X	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
26	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34
27	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36
28	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3
29	Y	26	26,7	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X	8,9	9,7	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,7
30	Y	2,0	2,1	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X	43	42	37,02	41,08	42,39	37,39	101,7	81,32	59,92	107,3

Індивідуальне завдання до лабораторної роботи №4

На основі даних спостережень, Таблиця 13 побудувати економетричну модель множинної регресії:

- побудувати кореляційну матрицю, використовуючи процедуру Кореляція (MS Excel);
- визначити наявність мультиколінеарності:
- за допомогою кореляційної таблиці;
- за допомогою F-тесту Глаубера-Фара;
- порівняти отримані результати
- провести регресійний аналіз, використовуючи процедуру Регресія (MS Excel);
- побудувати рівняння регресії і оцінити його статистичні характеристики:
 - при наявності колінеарних змінних; після усунення мультиколінеарності.
- визначити найкраще рівняння регресії.

- Таблиця 13.

1	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
	X3	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3

2	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
	X3	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76

3	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
----------	----------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
	X3	28,13	17,55	19,52	18,13	12,21	22,97	16,38	16,66	20,09	15,98

4	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,40	0,19	0,44	0,25	0,02	0,06	0,16	0,24	0,11	0,47
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86

5	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21

6	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30

7	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34

8	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36

9	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3

10	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76

11	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,35	1,39	1,27	1,10	1,23	1,39	1,38	1,35	1,24	1,40
	X3	28,13	17,55	19,52	18,13	21,12	22,97	16,38	16,66	20,09	15,98

12	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21

13	Y	62,00	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
-----------	----------	-------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

	X1	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30

14	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36

15	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34

16	Y	62,00	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3

17	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76

18	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	28,13	17,55	19,52	18,13	21,12	22,97	16,38	16,66	20,09	15,98

19	Y	62,00	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36
	X2	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X3	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21

20	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
	X3	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34

21	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
	X3	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36

22	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
	X3	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3

23	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
-----------	----------	------	-----	------	-----	-----	-----	-----	------	-----	------

	X1	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36
	X2	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
	X3	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76

24	Y	28,13	17,55	19,52	18,13	21,12	22,97	16,38	16,66	20,09	15,98
	X1	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X2	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
	X3	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4

25	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X3	39,53	40,41	37,02	41,08	42,39	37,39	101,78	81,32	59,92	107,34

26	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X3	5,35	3,90	4,88	5,65	8,85	8,52	7,19	5,38	9,27	4,36

27	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X3	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3

28	Y	62	53,1	56,5	30,1	18,1	13,6	89,9	76,6	32,3	199,6
	X1	0,23	0,43	0,26	0,43	0,38	0,42	0,30	0,37	0,34	0,23
	X2	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X3	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76

29	Y	10,6	9,1	23,4	9,7	9,1	5,4	9,9	19,1	6,6	14,2
	X1	0,15	0,34	0,09	0,05	0,48	0,41	0,62	0,50	1,2	0,21
	X2	0,88	0,57	1,70	0,84	1,04	0,66	0,86	1,27	0,68	0,86
	X3	173,9	162,3	101,2	177,8	93,2	126,7	91,8	70,6	97,2	80,3

30	Y	9,4	9,9	9,1	5,5	6,6	4,3	7,4	6,6	5,5	9,4
	X1	11,88	12,60	8,28	17,28	13,32	17,28	9,72	8,64	9,00	14,76
	X2	1,91	1,68	1,89	1,02	0,88	0,62	1,09	1,32	0,68	2,30
	X3	0,62	0,76	0,71	0,74	0,72	0,68	0,77	0,77	0,72	0,79

ТЕМА 8. ТЕОРІЯ ІГОР ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕ ВИЗНАЧЕНОСТІ. (4 ГОД)

Практичне заняття №7-8. Матрична гра двох осіб з нульовою сумою.

Задачі для розгляду на практичному занятті.

Приклад 1. Розглянемо гру двох гравців A і B задану платіжною матрицею. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії для обох гравців.

$$\begin{matrix} & \text{гравець } B \\ \text{гравець } A & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Розв'язок.

Оптимізацію гри починають, як правило, визначенням *домінуючих стратегій* для кожної з сторін, а також відкиданням не вигідних і дублюючих стратегій.

Перша стратегія A домінує над третьою, оскільки усі її значення є не гіршими ніж у разі вибору третьої стратегії, тобто усі елементи першого рядка не менші за відповідні елементи третього рядка платіжної матриці. Тому третя стратегія може бути вилучена з матриця як гірша за першу.

Перша стратегія гравця B домінує над четвертою, яку можна відкинути як більш збиткову, а тому не вигідну для гравця B . Отже маємо таку платіжну матрицю після домінування:

$$\begin{matrix} & \text{гравець } B \\ \text{гравець } A & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Визначимо наявність сідлової точки:

	B_1	B_2	B_3	B_4	min	$Maxmin = max(3, 5, 3) = 5$
A_1	6	3	8	9	3	
A_2	6	5	7	6	5	
A_3	4	4	3	8	3	
max	6	5	8	9		
$Minmax = min(6, 5, 8, 9) = 5$						

Отже $\alpha = \beta = 5$ - ця гра має сідлову точку і відповідно оптимальним розв'язком матричної гри буде чиста стратегія із ціною гри $v = 5$. Тобто, оптимальною максимумною стратегією гравця A буде друга стратегія. Оптимальною міні-максною стратегією гравця B буде також друга стратегія із чотирьох можливих.

Рішення, що відповідає сідловій точці гарантує, що жодному з гравців немає сенсу намагатися обрати інші стратегії, в якості оптимальних.

Оптимальний розв'язок гри, що відповідає сідловій точці, не обов'язково повинен характеризуватися чистими стратегіями. Навпаки, оптимальне рішення може вимагати змішування випадковим чином двох або більше стратегій.

Рішення матричних ігор у змішаних стратегіях.

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \nu \leq \beta$, то макси-мінно міні-максні стратегії не є оптимальними: кожна з сторін може покращити свій результат при виборі іншої стратегії. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять, застосовуючи *змішані стратегії*, які є певними комбінаціями початкових чистих стратегій.

Якщо матрична гра не має сідлової точки, то її розв'язок можна знайти або *графічно*, або *методами лінійного програмування*.

Графічний метод.

Графічний метод застосовується для рішення матричних ігор, в яких хоча б один гравець має дві чисті стратегії.

Розглянемо матричну гру, із платіжною матрицею розмірності $2 \times n$, в якій гравець A має дві стратегії.

		$p_1=y_1$	$p_2=y_2$...	$p_n=y_n$
		B_1	B_2	...	B_n
$p_1=x_1$	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$p_2=1-x_1$	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

У грі припускають, що гравець A змішує стратегії A_1 і A_2 з відповідними ймовірностями x_1 та $(1-x_1)$, де $0 \leq x_1 \leq 1$. гравець B змішує стратегії B_1, B_2, \dots, B_n з ймовірностями y_1, y_2, \dots, y_n , де $y_1+y_2+\dots+y_n=1$. У цьому випадку очікуваний виграш гравця A , що відповідає j -й чистій стратегії гравця B , обчислюється у вигляді.

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, \quad j = 1 \div n.$$

Таким чином розв'язок задачі зводиться до визначення величини x_1 , що максимізує мінімум очікуваних виграшів для гравця A : $\max_{x_1} \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}\}, \quad j = 1 \div n.$

Приклад 2. Задано матричну гру 2×4 , в якій платежі виплачуються гравцеві A .

		$p_1=y_1$	$p_2=y_2$	$p_3=y_3$	$p_4=y_4$
		B_1	B_2	B_3	B_4
$p_1=x_1$	A_1	2	1	3	4
$p_2=1-x_1$	A_2	1	3	1	3

Визначити графічно рішення гри.

Розв'язок.

Гра розв'язку у чистих стратегіях не має, відповідно розв'язок буде в змішаних стратегіях. Очікувані виграші гравця A , що відповідають чистим стратегіям гравця B , приведемо у таблиці.

<i>Чисті стратегії гравця B</i>	<i>Очікувані виграші гравця A</i>
1	$(2-1)x_1 + 1 = x_1 + 1$
2	$(1-3)x_1 + 3 = -2x_1 + 3$
3	$(3-1)x_1 + 1 = 2x_1 + 1$
4	$(4-3)x_1 + 3 = x_1 + 3$

Для графічного розв'язку даної гри на координатній площині вздовж осі абсцис відкладемо відрізок одиничної довжини ($0 \leq x_1 \leq 1$), перпендикулярно до нього проводимо дві осі OA_1 та OA_2 , на яких відкладемо виграші гравця A стратегій A_1 та A_2 відповідно, за умови, що гравець B дотримується однієї з своїх чистих стратегій (рис.1).

Ламана лінія B_2MB_1 є нижньою границею можливого виграшу гравця A . На цій лінії знаходимо точку з максимальною ординатою – точку M , що утворена перетином ліній B_2B_2 та B_1B_1 .

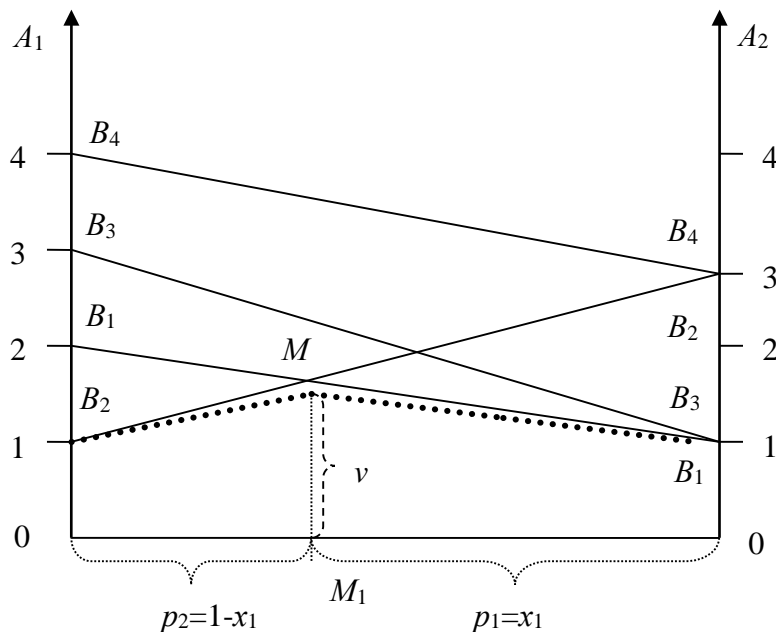


Рис. 7.4. Графічний розв'язок матричної гри до прикладу 7.6.

Ордината точки M - ціна гри v , абсциса точки M (точка M_1) поділяє одиничний відрізок x_1 таким чином, що отримуємо імовірності p_1 та p_2 , для стратегій A_1 та A_2 відповідно.

Таким чином, якщо точка M утворена перетином двох ліній B_2B_2 та B_1B_1 , тоді активними будуть стратегії, які можна представити наступною платіжною матрицею.

	B_1	B_2
A_1	2	1
A_2	1	3

Тепер оптимальну стратегію гравця A представляє вектор $\tilde{X} = (x_1^*, x_2^*)$, а для гравця B вектор $\tilde{Y} = (y_1^*, y_2^*, 0, 0)$. Компоненти векторів \tilde{X}, \tilde{Y} розглядаються як імовірності дотримання обраних стратегій гравцями A та B . Тобто, повинна виконуватись умова нормування $x_1^* + x_2^* = 1; y_1^* + y_2^* = 1$ для обох векторів.

Для обчислення невідомих компонент векторів \tilde{X}, \tilde{Y} , запишемо системи рівнянь.

Стратегії гравця А Стратегії гравця В

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} & \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Проаналізуємо по черзі розв'язки цих систем.

Стратегії гравця А

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = v \\ x_1 + 3x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ v = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{X} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), v = \frac{5}{3}.$$

Таким чином оптимальним рішенням матричної гри для гравця А буде змішування стратегій A_1 та A_2 із імовірностями $2/3$ та $1/3$ відповідно. Ціна гри – вигреш гравця А становить $5/3$.

Стратегії гравця В

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 + y_2 = v \\ y_1 + 3y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} \\ y_2 = \frac{1}{3} \\ y_3 = y_4 = 0 \\ v = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\tilde{Y} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0 \right), v = \frac{5}{3}$$

Із отриманого розв'язку видно, що ціна гри для обох гравців має однакове значення, як і має бути при розв'язуванні матричної гри двох осіб з нульовою сумою.

Для ігор, в яких гравець А має m стратегій, а гравець В – лише дві, рішення знаходиться аналогічно. Відмінність полягає лише в тому, що будуються графіки функцій, які представляють очікувані платежі гравця В, що відповідають чистим стратегіям гравця А. У результаті проводиться пошук міні-максної точки верхньої границі побудованих прямих.

Індивідуальне завдання до практичної роботи №7-8

Вибір оптимальної стратегії: матрична гра з нульовою сумою

Гра двох гравців А і В задана платіжною матрицею. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А і В, попередньо виконавши наступні дії:

- а) показати існування або відсутність чистих оптимальних стратегій;
- б) виконати домінування;

в) привести початкову матричну гру до пари двоїстих задач лінійного програмування.

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 11 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ -3 & 6 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Оптимізаційні методи та моделі: підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 400 с.
2. Дивак М.П. Ідентифікація дискретних моделей динамічних систем з інтервальними даними: монографія/ М.П. Дивак, Н.П. Порплиця, Т.М. Дивак. – Тернопіль: ВПЦ «Економічна думка ТНЕУ», 2018. – 220 с.
3. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 400 с.
4. Теория игр. Искусство мышления в бизнесе и жизни / Авинаш Диксит и Барри Нейлбафф; пер. англ. Н. Яцюк.- М.: Манн, Иванов и Фербер, 2015.– 464 с.
5. Хемди А Таха Введение в исследование операций.-М.: Издат. Дом «Вильямс», 2001.
6. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. Посібник для самост. Вивч. Дисц.- К:КНЕУ, 2001. –248с.

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

<https://core.ac.uk/download/pdf/11316926.pdf>

https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream/123456789/68212/1/Lavrov_matematychni_meto_dy.pdf

<http://www1.nas.gov.ua/publications/books/catalog/2006/Pages/687.aspx>

<http://dspace.ksau.kherson.ua/>

<http://www.ksau.kherson.ua/news-2/nnb/ebhdau1/5162-ebhdau.html> (бібліотека ХДАЕУ)

<http://www.ksau.kherson.ua/nnb/ebhdau1.html>