

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

(назва навчальної дисципліни)

освітній рівень

бакалавр

(бакалавр, магістр)

спеціальність

071 «Облік і оподаткування», 051 «Економіка»,
072 «Фінанси банківська справа та страхування»,
281 «Публічне управління та адміністрування».
076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

(шифр і назва спеціальності)

факультет

Економічний

(назва факультету)

Розробник: Ірина Дебела, доцент кафедри менеджменту та інформаційних технологій, к.с-г.н, доцент

2020 – 2021 навчальний рік

ТЕМИ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Коцептуальні аспекти моделювання економічних явищ та процесів.	2
2	Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі. Класифікація моделей.	2
3	Тема 3. Детерміновані економіко-математичні моделі з єдиним критерієм оптимальності.	4
	<i>ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (T4, T5)</i>	
4	Тема 4. Мережеві (потокові) моделі та методи їх розв'язку.	2
5	Тема 5. Детерміновані моделі динамічного програмування.	2
6	Тема 6. Нелінійні математичні моделі задач економіки.	2
7	Тема 7. Оптимізаційні методи економетричного моделювання.	2
8	Тема 8. Теорія ігор та прийняття рішень в умовах не визначеності.	2
9	Тема 9. Системи масового обслуговування	2
	Усього годин	20

Тема 1. Коцептуальні аспекти моделювання економічних явищ та процесів.**План лекційного заняття**

1. Математичні методи і моделі розв'язку економічних задач.
2. Загальна класифікація задач оптимізаційного моделювання.
3. Поняття про моделі і моделювання.
4. Алгоритм моделювання.
5. Математичне моделювання задач економічної діяльності.

1. Математичні методи і моделі розв'язку економічних задач.

Фахівці в області економічних досліджень вважають, що динамічний розвиток економіки тісно пов'язаний із поширеним застосуванням математичних методів і моделей. Якщо раніше домінував якісний аналіз, то на сьогодні вже виявлені кількісні закономірності та побудовані математичні моделі багатьох економічних явищ і процесів. Як результат, спостерігається глибоке проникнення в саму природу досліджуваних процесів та об'єктів економіки. Деякі закономірності, наявність яких не можливо було виявити емпіричним шляхом, формально розраховані математичними методами, навіть коли безпосереднє спостереження не фіксувало навіть їх присутність. Тому математичне моделювання економічних явищ та процесів, шляхом послідовного встановлення логічних причинно-наслідкових зв'язків, для забезпечення можливості спостереження, контролю і управління ними, є найбільш ефективним засобом рішення різноманітних проблем економічно розвинутого суспільства.

Математичне моделювання – це теоретично-експериментальний метод пізнавальної діяльності, методів дослідження і аналізу явищ процесів, об'єктів та систем на основі створення нових об'єктів – математичних моделей

Математичні методи досліджень усе ширше застосовуються в таких сферах людської діяльності, як економіка, екологія, соціологія, комерційна діяльність, маркетинг. Складність отримання кількісних оцінок деяких процесів і явищ для побудови адекватних математичних закономірностей досить сильно стимулює «математизацію» процесів економіки, що і стало приводом для появи таких міждисциплінарних предметів як економіко-математичне моделювання, економетрія, дослідження операцій.

Економічна діяльність пов'язана з постійним пошуком найбільш вигідного (оптимального за даних умов) варіанту розподілу різних видів ресурсів: фінансових, трудових, товарних, технічних та інших. Ускладнення внутрішніх та зовнішніх взаємозв'язків підприємств, наявність великої кількості показників, факторів і обмежень діяльності окремого підприємства, а також швидкий ріст конкуренції не дозволяють сформувати оптимальний план функціонування і розвитку об'єктів економіки без використання специфічних методів і моделей. Крім того, час для розв'язку задач і прийняття рішень обмежений, і тому не завжди вдається вчасно та якісно скласти оптимальний план.

Існуючі математичні методи та моделі дозволяють розв'язувати задачі навіть великої розмірності, тобто з урахуванням великої кількості показників і факторів впливу, а використання обчислювальної техніки і прикладного програмного забезпечення, значно скорочує тривалість обчислювальних процедур.

У цілому можна виділити три основні групи задач економічної діяльності, що можуть бути вирішені завдяки математичному моделюванню: виробництво продукції, комерційне посередництво і торгівля. Комерційна діяльність – це акти куплі-продажу товарів у сфері товарного обігу, орієнтовані на попит споживача, передача товарів у власність торговельного підприємства для реалізації і отримання прибутків з найменшими витратами.

У процесі формулювання задачі економічної діяльності необхідно враховувати ступінь ризику та невизначеності: штрафи, нестабільність ринкових цін на сировину і ресурси, зміна купівельної спроможності грошової одиниці та попиту, постійне зростання вимог до якості товарів, тощо. Використання математичних методів і моделей, навіть в умовах ризиків та невизначеності дозволяє розробити оптимальні варіанти рішення таких задач.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному випадку вимоги до побудови математичної моделі залежать від мети та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, що вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася.

Більшість задач планування і управління в галузях народного господарства, а також широкий спектр задач комерційної діяльності розв'язуються методами математичного програмування і відносяться до, так званих, оптимізаційних задач. Найбільш дослідженими методами розв'язку оптимізаційних задач є методи лінійного програмування. Ці методи дозволяють досить адекватно описати і проаналізувати такі економічні проблеми як: планування виробництва певного асортименту товарів; планування товарообігу торговельних підприємств; організація раціональних торгових перевезень; вибір оптимального маршруту доставки вантажу між пунктами призначення; розподіл робітників за посадами; розподіл товарних потоків; планування капіталовкладень; заміна торгового обладнання; вибір раціонального режиму роботи; розподіл товарних потоків, тощо.

2. Загальна класифікація задач оптимізаційного моделювання.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на *лінійні* та *нелінійні*. У задачах лінійного програмування критерій ефективності та функції системи обмежень лінійні.

Якщо умова задачі вимагає отримання результату в цілих числах, то така задача являється задачею *цілочислового програмування*. У задачах *параметричного*

програмування цільова функція або функція що визначає область можливих значень змінних, залежать від деяких параметрів. Якщо ця функція носить випадковий характер, то маємо задачу *стохастичного програмування*.

Якщо в задачі математичного програмування є змінна часу, а критерій ефективності виражений рівнянням, що описує перебіг процесу або явища в часі, то така задача називається *задачею динамічного програмування*.

Окремим класом задач економіко-математичного моделювання є задачі виявлення кількісних закономірностей та взаємозв'язків економічних об'єктів, визначення тенденцій, змін і прогнозування значень досліджуваного показника в майбутньому. Ці задачі розв'язуються із застосуванням *економетричних методів і моделей*. У практичних дослідженнях економетричні методи використовуються не тільки в економіці. Вони поширені у біології, історії, соціології та інших суспільних і природничих науках, де необхідно розробляти і оцінювати моделі, які формалізують зв'язки між великою кількістю змінних.

У цілому, успішному рішенню задач економічної діяльності, сприяє досить значна кількість різноманітних математичних методів і моделей лінійного, цілочисленого і динамічного програмування, теорії ігор, теорії графів та мережного програмування, теорії масового обслуговування, теорії ймовірностей та математичної статистики, кореляційного і регресійного аналізу.

3. *Поняття про моделі і моделювання.*

У найпоширенішому варіанті слово «модель» можна пов'язати з поняттям «копія», що повторює в зменшеному або у збільшеному масштабі усі пропорції і вигляд об'єкту-оригіналу. Такі моделі називають *макетами*. Макет може відобразити у збільшеному вигляді деякі мікроскопічні об'єкти, що є недосяжним звичайному сприйняттю людини, наприклад атомну будову молекули, або величезні споруди міста – будівлі, мости, мікрайони – у зменшеному, зберігаючи при цьому усі притаманні об'єкту зв'язки, пропорції та характеристики. Такі моделі називають матеріальними. Під час роботи над такими моделями можна легко змінити деталі макету, внести корективи, тобто змоделювати кілька варіантів об'єкту-оригіналу і обрати із усіх варіантів найкращий. Звичайно, створенню макетів передують їх малюнки, креслення, ескізи, схеми, тобто різноманітні відображення макете на папері. Зображення макету на папері передуює представлення його у свідомості людини, що будує макет, таким чином формуються так звані абстрактні моделі. Необхідним для людини є створення не лише статичних моделей – макетів, але і динамічних – змінних у часі процесів економіки, галузей народного господарства, суспільства у цілому. Створення таких моделей є першочерговою задачею математичного моделювання.

У реальному житті ми постійно використовуємо смислові моделі ситуацій, що потребують прийняття нашого рішення. До фізичних моделей відносяться: іграшкові моделі автомобілей, літаків, глобус, планетарій, скульптура та інші матеріальні об'єкти, що замінюють оригінали.

Абстрактна модель – це малюнок, схема, карта, план квартири, будинку, фотографія, математична і графічна моделі.

Математична модель – це сукупність відношень-рівнянь, нерівностей, логічних функцій, операторів і т.п, що визначають характеристики стану об'єкта моделювання, в залежності від значень параметрів об'єкта-оригінала, початкових і граничних умов, а також часу.

Математична модель, як правило, враховує тільки ті властивості об'єкта-оригінала, що відображують і мають значення з точки зору цілей та задач окремого дослідження. Тобто, в залежності від мети моделювання, розглядаючи один і той же самий об'єкт у різних аспектах, останній може мати різний математичний опис, і, як результат, бути виражений різними математичними моделями.

Математична модель, як формальна система, складається із обмеженого числа символів і строгих правил оперування цими символами у сукупності з інтерпретацією властивостей певного об'єкта дослідження, деякими відношеннями і постійними величинами.

Наші знання про об'єкти і явища реальної дійсності завжди відносні, не повні, обмежені, тому вони є відображенням дійсності із деякою похибкою, точністю. Тим самим, майже завжди, виникає необхідність заміни досліджуваного об'єкта-оригінала його моделлю. Крім того створення моделі дозволяє «здешевити» проведення дослідження, скоротити час на вивчення основних характеристик і поведінки досліджуваного явища, об'єкта, процесу.

Таким чином, *моделлю називається матеріальний чи ідеальний об'єкт, що створюється для вивчення реального об'єкта (оригіналу) і який відображує найбільш важливі якості і параметри оригіналу.*

До абстрактних (ідеальних) моделей відносяться графіки, фотографія, схема, карта, план будинку, математичні моделі, побудовані за допомогою чисел, функцій, рівнянь, нерівностей і т.п. моделі широко застосовуються в різних сферах діяльності людини: науці, мистецтві, техніці, економіці, т.п. На даний час накопичено величезний досвід успішного використання моделей та моделювання.[]. Абстрактні моделі знайшли широке застосування у кількісних методах економічного аналізу, що стало приводом для застосування математичних методів і створення *економіко-математичних моделей*, що відображують економічні відносини засобами математичного апарату.

Уся сукупність дій, пов'язаних із побудовою, аналізом і використанням моделей називається *моделюванням*, графічний алгоритм якого представлений на малюнку (рис. 1.1).

Послідовність процесу моделювання представляє собою інтерактивну процедуру, яка передбачає і дозволяє виконати корекцію після кожного етапу і повернутися до будь-якого із попередніх, а потім продовжити аналіз.

Можна виділити три основних кроки – етапи алгоритму математичного моделювання. На першому кроці відбувається формулювання проблеми, визначаються цілі і задачі дослідження, виконується якісний опис економічного процесу, явища - об'єкту моделювання. На другому кроці визначаються методи рішення, будується математична модель досліджуваного об'єкта, вибираються чи розробляються методи дослідження, програмується моделі для обробки на комп'ютері, формується база вхідної інформації. Далі перевіряється придатність

моделі на основі перевірки достовірності, адекватності отриманих за нею результатів, оцінюється їх стійкість. На третьому кроці математичного моделювання проводиться дослідження за моделлю, реалізованої у вигляді обчислювальних процедур комп'ютерних програм, виконуються розрахунки, обробляються та аналізуються отримані результати і приймається оптимальне (за даних умов) рішення.

Оптимальне планування направлене на пошук найкращого варіанту із множини можливих альтернатив. Найкращий розподіл ресурсів здійснюється при порівнянні варіантів плану за обраним критерієм оптимальності, що визначає ступінь досягнення мети. Такими критеріями можуть бути рентабельність, дохід, витрати обігу, товарообіг та інші. У зв'язку з цим оптимальним вважається такий план, що забезпечує, наприклад, максимальний дохід (розв'язок задачі на максимум), або мінімум витрат обігу (розв'язок задачі на мінімум).

У цілому пошук оптимальних рішень можна звести до двох основних постановок задач: отримання заданого ефекту при мінімальних витратах або отримання максимального ефекту при заданих обмежених ресурсах.

4. *Алгоритм моделювання.*

У сучасній економічній практиці наслідки прийнятих управлінських рішень стосуються інтересів великого числа осіб, що прямо або опосередковано являються об'єктами економічної діяльності та пов'язані зі значними витратами трудових ресурсів, товарних, фінансових, транспортних, енергетичних та інших матеріальних ресурсів. Тому міра відповідальності за прийняте рішення та його наслідки зростає багаторазово, і вимагає більш широкого використання формалізованих підходів, що викладені у теорії прийняття рішень.

Прийняття рішення – це процес, результатом якого є вибір за критерієм ефективності одного із можливих варіантів рішень - альтернатив, що є у розпорядженні особи що приймає рішення.

При виборі будь-якого рішення завжди є можливість обрати певний варіант із множини альтернатив. Критерієм вибору краще обрати такий, що дає можливість кількісно порівняти можливі альтернативи. Кількісний критерій називають показником ефективності, він формально відображує мету, для досягнення якої і відбувається процес прийняття рішення, в окремій ситуації. У якості таких кількісних критеріїв можуть виступати наступні показники: об'єм товарообігу, прибуток, витрати, рентабельність і т.п..

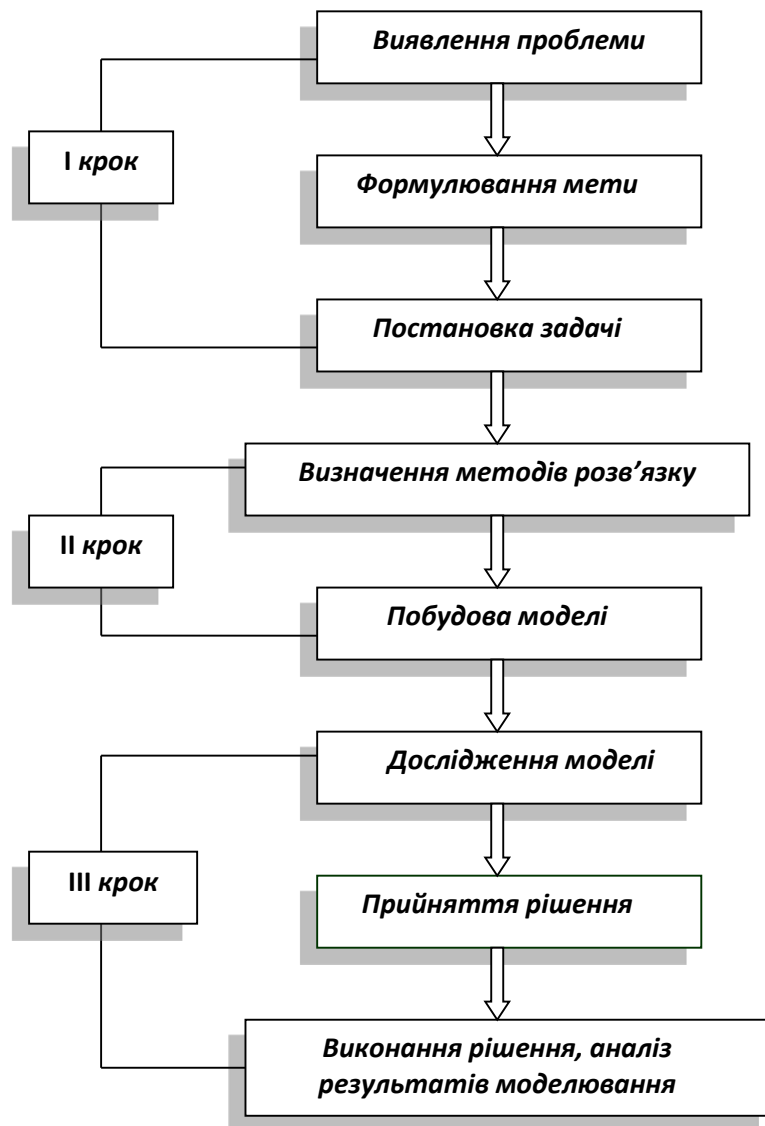


Рис. 1.1. Алгоритм моделювання

Необхідність вибору альтернативи, або варіанта дій обумовлена наявністю протиріч, що притаманні економічній сфері діяльності. Протиріччя – це проблеми, що мають дві складові – бажане і реальне, причому є більше одного способу досягнення бажаного (мети). Так як існує декілька способів досягнення мети, то виникає проблема вибору альтернативи. Варіанти рішень різняться своїми кінцевими результатами – наслідками, що характеризують ступінь досягнення мети, тому остаточне рішення щодо вибору альтернативи залишається за особою що приймає рішення. Особа, що приймає рішення, має свої суб'єктивні цілі - критерії вибору певної альтернативи, що можуть не співпадати з об'єктивними оцінками.

Складність вибору «правильного рішення» обумовлене також відсутністю цілісного сприйняття і об'єктивного оцінювання реальної економічної ситуації, відсутністю повної та чіткої інформації про стан і характеристики досліджуваного об'єкта, крім того, описання економічної задачі майже завжди повністю виключає вплив середовища, що може активно, осмислено або пасивно впливати на результат.

Умови прийняття рішення в економічній діяльності можна поділити:

- умови *повної визначеності* – кожна існуюча альтернатива приводить до одного єдиного рішення, тобто існує повна функціональна залежність результатів прийняття рішення від альтернатив;

- *стохастичні* умови (наявність ризику) – кожна альтернатива може привести до множини результатів, кожен із яких має певну імовірність появи - існує певна стохастична залежність результату від альтернатив;

- умови *невизначеності* – кожна альтернатива може привести до одного або кількох результатів, імовірність появи яких невідома, тобто повністю відсутня навіть стохастична залежність результату від альтернатив.

В залежності від умов відбувається вибір моделі та методу моделювання. Моделювання дає особам – фахівцям зручний, дешевий і ефективний інструмент швидкого перебору і порівняння множини варіантів рішення і можливість обрати найкращу альтернативу.

5. Математичне моделювання задач економічної діяльності.

Математичні моделі в економіці розробляються і використовуються для двох цілей: кращого розуміння об'єктивної реальності з метою планування раціонального способу дій та вибору оптимальних рішень для практичної діяльності, відповідно, математичне моделювання обов'язково повинно розглядатися як складова процесу прийняття рішення.

Під *економіко-математичною моделлю* розуміють представлення найсуттєвіших економічних зв'язків, та характеристик економічного об'єкта, процесу або явища у формальному вигляді, за допомогою математичних функцій, систем, нерівностей та рівнянь.

Розглянемо найпростіші приклади математичних моделей економічних задач.

Модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва багатогалузевої економіки). Нехай маємо деякий виробничий комплекс, що складається із n «чистих» галузей, що випускають n видів продукції Чисті галузі - це економічна абстракція, означаюча умовну галузь, що об'єднує все виробництво окремого виду продукції, причому кожна галузь випускає лише певний продукт і різні галузі випускають різні продукти. У процесі власного виробництва кожна галузь використовує продукцію виготовлену іншими галузями. Мета побудови моделі міжгалузевого балансу – дати відповідь на питання: яким повинен бути обсяг виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити усі потреби у продукції окремої галузі. При цьому кожна галузь виступає з одного боку як виробник продукції, а з іншого - як споживач і власної і продукції інших галузей.

Зв'язок між галузями відображується в таблицях міжгалузевого балансу (таблиця 1.1), а математична модель балансового аналізу була запропонована американським економістом Леонтьєвим у 1936 році [2].

Математична модель Леонтьєва включає наступні обмеження на роботу галузей:

1. Виробничий комплекс містить обмежену кількість галузей – n , що задіяні на випуск n видів продукції;

2. Кожна галузь виробничого комплексу виготовляє лише один вид продукції;
3. Різні галузі випускають різні товари, отже спільне виробництво одного виду продукції виключається;
4. Під виробничим процесом кожної галузі розуміють перетворення деякої частки (можливо всіх) видів продукції, взятих у певних кількостях, в деяку кількість продукції іншого виду;
5. Співвідношення витраченої і випущеної продукції є сталою величиною.

Таблиця 1.1. Таблиця міжгалузевого балансу.

Галузі	Випуск продукції між галузями							Y_i	X_i
	1	2	...	j	...	n	всього		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}			
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}			
...			
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}			
...			
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}			
всього o	$\sum_{i=1}^n x_{i1}$	$\sum_{i=1}^n x_{i2}$...	$\sum_{i=1}^n x_{ij}$...	$\sum_{i=1}^n x_{in}$	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$	Y	X

В таблиці введено позначення:

Y_i – обсяг кінцевого продукту i -ої галузі для невиробничого споживання, ($i = 1 \div n$);

X_i – валовий (загальний) обсяг продукції i -ої галузі ($i = 1 \div n$);

x_{ij} – обсяг виробництва i -ої галузі, що потребує j -та галузь в процесі виробництва, ($i, j = 1 \div n$);.

Отже, формально маємо квадратну матрицю n -го порядку (кількість виробничих галузей і галузей – споживачів дорівнюють n), кожен елемент якої x_{ij} , характеризує об'єм поставок продукції з i -ої галузі, що використовується j -ю галуззю, для виробничого споживання. Якщо просумувати міжгалузеві поставки продукції i -ої галузі за усіма галузями – споживачами, то отримаємо загальну величину проміжного продукту i -ої галузі:

$$X_i^* = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1 \div n$$

Проміжний продукт представляє собою ту частину валового продукту, що залишається після вилучення кінцевого продукту і використовується на відшкодування виробничих та інших матеріальних витрат в межах досліджуваного періоду часу.

Сума проміжних продуктів усіх галузей виробничого комплексу складає загальну величину проміжного продукту:

$$X^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

Оскільки валовий об'єм продукції i -ої галузі дорівнює сумі двох складових - загальний обсяг продукції, що використовується на виробничі потреби інших галузей та обсяг кінцевого продукту, то *рівняння міжгалузевого балансу* можна подати у вигляді:

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + Y_i, \quad i = 1 \div n$$

Для практичного застосування економіко-математичну модель міжгалузевого балансу записують у вигляді:

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + Y_i, \quad i = 1 \div n, \quad (1.1)$$

де $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ - коефіцієнти прямих матеріальних витрат продукції i -ої галузі,

на одиницю валового випуску продукції j -ої галузі. Ці коефіцієнти утворюють квадратну матриць. Коефіцієнтів прямих матеріальних витрат $A = ((a_{ij}))$, або матрицю технологічних коефіцієнтів.

Математичну модель (1.1) можна записати у матричній формі:

$$X = AX + Y \quad (1.2)$$

де X - вектор валового випуску, Y - вектор кінцевого продукту.

Тоді основна задача міжгалузевого балансу формально зводиться до відшукування такого вектора валового випуску X , що забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y , при відомій матриці технологічних коефіцієнтів.

Виробничі функції. Моделювання процесів економічної діяльності вимагає також побудови спеціальних моделей, що отримали назву виробничі функції, функцій споживання та ін. Виробничою функцією є математична модель вигляду $y = f(x_i)$, $i = 1 \div n$, що описує функціональну залежність деякої величини y від множини факторів x_i . [4]. Наприклад, залежність об'єму реалізації від об'єму наявних ресурсів різного виду, такі як трудові ресурси, товарний запас, об'єм складських приміщень ін.

Типовими виробничими функціями є степеневі рівняння виду $y = \alpha_0 \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_i^{\alpha_i} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, одним із варіантів якого є функція Коба-Дугласа:

$$y = \alpha_0 \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \quad (1.3)$$

Функцію, що описує залежність витрат деякого ресурсу x_1 інших факторів, наприклад, об'єму продажу товарів y_i ($i = 1 \div m$) називають функцією виробничих витрат: $x_1 = f(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m)$.

Функція споживання, у загальному випадку, представляє собою багатофакторну модель зв'язку рівня споживання матеріального блага S і факторів впливу $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_p$, що визначають об'єм попиту і пропозиції:

$$S = f(k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_p), \quad (i = 1 \div p).$$

Задачі теорії прийняття рішень. Задачею теорії прийняття рішень називають таку задачу, що може бути сформульована у поняттях мети, засобів досягнення мети і результату. Математична модель цієї задачі представляє собою формальний запис її складових елементів, а саме – цілей, засобів, результатів і способів зв'язку між засобами і результатами. Всю множину засобів

і результатів можна представити у вигляді двох підмножин: підмножини альтернатив X і підмножини результатів R .

Очевидно, що результат визначається двома факторами: вибором альтернатив і станом середовища, що також має множину станів Y . Тоді кожен окремий результат буде функцією двох аргументів: $a = F(x,y)$ – функцією реалізації сполучення кожної альтернативи і певного стану середовища. Якщо підмножина альтернатив і множина станів середовища обмежені: $X=(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m)$, то функцію реалізації F зручно представити у вигляді матриці:

$$F = \|F(x_i y_j)\| \quad (1.4)$$

Представлена таким чином функція реалізації задачі прийняття рішення може бути застосована в умовах повної визначеності, ризику і невизначеності.

Умови прийняття рішень визначаються ступенем інформованості особи, що приймає рішення, про можливості появи тих чи інших станів середовища.

Тема 1. Оптимізаційні економіко-математичні моделі. Класифікація моделей**План лекційного заняття**

1. Основні компоненти математичної моделі оптимізації.
2. Математична модель економічної системи
3. Лінійне програмування як метод математичного моделювання.
4. Багатокритеріальна оптимізація.

1. Основні компоненти математичної моделі оптимізації

Розглянемо приклад, що демонструє основні принципові складові математичної моделі прийняття рішення, а саме альтернативи, обмеження і критерій вибору альтернатив.

Приклад 1.2. Припустимо, що у відповідності до ділових обов'язків менеджера торгового підприємства, що розміщене в місті A , необхідно на протязі п'яти тижнів п'ять разів відвідати місто B . Менеджер повинен прибути в місто B в понеділок першого тижня і закінчити свої поїздки - повернутися в місто A в середу п'ятого тижня. Квиток на із міста A в місто B і назад на попереднє замовлення коштує 400 умовних грошових одиниць, але можна отримати 20% знижку від вартості квитка, якщо виліт припадає на кінець тижня. Крім того, вартість білета в одну сторону рівна 75% від вартості білету на замовлення в обидві сторони. Менеджер намагається зменшити, при можливості, вартість перельотів. Як це зробити?

Описану ситуацію можна розглядати як задачу прийняття рішення, в якій для знаходження оптимального рішення треба визначити три основних компоненти:

1. що в даному випадку вважати альтернативним рішенням;
2. які обмеження повинно задовольняти можливе рішення;
3. за яким критерієм повинні обиратися альтернативні рішення.

У даному прикладі можливі наступні альтернативи:

1. придбання п'яти квитків на замовлення $A-B-A$ (тобто із міста A в місто B і назад);

2. придбання одного квитка в одну сторону $A-B$ і чотирьох квитків $A-B-A$, що приходяться на кінець тижня, і одного квитка в одну сторону $B-A$;

3. придбання квитка $A-B-A$ для першого тижня, за умови що між датами вильоту буде понеділок; для останнього тижня придбання квитка $A-B-A$, між датами якого повинна бути середа, причому перший і останній квиток повинні припадати на кінець тижня; чотири квитки $A-B-A$, між датами якого також є останні дні тижня.

Обмеженнями задачі будуть дні прибуття: понеділок першого тижня і середа п'ятого тижня.

Критерієм для оцінки можливих альтернатив являється ціна квитків. Альтернатива, що забезпечить найменшу вартість перельотів, буде найкращою.

Розрахуємо кількісні оцінки сформульованих альтернатив (вартість квитків).

1 альтернатива: $5 \cdot 400 = 2000$ (ум.од.).

2 альтернатива: $0,75 \cdot 400 + 0,8 \cdot 400 + 0,75 \cdot 400 = 1800$ (ум.од.).

3 альтернатива: $5 \cdot (0,8 \cdot 400) = 1600$ (ум.од.).

Очевидно, що кращою - «економнішою» буде третя альтернатива.

У загальному випадку в задачах прийняття рішення альтернативи залежать від певного набору змінних – факторів, які використовуються при формалізації обмежень (умов задачі) і критерію відбору альтернатив у вигляді певних математичних функцій в результаті формалізації отримуємо математичну модель, що містить змінні задачі, обмеження і функцію критерію, що називається також цільовою функцією. Рішенням математичної моделі буде такий набір значень змінних, який оптимізує функцію критерію і задовольняє усім обмеженням. Такий набір змінних називається *оптимальним допустимим рішенням*.

Розглянемо довільну економічну систему, яку можна представити у вигляді математичної моделі з параметрами c_k ($k = 1, 2, \dots, l$), що є кількісними характеристиками системи, причому, частина параметрів c_k для окремої системи може бути постійними, частина - змінними величинами, які, в свою чергу, можуть бути незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, якщо в якості моделі довільної економічної системи розглядати виробниче підприємство, то його сталими параметрами є наявні ресурси, норми витрат ресурсів тощо.

Кількісними змінними величинами, тобто такими що залежать від певних умов, будуть ціни та собівартість проміжної та кінцевої продукції, закупівельні ціни на ресурси і т.п. Залежною змінною буде собівартість продукції, незалежною - початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість видів продукції, що виготовляється, неперервною — час роботи обладнання підприємства, детермінованою — норма витрат сировини і матеріалів на виробництво продукції, випадковою — кількість поломок обладнання, або непередбачуваних обставин, які впливають на стан виробничої системи (ризики) у плановому періоді.

При формуванні задачі враховуються лише суттєві фактори, усі другорядні, не суттєві, або якісні параметри (при неможливості привести їх до кількісних оцінок) відкидаються. Усі значимі фактори задачі поділяють на керовані x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі (оптимальне значення цих факторів визначається в процесі розв'язку задачі); і некеровані змінні y_i ($i = 1, 2, \dots, m$), значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Тому спочатку доцільно визначити, значеннями яких характеристик або змінних можна вар'ювати, не втрачаючи при цьому постійні характеристики – параметри, тому що без їх урахування правильне рішення задачі не можливе. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є

керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Необхідно пам'ятати, що для кількісного оцінювання і аналізу факторів необхідним є використання знань і професійних умінь спеціалістів різного профілю, що забезпечить достатній об'єм знань і можливість знаходження таких рішень, які не можливо було б визначити окремому досліднику вузької професійної орієнтації.

1. Математична модель економічної системи

У загальному випадку, кожна економічна система має певну мету свого функціонування і розвитку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру і може бути описаний математично у вигляді критерію ефективності F . Функціональний зв'язок критерію ефективності F з параметрами системи, керованими і некерованими змінним можна записати у вигляді *цільової функції*:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \rightarrow \text{extr} \quad (1.6)$$

Функцію F називають також *функцією мети*.

Оптимальному (екстремальному) значення критерію ефективності відповідають певні значення керованих змінних (x_j). При такій постановці задачі постає питання побудови математичної моделі економічних показників - керованих змінних, що дозволили б визначити числове значення критерію ефективності. Для цього використовують математичні методи диференціювання, інтегрування, теорії ігор, математичного програмування, мережного планування і управління, теорії ймовірностей і математичної статистики, економетричні методи та теорія масового обслуговування.

Можливості вибору керованих змінних x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо. Наприклад, об'єм реалізації готової продукції обмежений наявністю матеріальних, трудових, фінансових та інших ресурсів, стабільністю і об'ємом попиту на продукцію, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівнянь та нерівностей виду:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} 0; \quad (i = 1, 2, \dots, S). \quad (1.7)$$

Набір символів ($\leq, =, \geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу \leq , для інших — рівності ($=$), а для решти — нерівності типу \geq .

Система (1.6) називається *системою обмежень*, вона містить в собі умову задачі, що описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування і розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.8)$$

Залежності (1.6)—(1.8) утворюють *математичну модель* економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації обчислювальними методами.

4. Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.7) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних x_1, x_2, \dots, x_n , що задовольняє умови (1.7) і (1.8), називають *допустимим рішенням*, або *планом*. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій*. Кожному плану відповідає певне значення цільової функції.

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (1.7) і (1.8), утворює *область існування планів*. План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*.

Типову економіко - математичну модель коротко можна сформулювати таким чином: *максимізувати або мінімізувати цільову функцію за умови виконання обмежень*.

2. Лінійне програмування як метод математичного моделювання.

Досить значна частина задач планування і управління в галузях народного господарства, а також великий об'єм прикладних економічних задач розв'язуються методами математичного програмування. *Основним завданням математичного програмування, як наукової дисципліни є розробка математичних методів розв'язку і побудова моделей оптимізаційних задач.*

Найбільш простими і розвиненими серед методів розв'язку оптимізаційних задач є методи *лінійного програмування*.

Лінійне програмування – це метод математичного моделювання розроблений для оптимізації використання обмежених ресурсів. Ці методи дозволяють описати з досить прийнятною точністю широке коло задач економічної діяльності, таких, як планування товарообігу; розміщення роздрібно-торгівельної мережі на обраній території (місто, селище, країна); планування товаропостачання міста, район; закріплення постачальників за споживачами; планування раціональних перевезень вантажів – транспортна задача; розподіл робітників за посадами - задача про призначення; організація раціонального харчування – задача про дієту; розподіл наявних ресурсів на підприємстві; планування та розподіл інвестицій; заміна обладнання; планування раціонального режиму роботи і т.д.

На алгоритмах лінійного програмування базуються оптимізаційні алгоритми для інших, більш складних типів моделей і задач економіки, включаючи цілочислене, нелінійне і стохастичне програмування.

У задачах лінійного програмування критерій ефективності та обмеження задачі - лінійні функції. Якщо умовою оптимізаційної задачі передбачено

отримання розв'язку в цілих числах, то маємо задачу *цілочислового програмування*. Якщо оптимізаційна задача містить змінну часу і критерій ефективності описує перебіг процесу в часі, то така задача називається задачею *динамічного програмування*.

Якщо функція критерію ефективності, або рівняння – обмеження задачі містять змінні в степені більше одиниці, то маємо оптимізаційну задачу *нелінійного програмування*.

Більшість існуючих методів розв'язку оптимізаційних задач реалізовано у вигляді стандартних програмних засобів, або пакетів, доступ до яких обмежений лише наявністю комп'ютера і стандартного програмного забезпечення, тому отримання рішення оптимізаційної задачі не становить особливої проблеми.

3. Багатокритеріальна оптимізація.

У класичній постановці задачі лінійного програмування передбачається єдина цільова функція, що кількісно визначена. У реальних економічних задачах на роль критерію ефективності претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від реалізації виробленої продукції чи максимум рівня рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Крім того, бажаним є застосування кількох критеріїв одночасно, причому вони можуть бути взагалі несумісними. Наприклад, вимога досягти максимальної ефективності виробництва за мінімальних витрат ресурсів з погляду постановки математичної задачі є некоректною. Мінімальні витрати ресурсів — це нульові витрати, що мають місце за повної відсутності будь-якого процесу виробництва. Аналогічно максимальна ефективність може бути досягнута лише у разі використання певних обсягів (звичайно не нульових) ресурсів. Тому коректними є постановки задач такого типу: досягти максимальної ефективності при заданих витратах чи досягти заданого ефекту за мінімальних витрат.

Оскільки не існує єдиного універсального критерію економічної ефективності, то досить часто вдаються до розгляду багатокритеріальної оптимізації. Хоча задача лінійного програмування передбачає одну цільову функцію, розроблено математичні методи, що дають змогу будувати компромісні плани, тобто здійснювати багатокритеріальну оптимізацію.

Найчастіше способи використання багатьох критеріїв у задачах млінійного програмування зводяться до штучного об'єднання кількох вибраних показників в один. Наведемо кілька таких способів.

Нехай у задачі обрано m критеріїв оптимальності F_i ($i = 1 \div m$). Загальний критерій може мати вигляд суми окремих показників ефективності з відповідними коефіцієнтами:

$$F^* = k_1 F_1 + k_2 F_2 + \dots + k_m F_m, \quad (2.7)$$

де k_1, \dots, k_m — додатні чи від'ємні коефіцієнти.

Додатні коефіцієнти відповідають тим критеріям, які потрібно максимізувати, а від'ємні — тим, які мінімізуються. Абсолютні значення коефіцієнтів k_1, \dots, k_m відповідають пріоритету (важливості) того чи іншого показника.

Наприклад, якщо розв'язується виробнича задача, то з додатними коефіцієнтами ввійдуть такі величини, як обсяг прибутку, отриманого від

реалізації товарів та послуг, з від'ємними - витрати ресурсів (часу, праці), собівартість одиниці продукції.

Узагальнений критерій може подаватись у вигляді дроби, де в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно максимізувати, припустимо F_1, \dots, F_n , а в знаменнику — добуток тих, які потрібно мінімізувати F_{n+1}, \dots, F_m :

$$F^* = \frac{\prod_{i=1}^n F_i}{\prod_{i=n+1}^m F_i}. \quad (2.8)$$

Загальним недоліком критеріїв (2.7), (2.8) є їх недостатня економічна адекватність, що обумовлена можливістю компенсації низької ефективності одного критерію за рахунок зміни (зменшення) ефективності іншого критерію, що в принципі нівелює економічну доцільність розрахунків. Наприклад, зниження значення виконання попередніх замовлень може компенсуватися зменшенням використання ресурсів. Оскільки окремі величини в чисельнику та знаменнику пропорційно зменшилися, то значення дроби не змінюється, проте складені на основі таких розрахунків плани можуть призвести до негативних наслідків.

Отже, до використання зазначених способів формування цільових функцій необхідно підходити зважено та продумано.

Ще один метод запропонував І. Никовський [12]. Оптимальний план знаходять окремо за кожним з вибраних критеріїв, після чого отримують множину значень цільової функції F_i^* ($i = 1 \div m$). На останньому етапі розв'язується початкова задача з одним критерієм виду:

$$F = \left| \frac{F_1^* - \bar{F}_1}{F_1^*} \right| = \left| \frac{F_2^* - \bar{F}_2}{F_2^*} \right| = \dots = \left| \frac{F_m^* - \bar{F}_m}{F_m^*} \right| \rightarrow \min, \quad (2.9)$$

де \bar{F}_i ($i = 1 \div m$) — значення i -го критерію оптимальності в оптимальному компромісному плані. За такого підходу розв'язок задачі визначається за критерієм, що дорівнює мінімальному значенню модулів часток відхилень значень кожної цільової функції у компромісному плані від їх оптимальних значень у їх же оптимальних значеннях, що робить всі критерії однаково важливими. Для врахування переваг одних критеріїв над іншими доцільно застосовувати узагальнений критерій такого виду:

$$F = k_1 \left| \frac{F_1^* - \bar{F}_1}{F_1^*} \right| = k_2 \left| \frac{F_2^* - \bar{F}_2}{F_2^*} \right| = \dots = k_m \left| \frac{F_m^* - \bar{F}_m}{F_m^*} \right| \rightarrow \min. \quad (2.10)$$

Недоліками цих двох способів є, по-перше, жорстке співвідношення між значеннями відхилень критеріїв оптимальності, що значно звужує множину допустимих планів; по-друге, одному значенню деякого критерію може відповідати множина інших, причому таких, за яких оптимальний план з економічного погляду ефективніший; по-третє, відсутня методика об'єктивного визначення коефіцієнтів k_1, \dots, k_m .

Зведення багатокритеріальної задачі до задачі з одним критерієм може також здійснюватися через виділення з вибраного набору показників одного, який вважають найважливішим - F_k і намагаються досягти його максимального

значення (якщо необхідно знайти мінімум, то досить змінити знак показника).
Всі інші показники (критерії) є другорядними, і на них накладаються обмеження
виду: $F_i \geq z_i$, де z_i є нижньою межею значення відповідного показника, або $F_i \leq z_i$
, якщо необхідно, щоб значення показника не перевищувало z_i . Для виробничих
задач найуживанішим показником ефективності є прибуток i , максимізуючи
його величину, додатково вводяться обмеження щодо рентабельності
виробництва – рентабельність не нижче заданого рівня, або собівартості –
собівартість не вище певного рівня. Такі обмеження доцільно включати до
системи початкових умов задачі.

Очевидно, що багатокритеріальні задачі лінійного програмування не мають
універсального способу розв'язування. Отже, вибір та коректне застосування
будь-якого з наведених способів залишається за суб'єктом прийняття рішень.

Тема 3. Детерміновані економіко-математичні моделі з єдиним критерієм оптимальності.

План лекційного заняття

1. Типові задачі, що розв'язуються застосуванням оптимізаційних ЕММ.
2. Загальна постановка задачі лінійного програмування.
3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
4. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.
5. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.
6. Симплексний метод розв'язку ЗЛП.

1. Типові задачі, що розв'язуються застосуванням оптимізаційних ЕММ

Розглянемо найпростіший тип моделей, з використанням детермінованих даних та лінійних функції для опису взаємозв'язків між елементами. Розв'язок знаходиться на деякій неперервній множині значень керованих змінних - факторів задачі. Наведемо кілька типових задач, що розв'язуються із застосуванням *оптимізаційних ЕММ*.

Задача визначення оптимального плану виробництва.

Припустимо, що для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску n видів продукції $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умови найкращого способу використання її наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяні m ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення тощо. Відомі загальні запаси ресурсів $b_i (i = 1 \div m)$, норми витрат i -го ресурсу на виробництво одиниці j -ої продукції $a_{ij} (i = 1 \div m; j = 1 \div n)$ та прибуток з одиниці j -ої реалізованої продукції $c_j (j = 1 \div n)$.

Критерій оптимальності - максимум прибутку, або мінімум витрат на виробництво продукції.

Позначимо через x_1, x_2, \dots, x_n обсяги виробництва відповідно першого, другого і т. д. видів продукції.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу першого виду, то на виробництво першого виду продукції обсягом x_1 необхідно витратити $a_{11}x_1$ цього ресурсу. На другий вид продукції обсягом x_2 витрати першого ресурсу дорівнюватимуть $a_{12}x_2$ і т. д. На виробництво всіх видів продукції буде використано такий обсяг першого ресурсу: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$. Ця величина має не перевищувати наявного обсягу першого ресурсу — b_1 . Отже, обмеження щодо використання першого ресурсу матиме вигляд: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$. Аналогічно записують обмеження стосовно використання всіх інших виробничих ресурсів. Прибуток від реалізації виготовленої продукції всіх видів становитиме: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Загалом лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (2.1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (2.3)$$

Математична модель виробничої задачі може бути застосована для різних економічних задач, де виникає проблема вибору найкращого варіанту розподілу обмеженої кількості ресурсів, хоча з першого погляду може здаватися, що постановка задачі не стосується виробничих процесів. Наведемо кілька конкретних прикладів виробничих задач.

Задача визначення оптимального плану перевезень вантажів (транспортна задача)

Розглянемо m пунктів виробництва та n пунктів споживання деякої однорідної продукції. Відомі обсяги виробництва продукції у кожному i -му пункті - $a_i (i = 1 \div m)$ та потреби кожного j -го пункту споживання — $b_j (j = 1 \div n)$. Також задана матриця розмірністю $m \times n$, елементи якої $c_{ij} (i = 1 \div m; j = 1 \div n)$ є вартостями транспортування одиниці продукції з i -го пункту виробництва до j -го пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції $X = x_{ij} (i = 1 \div m; j = 1 \div n)$ з урахуванням наявності продукції у виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень.

Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від i -го виробника до j -го споживача.

Можна вивезти від кожного виробника продукцію, що є в наявності. Тому для кожного $i, (i = 1 \div m)$ має виконуватись умова: $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} = a_i$. Забезпечення кожного споживача потрібною кількістю продукції дає умова: $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} = b_j$ для кожного $j (j = 1 \div n)$. Загальна вартість перевезень є сумою добутоків $c_{ij}x_{ij} (i = 1 \div m, j = 1 \div n)$. Необхідно, щоб виконувалась умова $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Отже, економіко-математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = 1 \div m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = 1 \div n; \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1 \div m, j = 1 \div n \end{cases} \quad (2.4)$$
$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

Як і в попередніх задачах математична модель транспортної задачі може використовуватись і тоді, коли в постановці задачі немає навіть згадки про перевезення продукції. Наприклад, задача раціонального розподілу робітників або механізмів за окремими видами робіт, посадами або операціями. Як відомо, один і той же робітник може виконувати різні функції з різною ефективністю, залежно від досвіду роботи, кваліфікації, індивідуальних особливостей. Тому виникає *задача про призначення*, що передбачає такий розподіл робітників, при якому загальна продуктивність праці в колективі була б максимальною.

Задача про призначення.

Нехай маємо деяке комерційне підприємство на якому працюють m робітників: A_1, A_2, \dots, A_m , кожен з яких повинен виконувати одну B_j із існуючих n видів робіт: B_1, B_2, \dots, B_n . Для кожного робітника на робочому місці відома продуктивність праці c_{ij} ($i = 1 \div m; j = 1 \div n$). Необхідно визначити такий розподіл робітників за видами робіт, щоб досягти максимальної сумарної продуктивності праці, за умови, що кожен робітник може виконувати тільки одну роботу.

Побудова економіко-математичної моделі

Позначимо x_{ij} ($i = 1 \div m; j = 1 \div n$) призначення i -го робітника на j - роботу. Так як кількість робітників дорівнює кількості робіт, тобто $n = m$, то x_{ij} може приймати лише одне з двох значень: 1, якщо робітник призначений на виконання j -ї роботи; 0 - не призначений на j -ту роботу. Такі змінні задачі називають *бульовими* і модель що містить такі змінні відноситься до задач *цілочислового лінійного програмування*. При призначенні i -го робітника на j -ту роботу продуктивність праці буде $c_{ij}x_{ij}$ ($i = j = 1 \div n$), тобто необхідно знайти матрицю X - розподілу робітників за видами робіт, що забезпечить максимальну сумарну продуктивність праці, що в даному випадку є знаходження екстремуму лінійної функції $F(X)$:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

що обмежена умовою:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & i = 1 \div n; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, & j = 1 \div n; \\ x_{ij} \geq 0, & i = j = 1 \div n \end{cases} \quad (2.5)$$

Очевидно, що помноживши лінійну функцію $F(X)$ на (-1), приведемо задачу до транспортної, в якій об'єм запасу кожного постачальника і об'єм споживання кожного споживача рівні одиниці.

Ще одним прикладом транспортної задачі є задача про побудову кільцевих маршрутів, або так звана задача комівояжера.

Задача комівояжера: припустимо, що менеджер деякого комерційного підприємства, в силу своїх професійних обов'язків, повинен відвідати n міст (пунктів призначення), виїжджаючи із деякого міста і відвідуючи кожне місто лише один раз і повернутися в пункт виїзду. Відстань між парами пунктів

призначення відома і становить a_{ij} ($i = 1 \div m; j = 1 \div n$). Якщо прямого маршруту між містами не існує, то вважають що $a_{ij} = \infty$. Необхідно визначити таку послідовність відвідування міст, при якій довжина маршруту була б найменшою.

Побудова економіко-математичної моделі. Економіко-математична постановка даної задачі може бути представлена як задача цілочисленого лінійного програмування з булевими змінними: $x_{ij} = 1$, якщо комівояжер переїжджає із пункту i в пункт j , в протилежному випадку $x_{ij} = 0$ ($i = 1 \div m; j = 1 \div n; i \neq j$).

Задача полягає у визначенні матриці значень цілих не від'ємних значень змінних x_{ij} , що мінімізують цільову функцію, що містить довжину маршруту:

$$F(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, & i = 1 \div m; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & j = 1 \div n; \\ x_{ij} \geq 0, & x_{ij} - \text{цілі числа} \end{cases} \quad (2.6)$$

Обмеження задачі містять наступні вимоги щодо моделі:

- 1) маршрут повинен включати лише один в'їзд у кожен пункт призначення;
- 2) маршрут повинен включати лише один виїзд із кожного пункту призначення;
- 3) маршрут повинен проходити через усі n міст і бути кільцевим.

Наведені математичні моделі економічних задач є дуже спрощеними. Адекватні економіко-математичні моделі будуть значно складнішими, в силу численності факторів впливу на досліджуване явище або процес.

2. Загальна постановка задачі лінійного програмування.

Лінійним програмуванням називається розділ математики, в якому вивчаються методи знаходження екстремуму лінійної функції обмеженої кількості змінних, причому змінні повинні задовольняти кінечному числу додаткових умов (обмежень), що записуються у вигляді лінійних рівнянь чи нерівностей, таким чином, задача лінійного програмування (ЗЛП) у загальному випадку може бути сформульована наступним чином. Знайти такі значення дійсних змінних x_1, x_2, \dots, x_n , для яких цільова функція

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (3.1)$$

приймає екстремальне значення на множині точок, координати яких задовольняють умови:

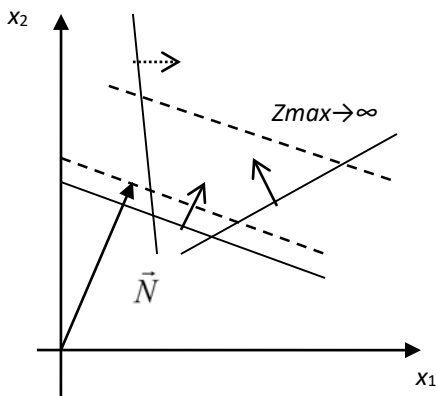


Рис.3.4

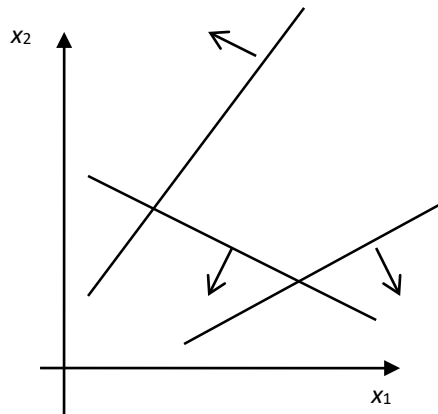


Рис.3.5

Якщо багатокутник розв'язків - необмежена область (рис. 3.4), то не кожену точку можна подати у вигляді опуклої лінійної комбінації її кутових точок. У такому разі задачу лінійного програмування з багатокутником розв'язків, що є необмеженою областю, можна звести до задачі з обмеженою областю, ввівши в систему додаткове обмеження $x_1 + x_2 \leq L$, де L — достатньо велике число. Введення цього обмеження означає відтинання прямою $x_1 + x_2 = L$ від багатокутної необмеженої області обмеженого багатокутника розв'язків.

Очевидно, що координати кутових точок, які утворяться в результаті введення нового обмеження, залежать від L . Якщо в одній з них лінійна функція набирає максимального значення, то воно залежить від L . Змінюючи L , значення функціонала можна зробити як завгодно великим, а це означає, що лінійна функція необмежена на багатограннику розв'язків.

Таким чином, усі задачі лінійного програмування з двома змінними можна розв'язати за допомогою графічного метода, причому множина усіх розв'язків системи опукла.

Узагальнюючи двовимірний випадок, область допустимих планів ЗЛП в n -вимірному просторі можна розглядати як перетин кінечної кількості півпросторів, що утворює n -вимірну багатогранну множину. Якщо допустима область обмежена і не пуста, то вона є випуклим багатогранником, і задача лінійного програмування у цьому випадку, завжди має розв'язок, а оптимальне значення цільової функції досягається хоча б в одній вершині багатогранника. Якщо допустима область пуста, то задача лінійного програмування не має розв'язків. Якщо допустима область необмежена, то ЗЛП може мати або не мати розв'язку. Якщо задача має розв'язок, то завжди існує принаймні одна вершина, в якій досягається оптимальне значення цільової функції.

Наприклад, якщо в системі обмежень (3.9) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), де i — номер обмеження, а j — номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину - багатогранник розв'язків. Він може бути точкою,

відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю. Якщо у системі обмежень (3.9) кількість змінних більша, ніж три: x_1, x_2, \dots, x_n ; тоді кожна нерівність визначає півпростір n -вимірному простору з граничною гіперплощиною $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Кожному обмеженню виду (3.9) відповідають гіперплощина та напівпростір, який лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з граничними гіперплощинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots, n$).

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n -вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування являє собою відшукування координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, в n -вимірному просторі основних змінних, можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних площин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z .

3. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формулюються у вигляді чотирьох теорем.

Властивість 1. (Теорема 3.1) Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2. (Теорема 3.2) Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 3. (Теорема 3.3) Якщо відомо, що система векторів A_1, A_2, \dots, A_k ($k \leq n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$ лінійно незалежна і така, що $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0$, де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Властивість 4. (Теорема 3.4) Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$, що відповідають додатним x_j , є лінійно незалежними.

4. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

5. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Симплексний метод - це ітераційний процес, що починається з одного рішення – вершини багатогранника розв'язків і в пошуку найкращого варіанту здійснює перебір за усіма кутовими точками області можливих значень до тих пір, поки не буде знайдено оптимального рішення.

Ідея цього методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів задачі, причому, на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за критерієм оптимальності був би не гіршим за попередній. Значення цільової функції при цьому змінюється в заданому напрямку: збільшується (для задачі на максимум), зменшується (для задачі на мінімум).

Ітераційність процесу розв'язання задачі симплексним методом проявляється в тому, що однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що такого не існує.

Отже, *симплексний метод* — це ітераційна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовної оптимізації значень змінних, з метою наближення цільової функції до її екстремального значення, шляхом переходу від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

Застосування симплекс-метода можливе лише у випадку коли задача лінійного програмування записана в канонічному вигляді (пункт.3.1, (3.1. – 3.3.)).

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом.

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом включає наступні обчислювальні процедури:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або з'ясовують що оптимального плану не існує.

4. Перехід до нового опорного плану виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій починаючи з п.3.

Розглянемо кожний крок алгоритму докладніше.

1. *Визначення початкового опорного плану*

Кількість одиничних лінійно незалежних векторів повинна дорівнювати кількості рівнянь системи обмежень задачі лінійного програмування.

Якщо ця умова не виконується, тобто у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних лінійно незалежних векторів, то для побудови першого опорного плану застосовують метод штучного базису.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні, що відповідають цим векторам називаються базисними, всі решта змінних – вільні. Вільні змінні задачі прирівнюються до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. Таким чином визначається початковий опорний план задачі лінійного програмування.

Тому в системі (3.16) базисними змінними будуть x_1, x_2, \dots, x_m , а інші змінні – вільні.

Прирівняємо всі вільні змінні до нуля, тобто $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0$. Оскільки $b_i \geq 0$ ($i = 1 \div m$), а вектори A_1, A_2, \dots, A_m — одиничні, то отримуємо один із розв'язків системи обмежень (3.16):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0), \quad (3.18)$$

тобто, маємо опорний план.

2. Побудова симплексної таблиці

Обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність подають у симплексній таблиці.

Базис	$C_{\text{баз.}}$	План	c_1	c_2	...	c_n	θ
			x_1	x_2	...	x_n	
x_1	c_1	b_1	1	0 a_{1n}	
x_2	c_2	b_2	0	1 a_{2n}	
			0	0	
x_m	c_m	b_m	0	0 a_{mn}	
$\Delta_j = Z_j - C_j$		Z_0	0	0	

У першому стовпчику таблиці – *Базис* – записуються базисні змінні опорного плану, у тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі. Наступний стовпчик - $C_{\text{баз.}}$ – коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі. У третьому стовпчику - *План* – записують значення базисних змінних опорного плану задачі і відповідне значення цільової функції опорного плану (Z_0). У решті стовпчиків, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти обмежень задачі лінійного програмування (вектори $A_j, j=1:n$).

Останній рядок і стовпчик таблиці є оцінковими – в них записують розраховані оцінки.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$ відбувається у відповідності до теореми:

Теорема (ознака оптимальності опорного плану).

Опорний план $X^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$, задачі лінійного програмування є оптимальним, якщо для всіх j ($j = 1 \div n$) виконується умова

$$\Delta_j = Z_j - C_j \geq 0 \text{ - для задачі на } \max$$

$$\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0 \text{ - для задачі на } \min$$

Якщо для побудови опорного плану було використано метод штучного базису, необхідною умовою оптимальності є вимога виведення з базису штучних змінних, або рівність їх нулеві.

Значення оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j$ визначають за формулою:

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^n c_i a_{ij} - c_j ; (j = 1 \div m),$$

або безпосередньо з симплексної таблиці, як скалярний добуток векторів стовпчиків $C_{\text{баз}}$ і x_j мінус відповідний коефіцієнт C_j . Розраховані оцінки записують в останній рядок таблиці, який є оцінковим.

4. *Перехід до нового опорного плану* виконується заміною базису, тобто виключенням з базису деякої змінної і введення замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Змінна, що вводиться в базис, відповідає тій оцінці Δ_j , що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок декілька, серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною і відповідну їй змінну вводять в новий базис. Стовпчик в якому знаходиться нова змінна базису називається *напрячним*.

Для визначення змінної, яка підлягає виключенню з базису, знаходять оцінки $\theta = \frac{b_i}{a_{ik}}$, де b_i – елементи стовпчика *План* симплексної таблиці, a_{ik} – додатні

елементи напрямного стовпчика. Серед усіх обчислених оцінок θ вибирають найменшу, змінну, що знаходиться у одному рядку із $\min \theta$ в стовпчику *Базис* виключають з базису. Відповідний рядок (із $\min \theta$) симплексної таблиці називається *напрячним*. Перетином напрямного рядка і напрямного стовпчика є число a_{pk} , яке називають *розв'язувальним елементом*. За допомогою розв'язувального елемента і метода Жордана - Гаусса [23] розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, поки не буде знайдено оптимальний план ЗЛП, або визначено, що такого не існує.

Розв'язуючи ЗЛП симплексним методом можна отримати наступні результати:

1). У оцінковому рядку оцінка $\Delta_j = Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, тоді ЗЛП має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці і виконати ще один крок симплекс-методу.

2). При переході від одного опорного плану до іншого в напрямному стовпчику відсутні додатні елементи, тобто неможливо визначити розв'язувальний елемент, це означає, що цільова функція ЗЛП необмежена і оптимальних планів не існує.

3). У стовпчику θ симплексної таблиці містяться два або декілька однакових найменших значення θ_i (не можливо визначити напрямний рядок), тоді новий опорний план буде виродженим (одна або декілька базисних змінних будуть мати нульове значення).

Вироджені плани можуть привести до циклічності алгоритму, тобто до багаторазового повторення процесу обчислення, що унеможливує отримання

оптимального плану. У такому випадку, для визначення напрямного рядка застосовують *метод Креко* [1].

Сутність методу Креко – елементи рядків що містять однакові найменші значення θ_i ділять на елементи напрямного стовбчика, результати ділення заносять у рядки додаткової таблиці. За напрямний обирається той рядок у якому раніше зустрінеться найменша частка при перегляді таблиці зліва направо по стовбцях.

Наприклад, таблиця що містить два однакових найменших значення $\theta_i = 2$, має вигляд:

Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_1	4	2	3	6	1	0	0	2	2
x_2	8	4	8	1	0	1	0	4	2
x_3	15	5	12	-1	1	0	1	5	3

Припустимо, що напрямним стовпчиком буде стовпчик x_7 , тоді розв'язувальним елементом може бути 2, 4, так як $\min \theta_i = 2$. застосувавши метод Креко отримуємо допоміжну таблицю:

№ стовбця	1	2	3	4	5	6	7	8
Базис	План	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	2	1	1,5	3	0,5	0	0	1
x_2	2	1	2	0,25	0	0,25	0	1

Послідовно порівнюючи зліва направо отримані частки по стовбцях бачимо, що перші два стовпчика мають однакове значення часток. Третій стовпчик містить найменшу частку 1,5 у першому рядку, відповідно цей рядок і буде напрямним.

Тема 4. Мережеві (потоків моделі та методи їх розв'язку)

План лекційного заняття

1. Загальна задача динамічного програмування, принцип декомпозиції.
2. Задача про найкоротший шлях.
3. Алгоритми прямої і зворотної прогонки.

1. *Загальна задача динамічного програмування, принцип декомпозиції.*

Реальні економічні процеси та явища є динамічними за своєю природою, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі. Народне господарство, його галузі, регіони чи окремі підприємства мають розробляти стратегічні та тактичні плани. Перші визначаються за допомогою так званих *динамічних моделей*, розв'язки яких знаходяться методами динамічного програмування.

Загальна задача динамічного програмування може бути сформульована наступним чином: *треба визначити таке управління X^* , яке переводить систему із початкового стану S_0 у кінцевий стан S_n , при якому цільова функція приймає найбільше (найменше) значення $F(S_0, X^*) \rightarrow extr.$*

Динамічне програмування визначає оптимальне рішення n -вимірної задачі шляхом її розбиття – *декомпозиції* на n етапів, кожен з яких представляє собою підзадачу відносно однієї змінної. Обчислювальні переваги такого підходу полягають в тому, що досліджується рішення одновимірних оптимізаційних підзадач замість великої n -вимірної задачі. *Фундаментальним принципом побудови моделей динамічного програмування та декомпозиції задачі на етапи є оптимальність.* Метод рішення задачі на кожному з n етапів залежить від типу оптимізаційної моделі на окремому етапі, тому методи динамічного програмування не пропонують обчислювальних алгоритмів безпосередньо для кожного етапу. Обчислювальні процедури розв'язку оптимізаційних задач на кожному етапі формуються та реалізуються окремо, що, в принципі не виключає застосування єдиного алгоритму для всіх етапів.

Обчислювальні процедури динамічного програмування рекурентні за своєю природою у тому сенсі, що оптимальне рішення однієї підзадачі використовується в якості вхідних даних для наступної. Розв'язавши останню задачу, отримуємо оптимальний розв'язок початкової задачі. Спосіб виконання рекурентних обчислень залежить від того, яким чином виконується декомпозиція початкової задачі. Зокрема, підзадачі звичайно пов'язані між собою деякими загальними обмеженнями, тому при здійсненні переходу від однієї підзадачі до іншої ці обмеження необхідно враховувати.

2. *Задача про найкоротший шлях.*

Припустимо, що необхідно обрати найкоротший шлях між двома населеними пунктами. Мережа доріг, показана на рис.5.1., представляє можливі маршрути між початковим населеним пунктом 1 та кінцевим пунктом 7. Маршрути пролягають через проміжні пункти, позначені номерами 2 – 6.

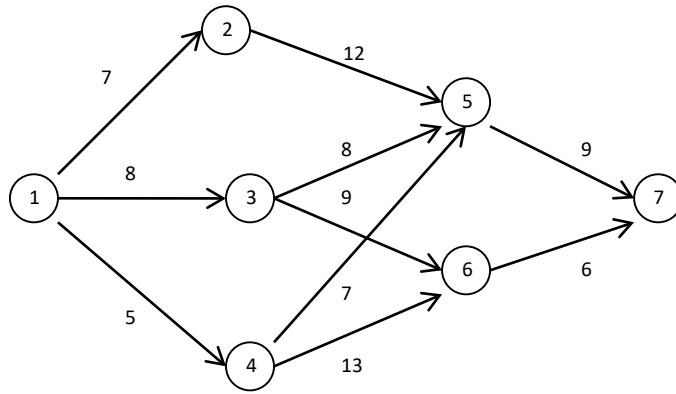


рис. 5.1. Мережа доріг до задачі 5.1.

Відстані між пунктами подані цифрами над стрілками, що вказують напрямок руху від пункту 1 до пункту 7.

Розв'язок.

Можна розв'язати цю задачу виконавши повний перебір усіх можливих маршрутів із пункту 1 до пункту 7. Однак для складних мереж великої протяжності повний перебір є неефективним з точки зору обчислювальних процедур.

Щоб розв'язати цю задачу методами динамічного програмування, спочатку розіб'ємо її на етапи, рис.5.2., маємо три етапи, обчислення для яких виконуються окремо для кожного етапу.

Завдання полягає у визначенні найкоротших відстаней до всіх вершин етапу із наступним використанням цих відстаней в якості вхідних даних для наступного етапу.

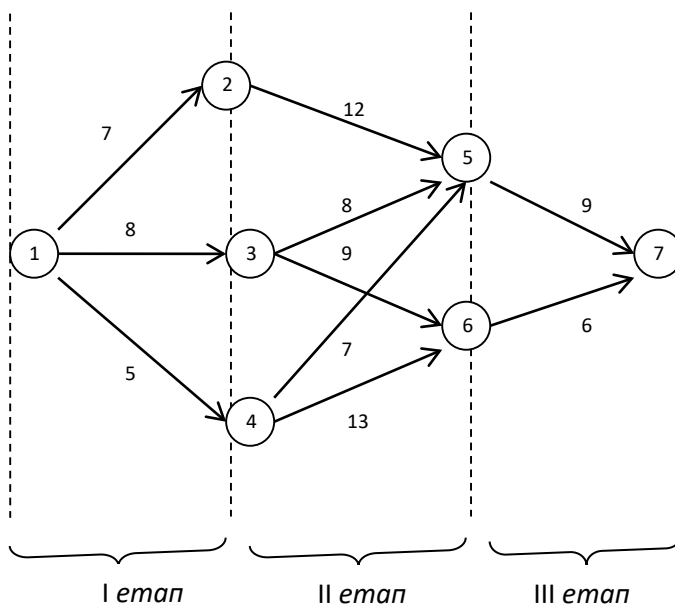


Рис. 5.2. Розбиття задачі 5.1. на етапи.

Пункти, що відносяться до першого етапу 2, 3, 4 пов'язані з початковим пунктом 1 єдиним маршрутом. Тоді для першого етапу маємо наступні результати:

I етап:

найкоротший шлях з пункту 1 до пункту 2 складає 7 одиниць,
 найкоротший шлях з пункту 1 до пункту 3 складає 8 одиниць,
 найкоротший шлях з пункту 1 до пункту 4 складає 5 одиниць.

Далі переходимо до другого етапу обчислень найкоротших накопичених відстаней до пунктів 5 та 6. Пункту 5 можна досягнути трьома можливими маршрутами, а саме (2→5), (3→5), (4→5). Враховуючи обчислення найкоротших відстаней попереднього етапу I, визначаємо найкоротшу накопичену відстань до пункту 5 наступним чином:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{найкоротший} \\ \text{шлях до пункту 5} \end{array} \right] &= \min_{i=2,3,4} \left\{ \left[\begin{array}{l} \text{найкоротший} \\ \text{шлях до пункту } i \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{відстань від} \\ \text{пункту } i \text{ до пункту 5} \end{array} \right] \right\} = \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 7 + 12 = 19 \\ 8 + 8 = 16 \\ 5 + 7 = 12 \end{array} \right\} = 12 - \text{із пункту 4} \end{aligned}$$

Аналогічно для пункту 6 маємо:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{найкоротший} \\ \text{шлях до пункту 6} \end{array} \right] &= \min_{i=3,4} \left\{ \left[\begin{array}{l} \text{найкоротший} \\ \text{шлях до пункту } i \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{відстань від} \\ \text{пункту } i \text{ до пункту 6} \end{array} \right] \right\} = \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 8 + 9 = 17 \\ 5 + 13 = 18 \end{array} \right\} = 17 - \text{із пункту 3} \end{aligned}$$

II етап:

найкоротший шлях з пункту 4 до пункту 5 складає 12 одиниць,
 найкоротший шлях з пункту 3 до пункту 6 складає 17 одиниць.

Останнім етапом є третій етап. Кінцевого пункту 7 можна досягнути з двох пунктів 5, або 6, використовуючи результати етапу II і відстані (5→7), (6→7), отримуємо наступні результати:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{найкоротший} \\ \text{шлях до пункту 7} \end{array} \right] &= \min_{i=5,6} \left\{ \left[\begin{array}{l} \text{найкоротший} \\ \text{шлях до пункту } i \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{відстань від} \\ \text{пункту } i \text{ до пункту 7} \end{array} \right] \right\} = \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 12 + 9 = 21 \\ 17 + 6 = 23 \end{array} \right\} = 21 - \text{із пункту 5} \end{aligned}$$

III етап. Підсумковий результат.

Найкоротший шлях між пунктом 1 та пунктом 7 дорівнює 21 одиниця. Оптимальним маршрутом, що відповідає найкоротшій відстані між пунктами 1 та 7 буде: 1→4→5→7.

Приведені в задачі 5.1. рекурентні співвідношення динамічного програмування можна виразити математично таким чином. Позначимо $f_i(x_i)$ – найкоротшу відстань до вершини x_i на етапі i , $d(x_{i-1}, x_i)$ – відстань від пункту x_{i-1} до пункту x_i . тоді значення функції $f_i(x_i)$ обчислюється із функції $f_i(x_{i-1})$ за допомогою наступного рекурентного співвідношення:

$$F_i(x_i) = \min_{\substack{\text{за існуючими маршрутами} \\ (x_{i-1} \rightarrow x_i)}} \{d(x_{i-1}; x_i) + F_{i-1}(x_{i-1})\}, i = 1 \div 3. \quad (5.1)$$

При $i = 1$ вважаємо $F_0(x_0) = 0$. Це співвідношення показує, що найкоротша відстань $F_i(x_i)$ на етапі i повинна бути функцією пункту x_i та виражена співвідношенням функцій попереднього етапу. У термінах динамічного програмування x_i називається *станом системи* на етапі i .

В дійсності стан системи на етапі i – це інформація, що пов’язує етапи між собою, крім того, оптимальне рішення для решти етапів можуть прийматися без повторної перевірки того, яким чином були отримані рішення на попередніх етапах. Таке визначення стану системи дозволяє розглядати кожен етап окремо і гарантує допустимість розв’язку на кожному етапі.

Визначення стану системи приводить до наступного уніфікованого *принципу оптимальності*: на кожному етапі оптимальна стратегія визначається незалежно від стратегій, застосованих на попередніх етапах.

Застосування принципу оптимальності можна продемонструвати обчисленнями прикладу 5.1. Наприклад, на III етапі використовували найкоротшу відстань до пунктів 3 та 5, не перевіряючи, яким чином ці відстані були обчислені на попередніх етапах, тобто, як потрапили в пункти 5 та 6 із пункту 1.

Вперше *принцип оптимальності* був сформульований у 1953 році американським математиком Р.Е. Беллманом, з таким змістом: *яким би не був стан системи у результаті будь-якої кількості кроків, на найближчому кроці треба вибирати управління так, щоб воно у сукупності з оптимальним управлінням на усіх попередніх кроках приводило до оптимального виграшу на усіх наступних кроках, включаючи виграш на даному кроці.*

3. Алгоритми прямої і зворотної прогонки.

У прикладі 5.1. обчислення виконувалися послідовно: від першого етапу до третього. Така послідовність обчислень дістала назву *алгоритму прямої прогонки*. Цей же приклад може бути розв’язаний і за *алгоритмом зворотної прогонки*, у відповідності до якого обчислення виконуються у зворотному порядку: від третього етапу до першого.

Алгоритми прямої та зворотної прогонки приводять до єдиного результату. Хоча більш логічним є алгоритм прямої прогонки, у спеціальній літературі з динамічного програмування, перевага надається алгоритму зворотної прогонки, як більш ефективному щодо обчислювальних процедур. Розглянемо алгоритм зворотної прогонки, використавши умову задачі з прикладу 5.1. Обчислення приведемо в компактних таблицях.

Приклад 5.2. За умовою задачі 5.1. визначити найкоротшу відстань між пунктами $1 \rightarrow 7$, застосовуючи алгоритм зворотної прогонки.

Розв’язок.

Рекурентне співвідношення для алгоритму зворотної прогонки має вигляд:

$$F_i(x_i) = \min_{\substack{\text{за існуючими маршрутами} \\ (x_i \rightarrow x_{i+1})}} \{d(x_i; x_{i+1}) + F_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1 \div 3. \quad (5.2)$$

де $F_4(x_4) = 0$, для $x_4 = 7$. відповідною послідовністю обчислень буде $F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1$.

Функції типу (5.1), (5.2) прийнято називати *функціями Беллмана* для алгоритмів прямої та зворотної прогонки.

III етап. Так як пункт 7 пов'язаний з пунктами 5 і 6 одним маршрутом, альтернативи для вибору відсутні, тоді результат третього етапу можна записати у вигляді таблиці:

x_3	$d(x_3, x_4)$	<i>Оптимальний розв'язок</i>	
	x_4	$F_3(x_3)$	x_4^*
5	9	9	7
6	6	6	7

II етап. Так як маршруту (2→6) не існує, відповідна альтернатива не розглядається. Використовуючи значення $f_3(x_3)$, попереднього етапу, можна порівняти допустимі альтернативні рішення, як показано в таблиці:

x_2	$d(x_2, x_3) + F_3(x_3)$		<i>Оптимальний розв'язок</i>	
	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$F_2(x_2)$	x_3^*
2	$12 + 9 = 21$	-	21	5
3	$8 + 9 = 17$	$9 + 6 = 15$	15	6
4	$7 + 9 = 16$	$13 + 6 = 19$	16	5

Зміст оптимального розв'язку другого етапу наступний. Якщо ви знаходитесь в пункті 2 або 4, то найкоротший шлях до пункту 7 проходить через пункт 5, якщо в пункті 3, то найкоротший шлях до пункту 7 проходить через пункт 6.

I етап. Із пункту 1 маємо три альтернативні маршрути: (1→2), (1→3), (1→4). Використовуючи значення функції $F_2(x_2)$, попереднього етапу, обчислюємо значення даних наступної таблиці:

x_1	$d(x_1, x_2) + F_2(x_2)$			<i>Оптимальний розв'язок</i>	
	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$F_1(x_1)$	x_2^*
1	$7 + 21 = 28$	$8 + 15 = 23$	$5 + 16 = 21$	21	4

У відповідності до оптимального розв'язку на першому етапі, найкоротший шлях проходить через пункт 4, далі із розрахунків на другому етапі випливає, що із пункту 4 маршрут проходить через пункт 5. Нарешті, із оптимального розв'язку на третьому етапі слідує, що пункт 5 пов'язаний із пунктом 7. таким чином, маршрутом мінімальної довжини буде 1→4→5→7, його довжина дорівнює 21 одиниці.

Загалом, обчислювальний алгоритм динамічного програмування можна будувати на мережах, або за алгоритмами прямої чи зворотної прогонки.

Тема 5. Детерміновані моделі динамічного програмування.

План лекційного заняття

1. Етапи побудови моделі динамічного програмування.

1. Етапи побудови моделі динамічного програмування.
2. Приклади задач динамічного програмування.
3. Оптимальний розподіл інвестицій.
4. Вибір оптимальної стратегії оновлення обладнання.
5. Задача про завантаження.
6. Задача планування робочої сили.
7. Задача динамічного програмування із двовимірним станом.

Побудова моделі динамічного програмування передбачає визначення трьох основних складових елементів:

1. визначення етапів (кроків) управління;
2. визначення на кожному етапі варіантів рішення – альтернатив;
3. визначення станів на кожному етапі.

Найбільш складним для сприйняття є поняття стану. Як правило, поняття стану змінюється в залежності від модельованої ситуації і коректне визначення стану є запорукою успіху при розв'язанні задач динамічного програмування.

Якщо вважати усі кроки-етапи розв'язку задачі динамічного програмування незалежними, тоді оптимальним управлінням буде те управління, яке забезпечує максимальний вигравш саме на цьому кроці. Але при виборі крокового управління необхідно враховувати наступні вимоги:

- 1) можливі результати попереднього кроку;
- 2) вплив управління на кожному кроці на усі наступні кроки які залишилися до кінці процесу.

У задачах динамічного програмування першу вимогу враховують, роблячи на кожному кроці умовні припущення про можливі варіанти закінчення попереднього кроку і виконуючи для кожного кроку *умовну оптимізацію*. Виконання другої вимоги забезпечується проведенням *безумовної оптимізації* з кінці процесу управління до початку.

Умовна оптимізація. На першому етапі розв'язку задачі, який називається умовною оптимізацією, визначаються функції Беллмана і оптимальне управління для усіх можливих станів на кожному кроці, починаючи з останнього у відповідності до алгоритму зворотної прогонки. На останньому, n -му кроці оптимальне управління – x_n^* визначається *функцією Беллмана*: $F(S) = \max\{W_n(S, x_n)\}$, у відповідності до якої максимум обирається з усіх можливих значень x_n , причому $x_n \in X$, де X - область усіх можливих покрокових управлінь системи.

Подальше обчислення виконується у відповідності до рекурентного співвідношення, яке пов'язує функцію Беллмана на кожному кроці з функцією

Беллмана обчисленою на попередньому кроці. Загальний вигляд рекурентного співвідношення такий:

$$F_n(S) = \max \{W_n(S, x_n) + F_{k+1}(S^1(S, x_k))\}, x_k \in X. \quad (5.4)$$

Цей максимум (або мінімум) визначається для усіх можливих для k і S значенням змінної управління x .

Безумовна оптимізація. Після того, як функція Беллмана і відповідні оптимальні управління знайдені для усіх кроків з n по перший, здійснюється другий етап розв'язку задачі, названий безумовною оптимізацією. Користуючись тим, що на першому кроці ($k=1$) стан системи відомий – це її початковий стан S_0 , можна знайти оптимальний результат для усіх n кроків і оптимальне управління на першому кроці x_1 , яке здійснює цей результат. Після застосування цього управління система перейде у інший стан $S^1(S, x_1^*)$, знаючи який, можна, користуючись результатами умовної оптимізації, знайти оптимальне управління на другому кроці x_2^* , і так далі до останнього n -кроку.

2. Приклади задач динамічного програмування.

Задача «Про найкоротший шлях» є початковим етапом розв'язку таких економічних задач, як оптимальне закріплення споживачів за постачальниками, підвищення ефективності роботи транспорту за рахунок скорочення «пустого» пробігу та інше.

Розглянемо ще декілька прикладів, кожен з яких демонструє метод динамічного програмування.

3. Оптимальний розподіл інвестицій.

Необхідно розподілити B одиниць наявних грошових засобів серед n підприємств, прибуток $g_i(x_i)$ від яких у залежності від розміру капіталовкладень x_i визначається матрицею ($n; n$), яка приведена у таблиці 5.1., так, щоб сумарний прибуток від інвестування був максимальним.

Таблиця 5.1.

x / g_i	g_1	g_2	...	g_i	...	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$...	$g_i(x_1)$...	$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$...	$g_i(x_2)$...	$g_n(x_2)$
x_i	$g_i(x_i)$
x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$	$g_n(x_n)$

Математична модель задачі має вигляд:

визначити $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, які задовольняють умовам:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = B; \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 : n \end{cases} \quad (5.4)$$

і забезпечують максимум цільової функції:

$$F(X^*) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_i) \rightarrow \max \quad (5.5)$$

Розіб'ємо процес оптимізації на n кроків і будемо на кожному k -му кроці оптимізувати інвестування не усіх підприємств, а лише підприємств з k -го по n -е. При цьому вважаємо, що у останні підприємства (з першого по $(k-1)$) також вкладаються кошти, і тому на інвестування з k -го по n -е підприємства

залишаються не вся сума, а менша: $c_k \leq B$. Ця величина і буде *змінною стану системи*.

Змінною управління на k -му кроці буде величина x_k засобів, які вкладаються у k -те підприємство. У якості функції Беллмана $F_k(c_k)$ на k -му кроці можна обрати максимально можливий прибуток, який можна отримати з k -го по n -е підприємства за умови, що на їх інвестування залишилось c_k коштів. Очевидно, що при інвестуванні у k -е підприємство x_k засобів буде отримано прибуток $g_k(x_k)$, а система до $(k+1)$ кроку перейде у стан S_{k+1} і відповідно, на інвестування підприємств з $(k+1)$ -го до n -го залишиться $c_{k+1} = (c_k - x_k)$ коштів.

Таким чином, на першому кроці умовної оптимізації при $k = n$ функція Беллмана являє собою прибуток лише з n -го підприємства. При цьому на його інвестування може залишитися c_n засобів, $0 \leq c_n \leq B$. Для отримання максимуму прибутку з цього підприємства, можна вкласти в нього усі ці кошти, тобто:

$$F_n(c_n) = g_n(c_n) \text{ і } x_n = c_n. \quad (5.6)$$

На кожному наступному кроці для обчислення функції Беллмана необхідно використовувати результати попереднього кроку. Нехай на k -у кроці для інвестування підприємств з k -го по n -е залишилось c_k засобів. Тоді від інвестування у k -те підприємство x_k засобів, буде отримано прибуток $g_k(x_k)$, а на інвестування підприємств (з k -го по n -е) залишиться $c_{k+1} = (c_k - x_k)$ засобів.

Максимально можливий прибуток, який може бути отриманий від підприємств (з k -го по n -е), буде рівний:

$$F_k(c_k) = \max_{x_k \leq c_k} \{g_k(x_k) + F_{k+1}(c_k - x_k)\}, \quad k = 1 : n \quad (5.7)$$

Максимум виразу (5.7) досягається при деякому значенні x_k^* , яке являється оптимальним управлінням на k -у кроці для стану системи S_k . Діючи таким чином, можна визначити функції Беллмана і оптимальні управління до першого кроку.

Значення функції Беллмана $F_1(c_1)$ представляє собою максимально можливий прибуток з усіх підприємств, а значення x_1^* , на якому досягається максимум, є оптимальною кількістю коштів, вкладених у перше підприємство. Далі на етапі безумовної оптимізації для усіх наступних кроків обчислюється величина $c_k = (c_{k-1} - x_{k-1})$ і оптимальним управлінням на k -му кроці є значення x_k , що забезпечує максимум прибутку при відповідному стані системи S_k .

4. Вибір оптимальної стратегії оновлення обладнання.

Важливою економічною проблемою є своєчасне оновлення існуючого обладнання: автомобілів, станків, телевізорів і т.п. старіння обладнання включає фізичний та моральний знос, у результаті чого зростають витрати на ремонт і обслуговування, знижується ліквідна вартість обладнання.

Задача вибору оптимальної стратегії оновлення обладнання полягає у визначенні оптимальних строків заміни старого обладнання на нове. Критерієм оптимальності є дохід від експлуатації обладнання, або сумарні витрати на експлуатацію на протязі планового періоду.

Припустимо, що планується експлуатація обладнання на протязі деякого періоду часу в n років. Необхідно визначити оптимальний план заміни

обладнання з метою отримання максимального доходу за усі n років, враховуючи, що до початку експлуатації вік обладнання складає t_0 років.

Вхідними даними задачі є: річний дохід $r(t)$ від експлуатації обладнання віком t -років, залишкова вартість $S(t)$ існуючого обладнання та ціна нового обладнання P , а також «вік» обладнання t_0 на початок розрахунку.

t	0	1	...	n
$r(t)$	$r(0)$	$r(1)$...	$r(n)$
$S(t)$	$S(0)$	$S(1)$		$S(n)$

При складанні динамічної моделі вибору оптимальної стратегії оновлення обладнання процес заміни розглядається як n -кроковий, тобто період експлуатації розбивається на n -років.

Виберемо у якості стану оптимізації план заміни обладнання з k -го по n -й роки. Очевидно, що дохід від експлуатації обладнання за ці роки буде залежати від віку обладнання t , на початок стану системи який розглядається, тобто k -го року. На величину t накладаються наступні обмеження: $1 \leq t \leq t_0 + k - 1$, тобто t не може перевищувати віку обладнання за $(k-1)$ -й рік його експлуатації з урахуванням віку до початку першого року, який складає t_0 років і не може бути менше одиниці.

Таким чином змінна t у даній задачі є змінною стану системи на k -му кроці.

Змінною управління на k -му кроці є змінна, що може приймати одне з двох значень: зберегти (C) або замінити (Z) обладнання на початку k -го року експлуатації:

$$X_k(t) = \begin{cases} C, & \text{якщо обладнання зберігається} \\ Z, & \text{якщо обладнання замінюється} \end{cases}$$

Функцію Беллмана визначають як максимальний можливий дохід від експлуатації обладнання за роки k -го по n -й, за умови, що на початок k -го року вік обладнання складає t років.

Таким чином рекурентне співвідношення Беллмана на кожному кроці управління має вигляд:

$$F_k(t) = \max \begin{cases} r(t) + F_{k+1}(t+1), & (C) \\ S(t) - P + r(0) + F_{k+1}(1), & (Z) \end{cases} \quad (5.8)$$

Функція $F_k(t)$ обчислюється на кожному кроці управління для усіх $1 \leq t \leq t_0 + k - 1$.

Управління, при якому досягається максимум доходу, являється оптимальним.

Для першого кроку умовної оптимізації при з $k = n$ функція Беллмана представляє собою дохід за останній n -й рік:

$$F_n(t) = \max \begin{cases} r(t), & (C) \\ S(t) - P + r(0), & (Z) \end{cases} \quad (5.9)$$

Максимум доходу досягається при деякому управлінні, застосовуючи яке на першому році, визначається вік обладнання на початок другого року. Для даного віку обладнання обирається управління, при якому досягається максимум

доходу за роки з другого по n -й і т.д. Як результат, на етапі безумовної оптимізації визначаються роки, на початку яких доцільно виконати заміну обладнання.

5. Задача про завантаження.

Задача про завантаження - це задача про раціональне завантаження судна, літака, автомобіля і т.п., що має обмеження на об'єм вантажу або об'єм перевезення вантажів. Кожен окремий вантаж, розмішений на засобі перевезення, наприклад на літаку, приносить певний прибуток. Задача полягає у визначенні завантаження літака таким вантажем, що приносить найбільший сумарний прибуток. Така задача відома також під назвою *задачі про спорядження*, в якій пілот літака повинен визначити найбільш цінні, корисні предмети, які необхідно взяти на борт літака, або як *задача про рюкзак*, в якій турист повинен визначити перелік корисних предметів для заповнення рюкзака.

Рекурентне співвідношення процедури зворотної прогонки було сформоване для загальної задачі завантаження судна вантажопід'ємністю W предметів (вантажів) n найменувань. Нехай m_i - кількість предметів i -го найменування, що підлягають завантаженню, r_i - прибуток, що приносить перевезення одного завантаженого предмету i -го найменування, w_i - вага одного предмету i -го найменування. Математично ця задача має вигляд цілочислової задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^n r_i m_i \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n w_i m_i &\leq W, \\ m_i &\geq 0, m_i - \text{цілі числа}, i = 1 \div n \end{aligned} \quad (5.10)$$

Три елемента моделі динамічного програмування визначають наступним чином:

1. Етап (крок) i ставиться у відповідність предмету i -го найменування, $i = 1, 2, \dots, n$.

2. Варіанти рішень на етапі i описується кількістю m_i предметів i -го найменування, що підлягають завантаженню. Відповідний прибуток рівний добутку $r_i \cdot m_i$. Значення m_i знаходиться в межах від 0 до $\left[\frac{W}{w_i} \right]$, де квадратними дужками позначено цілу частину числа $\frac{W}{w_i}$.

3. Стан x_i на етапі i описує сумарну вагу предметів, рішення про завантаження яких прийнято на етапах i , $i = 1 \div n$. Тобто, обмеження на сумарну вагу - єдине, що пов'язує усі n етапів.

Нехай $F_i(x_i)$ - максимальний сумарний прибуток від етапів i , при заданому стані x_i , тоді рекурентне співвідношення можна отримати шляхом наступних міркувань.

Запишемо $F_i(x_i)$ як функцію наступного кроку $F_{i+1}(x_{i+1})$ у вигляді:

$$F_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0 \div \left[\frac{W}{w_i} \right] \\ x_i=0 \div W}} \{ r_i m_i + F_{i+1}(x_{i+1}) \}, \quad (5.11)$$

$$F_{i+1}(x_{i+1}) \equiv 0, \quad i = 1 \div n.$$

Виразимо x_{i+1} як функцію x_i . За означенням $(x_i - x_{i+1})$ представляє собою вагу завантаженого на етапі i грузу, тому: $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$, або $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$. Тоді рекурентне рівняння (5.11) приймає наступний вигляд:

$$F_i^*(x_i) = \max_{\substack{m_i=0 \div \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor \\ x_i=0 \div W}} \{r_i m_i + F_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, \quad (5.12)$$

$$F_{i+1}(x_{i+1}) \equiv 0, \quad i = 1 \div n.$$

6. Задача планування робочої сили.

При виконанні деяких проектів число працюючих, необхідне для виконання робіт деякого проекту, регулюється шляхом їх найму та звільнення. Наймання та звільнення робітників пов'язано з додатковими витратами, тому необхідно визначити, яким чином повинна регулюватися чисельність працюючих у період виконання проекту.

Припустимо, що тривалість проекту становить n тижнів і мінімальна кількість робітників, необхідна для виконання робіт на i -му тижні складає b_i чоловік. Ідеальною була б ситуація – протягом i -го тижня чисельність працюючих становить рівно b_i чоловік. Однак, в залежності від вартісних показників, може бути вигідним відхилення чисельності робітників в сторону зменшення або збільшення. Якщо x_i – кількість працюючих на i -му тижні, то можливими є витрати двох видів:

- 1) $C_1(x_i - b_i)$ – витрати, пов'язані з необхідністю утримання лишньої робочої сили у розмірі $(x_i - b_i)$ одиниць;
- 2) $C_2(x_i - x_{i-1})$ – витрати, пов'язані з необхідністю додаткового найму робочої сили у кількості $(x_i - x_{i-1})$ одиниць.

Елементи моделі динамічного програмування визначаються наступним чином:

1. *Етап i* визначається порядковим номером тижня i ($i = 1 \div n$);
2. *Альтернативними рішеннями* на i -му етапі будуть значення x_i – кількість працюючих на протязі i -го тижня;
3. *Станом* на i -му етапі являється x_{i-1} – кількість працюючих на протязі $(i-1)$ -го тижня (етапа).

Рекурентне рівняння динамічного програмування записується у вигляді:

$$F_i^*(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i} \{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + F_{i+1}(x_i)\}, \quad (5.13)$$

$$F_{n+1}(x_n) \equiv 0, \quad i = 1 \div n.$$

Обчислення починаються з етапу n при $(x_n = b_n)$ і закінчуються на етапі 1.

6. Задача динамічного програмування із двовимірним станом.

В усіх розглянутих вище задачах динамічного програмування стан системи на будь-якому етапі описувався єдиною змінною. Наприклад, в задачі про завантаженість вага предмету була єдиним обмеженням, що враховувалося при його завантаженні. Разом з тим об'єм предмету також може бути обмежувальною величиною. У такому випадку говорять, що *стан системи є двовимірним*, так як формується двома змінними: вагою та об'ємом.

Збільшення кількості змінних стану системи приводить до збільшення об'єму обчислень на кожному етапі. Особливо це примітно в моделях динамічного програмування при обчисленні яких використовуються таблиці, так як кількість рядків таблиці повинна відповідати кількості комбінацій можливих значень змінної стану. Ці обчислювальні труднощі настільки значні, що в літературі з динамічного програмування отримали назву «прокляття розмірності» [1].

Розглянемо приклад для ілюстрації «прокляття розмірності», який до того ж демонструє можливість рішення задачі динамічного програмування методами лінійного програмування.

Приклад 5.7. Деяке виробниче підприємство виготовляє два види продукції. Тривалість виробничого процесу становить 430 хвилин в день. Для виготовлення одиниці продукції першого виду необхідно 2 хвилини, другого виду – 1 хвилина. Денний об'єм виробництва продукції першого виду не обмежений. Максимальний денний попит на продукцію другого виду складає 230 одиниць. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого виду – 2 гривні, другого виду – 5 гривень. Визначити оптимальний розв'язок задачі максимізації прибутку методами динамічного програмування.

Дана задача є задачею лінійного програмування, математична модель якої має вигляд:

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 430 \\ x_2 \leq 230 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Елементи моделі динамічного програмування наступні:

1. *Етап* i відповідає номеру продукції, $i = 1, 2$.
2. *Альтернативою* x_i на i -му етапі являється об'єм виробництва продукції i , $i = 1, 2$.
3. *Стан* (v_1, w_1) описує кількість ресурсів, необхідних для виробництва продукції видів 1 та 2, а саме тривалість виробничого процесу та обмеження на попит, що використовується на етапах 1 та 2.
4. *Стан* (v_2, w_2) описує кількість ресурсів, необхідних для виробництва продукції видів 1 та 2, а саме тривалість виробничого процесу і обмеження на попит що використовується на етапі 2.

Розв'язок.

Етап 2. Нехай $F_2(v_2, w_2)$ описує максимальний прибуток для етапу 2, тобто прибуток від випуску продукції виду 2, при заданому стані (v_2, w_2) . Тоді:

$$F_2(v_2, w_2) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq v \\ 0 \leq x_2 \leq w}} \{5x_2\}$$

Таким чином, $\max\{5x_2\}$ має місце при $x_2 = \min\{v_2, w_2\}$ і рішення другого етапу буде мати наступну форму:

Стан	Оптимальне рішення	
	$F_2(v_2, w_2)$	x_2
(v_2, w_2)	$5 \cdot \min\{v_2, w_2\}$	$\min\{v_2, w_2\}$

Етап 1:

$$F_1(v_1, w_1) = \max_{0 \leq 2x_1 \leq v} \{2x_1 + F_2(v_1 - 2x_1, w_1)\} = \max_{0 \leq 2x_1 \leq v} \{2x_1 + 5 \min(v_1 - 2x_1, w_1)\}$$

Оптимізація на етапі 1 потребує розв'язку міні-максної задачі, що загалом є досить складною справою.

Для задачі, що розглядається, маємо $v_1 = 430$ та $w_1 = 230$, що дає інтервал $0 \leq 2x_1 \leq 430$.

$$\min(430 - 2x_1; 230) = \begin{cases} 230, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ 430 - 2x_1, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

$$F_1(430, 230) = \max_{x_1} \begin{cases} 2x_1 + 1150, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ -8x_1 + 2150, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

Графічно можна перевірити, що функція $F(430, 230)$ досягає максимального значення при $x_1 = 100$. Таким чином отримуємо оптимальне рішення етапу 1:

Стан	Оптимальне рішення	
	$F_1(v_1, w_1)$	x_1
(430, 230)	1350	100

Для обчислення оптимального значення x_2 розрахуємо обсяги ресурсів, що залишилися на частку продукції 2:

$$v_2 = v_1 - 2x_1 = 430 - 200 = 230$$

$$w_2 = w_1 - 0 = 230.$$

$$\text{Тоді } x_2 = \min\{v_2, w_2\} = 230$$

Оптимальне рішення матиме вигляд:

$$X^* = (x_1 = 100; x_2 = 230) \text{ одиниць.}$$

$$Z_{\min} = 1350 \text{ гривень.}$$

Тема 6. Нелінійні математичні моделі задач економіки.

План лекційного заняття

1. Економіко–математична модель задачі нелінійного програмування.
2. Оптимізаційні задачі нелінійного програмування з обмеженнями у вигляді рівнянь.
3. Аналіз чутливості за допомогою методу Якобі.
4. Метод множників Лагранжа.
5. Алгоритми нелінійного програмування.
6. Градієнтний метод.
7. Методи прямого пошуку.
8. Стохастичне програмування.

1. Економіко–математична модель задачі нелінійного програмування.

Розв'язуючи задачі оптимального управління (планування), доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між економічними показниками.

У загальному вигляді нелінійна економіко-математична модель має вигляд:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \quad (6.1)$$

За умов:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (6.2)$$

де: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – нелінійні функції.

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тому доводиться застосовувати набір методів і обчислювальних алгоритмів, які ґрунтуються на теорії диференційного числення, вибір яких залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування умовно можна поділити на прямі та непрямі.

Прямими методами оптимальні розв'язки знаходять у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими, для цієї групи є градієнтні методи.

Сутність *непрямих методів* полягає у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої можна спростити. До них належать найбільш розроблені методи квадратичного і сепарабельного програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язуються методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями - рівностями виконують методами зведеного градієнта, такими як метод Якобі та метод множників Лагранжа. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні і достатні умови існування екстремуму Куна-Таккера.

2. Оптимізаційні задачі нелінійного програмування з обмеженнями у вигляді рівнянь.

Найбільш відомими методами розв'язку оптимізаційних задач нелінійного програмування при наявності обмежень – рівнянь є метод Якобі та метод множників Лагранжа.

Метод зведеного градієнта – метод Якобі.

Розглянемо задачу:

$$Z = f(X) \rightarrow \min$$

з обмеженнями у формі рівностей

$$q(X) = 0$$

де: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T.$$

Функції $f(X)$, $q_i(X)$, $i = 1 \div m$, повинні бути двічі неперервно диференційованими.

Ідея методу зведеного градієнта полягає в тому, щоб знайти аналітичний вираз для перших частинних похідних функції $f(X)$ в усіх точках, що задовольняють рівність $q(X) = 0$. Відповідні стаціонарні точки визначаються із умови рівності нулю вказаних частинних похідних, потім можна використати теорему про достатні умови існування екстремуму функції для класифікації знайдених стаціонарних точок.

Необхідні та достатні умови існування точок екстремуму функції n змінних $f(X)$ визначається двома теоремами 6.1., 6.2. відомими з курсу вищої математики.

Теорема 6.1. Необхідною умовою того, що точка X_0 являється екстремальною точкою функції $f(X)$, є рівність: $\nabla f(X_0) = 0$, де $\nabla f(X_0)$ - градієнт функції в точці X_0 .

Точки в яких виконується рівність $\nabla f(X_0) = 0$ називають стаціонарними.

Теорема 6.2. Для того щоб стаціонарна точка X_0 була екстремальною, достатньо, щоб матриця Гессе H в точці X_0 була:

1. *позитивно визначеною – тоді X_0 є точкою мінімуму функції $f(X)$;*
2. *негативно визначеною - тоді X_0 є точкою максимуму функції $f(X)$.*

Матриця Гессе - це матриця, елементами якої є приведені частинні похідні другого порядку:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Матриця H ($\Delta H \neq 0$) називається *негативно визначеною*, якщо її визначник є число від'ємне; *позитивно визначеною*, якщо її визначник є число додатне, Тепер розглянемо загальне математичне формулювання методу зведеного градієнта. Із теореми Тейлора [24] відомо, що для точок $X + \Delta X$ із околу точки X маємо:

$$f(X + \Delta X) - f(X) = \nabla f(X) \Delta X + O(\Delta x_j^2),$$

$$q(X + \Delta X) - q(X) = \nabla q(X) \Delta X + O(\Delta x_j^2).$$

Якщо приріст $\Delta x_j \rightarrow 0$, то ці рівняння матимуть вигляд:

$$\partial f(X) = \nabla f(X) \partial X,$$

$$\partial q(X) = \nabla q(X) \partial X.$$

Так як в області допустимих розв'язків задачі $q(X) = 0 \Rightarrow \partial X = 0$, то повинні виконуватися рівності:

$$\begin{aligned} \partial f(X) - \nabla f(X) \partial X &= 0, \\ \nabla q(X) \partial X &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Як бачимо, початкова задача зводиться до рішення $m+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими. Невідомими величинами будуть $f(X)$, ∂X . Значення невідомої величини $f(X)$ можна визначити, як тільки буде знайдено вектор значень величини ∂X , тобто по суті, маємо m рівнянь з n невідомими.

При $m > n$ принаймні $m - n$ рівнянь системи будуть надлишковими, після усунення надлишку рівнянь, кількість незалежних рівнянь в системі стає рівним $m \leq n$. При $m = n$, рішенням системи буде $\partial X = 0$, причому точка X не має допустимого околу, і, як наслідок, область розв'язків задачі складається з єдиної точки. Така ситуація є тривіальною. Докладніше розглянемо випадок $m < n$.

Припустимо $X = (Y, Z)$, де $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – залежні змінні; $Z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-m})$ – незалежні змінні задачі.

Перепишемо градієнти функцій f і q в нових позначеннях:

$$\nabla f(Y, Z) = (\nabla_Y f; \nabla_Z f),$$

$$\nabla q(Y, Z) = (\nabla_Y q; \nabla_Z q).$$

Розглянемо матриці:

$$J = \nabla_Y q = \begin{bmatrix} \nabla_Y q_1 \\ \dots \\ \nabla_Y q_m \end{bmatrix}, \quad C = \nabla_Z q = \begin{bmatrix} \nabla_Z q_1 \\ \dots \\ \nabla_Z q_m \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Матриця $J_{m \times m}$ – називається матрицею Якобі, а $C_{m \times (n-m)}$ – матрицею управління. Матриця Якобі не вироджена, тому що m рівнянь незалежні за означенням. Тому компоненти вектора Y треба обирати серед компонентів вектора X таким чином, щоб забезпечити невиродженість матриці J .

Початкову систему рівнянь (6.3) з невідомими $\partial f(X)$ та ∂X можна переписати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \partial f(Y, Z) &= \nabla_Y f \partial Y + \nabla_Z f \partial Z, \\ J \partial Y &= -C \partial Z. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Так як матриця J не вироджена, то існує обернена матриця J^{-1} і друге рівняння системи 6.4 можна записати:

$$\partial Y = -J^{-1} C \partial Z. \quad (6.6)$$

Підставивши (6.5) в (6.4) в рівняння для $\partial f(Y, Z)$ маємо:

$$\partial f(Y, Z) = (\nabla_Z f - \nabla_Y f J^{-1} C) \partial Z.$$

Із цього рівняння отримуємо формулу для частинних похідних функції f за вектором незалежних змінних Z

$$\nabla_C f = \frac{\partial_C f(Y, Z)}{\partial_C Z} = \nabla_Z f - \nabla_Y f J^{-1} C, \quad (6.7)$$

де $\Delta_C f$ - вектор зведеного градієнта функції f по C . Значить вектор $\Delta_C f$ повинен бути нульовим в стаціонарних точках.

Достатні умови існування екстремуму в стаціонарних точках приведені в теоремі 6.2. Елементи матриці Гессе повинні відповідати компонентам вектора незалежних змінних і в водночас повинні бути другими частинними похідними функції f .

Процедуру використання методу зведеного градієнта розглянемо на прикладі.

Приклад 6.1. Визначити максимальне значення функції

$$Z = f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{за обмежень: } \begin{cases} q_1(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0 \\ q_2(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок.

Визначимо стаціонарні точки цільової функції при наявності обмежень наступним чином.

Нехай $Y = (x_1, x_2)$ і $Z = x_3$, використавши формули 6.4. та 6.7 маємо:

$$\nabla_Y f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_1, 2x_2); \quad \nabla_Z f = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3;$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\nabla_C f = \frac{\partial_C f}{\partial_C x_3} = 2x_3 - (2x_1, 2x_2) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10}{3}x_1 - \frac{28}{3}x_2 + 2x_3$$

Шукана стаціонарній точка повинна задовольняти систему рівнянь:

$$\begin{cases} \nabla_C f = 0 \\ q_1(X) = 0 \\ q_2(X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & -28 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи буде вектор $X_0 \approx (0,81; 0,35; 0,28)$.

Визначимо тип стаціонарної точки (*max*, *min*), перевіривши виконана достатніх умов існування екстремуму функції за теоремою 6.2.

Так як x_3 – незалежна змінна, то із рівності $\nabla_C f = 0$ випливає:

$$\frac{\partial_C^2 f}{\partial_C x_3^2} = \frac{10}{3} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3} \right) - \frac{28}{3} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3} \right) + 2 = \left(\frac{10}{3}, -\frac{28}{3} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} + 2.$$

$$\text{За методом Якобі маємо: } \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = -J^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix}.$$

Підставивши обчислені значення в формулу для другої частинної похідної функції f по C , знаходимо числове значення цієї похідної:

$$\frac{\partial_c^2 f}{\partial_c x_3^2} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{28}{3} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix} + 2 = \frac{460}{9} > 0.$$

Можемо зробити висновок, що обчислена стаціонарна точка $X_0 \approx (0,81; 0,35; 0,28)$ є точкою мінімуму функції Z .

Використання описаного методу Якобі може бути досить складним (важко обчислювати обернену матрицю Якобі), якщо кількість обмежень задачі більше двох. Ці труднощі можна обійти, якщо використати правило Крамера, що дозволяє виразити ∂f через ∂Z [24]. Якщо z_j є компонентою вектора Z , а y_i – компонента вектора Y , то можна довести справедливість виразу:

$$\frac{\partial_c f}{\partial_c z_j} = \frac{\partial(f, q_1, \dots, q_m)}{\partial(z_j, y_1, \dots, y_m)}, \partial e \quad \frac{\partial(f, q_1, \dots, q_m)}{\partial(z_j, y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_j} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y_m} \\ \frac{\partial q_1}{\partial z_j} & \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_m}{\partial z_j} & \frac{\partial q_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(q_1, \dots, q_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}} = |J|.$$

Необхідні умови екстремуму приймають вигляд

$$\frac{\partial_c f}{\partial_c z_j} = 0, \quad j = 1 \div (n - m), \quad (6.8)$$

або у матричній формі запису $\frac{\partial Y}{\partial Z} = -J^{-1} \cdot C$.

(i, j) –й елемент матриці обчислюється за формулою

$$\frac{\partial y_i}{\partial z_j} = \frac{\frac{\partial(q_1, \dots, q_m)}{\partial(y_1, \dots, y_{i-1}, z_j, y_{i+1}, \dots, y_m)}}{\frac{\partial(q_1, \dots, q_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}}. \quad (6.9)$$

Дана формула представляє собою швидкість зміни залежної змінної y_i , що обумовлена варіацією незалежної змінної z_i .

Для отримання достатніх умов існування екстремуму i -й компонент вектора $W = \nabla_Y f J^{-1}$ запишемо у вигляді

$$w_i = \frac{\frac{\partial(q_1, \dots, q_{i-1}, f, q_{i+1}, \dots, q_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}}{\frac{\partial(q_1, \dots, q_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}}. \quad (6.10)$$

Для ілюстрації описаного вище методу визначимо необхідні умови існування стаціонарних точок для задачі прикладу 6.1.

$$\frac{\partial_c f}{\partial_c x_3} = \frac{\begin{vmatrix} 2x_3 & 2x_1 & 2x_2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{3}x_1 - \frac{28}{3}x_2 + 2x_3.$$

3. Аналіз чутливості за допомогою методу Якобі.

Метод Якобі можна використовувати для аналізу чутливості оптимального значення цільової функції f до малих змін правих частин обмежень оптимізаційної задачі. Зокрема, можна визначити, як вплине на оптимальне значення цільової функції f заміна обмеження $q_i(X) = 0$ на $q_i(X) = \partial q_i$.

Дослідження такого типу називається *аналіз чутливості* і в деякій мірі аналогічне дослідженню, що було розглянуте в лінійному програмуванні (п.4.3.). Слід зауважити, що аналіз чутливості у нелінійному програмуванні можливий лише в досить вузькому околі екстремальної точки.

Припустимо, що у формулі (6.5) $\partial q \neq 0$, тобто:

$$\partial f(Y, Z) = \nabla_Y f \partial Y + \nabla_Z f \partial Z; \quad \partial q = J \partial Y + C \partial Z \neq 0$$

тоді $\partial Y = J^{-1} \partial q - J^{-1} C \partial Z$, підставивши цей вираз у рівняння (6.5.), отримаємо наступну форму

$$\begin{aligned} \partial f(Y, Z) &= \nabla_{Y_0} f \cdot J^{-1} \cdot \partial q + \nabla_Z f \cdot \partial Z; \\ \partial e \quad \nabla_Z f &= \nabla_Z f - \nabla_{Y_0} f \cdot J^{-1} \cdot C \end{aligned} \quad (6.11)$$

Отриманий вираз (6.11.) можна використовувати для аналізу варіацій значень цільової функції в околі допустимої точки X_0 , що обумовлені малими змінами величин ∂q та ∂Z .

Фактично, у будь-якій стаціонарній точці $X_0 = (Y_0, Z_0)$ приведений градієнт повинен бути рівним нулю, тому в точці X_0 маємо

$$\partial f(Y_0, Z_0) = \nabla_{Y_0} f \cdot J^{-1} \cdot \partial q(Y_0, Z_0)$$

Або
$$\frac{\partial f}{\partial q} = \nabla_{Y_0} f \cdot J^{-1}. \quad (6.12)$$

Таким чином, вплив малих змін ∂q на оптимальне значення цільової функції f можна оцінити через швидкість зміни функції f відносно змін q . Ці величини прийнято називати *коефіцієнтами чутливості*.

4. Метод множників Лагранжа.

Коефіцієнти чутливості методу Якобі (6.12) можна використовувати для розв'язку задач із обмеженнями – рівностями. Позначимо праву частину (6.12) символом λ , тоді:

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \lambda = \nabla_{Y_0} f \cdot J^{-1} \Rightarrow \partial f = \lambda \cdot \partial q \Rightarrow \partial f - \lambda \cdot \partial q = 0. \quad (6.13)$$

Рівняння (6.13) відповідає достатній умові існування стаціонарних точок, так як формула (6.12) була отримана з урахуванням того, що $\nabla f = 0$. Рівняння (6.13) можна переписати в частинних похідних за змінними x_j , що приводить до системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f - \lambda \cdot q) = 0, \quad j = 1 \div n \quad (6.14).$$

Отримані рівняння (6.14) разом із обмеженнями задачі $q=0$ формують систему, однозначно визначаючи допустимі вектори X та λ , що задовольняють необхідну умову стаціонарності точок.

Описана процедура лежить в основі *методу множників Лагранжа*, що використовується для визначення стаціонарних точок задачі оптимізації з обмеженнями у формі рівностей. Формально метод множників Лагранжа виглядає так.

Нехай L є функцією двох величин X та λ і визначається рівністю:

$$L(X, \lambda) = f(X) - \lambda \cdot \partial q(X), \quad (6.15)$$

тоді необхідні умови стаціонарності точок, із врахуванням обмежень задачі $q(X) = 0$, мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

Функцію $L(X, \lambda)$ називають функцією Лагранжа, а параметри λ – множниками Лагранжа. Множники Лагранжа за змістом ідентичні коефіцієнтам чутливості в методі Якобі.

Сформулюємо достатні умови існування екстремуму без доведення, попередньо означивши матрицю H^B .

Матрицю виду
$$H^B = \begin{bmatrix} O & P \\ P^T & Q \end{bmatrix}_{(m+n) \times (m+n)}$$

називають окантованою матрицею Гессе, якщо її складовими є матриці:

$$O_{m \times m} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; P_{m \times n} = \begin{bmatrix} \nabla q_1(X) \\ \dots \\ \nabla q_m(X) \end{bmatrix}; Q_{n \times n} = \left\| \frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|.$$

Якщо існує стаціонарна точка (X_0, λ_0) функції Лагранжа $L(X, \lambda)$ і окантована матриця Гессе H^B обчислена в цій точці, тоді X_0 є точкою екстремуму, а саме:

- 1) точкою максимуму, якщо починаючи з кутового мінору порядку $2m+1$, наступні $n-m$ кутових мінорів матриці H^B утворюють знакозмінний числовий ряд, в якому знак першого елемента визначається множителем $(-1)^{m+1}$;
- 2) точкою мінімуму, якщо починаючи з кутового мінору порядку $2m+1$, наступні $n-m$ кутових мінорів матриці H^B мають знаки, що визначаються множителем $(-1)^m$.

Ці умови є достатніми для визначення екстремальної точки, але строго кажучи екстремальною може бути і точка, що не є стаціонарною.

Існують, також, інші умови визначення екстремальних точок, які являються одночасно як необхідними так і достатніми. Однак їх практичне використання пов'язане зі значними обчислювальними труднощами

5. Алгоритми нелінійного програмування.

Класична теорія визначення точок екстремуму в задачах нелінійного програмування, як з обмеженнями на змінні так і без них, мало підходить для

практичного використання. Але теоретичні положення, наприклад Куна – Таккера, створюють теоретичний базис для розробки ефективних обчислювальних алгоритмів. Відомими методами рішення задач нелінійного програмування без обмежень на змінні є *алгоритм прямого пошуку* - виконується прямий пошук екстремальної точки в заданій області, або *метод градієнтів* – для знаходження точок екстремуму застосовується градієнт цільової функції.

Алгоритми розв'язку задач нелінійного програмування із обмеженнями на змінні поділяють на прямі та непрямі. Прямі методи розглядають нелінійну задачу безпосередньо і знаходять її екстремальну точку як граничну точку збіжної послідовності. В непрямих методах рішення нелінійної задачі зводиться до розв'язку однієї або декількох лінійних задач, похідних від початкової нелінійної. До прямих методів можна віднести методи *лінійних комбінацій* та *метод послідовної безумовної оптимізації*. Непрямі методи представлені методами *сепарабельного, квадратичного і стохастичного програмування*.

6. Методи прямого пошуку.

Методи прямого пошуку застосовуються переважно для визначення точок екстремуму одновимірних задач, хоча, в окремих випадках, методи прямого пошуку застосовні і для рішення задач, цільова функція яких є багатовимірною.

Алгоритм методу прямого пошуку базується на простих математичних розрахунках. Спочатку задається інтервал невизначеності, який обов'язково містить шукану точку екстремуму. Потім ширина інтервалу поступово звужується, поки не буде визначено точку оптимуму. Процедура розрахунків будується таким чином, щоб ширину інтервалу невизначеності можна було зробити як завгодно малою.

В якості прикладу методу прямого пошуку розглянемо алгоритм *дихотомічного пошуку*.

Сутність алгоритму дихотомічного пошуку визначається у наступних процедурах.

1) Обирається інтервал невизначеності $a \leq x \leq b$, в якому розміщена точка максимуму функції мети $f(X)$. Обов'язковою вимогою до функції $f(X)$ є її одновершинність - існування єдиного максимуму $f(X)$.

2) Визначають дві точки x_1 та x_2 , розміщені симетрично відносно точок a і b таким чином, щоб інтервали $a \leq x \leq x_2$ і $x_1 \leq x \leq b$ перетинались в деякому відрізку обмеженої довжини δ , (рис. 6.1.).

3) Обчислюють значення функцій $f(x_1)$ та $f(x_2)$, тоді можливими є три розміщення точки екстремуму x^* :

- якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то $a \leq x^* \leq x_2$;

- якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то $x_1 \leq x^* \leq b$

- якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 \leq x \leq x_2$.

4) Обирається один з трьох можливих інтервалів - інтервал невизначеності, в якому розміщена точка $\max f(x)$.

5) Новий інтервал ділиться на два інтервали, що перетинаються, таким же чином як в п.1)

б) Повторюють дії з п.2.

Продовжуючи процес ділення інтервалів, можна зменшити ширину інтервалу невизначеності до будь якої прийнятної малої величини δ , тобто нескінченно наблизитись до точки $\max f(x)$.

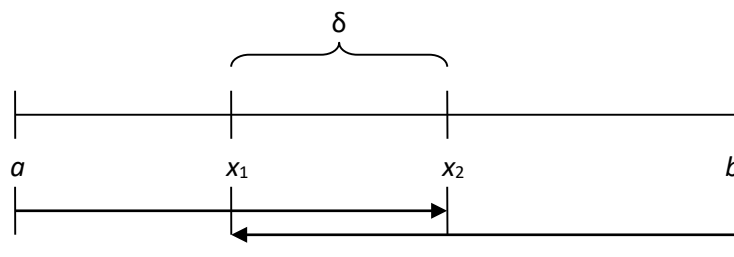


рис. 6.1.

7. Градієнтний метод.

Метод градієнтів використовується для визначення точок екстремуму двічі диференційованих функцій. Основна ідея методу полягає у визначенні послідовності точок з урахуванням напрямку градієнта досліджуваної функції. Одним із градієнтних методів численного пошуку екстремумів нелінійних функцій при відсутності обмежень на змінні є метод Ньютона – Рафсона []. Ми розглянемо градієнтний метод, що має назву метод *найшвидшого підйому* (найшвидшого спуску).

У відповідності до загального методу градієнтів, обчислення припиняють при знаходженні точки, в якій градієнт функції рівний нулю, що є необхідною умовою існування оптимуму в даній точці. Достатню умову існування оптимуму в точці перевіряють застосовуючи властивості випуклості цільової функції $f(x)$.

Розглянемо передумови застосування методу найшвидшого підйому для задачі визначення максимуму функції $f(x)$. Нехай точка X^0 - початкова точка визначення екстремуму функції $f(x)$, $\nabla f(X^k)$ - градієнт функції $f(x)$ в k -й точці. Ідея методу зводиться до визначення в даній точці напрямку найшвидшого зростання функції $f(x)$, тобто напрямку p в якому похідна функції $f'_p(X^k) = \frac{\partial f}{\partial p}$

досягає свого максимуму. Відомо, що похідна $f'_p(X^k)$ досягне свого екстремуму, якщо дві послідовні точки X^k і X^{k+1} пов'язані співвідношенням

$$X^{k+1} = X^k + r^k \cdot \nabla f(X^k), \quad (6.21)$$

де r^k - параметр, що називають довжиною кроку.

Зазвичай параметр r^k обирають із припущення, що в точці X^k спостерігається максимальне збільшення значення цільової функції $f(X)$. Іншими словами, якщо існує деяка $h(r)$ функція змінної r , що визначається співвідношенням

$$h(r) = f(X^k + r \cdot \nabla f(X^k)), \quad (6.22)$$

то $r^k = r$ і функція $h(r)$ досягає максимуму. Так як $h(r)$ є функцією однієї змінної, то для визначення її екстремумів можна використати *метод прямого пошуку* (п.6.4.1), якщо звичайно, функція $h(r)$ є одновершною.

Описана процедура закінчується, коли дві точки X^k і X^{k+1} розміщені досить близько одна від одної, тобто, коли виконується приблизна рівність $r^k \cdot \nabla f(X^k) \approx 0$. Так як, довжина кроку $r^k \neq 0$, то в точці X^k виконується необхідна умова екстремуму $\nabla f(X^k) = 0$.

8. Стохастичне програмування.

Алгоритми стохастичного програмування розв'язують задачі, в яких окремі, або всі параметри є випадковими величинами. Основним підходом алгоритмів стохастичного програмування є перетворення початкової стохастичної задачі в рівнозначну детерміновану.

Розглянемо оптимізаційну задачу з детермінованою цільовою функцією та обмеженнями у вигляді функцій випадкових величин.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ p\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right) &\geq 1 - \alpha_i, \\ i &= 1 \div m, x_j \geq 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Запис обмежень у формі (6.29) описує вимогу: кожне обмеження повинно виконуватись із імовірністю не менш ніж $1 - \alpha_i$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, де α_i є наперед заданим рівнем значимості.

Коефіцієнти обмежень a_{ij} та b_i вважаються випадковими величинами розподіленими за нормальним законом із відомими математичними сподіваннями і дисперсіями. Далі доцільно розглянути три окремі задачі. Перші дві задачі ґрунтуються на припущенні, що тільки або a_{ij} або b_i являються випадковими величинами. Третя задача – обидва коефіцієнти a_{ij} і b_i є випадковими величинами.

Задача 1. Припустимо, що всі коефіцієнти a_{ij} є нормально розподілені випадкові величин із відомими математичними сподіваннями $M(a_{ij})$ і дисперсіями $D(a_{ij})$.

Відомі коваріації пар випадкових величин a_{ij}, a'_{ij} :
 $M(a_{ij} \cdot a'_{ij}) - M(a_{ij})M(a'_{ij}) = \text{cov}(a_{ij}, a'_{ij})$.

Розглянемо i -те обмеження задачі (6.29) та введемо позначення $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, випадкова величина g_i має нормальний розподіл з математичним сподівання $M(g_i) = \sum_{j=1}^n M(a_{ij}) \cdot x_j$ та дисперсією $D(g_i) = X^T D_i X$, де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, D_i - матриця коваріацій виду:

$$D_i = \begin{bmatrix} D(a_{i1}) & \dots & \text{cov}(a_{i1}, a_{in}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(a_{in}, a_{i1}) & \dots & D(a_{in}) \end{bmatrix}$$

Тепер i -те обмеження задачі (6.29) можна переписати таким чином:

$$p(g_i \leq b_i) = p\left(\frac{g_i - M(g_i)}{\sqrt{D(g_i)}} \leq \frac{b_i - M(g_i)}{\sqrt{D(g_i)}}\right) \geq 1 - \alpha_i,$$

де $\frac{g_i - M(g_i)}{\sqrt{D(g_i)}}$ - нормована нормально розподілена випадкова величина (має нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією). Тепер можна записати

$$p(g_i \leq b_i) = \varphi\left(\frac{b_i - M(g_i)}{\sqrt{D(g_i)}}\right),$$

де φ - функція стандартизованого нормального розподілу (що має розподіл Стьюдента).

Позначимо t_{α_i} - значення стандартизованої нормально розподіленої випадкової величини (критичні точки розподілу Стьюдента), тоді t_{α_i} визначається із рівності $\varphi(t_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i$.

У цьому випадку нерівність $p(g_i \leq b_i) \geq 1 - \alpha_i$, виконується тоді і лише тоді, коли справджується інша нерівність

$$\frac{b_i - M(g_i)}{\sqrt{D(g_i)}} \geq t_{\alpha_i}.$$

Виконані дії приводять початкову імовірнісну нерівність (6.29) до еквівалентного детермінованого нелінійного обмеження:

$$\sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + K_{\alpha_i} \sqrt{X^T D_i X} \leq b_i. \quad (6.30)$$

Зокрема, якщо a_{ij} незалежні випадкові величини розподілені за нормальним законом, тоді $\text{cov}(a_{ij}, a'_{ij}) = 0$ і нерівність (6.30) матиме вигляд:

$$\sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + t_{\alpha_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2} \leq b_i. \quad (6.31)$$

Обмеження (6.31) можна привести до обмежень задачі сепарабельного типу, застосувавши заміну змінних для всіх значень $i = 1 \div m : y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2}$.

Таким чином, початкове обмеження (6.29) є рівнозначним системі обмежень еквівалентної детермінованої задачі сепарабельного програмування (6.32).

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n M(a_{ij})x_j + t_{\alpha_i} y_i \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n D(a_{ij})x_j^2 - y_i^2 = 0 \end{cases} \quad (6.32)$$

Задача 2. Тут припускається, що лише коефіцієнти b_i є нормально розподіленими випадковими величинами із відомими математичними сподіваннями $M(b_i)$ та дисперсіями $D(b_i)$. Аналіз цієї задачі аналогічний аналізу проведеному в задачі 1. розглядають стохастичне обмеження:

$$p\left(b_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) \geq \alpha_i.$$

Як і в задачі 1, маємо

$$P \left(\frac{b_i - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}} \right) \geq \alpha_i,$$

дане обмеження виконується лише при виконанні нерівності

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - M(b_i)}{\sqrt{D(b_i)}} \leq t_{\alpha_i}.$$

Таким чином, початкове стохастичне обмеження еквівалентне детермінованому лінійному обмеженню:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq M(b_i) + t_{\alpha_i} \sqrt{D(b_i)}.$$

Задача 3. Припустимо, що обидва типи коефіцієнтів a_{ij} і b_i є випадковими величинами із нормальним законом розподілу. Перепишемо обмеження

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ у вигляді $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0$. Так як усі параметри a_{ij} і b_i є випадковими

величинами, розподіленими за нормальним законом, то і величина $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i$

також має нормальний закон розподілу. Звідси можна зробити висновок, що задача 3 подібна до задачі 1 і може бути детермінована аналогічним чином.

Тема 7. Оптимізаційні моделі економетричного програмування.**План лекційного заняття**

1. Динамічні ряди та їх характеристики.
2. Тенденції соціально-економічного розвитку.
3. Тенденція середнього рівня.
4. Тенденція дисперсії. Метод Фостера-Стюарта.
5. Тенденція автокореляції. Метод рангової кореляції.
6. Криві зростання.

1. Динамічні ряди та їх характеристики

Однією з найважливіших задач дослідження економічних процесів є вивчення зміни економічних показників у часі (товарообігу, об'єму випуску продукції, тощо). Ця задача вирішується за допомогою сумування та аналітичного вирівнювання рядів динаміки – побудови кривих зростання.

Динамічні ряди, як правило, представляються у вигляді таблиці, а для їх наочного зображення застосовують графіки і діаграми, які демонструють визначення тенденції у змінах показника.

Ряд динаміки – це сукупність спостережень, розміщена в порядку зростання деякої ознаки. Якщо у якості такої ознаки обрано час, то мова йде про часовий ряд. Часовий ряд відрізняється від даних про один часовий зріз тим, що у випадку часових рядів сама послідовність спостережень несе в собі важливу інформацію. Таким чином, *часовий ряд - це послідовність упорядкованих у часі числових показників, характеризуючи рівні стану і зміни досліджуваного явища.*

Часова шкала може бути представлена у вигляді послідовності моментів спостереження або періодів. Окреме значення ряду називається *рівнем ряду*. За формою подання рівні можуть бути виражені абсолютними, відносними та середніми величинами. Рівні формуються під сукупним впливом безлічі довгостроково та короткочасно діючих факторів, у тому числі, різного роду випадкових чинників.

Ряд динаміки називається *інтервальним*, якщо кожен рівень ряду представляє собою підсумок розвитку процесу за відповідний інтервал (період) часу, і *моментним*, якщо рівні відбивають стан об'єкта у послідовні моменти часу. Відмінність моментних рядів від інтервальних полягає в тому, що сума рівнів інтервального ряду дає реальний кумулятивний результат за весь період, що складається з інтервалів. Сума рівнів моментного ряду змісту не має.

За формою подання рівні можуть бути виражені абсолютними, відносними і середніми величинами. Рівні формуються під загальним впливом множини короткострокових і довгострокових діючих факторів, у тому числі, різного роду випадкових величин, або процесів, наприклад.

2. Тенденції соціально-економічного розвитку.

Вивчаючи ряди динаміки, намагаються визначити основну тенденцію у динаміці показника ряду. Під тенденцією розуміється деякий загальний напрямок розвитку, довгострокова еволюція. Така траєкторія, яку можна

представити у вигляді деякої функції часу, що характеризує основну закономірність руху в часі, у деякій мірі вільну від випадкових факторів, називається трендом.

Поняття про рівняння тенденції й назва тренд (*trend*) були введені в статистику англійським ученим Гукером в 1902 р. [4]. *Тренд - це деяка аналітична функція, що описує фактичну, середню для періоду спостереження тенденцію досліджуваного процесу в часі, його зовнішній прояв.* Результат при цьому пов'язується винятково з перебігом часу.

Вважається, що час опосередковано виражає вплив основних факторів, механізм впливу при цьому не враховується. Кількісний опис тенденції, що спостерігалася, у зміні рівнів окремо розглянутого часового ряду (виділення тренду) лежить в основі *екстраполяційних методів*.

Перш, ніж виділити тренд, необхідно перевірити гіпотезу про наявність тенденції. У часових рядах соціально-економічних явищ може спостерігатися тенденція трьох типів.

1. *Тенденція середнього рівня*, вона може бути зображена графічно. Аналітична тенденція виражається деякою математичною функцією $y=f(t)$, навколо якої варіюють емпіричні значення часового ряду досліджуваного явища. При цьому значення, отримані на основі тренда, є математичними сподіванням часового ряду.

2. *Тенденція дисперсії*, вона являє собою тенденцію зміни відхилень емпіричних значень рівнів часового ряду від теоретичних, отриманих за рівнянням тренду.

3. *Тенденція автокореляції*, що виражає тенденцію зміни кореляційного зв'язку між окремими, послідовними рівнями часового ряду.

Існують різні методи виявлення тенденцій.

3. *Тенденція середнього рівня.*

Метод розроблений для малих за об'ємом вибірок у припущенні, що вибіркова сукупність має нормальний розподіл. Ряд розбивається приблизно на дві рівні частини, які розглядаються як дві незалежні вибіркові сукупності. Для кожної з них розраховуються середні \bar{x}_1 і \bar{x}_2 і перевіряється гіпотеза про істотність різниці $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$. Перевірка гіпотези відбувається допомогою *t*-статистики Стьюдента.

1. Знаходиться розрахункове значення *t*-статистики за формулою

$$t_p = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (7.1)$$

де n_1 і n_2 – число рівнів динамічного ряду, відповідно першої і другої частини; σ_1^2 і σ_2^2 – дисперсії рівнів ряду.

2. За таблицями, при заданому рівні значимості α і кількості ступенів волі $\nu = (n-2)$ знаходиться критична точка $t_{кр}$.

3. Розрахункове значення критерію t_p порівнюється з його табличним значенням $t_{кр}$, якщо $t_p > t_{кр}$, то гіпотеза про істотність різниці середніх рівнів двох нормально розподілених сукупностей відкидається, отже розбіжність між обчисленими середніми двох рівнів значима, істотна та має не випадковий

характер. У цьому випадку часовий ряд має тенденцію. У протилежному випадку, якщо $t_p \leq t_{кр}$, різниця незначима, неістотна і ряд не має тенденції.

Потім перевіряється гіпотеза про відсутність тенденції у дисперсіях часового ряду, шляхом перевірки гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей.

Розрахункове значення F -критерію Фишера-Снедекора визначається за формулою

$$F_p = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}, \quad \text{якщо } \sigma_2^2 > \sigma_1^2, \quad (7.2)$$

$$F_p = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, \quad \text{якщо } \sigma_1^2 > \sigma_2^2. \quad (7.3)$$

Перевірка гіпотези здійснюється на основі порівняння розрахункового та критичного значень F -критерію, отриманого при заданому рівні значимості α та кількості ступенів волі ν_1 й ν_2 .

Якщо $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$, то $\nu_1 = n_2 - 1$, $\nu_2 = n_1 - 1$;

Якщо $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, то $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$,

Гіпотеза про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей відкидається, якщо $F_p > F_{кр}$.

Тобто, розбіжність між обчисленими дисперсіями значима, носить не випадковий характер і у ряді динаміки існує тенденція в дисперсіях – тренд існує.

Даний метод дає прийнятні результати у випадку рядів з монотонною тенденцією.

4. Тенденція дисперсії. Метод Фостера-Стюарта.

Метод дає досить надійні результати й дозволяє виявити тренд у значенні дисперсій рівнів, що має значення для прогностичного аналізу. Розраховуються дві характеристики u_t й v_t .

$$u_t = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y_t > y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1 \\ 0, & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}, \quad (7.4)$$

$$v_t = \begin{cases} 1, & \text{якщо } y_t < y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1 \\ 0, & \text{в усіх інших випадках} \end{cases} \quad (7.5)$$

Після цього знаходять дві характеристики K і L .

$$K = \sum_t k_t, \quad \text{де } k_t = u_t + v_t, \quad (7.6)$$

$$L = \sum_t l_t, \quad \text{де } l_t = u_t - v_t, \quad (7.7)$$

Величина $(u_t + v_t)$ приймає значення 0 та 1.

Сума $(u_t + v_t) = 0$, якщо y_t не є ні найбільшим, ні найменшим серед усіх попередніх значень. У протилежному випадку $(u_t + v_t) = 1$. Отже, $0 \leq K \leq n-1$, де n число рівнів ряду. Якщо всі рівні ряду між собою рівні (нульова дисперсія), тобто $y_t = const$, то $K = 0$. Якщо вони монотонно зростають або спадають, або їхні коливання передують, то $K = n-1$.

Величина $(u_t - v_t)$ приймає значення 0, 1, -1.

Отже, $-(n-1) \leq L \leq n-1$, нижня межа відповідає монотонно спадаючому ряду, а верхня - монотонно зростаючому.

Якщо всі рівні ряду рівні між собою, то

$$\sum_t u_t = 0, \quad \sum_t v_t = 0, \quad (7.8)$$

і, значить, $L = 0$, у цьому випадку тренд відсутній.

Крім того $L = 0$ і тоді коли $\sum_t u_t = \sum_t v_t$, що спостерігається у випадку, коли ряд охоплює два періоди із протилежними тенденціями, або, якщо підйом і падіння будуть чергуватися.

Сума знаходиться за усіма членами ряду. Величини K і L асимптотично нормальні та мають незалежні розподіли. Вони істотно залежать від розташування рівнів у часі. Характеристика K використовується для виявлення тенденцій зміни дисперсії, а характеристика L - для виявлення тенденції зміни середніх величин. Із цією метою перевіряються гіпотези про те, чи суттєво відрізняються L від 0 та K від M , де $M = M(K)$ – математичне сподівання K , визначене для випадкового розміщення рівнів у часі.. Ці гіпотези перевіряються за допомогою випадкових величин

$$T_1 = \frac{L-0}{\sigma_2} \quad \text{та} \quad T_2 = \frac{K-M}{\sigma_1}, \quad (7.9)$$

де σ_1 - середнє квадратичне відхилення K ; σ_2 - середнє квадратичне відхилення L . Величини T_1 і T_2 мають розподіл Стюдента з $n-1$ ступенями волі, їх розрахункові значення порівнюють з критичними, знайденими за таблицями критичних точок розподілу Стюдента з $n-1$ ступенями волі, при заданому рівні значимості α .

Якщо $T_1 > t_{кр}(\alpha_1, n-1)$, то гіпотеза про відсутність тенденції зміни середніх значень відхиляється – тренд є наявним, у протилежному випадку немає підстав для її відхилення, тобто тренд відсутній.

Аналогічно, якщо $T_2 > t_{кр}(\alpha_2, n-1)$, то тенденція зміни дисперсій ряду існує та описується деяким трендом.

Якщо ж $T_2 < t_{кр}(\alpha_2, n-1)$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу, тенденція в дисперсії відсутня.

4. Тенденція автокореляції. Метод рангової кореляції.

Коефіцієнт рангової кореляції Кенделла знаходять за формулою

$$\tau = \frac{4R}{n^2 - n} - 1, \quad (7.7)$$

де R - число пар рівнів часового ряду, для яких $y_t > y_{t+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-t$) для всіх $t = 1, 2, \dots, n-1$, де n - число рівнів ряду.

Коефіцієнт рангової кореляції змінюється в межах від -1 до +1. Значення τ , близькі до -1, свідчать про наявність негативного тренду, близькі до +1 - позитивного тренду, близькі до 0 - про відсутність тренду.

Якщо досліджувані процеси мають досить тривалу історію і накопичено достатньо фактичного матеріалу, що дозволяє розкрити закономірність і тенденції в їхньому розвитку, а самим процесам притаманна значна інерційність, то припущення про майбутній розвиток цих процесів у значній мірі може базуватися на аналізі минулого.

Інерційність економічних процесів проявляється подвійним чином: як інерційність взаємозв'язків, тобто збереження в основних рисах механізму

формування явищ і як інерційність у розвитку окремих сторін процесів - темпів, напрямку, коливань основних кількісних характеристик.

Коефіцієнт рангової кореляції Кенделла знаходять за формулою

$$\tau = \frac{4R}{n^2 - n} - 1, \quad (7.7)$$

де R - число пар рівнів часового ряду, для яких $y_i > y_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) для всіх $t = 1, 2, \dots, n-1$, де n - число рівнів ряду.

Коефіцієнт рангової кореляції змінюється в межах від -1 до +1. Значення τ , близькі до -1, свідчать про наявність негативного тренду, близькі до +1 - позитивного тренду, близькі до 0 - про відсутність тренду.

Якщо досліджувані процеси мають досить тривалу історію і накопичено достатньо фактичного матеріалу, що дозволяє розкрити закономірність і тенденції в їхньому розвитку, а самим процесам притаманна значна інерційність, то припущення про майбутній розвиток цих процесів у значній мірі може базуватися на аналізі минулого.

Інерційність економічних процесів проявляється подвійним чином: як інерційність взаємозв'язків, тобто збереження в основних рисах механізму формування явищ і як інерційність у розвитку окремих сторін процесів - темпів, напрямку, коливань основних кількісних характеристик.

Ступінь інерційності залежить від рівня управління. У економічній системі чим нижче досліджуваний рівень (об'єкт) у ієрархії системи, тим менш інерційні характеристики має об'єкт. Показники на макрорівні більш стійкі, ніж на мікрорівні, тому що їх розвиток відбувається під впливом значного числа факторів.

Найважливішою умовою побудови часового ряду є порівнянність його рівнів. Непорівнянність рівнів може мати місце внаслідок зміни об'єкта дослідження (за територією, структурою, статусом, тощо), різного часу реєстрації даних, застосування різних одиниць виміру та методик розрахунку для економічних показників. При аналізі показників у вартісному вираженні непорівнянність виникає внаслідок інфляції, диспаритету цін перехідної економіки, ринкових умов у цілому.

Показники, що характеризують тенденцію динамічного ряду, утворюють систему базисних і ланцюгових показників, докладно досліджувану в курсі загальної теорії статистики.

Циклічна складова динамічного ряду може мати пилкоподібний або маятниковий характер, виражати тривалу періодичність або випадково розподілені в часі коливання. Для визначення типу коливань застосовується графічне зображення, метод "поворотних крапок" Кендалла.

Сезонні коливання виникають внаслідок зміни пори року, носять регулярно повторюваний характер і виявляються при аналізі кварталних або місячних даних.

Після встановлення наявності тенденції динамічного ряду необхідно визначити характер перебігу процесу, виявити у загальному вигляді тенденцію розвитку в минулому. Можна виділити монотонно спадаючі та зростаючі процеси, що мають межі насичення, екстремуми і точки перегину. Для

визначення типу розвитку економічних процесів і явищ можуть бути використані середній темп росту, середній темп приросту, адаптивна середня, експоненційне згладжування.

Всі перераховані способи є елементарними прийомами статистичного аналізу. Однак, крім самостійного значення, ці способи можуть бути використані як допоміжні засоби для отримання більш узагальнених характеристик динамічних рядів за допомогою формалізованого опису або аналітичного вирівнювання.

5. Криві зростання і їх характеристики.

Криві зростання описують закономірності розвитку явищ, об'єктів у часі. Криві зростання одержують шляхом аналітичного вирівнювання часових рядів. Вони представляють собою однофакторні моделі прогнозування; у яких фактором виступає час. У загальному випадку однофакторну економетричну модель можна подати у вигляді

$$y = f(x) + e, \quad (7.11)$$

де $f(x)$ - одна з функцій зростання, e - випадкова величина, вплив якої на досліджуваний показник врахувати не можливо.

Вирівнювання ряду за допомогою тих або інших функцій у більшості випадків виявляється зручним засобом обробки і представлення емпіричних даних про розвиток у часі досліджуваного явища. Використанню кривих зростання повинен передувати змістовний аналіз явища з метою з'ясування можливості екстраполювання тенденцій.

Криві зростання часто використовуються в дослідженні динаміки реальних процесів різної природи. Вони застосовуються для аналізу міграційних процесів у людському суспільстві та біологічних групах.

Аналітичне вирівнювання складається з наступних етапів:

- вибір типу функції зростання, форма якої відповідає характеру динамічного ряду;
- визначення чисельних значень (оцінювання) кількісних параметрів кривої зростання.

Знайдена функція дозволяє одержати вирівняні рівні ряду. Вибір типу кривої передбачає знання основних видів функцій зростання, їх основних параметрів та властивостей.

Найбільш складним у математичному моделюванні (і у вирівнюванні рядів динаміки) є вибір моделюючої функції.

Іноді тип рівняння можна визначити, орієнтуючись на графічне зображення ряду. Але, навіть коли тенденція розвитку показника відома, її можна зобразити за допомогою різних рівнянь. Даний момент і визначає використання декількох моделюючих функцій для вирівнювання одного і того самого динамічного ряду з подальшим визначенням найбільш вдалої моделі та прогнозування на її основі динаміки показника на наступні періоди.

Коректний вибір форми кривої визначає результати екстраполяції тренда. Оптимальним підходом до рішення даної проблеми був би попередній аналіз досліджуваного процесу, власне кажучи, його внутрішньої структури і логіки, взаємозв'язку із зовнішнім середовищем. У більшості випадків дослідник не

володіє характеристикою динаміки процесу з необхідним ступенем деталізації, що потрібно для вибору кривої.

Екстраполяційні розрахунки можуть виконуватися за даними спостережень за порівняно невеликі періоди, наприклад, квартал або місяць. Однак у таких випадках слід враховувати сезонність динаміки деяких показників.

Обов'язковим являється змістовний аналіз, що передує та супроводжує емпіричний підхід. Найпростішим початковим підходом є візуальний вибір форми кривої на основі графічного зображення ряду динаміки. При такому виборі можливий суб'єктивізм дослідника, але при відносно простій конфігурації та з урахуванням результатів змістовного аналізу, візуальний вибір дає цілком прийнятні результати.

Іншим способом є метод послідовних різниць. Він ґрунтується на припущенні про те, що рівень ряду може бути представлений як сума двох компонент:

$$y_t = y_t + \varepsilon_t, \quad (7.12)$$

де y_t - структурна (систематична), а ε_t - випадкова компонента.

Послідовні різниці величин y_t прагнуть до деякого граничного значення. І тому, на деякому етапі розрахунку, можна одержати різниці, які будуть представляти собою незалежні випадкові величини з однаковою дисперсією.

Нехай тренд відповідає поліному k -ступеня. Тоді різниці ординат k -го порядку постійні, тобто рівні один одному, а різниці $(k+1)$ -го порядку дорівнюють нулю. Тому приблизна рівність послідовних різниць рівнів ряду розглядається як ознака того, що y_t у своєму розвитку відповідає поліному відповідного k -ступеня.

Відповідно до цього методу обчислюються перші, другі і т.д. різниці рівнів

ряду, тобто:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t^{(1)} = y_t - y_{t-1} \\ u_t^{(2)} = u_t^{(1)} - u_{t-1}^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ u_t^{(n)} = u_t^{(n-1)} - u_{t-1}^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (7.13)$$

Розрахунок ведеться доти, поки різниці не будуть приблизно рівними одна одній. Порядок таких різниць приймається за ступінь шуканого полінома. Так, якщо приблизно рівними одна одній виявляються перші різниці, то для вирівнювання береться поліном першого ступеня, тобто лінійна залежність. Якщо приблизно однакові величини мають другі різниці, то вибирається поліном другого ступеня або парабола і т.д.

І нарешті, при виборі форми кривої виходять із значень прийнятого критерію. Звичайно використовується метод найменших квадратів, тобто критерієм є сума квадратів відхилень фактичних значень рівня від розрахункових, отриманих вирівнюванням. Із сукупності кривих вибирається така крива, що відповідає мінімальному значенню критерію.

Однак однозначно вибрати адекватну криву досить складно. До ряду, що складає з m точок, можна так підібрати один багаточлен ступеня $(m-1)$, що відповідна крива буде проходити через усі m точок. Існують багаточлени більш високих ступенів, які також проходять через усі точки рівнів, але навряд чи в

даному випадку можна говорити про виділення тенденції та використання її в прогнозуванні.

У більшості випадків практично прийнятним є метод, заснований на порівнянні характеристик зміни приростів динамічного ряду із відповідними характеристиками кривих росту. Для вирівнювання вибирається та крива, закон зміни приросту якої найбільш близький до закономірності зміни фактичних даних.

Метод характеристик приросту включає процедуру попередньої статистичної обробки ряду і власне вибір форми кривої. Попередня обробка включає наступні дії:

- згладжування ряду за розрахунковим середнім;
- визначення середніх приростів;
- визначення похідних характеристик приросту.

Згладжування ряду за розрахунковим середнім є механічним вирівнюванням і заміняє емпіричні рівні розрахунковими середніми значеннями цих рівнів, що мають менші коливання навколо середнього значення показника. У результаті виявляється тенденція зміни часового ряду.

Аналітичне моделювання рядів динаміки проводять за допомогою найпростіших економіко-математичних моделей:

- лінійних;
- параболічних;
- степеневих;
- показникових;
- гіперболічних;
- логарифмічних.

У макро- та мікроекономічних дослідженнях найчастіше використовуються наступні типи кривих зростання.

$$\text{Лінійна: } y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n. \quad (7.14)$$

$$\text{Експоненційна: } y = \alpha \cdot \beta^x. \quad (7.15)$$

$$\text{Степенева (мультиплікативна): } y = \alpha \cdot x^\beta \quad (7.16)$$

$$\text{Обернена: } y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{x} \quad (7.17)$$

$$\text{Квадратична: } y = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad (7.18)$$

$$\text{Модифікована експонента: } y = \alpha \cdot \beta^x + \gamma \quad (7.19)$$

$$\text{Крива Гомерца: } y = e^{\alpha\beta^x + \gamma} \quad (7.20)$$

$$\text{Логістична крива: } y = \frac{1}{\alpha\beta^x + \gamma} \quad (7.21)$$

Також при виборі форми кривої необхідно враховувати додаткові ознаки.

1. Якщо перші різниці мають тенденцію до зменшення з постійним темпом, то варто зупинитися на модифікованій експоненті; якщо вони утворюють криву, що нагадує асиметричний одновіршиний розподіл чисельності (з вершиною, зрушеною вліво), то варто звернутися до кривої Гомперца і, нарешті,

якщо розподіл перших різниць за формою близький до нормального, то обирається логістична крива.

2. Якщо графічне зображення логарифмів середніх рівнів, близьке до прямої лінії, то слід застосовувати просту експоненту, якщо ж ці рівні утворюють криву, близьку до модифікованої експоненти, то слід обрати криву Гомперца.

3. Якщо перші різниці логарифмів рівнів приблизно постійні, то вирівнювання краще проводити за експоненційною кривою, а якщо вони змінюються з постійним темпом, то по кривій Гомперца.

4. Якщо перші різниці зворотних значень середніх рівнів змінюються на один і той самий відсоток, то перевагу треба надати логістичній кривій.

При виборі величини періоду, за який аналізуються рівні, варто враховувати, що занадто малий період не дає можливості взагалі виявити тенденцію, як і занадто великий період може приховувати в собі не виявлену тенденцію. Якщо тенденція має довгостроковий циклічний характер, то для її виявлення краще взяти період від середини першого циклу до середини останнього.

Між числом параметрів у рівнянні тренда та числом спостережень повинна бути відповідність, при цьому велика кількість параметрів збільшує довірчий інтервал при екстраполяції.

Тема 8. Теорія ігор та прийняття рішень в умовах не визначеності.

План лекційного заняття

1. Умови прийняття рішень.
2. Прийняття рішення в умовах ризику.
3. Критерій очікуваного значення. Інші критерії очікуваного значення.
4. Функція корисності.
5. Прийняття рішень в умовах невизначеності.
6. Теорія ігор. Матрична гра двох осіб з нульовою сумою.

1. Умови прийняття рішень.

Будь-яка сфера людської діяльності, особливо бізнес та економіка, пов'язана з прийняттям рішень в умовах не повної інформації. Причиною інформаційної невизначеності можуть бути найрізноманітніші фактори, такі як нестабільність економічної або політичної ситуації в країні, невизначеність дій партнерів по бізнесу та велика кількість випадкових обставин, врахувати які не має можливості. Економічні рішення із врахуванням невизначених факторів приймаються в рамках *теорії прийняття рішення* – аналітичного підходу до вибору найкращого варіанта рішення – альтернативи. У теорії прийняття рішень використовуються певні «інтелектуальні» процедури вибору найкращої з можливих альтернатив. Якість обраної альтернативи залежить від якості даних, що використовуються для опису та аналізу досліджуваної ситуації. З цієї точки зору процес прийняття рішень може належати до однієї з трьох можливих умов.

1. *Прийняття рішень в умовах повної визначеності*, коли кількісні та якісні характеристики даних для прийняття рішення відомі напевне.

2. *Прийняття рішень в умовах ризику*, коли кількісні та якісні характеристики даних не відомі, але їх можна описати за допомогою ймовірнісних розподілів.

3. *Прийняття рішень в умовах невизначеності*, коли дані не можна описати навіть за допомогою розподілу імовірностей, тобто, коли даним не можна поставити у відповідність навіть імовірність їх появи в процесі прийняття рішення.

По суті, в умовах визначеності дані прийняття рішення повністю визначені, в умовах невизначеності дані не визначені. Прийняття рішень в умовах ризику є проміжним варіантом попередніх двох умов.

Умова невизначеності не означає буквально, що інформація задачі прийняття рішення повністю відсутня. Термін невизначеність застосовується в тому сенсі, що дані задачі не можуть бути класифіковані за ступенем їх значимості для прийняття рішення і вони мають невизначену або невідому функцію розподілу, якщо розглядати їх як реалізацію випадкових величин або процесів.

Моделі лінійного програмування, що розглядалися раніше є прикладом задач прийняття рішення в умовах визначеності. *Моделі лінійного програмування*

застосовні для прийняття рішення у тих випадках, коли альтернативи можна пов'язати між собою суто лінійними функціями.

2. Прийняття рішення в умовах ризику.

Задача оцінки ризиків і відповідних прибутків є однією з найбільш важливих в економічній діяльності. Під ризиком прийнято розуміти імовірність втрати об'єктом дослідження частини наявних ресурсів, недоотримання прибутків або появу додаткових витрат в результаті здійснення певного варіанту дій у процесі прийняття рішення.

Ризик поділяють на динамічний і статичний. Динамічний ризик пов'язаний з непередбачуваною зміною вартості основного капіталу як наслідку прийняття управлінських рішень, або зміною ринкових і політичних обставин. Такі зміни можуть привести як до додаткових витрат так і до додаткових прибутків. Статичний ризик обумовлений можливістю втрати реальних активів внаслідок нанесення збитків власності і втрат прибутків з причини неієздатності організації.

Побудова моделей ризикових ситуацій вимагає певних припущень, а саме:

- втрати від різних за природою ризиків не залежать один від одного;
- втрати за одним з наявних ризиків не обов'язково збільшують імовірність втрати за іншими;
- максимально можливі збитки не повинні перевищувати фінансових можливостей досліджуваного об'єкта.

Усі фактори впливу на економічний об'єкт, що є причиною виникнення ризикових ситуацій, можна поділити на суб'єктивні та об'єктивні. Об'єктивні фактори не залежать безпосередньо від об'єкту прийняття рішення. Це можуть бути інфляція, конкуренція на ринку, економічні та політичні кризи, стан екології, економіки, фінансова і економічна політика уряду і т.і. Суб'єктивні фактори безпосередньо є характеристиками об'єкту дослідження: виробничий потенціал, технічне оснащення та рівень фондоємності виробництва, внутрішня фінансова та виробнича політика і т.і.

Практичне управління ризиком в основному проводиться в чотирьох напрямках: розподіл ризиків між усіма учасниками прийняття рішення, страхування ризиків, резервування засобів на покриття непередбачуваних витрат і диверсифікація.

Аналіз ризикових ситуацій поділяється на дві взаємопов'язані складові: якісний аналіз та кількісна оцінка ризиків. Головна задача якісного аналізу полягає у визначенні факторів ризику та обставин, що є причиною ризикових ситуацій. Кількісна оцінка дозволяє оцінити розмір окремих ризиків, а також сумарних ризиків процесу прийняття рішення у цілому.

Найпоширенішою мірою ризику деякого економічного рішення, операції, або окремої альтернативи є середнє квадратичне відхилення критерію ефективності рішення, операції, альтернативи. Так як ризик обумовлений не детермінованістю результату дії рішення (альтернативи), то чим менше варіація (розсіювання) результату прийняття рішення, тим більш передбачуваним є рішення і відповідно менше ризик. Якщо варіація рішення рівна нулеві, ризик

повністю відсутній. Найчастіше критерієм ефективності проекту рішення є прибуток.

3. Критерій очікуваного значення. Інші критерії очікуваного значення.

Якщо рішення приймається в умовах ризику, то вартості альтернативних рішень описують відомими законами розподілу ймовірностей. Тому рішення що приймається на основі аналізу альтернатив базується на використанні *критерію очікуваного значення*.

У відповідності до критерію очікуваного значення можливі альтернативи порівнюються з точки зору оптимізації критерію ефективності - максимізації очікуваного прибутку, або мінімізації очікуваних витрат. Застосування критерію очікуваного значення базується на припущенні, що прибуток, або витрати пов'язані з кожним альтернативним рішенням являються випадковою величиною з відомим законом розподілу.

Якщо має місце дві або більше послідовних множини альтернативних рішень, причому кожне наступне рішення базується на результатах попередніх рішень, то для аналізу критерію очікуваного значення використовують *дерево рішень*. *Дерево рішень* – це графічне зображення послідовності рішень з відповідними ймовірностями та значенням критерію ефективності для будь яких можливих комбінацій альтернатив.

У теорії прийняття рішення альтернативи, можливі реалізації яких є випадковими подіями, називають *станом природи*. А процес вибору і прийняття рішень в умовах ризику називають *іграми з природою*. У загальному випадку задача прийняття рішення може містити n станів природи та m альтернатив. Якщо p_j - імовірність j -го стану природи, а a_{ij} – очікуваний платіж - вартість вибору альтернативи (прибуток, чи витрати), що пов'язаний з прийняттям рішення i при стані природи j , ($i = 1 \div m, j = 1 \div n$), тоді очікуваний платіж для рішення i обчислюється за формулою математичного сподівання

$$M_i = \sum_{j=1}^n p_j \cdot a_{ij}, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Найкращим рішенням буде те, що відповідає максимальному або мінімальному значенню серед усіх M_i , в залежності від того, являється платіж в задачі прибутком, чи збитками.

Інші критерії очікуваного значення.

Розглянемо дві модифікації критерію очікуваного значення. Перша модифікація визначає апостеріорні ймовірності Байеса на основі експериментальних даних. Друга - визначає корисну реальну вартість грошей.

Апостеріорні ймовірності Байеса. Для формулювання критерію очікуваного значення використовують розподіл ймовірностей, який як правило, отримують із попередньо накопиченої інформації. Розподіл ймовірностей, що базується безпосередньо на вибіркових, або емпіричних даних називається *апостеріорним*, тобто отриманим на основі первинної інформації. У деяких випадках є можливість модифікувати отримані первинні *апостеріорні ймовірності*, тоді отримані ймовірності називають *апостеріорними або Байєсовськими*. Розглянемо на прикладі, яким чином можна модифікувати критерій очікуваного

значення, щоб отримати додаткову інформацію, що міститься в апостеріорних імовірностях.

Приклад. Априорні ймовірності прикладу 7.2. 0,6 та 0,4 були отримані із прогнозу стану ринку. Припустимо, що фінансова компанія - інвестор вирішила провести власне дослідження на предмет росту чи падіння акцій будівельних компаній, найнявши для цього аналітика. Результатом аналітичного дослідження є наступна додаткова інформація: при підвищенні ціни на акції – 90% за інвестування 1млн.грн. в акції будівельних компаній; при зниженні ціни акцій – 50% за інвестування. Яким чином отримана додаткова інформація вплине на прийняття рішення?

Розв'язок.

Думка аналітика фактично оцінила умовні імовірності «за-проти» інвестування при заданих станах природи, що кількісно виражені імовірностями підвищення та зниження ціни акцій будівельних компаній.

Позначимо: q_1 – аналітик за придбання акцій, q_2 – проти придбання акцій, k_1 – підвищення ціни на акції, k_2 – зниження ціни акцій. Тоді думку аналітика можна записати як умовні ймовірності:

$$p\left(\frac{q_1}{k_1}\right) = 0,9; \quad p\left(\frac{q_1}{k_2}\right) = 0,1; \quad p\left(\frac{q_2}{k_1}\right) = 0,5; \quad p\left(\frac{q_2}{k_2}\right) = 0,5. \quad \text{Використовуючи}$$

отриману додаткову інформацію, сформулюємо задачу прийняття рішення наступним чином.

1. Якщо використати думку аналітика «за», то акції якої компанії доцільно придбати A чи B ?

2. Якщо використати думку аналітика «проти», то знову ж таки, акції якої компанії доцільно придбати A чи B ?

Отриману задачу можна представити у вигляді дерева рішень, але перед цим доцільно обчислити апостеріорні ймовірності $p(k_i/q_j)$ різних альтернатив, що обчислюються з використанням додаткової інформації. Оцінку ймовірностей альтернатив виконаємо по кроково.

1. Умовні ймовірності $p(q_j/k_i)$, що характеризують думку аналітика запишемо у вигляді таблиці:

	q_1	q_2
k_1	0,9	0,1
k_2	0,5	0,5

2. Імовірність сумісної появи подій i, j , обчислюємо за формулою:

$$p(k_i, q_j) = p(q_j/k_i) \cdot p(k_i).$$

При відомих априорних імовірностях $p(k_1) = 0,6$ та $p(k_2) = 0,4$, імовірність сумісної появи подій визначається як добуток рядків таблиці кроку 1 на 0,6 та 0,4 відповідно.

	q_1	q_2
k_1	$0,9 \cdot 0,6 = 0,54$	$0,1 \cdot 0,6 = 0,06$
k_2	$0,5 \cdot 0,4 = 0,2$	$0,5 \cdot 0,4 = 0,2$

Умова нормування виконується – сума усіх елементів таблиці рівна 1.

3. Обчислимо ймовірності подій q_1, q_2 для усіх значень i , за формулою:

$$p(q_j) = \sum_i p(k_i, q_j).$$

Ці ймовірності отримуємо сумуванням елементів відповідних стовбців таблиці кроку 2.

	$p(q_1)$	$p(q_2)$
	$0,54+0,2=0,74$	$0,06+0,2=0,26$

4. Визначаємо шукані апостеріорні ймовірності за формулою умовної ймовірності:

$$p(k_i/q_j) = \frac{p(k_i, q_j)}{p(q_j)}.$$

Ці ймовірності є результатом ділення кожного стовпчика таблиці кроку 2, на елемент відповідного стовпчика таблиці кроку 3.

	q_1	q_2
k_1	$\frac{0,54}{0,74} = 0,730$	$\frac{0,06}{0,26} = 0,231$
k_2	$\frac{0,2}{0,74} = 0,270$	$\frac{0,2}{0,26} = 0,769$

Обчислені ймовірності відрізняються від апіорних ймовірностей $p(k_1) = 0,6$ та $p(k_2) = 0,4$.

Тепер можна оцінити альтернативні рішення, що базуються на розрахунках очікуваних прибутків для вершин 4*, 5*, 6*, 7* дерева рішень, рис.1.

Думка аналітика за інвестиції - ребро «за» дерева рішень:

- дохід від акцій компанії *A* у вершині 4*

$$D^4(A) = 500000 \cdot 0,730 + (-200000) \cdot 0,270 = 311000$$

- дохід від акцій компанії *B* у вершині 5*

$$D^5(B) = 150000 \cdot 0,730 + 50000 \cdot 0,270 = 123000$$

Рішення – інвестування в акції компанії A.

Думка аналітика проти інвестиції - ребро «проти» дерева рішень:

- дохід від акцій компанії *A* у вершині 6*

$$D^6(A) = 500000 \cdot 0,231 + (-200000) \cdot 0,769 = -38300$$

- дохід від акцій компанії *B* у вершині 7*

$$D^7(B) = 150000 \cdot 0,231 + 50000 \cdot 0,769 = 73100.$$

Рішення – інвестування в акції компанії B.

Отримані рішення відповідають твердженню, що очікуваний прибуток в вершинах 2, 3 рівний відповідно 311000 та 73100 гривень відповідно.

4. *Функція корисності.*

У попередніх прикладах критерій очікуваного значення оцінювався в реальних грошових одиницях. Але досить частою є ситуація, коли при аналізі альтернатив використовується поняття *корисності*, а не реальна величина платежів. Відношення корисності є суб'єктивним, воно залежить від нашого відношення до ризику. Тому доцільно представити систематизовану процедуру кількісної оцінки відношення до ризику особи, що приймає рішення. Остаточним результатом такої процедури буде побудова *функції корисності*, що виконує роль реальних грошових оцінок альтернатив.

Для демонстрації побудови функції корисності припустимо, що маємо ситуацію 50% на 50%, що інвестиції в розмірі 20000 гривень принесе прибуток в розмірі 40000 гривень, або буде повністю втрачена. Відповідно, очікуваний прибуток становитиме 10000 гривень.

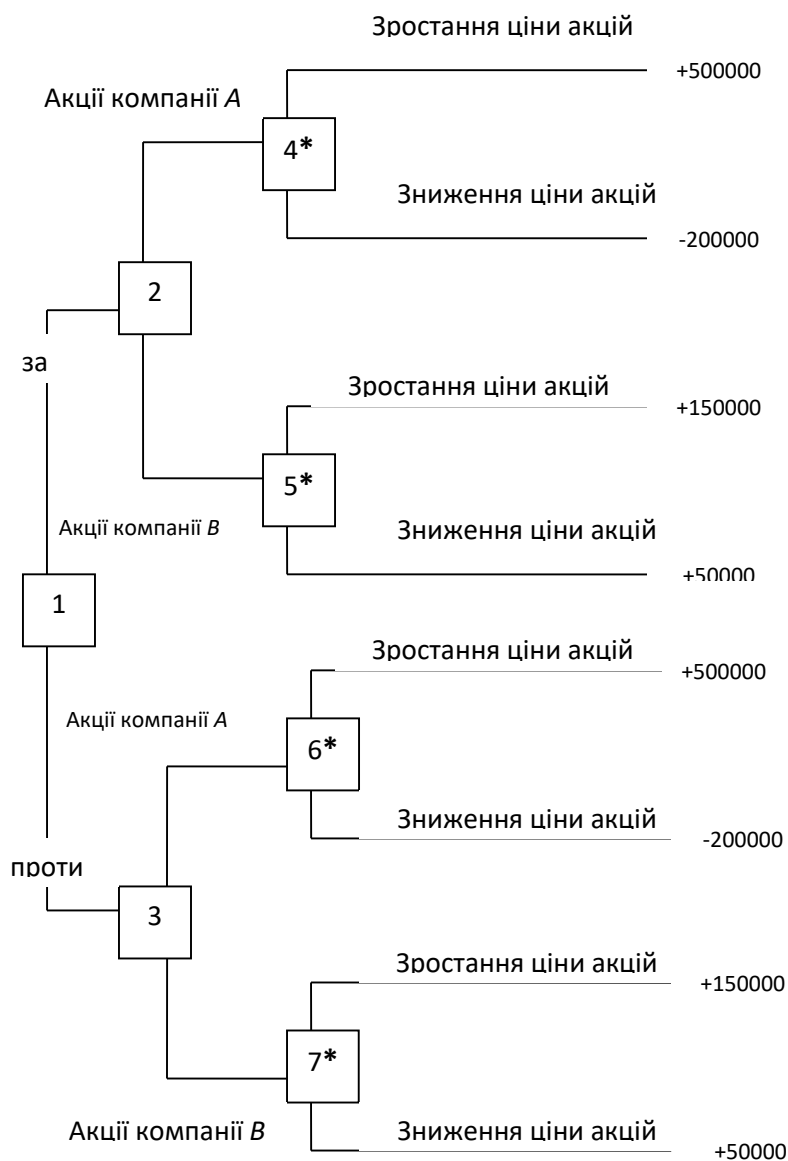


Рис 1. Дерево рішень до задачі.

Таким чином найкращий платіж цієї задачі складає 40000, найгірший - - 20000. встановимо довільну, але логічну шкалу корисності U , що змінюється від 0 до 100, де 0 відповідає найгіршій корисності – 20000 грн., а 100 – найкращій – 40000 грн. Тобто, можна записати: $U(-20000)=0$, $U(40000)=100$. Далі визначаємо корисність в проміжних точках інтервалу $[-20000; 40000]$ для визначення загального вигляду функції корисності.

Якщо відношення особи, що приймає рішення, байдуже до ризику, то результуюча функція корисності буде прямою лінією, що поєднує точки $(0, -$

20000) та (100, 40000) на координатній площині. У цьому випадку і реальні кошти і корисність дають однакові рішення. У більш реальних ситуаціях функція корисності може приймати інший, відмінний від лінійного, вигляд, що відображує відношення особи, що приймає рішення до ризику.

Нехай деякий індивідуум X не налаштований на ризик (не ризиковий, обережний), тобто є більш чутливим до втрат, ніж до прибутків. Індивідуум Y – нейтральний до ризику, індивідуум Z – налаштований на ризик. Тоді функція корисності матиме вигляд - рис.2. Криві корисності, аналогічні зображеним на рис.7.3, визначені за допомогою кількісного показника, що характеризує відношення особи, що приймає рішення до ризику, для різних значень рівня реальних грошей в межах встановленого інтервалу.

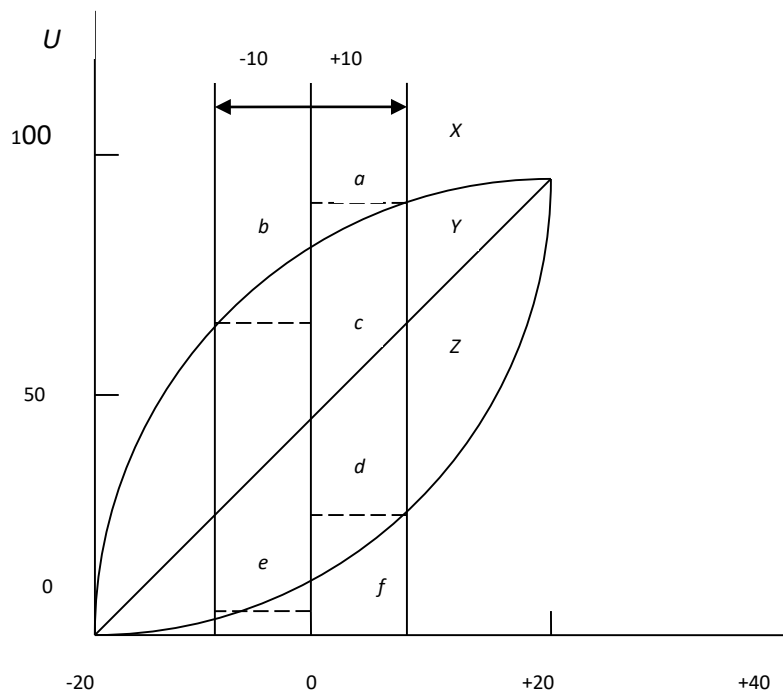


Рис. 2. Функція корисності.

У загальному випадку особа, що приймає рішення може бути налаштована на ризик і не згодна ризикувати, в залежності від суми ризику. Тоді функція корисності графічно нагадує подовжену букву S.

Визначимо корисність, що відповідає проміжним значенням із інтервалу платежів наприклад: -10000, 0, 10000, 20000, 30000 гривень.

Відповідна процедура побудови функції корисності починається з організації лотереї для визначення суми реальних грошей x , для якої очікуване значення корисності обчислюється за наступною формулою:

$$U(x) = pU(-20000) + (1 - p)U(40000) = 0p + 100(1 - p) = 100 - 100p,$$

$$0 \leq p \leq 1.$$

Для визначення значення $U(x)$ просять особу, що приймає рішення, зробити вибір між гарантованою сумою виграшу x та можливістю зіграти в лотерею, в якій із імовірністю p реалізується програш в сумі 20000 гривень і з імовірністю $(1-p)$ має місце виграш в розмірі 40000 гривень. При цьому під вибором

розуміється вибір значення деякої «нейтральної» імовірності p , при якому з точки зору особи, що приймає рішення, можливість прийняти участь в розіграші лотереї і отримати гарантований виграш x являються однаково привабливими.

Наприклад, якщо $x=20000$, особа що приймає рішення може визнати, що гарантована сума 20000 гривень готівкою та лотерея однаково привабливі пропозиції при $p=0,8$. Тоді обчислюється корисність за наступною формулою: $U(20000)=100-100*0,8$.

Подібна процедура повторюється до тих пір, поки не буде отримана достатня кількість точок $(x, U(x))$ для визначення вигляду функції корисності. Потім визначити шукану функцію корисності шляхом регресійного аналізу, або лінійною інтерполяцією між отриманими точками [].

Хоча при побудові функції корисності і використовується певна обчислювальна процедура, сам підхід визначення корисності альтернативних рішень не є достатньо науково обґрунтованим. Сам факт того, що обчислювальна процедура повністю визначається думкою особи, що приймає рішення ставить під сумнів якість та надійність отриманих рішень.

5. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

Прийняття рішень в умовах невизначеності, як і в умовах ризику, потребує визначення альтернативних рішень, яким відповідають певні платежі, що залежать від випадкових станів природи. Платіжну матрицю в задачі прийняття рішень з m можливих альтернатив і n станів природи можна представити наступним чином.

	s_1	s_2	...	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$...	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$...	$v(a_2, s_n)$
...
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$...	$v(a_m, s_n)$

Елемент a_i представляє i -ту можливу альтернативу, елемент s_j – j -й стан природи. Дохід, або плата пов'язана з вибором a_i альтернативи при s_j стані природи рівна $v(a_i, s_j)$.

Відмінність між прийняттям рішення в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності розподіл імовірностей для станів природи s_j , або невідомий, або не може бути визначений. Така обмеженість інформації пояснює причину використання різноманітних умовних критеріїв для аналізу ситуацій пов'язаних з прийняттям рішень в умовах повної невизначеності. Такими критеріями є: *критерій Лапласа, критерій мін-імаксу, критерій Севіджа, критерій Гурвіца*.

Різняться вказані критерії відношенням особи, що приймає рішення до невизначеності.

Критерій Лапласа. Даний критерій був вперше запропонований Я. Бернуллі та має в своїй основі *принцип недостатньої обґрунтованості*, який має наступний зміст. Так як розподіл імовірностей станів природи $p(s_j)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Тобто, використовується оптимістичне припущення, що ймовірності всіх станів природи рівні між собою:

$$p(s_1) = p(s_2) = \dots = p(s_n) = \frac{1}{n}.$$

Якщо разом з тим $v(a_i, s_j)$ характеризує прибутки, то найкращим буде рішення що забезпечує максимальне значення суми добутків прибутків на відповідні ймовірності:

$$\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v(a_i, s_j) \right\}. \quad (8.1)$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ характеризує витрати особи, що приймає рішення, то в формулі (7.1) *max* замінюється на *min*.

Міні-максний (макси-мінний) критерій базується на досить консервативній обережній (песимістичній) поведінці особи, що приймає рішення і зводиться до вибору найкращих альтернатив із найгірших.

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ описує можливі прибутки, то у відповідності до *макси-мінного* критерію в якості оптимального обирається рішення, що забезпечує виконання умови:

$$\max_{a_i} \left\{ \min_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}. \quad (8.2)$$

Якщо величина $v(a_i, s_j)$ представляє можливі витрати, то у відповідності до *міні-максного* критерію в якості оптимального обирається рішення, що забезпечує виконання умови:

$$\min_{a_i} \left\{ \max_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}. \quad (8.3)$$

Критерій Севіджа намагається послабити песимізм міні-максного (макси-мінного) критерію шляхом заміни матриці платежів $v(a_i, s_j)$ на матрицю ризиків $r(a_i, s_j)$, або матриці втрачених можливостей, що визначається безпосередньо із умов задачі або на основі матриці платежів $v(a_i, s_j)$.

Величина ризику - це розмір плати за відсутність інформації про стан природи. Ризиком $r(a_i, s_j)$ називають різницю між розміром плати яку отримала б особа, що приймає рішення, якби мала інформацію про стан природи s_j та розміром плати, який би вона отримала, не маючи цієї інформації. Знаючи стан природи s_j , особа, що приймає рішення обирає ту стратегію a_i , що забезпечить їй максимальний дохід, або мінімальний розмір витрат. Тобто, матриця ризиків розраховується із співвідношення:

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max_{a_k} \{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j), & \text{якщо } v - \text{дохід}; \\ v(a_i, s_j) - \min_{a_k} \{v(a_k, s_j)\}, & \text{якщо } v - \text{витрати}; \end{cases} \quad (8.4)$$

$$k = 1 \div m.$$

Потім, з метою визначення оптимального рішення, до матриці ризиків застосовується міні-максний критерій.

5. Теорія ігор. Матрична гра двох осіб з нульовою сумою

В умовах ринкової економіки досить часто виникають ситуації, коли два або більше колективи (особи) мають протилежні цілі та інтереси, причому

результат дії кожної з сторін залежить від дій супротивника. Відповідні моделі конфліктних ситуацій називаються іграми.

Характерною особливістю ігрової ситуації є взаємодія протилежних інтересів двох чи більше супротивників, які називаються гравцями, кожний з яких намагається оптимізувати своє рішення. Кожна протидіюча сторона – *гравці*, мають деяку множину можливих виборів, які називаються *стратегіями*. Джерелом невизначеності в ігровій ситуації є відсутність інформації про стратегію суперника.

Ігри будуються за певними правилами та відбуваються у результаті певної кількості ходів. Кожній стратегії гравців відповідає певний платіж виграш або програш, який вони одержують (сплачують) один одному. Такий виграш називається *ціною гри*. Завдання кожного гравця - знайти оптимальну стратегію яка за багаторазового повторення ігрової ситуації забезпечує йому максимально можливий середній виграш.

Якщо у грі беруть участь два гравці, то таку гру називають *парною, або грою двох осіб*. Найчастіше розглядаються ігри з двома гравцями, в яких виграш однієї сторони дорівнює програшу другої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю, що у теорії ігор називають *матричною грою двох осіб з нульовою сумою*. Ці ситуації є типовими у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення в умовах гострої конкуренції і обмеженості інформації.

Матрична гра двох осіб з нульовою сумою.

Якщо маємо два гравці A і B (гра двох осіб з нульовою сумою), кожен з яких обирає одну з можливих стратегій (гравець A – стратегії A_i , ($i = 1:m$), гравець B – стратегії B_j , ($j = 1:n$)), то таку гру можна представити у вигляді платіжної матриці:

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

рядки якої відповідають стратегіям гравця A , стовбці стратегіям гравця B , a_{ij} – виграш гравця A , якщо він обрав стратегію A_i , а суперник- стратегію B_j .

Оскільки ігри беруть свій початок у конфлікті інтересів, оптимальним рішенням матричної гри буде одна або декілька стратегій для кожного із гравців, при цьому будь-яке відхилення від обраних стратегій не підвищить ціну гри. Ці оптимальні рішення можуть бути представлені у вигляді єдиної *чистої* стратегії або декількох стратегій, які являються *змішаними*, у відповідності до заданих імовірностей.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор, для вибору раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є критерії *міні-максу* (*максиміну*). Сутність його полягає у наступному.

Нехай гравець A вибрав стратегію A_i . Тоді у найгіршому випадку він отримає виграш, що дорівнює $\min a_{ij}$. Якщо навіть гравець B знає його стратегію, гравець A має діяти так, щоб максимізувати свій мінімальний виграш:

$$\alpha = \max_j \min_i a_{ij} \quad (8.6)$$

Таку стратегію гравця A називають *макси-мінною*, а розмір його гарантованого виграшу – *нижньою ціною гри*.

Гравець B , який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки, має обрати стратегію, яка мінімізує його максимально можливий програш, за усіма можливими стратегіями гравця A . Стратегію B називають *міні-максною*. Розмір його програшу – *верхня ціна гри*:

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} \quad (8.7)$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній із сторін не вигідно змінювати обрану стратегію, оскільки суперник може у відповідь обрати іншу стратегію, яка дасть йому кращий результат. Якщо:

$$\min_i \max_j a_{ij} = \max_j \min_i a_{ij} = \nu \quad (8.8)$$

тобто $\alpha = \beta = \nu$, то гра називається *цілком визначеною*, або *грою із сідловою точкою*. У цій ситуації *оптимальним* для обох гравців є вибір *чистих стратегій*, тобто таких які відповідають сідловій точці.

Рішення матричних ігор у змішаних стратегіях.

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \nu \leq \beta$, то *макси-мінно-міні-максні стратегії* не є оптимальними: кожна з сторін може покращити свій результат при виборі іншої стратегії. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять, застосовуючи *змішані стратегії*, які є певними комбінаціями початкових чистих стратегій.

Якщо матрична гра не має сідлової точки, то її розв'язок можна знайти або *графічно*, або *методами лінійного програмування*.

Графічний метод.

Графічний метод застосовується для рішення матричних ігор, в яких хоча б один гравець має дві чисті стратегії.

Розглянемо матричну гру, із платіжною матрицею розмірності $2 \times n$, в якій гравець A має дві стратегії.

		$p_1=y_1$	$p_2=y_2$...	$p_n=y_n$
		B_1	B_2	...	B_n
$p_1=x_1$	A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$p_2=1-x_1$	A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

У грі припускають, що гравець A змішує стратегії A_1 і A_2 з відповідними ймовірностями x_1 та $(1-x_1)$, де $0 \leq x_1 \leq 1$. гравець B змішує стратегії B_1, B_2, \dots, B_n з ймовірностями y_1, y_2, \dots, y_n , де $y_1+y_2+\dots+y_n=1$. У цьому випадку очікуваний виграш гравця A , що відповідає j -й чистій стратегії гравця B , обчислюється у вигляді.

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, \quad j = 1 \div n. \quad (8.9)$$

Таким чином розв'язок задачі зводиться до визначення величини x_1 , що максимізує мінімум очікуваних виграшів для гравця A .

$$\max_{x_1} \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}\}, \quad j = 1 \div n. \quad (8.10)$$

План лекційного заняття

1. Системи масового обслуговування: означення, складові, методи, завдання.
2. Класифікація СМО.
3. Класифікація методів і моделей СМО.
4. Аналітичні моделі СМО. Приклад.

1. *Системи масового обслуговування: означення, складові, методи, завдання*

Існує певний клас економічних задач, що пов'язані з *системами масового обслуговування* (СМО), тобто такими системами, в яких, з одного боку, виникають масові запити (вимоги) на виконання будь-яких послуг, з іншого - відбувається задоволення цих запитів. Тобто, маємо справу з системами, призначеними для багаторазового використання при розв'язанні однотипних задач.

Процеси, які виникають при цьому отримали назву процесів обслуговування, а системи – систем масового обслуговування. Прикладами таких систем є ремонтні майстерні, телефонні системи, обчислювальні комплекси, магазини тощо.

Кожна система масового обслуговування складається з певного числа обслуговуючих одиниць, зокрема приладів, пристроїв, пунктів, станцій, які називають каналами обслуговування. Каналами можуть виступати продавці, перукарі, обчислювальні машини, точки продажу, лінії зв'язку та ін. За кількістю каналів системи масового обслуговування поділяються на одноканальні (один канал) та багатоканальні (декілька каналів).

Заявки надходять в систему масового обслуговування зазвичай нерегулярно, а випадково, утворюючи так званий випадковий потік заявок (вимог). Обслуговування заявок триває також якийсь випадковий час. Випадковий потік заявок і часу обслуговування призводить до того, що система масового обслуговування виявляється завантаженою нерівномірно: в якісь періоди часу накопичується дуже велика кількість заявок, а в інші періоди система працює з неповним завантаженням або простоює. Для того, щоб максимально оптимізувати, регулювати ці процеси шляхом прийняття зважених та обґрунтованих управлінських рішень використовується теорія масового обслуговування.

Теорія масового обслуговування – теорія, яка вивчає статистичні закономірності в масових операціях, що складаються з великого числа однотипних елементарних операцій. До них, зокрема належать: складання однотипних деталей на конвеєрі, видача інструментів, ремонт верстатів, робота телефонної станції, обслуговування покупців у магазині, в білетних касах, клієнтів у перукарнях, технічне обслуговування машин та обладнання тощо.

Синонімом теорії обслуговування є теорія черг. У системах масового обслуговування, в яких заявки на елементарні операції надходять у випадковій

моменти часу або обслуговуються протягом випадкових проміжків часу, поява черг – неминуче зло. За великої кількості каналів обслуговування (ремонтних бригад, продавців, телефоністок і т. п.) система зазнає збитків через можливі тривалі простоя каналів. За малої кількості каналів обслуговування, збитки системи спричиняють черги, які накопичуються.

Завдання теорії масового обслуговування – вивчити статистичні закономірності вхідного потоку заявок на елементарні операції та тривалість обслуговування заявок, а також дати оцінку якості систем обслуговування (з'ясувати пропускну здатність) за різних правил формування черг. Черги можуть бути організовані по-різному – з обмеженою та необмеженою довжиною черги, з обмеженим часом очікування та ін.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, які пов'язують задані умови роботи систем масового обслуговування (число каналів, їх продуктивність, характер потоку, заявок тощо) з показниками ефективності цих систем, що описують їх здатність справлятися з потоком заявок.

Під потоком подій розуміють послідовність однорідних подій, які настають одна за другою в якісь випадкові моменти часу (наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік відмов, потік покупців тощо).

Потік характеризується інтенсивністю (λ) – частотою появи події або середнім числом подій, які надходять в систему масового обслуговування за одиницю часу.

В ролі показників ефективності систем масового обслуговування можуть використовуватися такі:

- середнє (тут і далі середнє як математичне очікування відповідних випадкових величин) число заявок, які обслуговуються за одиницю часу;
- середня кількість заявок у черзі;
- середній час чекання на обслуговування;
- ймовірність відмови в обслуговуванні без чекання;
- ймовірність того, що число заявок в черзі перевищить певне значення тощо.

Метами теорії масового обслуговування можуть бути вирішені багато завдань дослідження процесів, що відбуваються в економіці. Так, в організації торгівлі ці методи дозволяють визначити оптимальну кількість торгових точок даного профілю, чисельність продавців, частоту завезення товарів та інші параметри. Іншим характерним прикладом систем масового обслуговування можуть служити склади або бази постачальницько-збутових організацій, і завдання теорії масового обслуговування в даному випадку зводиться до того, щоб встановити оптимальне співвідношення між числом надходять на базу вимог на обслуговування і числом обслуговуючих пристроїв, при якому сумарні витрати на обслуговування і збитки від простою транспорту були б мінімальними.

Теорія масового обслуговування може знайти застосування і при розрахунку площі складських приміщень, при цьому складська площа розглядається як обслуговуючий пристрій, а прибуття транспортних засобів під вивантаження - як вимога.

Моделі теорії масового обслуговування застосовуються також при вирішенні ряду завдань організації та нормування праці, інших соціально-економічних проблем.

2. Класифікація СМО.

Системи масового обслуговування можуть бути класифіковані за низкою ознак.

Залежно від умов очікування початку обслуговування розрізняють:

- СМО з втратами (відмовами);
- СМО з очікуванням.

У СМО з відмовами вимоги, що надходять в момент, коли всі канали обслуговування зайняті, отримують відмову і втрачаються. Класичним прикладом системи з відмовами є телефонна станція. Якщо абонент зайнятий, то вимога на з'єднання з ним отримує відмову і втрачається.

У СМО з очікуванням вимога, заставши всі обслуговуючі канали зайнятими, стає в чергу і чекає, поки не звільниться один з обслуговуючих каналів.

СМО, що допускають чергу, але з обмеженим числом вимог в ній, називаються *системами з обмеженою довжиною черги*.

СМО, що допускають чергу, але з обмеженим терміном перебування кожного вимоги в ній, називаються *системами з обмеженим часом очікування*.

За кількістю каналів обслуговування СМО поділяються на: *одноканальні та багатоканальні*.

За місцем знаходження джерела вимог СМО поділяються на:

- *Розімкнуті*, коли джерело вимоги знаходиться поза системою;
- *Замкнуті*, коли джерело знаходиться в самій системі.

Прикладом розімкнутої системи може служити ательє з ремонту телевізорів. Тут несправні телевізори – це джерело вимог на їх обслуговування, знаходяться поза системою, число вимог можна вважати необмеженим. До замкнутих СМО відноситься, наприклад, верстатний цех, в якому верстати є джерелом поломок, а отже, джерелом вимог на їх обслуговування, наприклад, бригадою наладчиків.

Можливі й інші ознаки класифікації СМО, наприклад, з *дисципліни обслуговування, однофазні та багатofазні СМО та ін.*

3. Класифікація методів і моделей СМО.

Методи і моделі, що застосовуються в теорії масового обслуговування, можна умовно розділити на аналітичні та імітаційні.

Аналітичні методи теорії масового обслуговування дозволяють отримати характеристики системи як деякі функції параметрів її функціонування. Завдяки цьому з'являється можливість проводити якісний аналіз впливу окремих факторів на ефективність роботи СМО.

Імітаційні методи засновані на моделюванні процесів масового обслуговування на ЕОМ і застосовуються, якщо неможливе застосування аналітичних моделей.

Далі будемо розглядати аналітичні методи моделювання СМО.

В даний час теоретично найбільш описані та зручні в практичних розрахунках методи вирішення таких завдань масового обслуговування, в яких вхідний потік вимог є *найпростішим* (пуассоновським).

Для найпростішого потоку частота надходження вимог в систему підкоряється закону Пуассона, тобто ймовірність надходження за час t рівно k вимог задається формулою:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (9.1)$$

Найпростіший потік володіє трьома основними властивостями: ординарності, стаціонарності і відсутністю післядії.

Ординарність потоку означає практичну неможливість одночасного надходження двох і більше вимог. Наприклад, досить малої є ймовірність того, що з групи верстатів, обслуговуваних бригадою ремонтників, одночасно вийдуть з ладу відразу кілька верстатів.

Стаціонарним називається потік, для якого математичне очікування числа вимог, що надходять у систему в одиницю часу (позначимо l), не змінюється в часі. Таким чином, імовірність надходження в систему певної кількості вимог протягом заданого проміжку часу Δt залежить від його величини і не залежить від початку його відліку на осі часу.

Відсутність післядії означає, що число вимог, що надійшли в систему до моменту t , не визначає того, скільки вимог надійде в систему за проміжок часу від t до $t + \Delta t$. Наприклад, якщо на ткацькому верстаті в даний момент стався обрив нитки і він усунутий ткалею, то це не визначає, відбудеться новий обрив на даному верстаті в наступний момент чи ні, тим більше це не впливає на ймовірність виникнення обриву на інших верстатах.

Важлива характеристика СМО - *час обслуговування* вимог у системі. Час обслуговування одного вимоги є, як правило, випадковою величиною і, отже, може бути описано законом розподілу. Найбільшого поширення в теорії і особливо в практичних додатках отримав *експонентний закон розподілу часу обслуговування*. Функція розподілу для цього закону має вигляд:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad (9.2)$$

4. Аналітичні моделі СМО. Приклад.

Розглянемо аналітичні моделі найбільш поширених СМО з очікуванням, тобто таких СМО, в яких вимоги, що надійшли в момент, коли всі обслуговуючі канали зайняті, ставляться в чергу і обслуговуються в міру звільнення каналів.

Загальна постановка задачі полягає в наступному. Система має n обслуговуючих каналів, кожен з яких може одночасно обслуговувати тільки одну вимогу.

У систему надходить найпростіший (пуассонівський) потік вимог з параметром l . Якщо в момент надходження чергової вимоги в системі на обслуговуванні вже знаходиться не менше n вимог (тобто всі канали зайняті), то це вимога стає в чергу і чекає початку обслуговування.

Час обслуговування кожної вимоги t - випадкова величина, яка підпорядковується експоненціальним законом розподілу з параметром m .

СМО з очікуванням можна розбити на дві великі групи: замкнуті і розімкнуті. До *замкнутих* відносяться системи, в яких надходить потік вимог виникає в самій системі та є обмеженим. Наприклад, майстер, завданням якого є налагодження верстатів в цеху, повинен періодично їх обслуговувати. У подібних системах загальне число циркулюючих вимог найчастіше постійна величина.

Якщо маємо нескінченне число вимог, то системи називаються *розімкнутими*. Прикладами подібних систем можуть служити магазини, каси вокзалів, портів та ін. Для цих систем потік вимог можна вважати необмеженим.

Зазначені особливості функціонування систем масового обслуговування накладають певні умови на використовуваний математичний апарат, який включає методи та моделі теорії випадкових процесів.

Питання для самостійного контролю знань

1. Записати загальну математичну модель лінійного програмування.
2. Як звести ЗЛП до канонічної форми?
3. Які є форми запису ЗЛП?
4. Дати геометричну інтерпретацію ЗЛП.
5. Який розв'язок ЗЛП називається допустимим, оптимальним?
6. Визначення області допустимих планів.
7. Який план називається опорним, який опорний план називається невивродженим?
8. Сформулювати основні аналітичні властивості розв'язків ЗЛП.
9. Суть алгоритму графічного методу.
10. Суть симплексного методу.
11. Суть методів Жордана-Гауса і методу штучного базису.
12. У чому сутність двоїстості у лінійному програмуванні?
13. Економічна інтерпретація двоїстих оцінок.
14. Означення симетричних і несиметричних взаємо спряжених задач лінійного програмування.
15. Сформулювати першу теорему двоїстості, дати її економічне тлумачення
16. Сформулювати другу теорему двоїстості та дати її економічне тлумачення.
17. Сформулювати третю теорему двоїстості та дати її економічне тлумачення
18. Правила побудови двоїстих задач.
19. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?
20. Економічна інтерпретація прямої і двоїстої задач.
21. Як визначити, що продукція є рентабельною (нерентабельною).
22. Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним).
23. Як впливає на оптимальний план введення додаткової змінної, додаткового обмеження?
24. Як визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів?
25. Як визначити план виробництва продукції та зміну доходу підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?
26. Як визначити рентабельність кожного виду продукції?
27. Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни на одиницю кожного виду продукції?
28. Дати економічну і математичну постановку транспортної задачі.
29. Відмінність ТЗ від загальної ЗЛП.
30. Необхідні і достатні умови існування розв'язку ТЗ.
31. Властивості опорних планів ТЗ.
32. Означення відкритої та закритої ТЗ.
33. Як перетворити відкриту ТЗ на закриту?
34. Методи побудови опорного плану ТЗ.
35. Означення "вивродженості" опорного плану ТЗ.
36. Характеристика методу потенціалів.
37. Умова оптимальності ТЗ.
38. Економічна і математична інтерпретація двох етапної ТЗ.

39. Яка задача ЛП називається цілочисловою?
40. Приклади задач цілочислового програмування.
41. Методи розв'язання задач цілочислового програмування.
42. Метод Гоморі.
43. Метод "віток і меж".
44. Сформулювати задачу дробово-лінійного програмування.
45. Метод розв'язування задач дробово-лінійного програмування.
46. Запис загальної задачі нелінійного програмування.
47. Функція Лагранжа.
48. Метод Лагранжа.
49. Яка функція називається опуклою (ввігнутою)?
50. Необхідні і достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.
51. Сформулювати задачу динамічного програмування.
52. Методи розв'язування задач динамічного програмування.
53. Приклади реальних динамічних задач.
54. Означення конфліктної ситуації.
55. Що таке гра, хід гри?
56. Визначення платіжної матриці.
57. Принцип міні-максу.
58. Означення макси-мінної та міні-максної стратегії.
59. Яка гра називається скінченою, парною?
60. Властивості оптимальних стратегій гравців.
61. Основна теорема теорії ігор.
62. Зведення гри до ЗЛП.
63. Сутність задач стохастичного програмування.
64. Означення одно етапної стохастичної задачі.
65. Означення двох етапної стохастичної задачі.
66. Методи розв'язування стохастичних задач.