ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра менеджменту та інформаційних технологій

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(назва навчальної дисципліни)

освітній рівень молодший бакалавр, бакалавр
(бакалавр, магістр)

спеціальність 071 «Облік і оподаткування», 051 «Економіка»,
072 «Фінанси банківська справа та страхування»,
281 «Публічне управління та адміністрування».
076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»
(шифр і назва спеціальності)

факультет Економічний
(назва факультету)

ІІ семестр

Розробник: Ірина Дебела, доцент кафедри менеджменту та інформаційних технологій, к.с-с.н, доцент

2020 – 2021 навчальний рік

ПЕРЕЛІК ТЕМ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ ІІ СЕМЕСТРУ

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
10	Тема 10. Функції багатьох змінних. Диференціальне числення функції декількох незалежних змінних	4
11	Тема 11. Диференціальні рівняння.	6
12	Тема 12. Числові та степеневі ряди.	2
13	Тема 13. Основні поняття теорії ймовірностей.	4
14	Тема 14. Одновимірні випадкові величини.	2
15	Тема 15. Статистичні розподіли вибірок та їх числові характеристики.	4
	Усього годин	22

Лекційне заняття №1-2 (4 год)

Тема 10. Функції багатьох змінних. Диференціальне числення функції декількох незалежних змінних

План лекційного заняття

1. Поняття функції багатьох змінних.
2. Неперервність та границя функції декількох змінних.
3. Частинні похідні першого порядку функції двох змінних.
4. Повний диференціал функції.
5. Похідна функції за напрямком.
6. Градієнт.
7. Екстремуми функцій двох змінних. Абсолютний і умовний екстремум функції двох змінних.

1. *Поняття функції декількох змінних.*

У багатьох задачах геометрії, фізики, природознавства і т.п. приходиться мати справу з функціями двох, трьох і більше змінних.

Приклад 1. Площа трикутника $S = xy/2$ з основою x і висотою y є функція двох змінних x та y, що визначена в області $x \geq 0$ та $y \geq 0$.

Приклад 2. Розв'язуючи рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ відносно z, при $z \geq 0$ отримаємо $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тут апліката z цієї точки верхньої напівсфери є функція двох змінних x та y - абциси і ординати цієї точки. Дана функція визначена в колі $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Приклад 3. Величина сили тяжіння F двох матеріальних точок масою m і m_1, що займають положення $M(x, y, z)$ та $M_1(x_1, y_1, z_1)$ відповідно, у відповідності до закона Ньютона, дорівнює $F = k\dfrac{m \cdot m_1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, де k - деяка константа (стала тяжіння).

Тобто, F є функція шести змінних x, y, z, x_1, y_1, z_1.

Зауваження: *будь-яка функція від декількох змінних стає функцією від меншої кількості змінних, якщо частину змінних зафіксувати, тобто надати їм постійного значення.*

Наприклад, якщо маємо функцію $u = f(x, y, z)$ від трьох змінних x, y, z, то припустивши що z приймає постійне значення, $z = c$, то отримаємо функцію двох змінних x та y: $u = f(x, y, c)$. Далі, припустивши, що дві змінні y, z зберігають незмінне значення $y = b, z = c$, отримаємо функцію $u = f(x, b, c)$ однієї змінної x.

Таким чином, у різних питаннях, за бажанням, функцію $u = f(x, y, z)$ трьох змінних можна розглядати як функцію однієї, двох, трьох змінних.

Строго говорячи, *будь-яка фізична залежність дає нам приклад функції багатьох змінних. Але вивчаючи цю залежність ігнорують частину несуттєвих факторів і тим самим обмежують число незалежних змінних, приводячи його до мінімуму.*

Геометричним зображенням (графіком) функції двох змінних $z = f(x, y)$ являється, у загальному випадку, поверхня в просторі $Oxyz$.

Справді, нехай задана функція визначена в деякій області w площини Oxy. Тоді кожній парі значень x та y із області w відповідає, за формулою $z = f(x, y)$, деяке число z, тобто кожній точці $N(x, y, 0)$ області w ставиться у відповідність точка $M(x,y,z)$, що належить графіку функції і є кінцем перпендикуляра NM до площини Oxy.

Якщо точка N займає усі можливі положення в області w, то пов'язана з нею точка M, у загальному випадку, опише в просторі деяку поверхню P, що «нависає» над областтю w. Наочно можна представити собі, що P є «дах» пробудований над площадкою w.

Поверхня Р є геометричне зображення функції $z = f(x, y)$, рис.1.

Геометричне зображення функції трьох і більшої кількості змінних не має простого геометричного змісту.

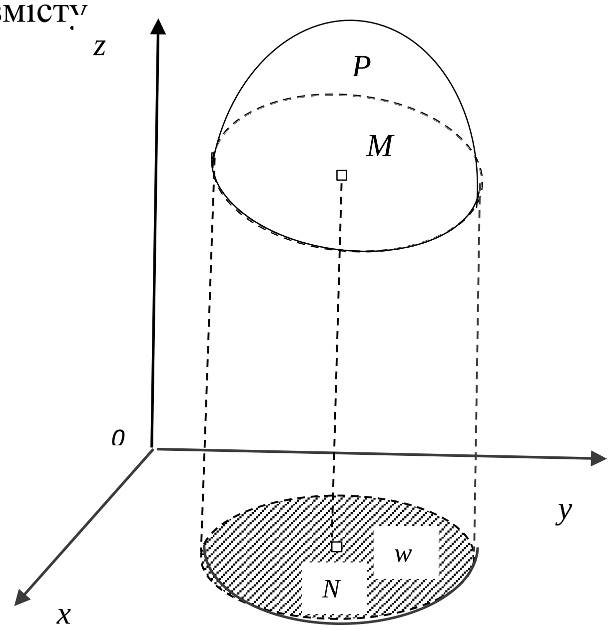


Рис1.

У деяких випадках можна отримати нагляднe геометричне представлення про характер зміни функції, розглядаючи її *лінії рівня* (або *поверхні рівня*), тобто лінії (або поверхні), де задана функція зберігає постійне значення.

<u>*Означення* 1</u>. *Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина усіх точок площини Oxy, для яких задана функція приймає одне і те ж саме значення (ізокрива).*

Таким чином, рівняння лінії рівня для функції $z = f(x, y)$ є $f(x, y)= C$, де C – деяка постійна величина.

<u>*Означення* 2</u>. *Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, c)$ називається множина усіх точок простору $Oxyz$, для яких дана функція приймає одне і те ж саме значення (ізоповерхні).*

Лінії і поверхні рівня постійно зустрічаються у фізичних задачах та задачах геодезії земної кулі. Наприклад, з'єднавши на карті поверхні землі точки з однаковим середньодобовим тиском або однаковою середньодобовою температурою, отримаємо відповідно ізобари та ізотерми, що використовуються як *вхідні данні прогнозу погоди*.

2. <u>*Неперевність*</u>.

Нехай $z = f(x, y)$ є функція двох змінних x та y, сукупність значень цих точок (x, y) будемо називати *точкою*, таким чином, z є *функція* «*точки*».

Надамо зміній x приріст Δx , залишивши значення y незмінним. Тоді різниця

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \qquad (1)$$

називається *частинним приростом функції z за змінною x.* Тобто, можна записати

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \qquad (2)$$

Аналогічно, якщо лише змінна y отримує приріст Δy, а змінна x лишається незмінною, то різниця

$$\Delta_y f(x, y) = f(x; y + \Delta y) - f(x; y) \qquad (3)$$

називається *частинним приростом функції z за змінною y*.

Якщо обидві змінні x та y отримують відповідні прирости Δx та Δy, то відповідний приріст функції $f(x, y)$

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \qquad (4)$$

називається *повним приростом функції f(x, y)* (або просто *приростом функції*).

Із формул (2). (3). (4) слідує, що *повний приріст функції, у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних приростів цієї функції.*

Аналогічно визначаються і записуються частинні та повні прирости функції кількість змінних яких більше двох.

Означення 3. Функція f(x, y) називається неперервною в точці (x_0, y_0)*, якщо:*

1) *функція визначена в даній точці і ця точка є граничною для області існування функції;*

2) *нескінченно малим приростам* $\Delta x_0 = x - x_0$ *і* $\Delta y_0 = y - y_0$ *змінних x та y відповідає нескінченно малий приріст* $\Delta f(x_0, y_0)$ *функції f(x, y), тобто виконується умова*

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \Delta f(x_0 y_0) = \lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) \right] = 0. \qquad (5)$$

Іншими словами, *функція f(x, y) є неперервною в точці* (x_0, y_0)*, якщо вона визначена як у самій цій точці так і в околі її, причому, при досить малих за абсолютною величиною приростах аргументів у цій точці* Δx_0 *та* Δy_0 *має місце рівність* (5).

Означення 4. Функція f(x, y) називається неперервною в даній області, якщо ця функція неперервна в кожній точці цієї області, тобто, якщо для кожної точки (x, y) області виконується рівність (границя приросту функції рівна нулю):

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \right] = 0. \qquad (6)$$

Причому, тут, як завжди, припускаємо, що зміщена точка $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ *належить даній області і функція* $f(x + \Delta x; y + \Delta y)$ *існує*.

Таким чином, можна говорити, *що функція неперервна тоді і лише тоді, коли нескінченно малим приростам її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції.*

3. *Частинні похідні першого порядку функції двох змінних.*

Нехай задана функція $z = f(x; y)$, визначена в деякому околі точки $(x; y)$, а також у самій точці $(x; y)$. Розглянемо відношення частинного приросту (1)

$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$, функції z за змінною x, до приросту аргументу Δx:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x;\, y) - f(x;y)}{\Delta x},$$

тоді, *границя цього відношення при Δx→0, якщо така існує, називається частинною похідною (першого порядку) функції* $z = f(x;y)$ *по x* і позначається так: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x^{/}(x,y)$.

Тобто, $$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;\, y) - f(x;y)}{\Delta x}$$

Аналогічно визначається частинна похідна функції $z = f(x;y)$ по y:

$$f_y^{/}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;\, y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$$

<u>Означення</u> 5. *Частинною похідною функції від декількох змінних за однією з цих змінних називається границя відношення відповідного частинного приросту функції до приросту незалежної змінної що розглядається, за умови що останнє наближається до нуля.*

Можна дати означення частинних похідних і більш стисло.

<u>*Означення частинних похідних*</u>: $f_x'(x;y)$ - <u>це похідна по x функції *f(x,y)* при фіксованому y, а $f_y'(x;y)$ - це похідна по y функції *f(x,y)* при фіксованому x.</u>

Отже, *частинні похідні функції знаходять за звичайними правилами диференціювання; треба тільки при диференціюванні по х змінну у вважати сталою величиною, а при диференціюванні по у вважати сталою величиною х.*

<u>Приклад.</u> Обчислити частинні похідні функції двох змінних.

а) $f(x;y) = x^2y^3$.

$f_x'(x;y) = (x^2y^3)_x' = y^3(x^2)_x' = y^3\cdot 2x = 2xy^3$, $f_y'(x;y) = (x^2y^3)_y' = x^3(y^2)_y' = x^3\cdot 3y^2 = 3x^2y^2$.

б) $z = x^2y + x\sin xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + x\sin xy) = y\cdot 2x + \frac{\partial}{\partial x}(x\sin xy) = 2xy + \sin xy + xy\cos xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + x\sin xy) = x^2 + x^2\cos xy.$$

Частинні похідні $f_x'(x;y)$ і $f_y'(x;y)$ функції *f(x,y)*, якщо вони існують в кожній точці (*x*,*y*) деякої області, самі є функціями двох змінних. Отже, для них також можна розглядати частинні похідні.

<u>*Частинні похідні від частинних похідних*</u> $\frac{\partial f}{\partial x}$ *та* $\frac{\partial f}{\partial y}$ <u>*називаються частинними похідними другого порядку функції f(x,y).*</u>

Очевидно, функція *f(x,y)* двох змінних має *чотири частинні похідні другого порядку*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Похідні $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, і $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, називаються частинними похідними другого порядку по x і по y відповідно і позначаються $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *Частинні похідні* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ *і* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ *називаються мішаними похідними другого порядку*.

Можна довести, що якщо мішані похідні неперервні, то вони рівні між собою. У цьому змішані похідні позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

4. *Повний диференціал функції*.

Нехай $z = f(x;y)$ є функція від двох незалежних змінних - аргументів x та y. Повний приріст цієї функції $\Delta z = f(x+\Delta x;\, y+\Delta y) - f(x;y)$ представляє собою різницю значень цієї функції в точках $M(x,y)$ та $M'(x+\Delta x;\, y+\Delta y)$. Позначимо через ρ відстань між цими точками:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ .$$

Якщо $\rho \to 0$ можна підібрати не залежні від приростів аргументів Δx та Δy величини A і B так, що вираз

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y \tag{7}$$

буде відрізнятися від повного приросту Δz функції на величину вищого порядку малості порівняно з ρ, цей *вираз* (7) *називається головною лінійною частиною повного приросту функції.*

У цьому випадку отримуємо рівність:

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \gamma\rho, \tag{8}$$

де $\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$ (або, теж саме що $\gamma \to 0$ при $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$).

Вираз (8) можна записати по іншому:

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \tag{8'}$$

де $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$.

Тепер, узагальнюючи означення диференціалу функції однієї змінної на випадок функції двох незалежних змінних, можна дати наступні означення.

Означення 6. Під диференціалом незалежної змінної розуміють приріст цієї змінної, тобто $dx = \Delta x$ *та* $dy = \Delta y$.

Означення 7. Повним диференціалом функції (або просто диференціалом функції) $z = f(x;y)$ *двох незалежних змінних x та y називається головна лінійна частина повного приросту цієї функції.*

Дане означення справджується і для функції будь-якої кількості змінних.

Позначивши диференціал функції буквою d, можна записати:

$$dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y\ , \tag{9}$$

де A та B не залежать від Δx та Δy і, крім того, $\Delta z - dz = \alpha\,\Delta x + \beta\Delta y$, де α і β – нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Функція що має диференціал в даній області називається диференційованою в цій області.

Якщо функція z диференційована, то для повного приросту Δz функції має місце формула (8) або (8').

Можна довести що, якщо функція *z = f(x,y)* має частинні похідні $f'_x(x;y)$ і $f'_y(x;y)$, то істиною є рівність: $\Delta_x f(x;y) = f'_x(x;y)\Delta x + \alpha\Delta x$, $\Delta_y f(x;y) = f'_y(x;y)\Delta y + \beta\Delta y$, де $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Добутки $f'_x(x;y)\Delta x$ *і* $f'_y(x;y)\Delta y$ *називаються частинними диференціалами функції f(x,y) по x і по y відповідно.*

Якщо функція z = f(x,y) має неперервні частинні похідні $f'_x(x;y)$ *і* $f'_y(x;y)$*, то сума частинних диференціалів*

$$df(x;y) = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y \tag{10}$$

називається повним диференціалом функції $z = f(x;y)$ *в точці* $(x;y)$.

Має місце теорема.

Теорема.1. *Диференціал функції дорівнює сумі добутків її частинних похідних на диференціали відповідних незалежних змінних.*

Наслідок. Дана функція має єдиний диференціал.

Прирости незалежних змінних Δx і Δy зазвичай позначають *dx* і *dy*. Тоді

$$df(x;y) = f'_x(x;y)dx + f'_y(x;y)dy \tag{11}$$

або

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{12}$$

Теорема 2. (*достатня умова диференційованості функції*). *Якщо функція z = f(x,y) має неперервні частинні похідні в даній області, то ця функція диференційована в цій області і її диференціал визначається формулою* (12).

Приклад. Знайти повний диференціал функції $z = x\sin xy$. обчислити значення диференціалу в точках (0,0); (1,0); (0,1); (1,1).

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin xy + x\cos xy \cdot y = \sin xy + xy\cos xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = x^2\cos xy.$$

Запишемо повний диференціал заданої функції в довільній точці області визначення $(x;y)$: $dz = (\sin xy + xy\cos xy)dx + (x^2\cos xy)dy$.

Для обчислення значення диференціалу функції в заданій точці, замість *x* і *y* підставляємо координати цієї точки.

$$dz(0;0) = 0\cdot dx + 0\cdot dy = 0,$$
$$dz(1;0) = 0\cdot dx + 1\cdot dy = dy,$$
$$dz(0;1) = 0\cdot dx + 0\cdot dy = 0,$$
$$dz(1;1) = (\sin 1 + \cos 1)dx + \cos 1\cdot dy.$$

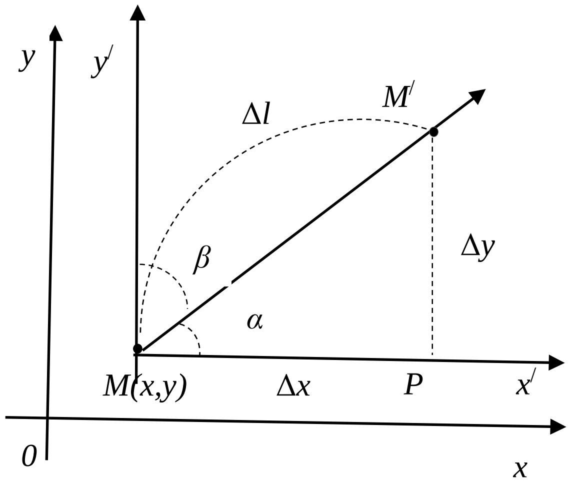
5. *Похідна функції за напрямком.*

Нехай *u = f(x,y)* – функція, визначена в деякій області *w* . Розглянемо деяку точку *M(x,y)* з області *w* і деякий напрямок *l*, що визначається напрямними косинусами *Cosα* і *Cosβ = Sinα* (тобто *Cosα* і *Cosβ* – косинуси кутів, утворених променем *l* з додатнім напрямком осей координат *Ox* і *Oy)*.

Переміщення в даному напрямку *l* точки *M(x,y*) в точку $M'(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ що належить в тій же області *w* надає функції *u = f(x, y)* приросту

$$\Delta_l u = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x, y),$$

що називається приростом функції в даному напрямку l.



Якщо відрізок $|MM^{/}| = \Delta l$ є величина переміщення точки M, то з прямокутного трикутника (рис 2) $MPM^{/}$ отримуємо:

$\Delta x = \Delta l Cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l Cos\beta$, і відповідно

$\Delta_l u = f(x+\Delta l Cos\alpha; y+\Delta l Cos\beta) - f(x, y)$

Рис. 2.

<u>Означення 8</u>. *Під похідною функції u за даним напрямком l розуміють границю відношення приросту функції в цьому напрямку до величини переміщення за умови, що величина переміщення наближається до нуля, тобто:*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} \qquad (13)$$

Тоді, *частинні похідні* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *та* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *можна розглядати як похідні функції u в додатних напрямках осей координат Ox* і *Oy*.

Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ визначає *швидкість зміни функції в напрямку l*.

Припускаючи що дана функція $u = f(x,y)$ диференційована, використовуючи означення повного диференціала, в граничному переході формули (13) при $\Delta l \to 0$ тобто при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, отримуємо *формулу для похідної функції в даному напрямку*:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} Cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} Cos\beta, \qquad (14)$$

де *Cosβ = Sinα – напрямні косинуси.*

<u>Приклад.</u> Знайти приріст функції $u = x^2 + xy - y^2$ при переміщенні точки $M(1, 2)$ в напрямку l, що утворює кут $\alpha = arctg\frac{3}{4}$ із додатнім напрямком осі Ox, на відстань $\Delta l = 0{,}1$. Чому дорівнює похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точці M?

Маємо $tg\alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Звідси $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + tg^2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$, таким чином, $Cos\alpha = \frac{1}{Sec\alpha} = \frac{4}{5}$; $Sin\alpha = tg\alpha \cdot Cos\alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} = Cos\beta$.

Використовуючи отримані напрямні косинуси напрямку l, знаходимо для точки M приріст координат

$$\Delta x = \Delta l\ Cos\alpha = 0{,}1\cdot\frac{4}{5} = 0{,}08 \quad \text{і} \qquad \Delta y = \Delta l\ Cos\beta = 0{,}1\cdot\frac{3}{5} = 0{,}06.$$

Таким чином, переміщена точка M_1 має координати

$$x_1 = x + \Delta x = 1 + 0{,}08 = 1{,}08 \qquad \text{і} \qquad y_1 = y + \Delta y = 2 + 0{,}06 = 2{,}06.$$

Звідси, шуканий приріст функції u дорівнює:

$$\Delta_l\, u = (1{,}08^2 + 2\cdot 1{,}08\cdot 2{,}06 - 2{,}06^2) - (1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 - 2^2) = 1{,}3724 - 1 - 0{,}3724.$$

За умовою задачі $\Delta l = 0{,}1$, тоді $\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l} = \dfrac{0{,}3724}{0{,}1} \approx 3{,}7 = 0{,}08.$

Обчислимо значення похідної за напрямком в точці $M(1, 2)$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y;\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2y$; тому $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 6;\quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_M = -2$.

Таким чином маємо:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \cdot Cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M Cos\beta = 6\cdot\frac{4}{5} + (-2)\cdot\frac{3}{5} = 3{,}6\,.$$

<u>Зауваження.</u> Для функції *u=f(x,y,z)* її похідна за напрямком *l*(*Cosα;Cosβ;Cosγ)* *дорівнює* $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}Cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}Cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}Cos\gamma$.

6. *<u>Градієнт.</u>*

<u>*Означення* 9</u>. *Говорять, що в даній області w (множині) визначено скалярне поле, якщо для кожної точки М з області w задано деяке число – скаляр.*

$$u = f(M). \tag{15}$$

Таким чином, *u визначають як числову функцію точки*.

Прикладами скалярних полів являються: температурне поле, тобто розподіл температур в нагрітому тілі; розподіл концентрації речовин у розчинах; і т.п.

Якщо область *w* розміщена на площині *Oxy*, то будь-яка її точка *M* визначається двома координатами (*x, y*), і *плоске скалярне поле* може бути записане у вигляді

$$u = f(x, y), \qquad ((x, y) \in w) \tag{16}$$

Аналогічно для області *w*, що знаходиться в просторі *Oxyz*, маємо

$$u = f(x, y, z), \qquad ((x, y, z) \in w) \tag{17}$$

Таким чином, п<u>оняття *скалярного поля* представляє собою *фізичну трактовку функції кількох змінних*.</u>

<u>*Означення* 10.</u> *Говорять, що в даній області w визначено векторне поле, якщо для кожної точки М з області w задано деякий вектор*

$$a = F(M) \tag{18}$$

Прикладами векторних полів являються: поле швидкостей в даний момент часу точок потоку рідини; силове поле, утворене деяким центром тяжіння; і т.п.

Для випадку *плоского векторного поля* ((*x, y*) ∈ *w*) маємо вектор-функцію

$$a = F(x, y),\ ((x, y) \in w). \tag{19}$$

Звідси, перейшовши до координат вектора *a*, отримаємо

$$a_x = F_1(x, y), \qquad a_y = F_2(x, y). \tag{20}$$

Таким чином, задання плоского векторного поля (19) рівносильно визначенню двох скалярних полів (20).

Аналогічно, для випадку *просторового векторного поля* (*w* ∈ *Oxyz*), отримуємо

$$a = F(x, y, z). \tag{21}$$

або, в координатах,

$$a_x = F_1(x, y, z), \quad a_y = F_2(x, y, z), \quad a_z = F_3(x, y, z), \tag{22}$$

тобто, <u>векторне поле (21) еквівалентне трьом скалярним полям</u> (22).

Множина усіх точок M, для яких скалярне поле (15) зберігає постійне значення (f(M) = const), називається поверхнею (або лінією) рівня скалярного поля (ізоповерхні).

<u>*Означення* 11</u>. *Нехай u = f(x, y), - диференційоване плоске скалярне поле (тобто, f(x,y) диференційована функція двох змінних), тоді вектор*

$$grad\ u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \tag{23}$$

називається градієнтом поля, або точніше

$$grad\ u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{24}$$

де *i, j* – одиничні вектори-орти осей координат *Ox, Oy*.

Аналогічно, *для просторового скалярного поля u = f(x, y, z) його градієнт є вектор*

$$grad\ u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \tag{25}$$

або $$u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z} \tag{26}$$.

Таким чином, *скалярне поле породжує векторне поле – поле градієнтів.*

<u>*Означення* 12</u>. *Похідною скалярного поля u = f(x, y, z) в даному напрямку l є вираз*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}Cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}Cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}Cos\gamma, \tag{27}$$

де $Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора l

<u>*Похідна* $\frac{\partial u}{\partial l}$ *- є швидкість зміни поля в заданому напрямку.*</u>

<u>*Теорема* 3</u>. *Похідна скалярного поля в даному напрямку дорівнює проекції градієнта поля на даний напрямок (у відповідній точці). Тобто,*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = np_l grad\ u. \tag{28}$$

Одиничний вектор напрямку вектора l позначають l_0 і записують так

$$l_0 = \{Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma\}.$$

<u>*Наслідок.*</u> *Градієнт скалярного поля в даній точці за величиною і напрямком дорівнює максимальній швидкості зміни поля у цій точці і визначається рівністю*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{29}$$

<u>Зауваження:</u> градієнт поля не залежить від вибору прямокутної системи координат *Oxyz*.

<u>Приклад</u>. Знайти величину і напрямок градієнта поля $u = \frac{x}{y} + z^2$ в точці $M_0(2,1,0)$.

Знайдемо значення частинних похідних в заданій точці:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(\frac{1}{y}\right)_{M_0} = 1; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)_{M_0} = -2; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = (2z)_{M_0} = 0.$$

Таким чином, $grad\ u(M_0) = i - 2j$.

Звідси за формулою (29) і (27) маємо: $|grad\ u(M_0)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{5}$ і

$$Cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}};\quad Cos\chi = -\frac{2}{\sqrt{5}};\quad Cos\gamma = 0,\ l_0 = \{Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}; 0\right\}.$$

Точка M_0 в якій $grad\ u(M_0) = 0$ називається особливою для скалярного поля, у протилежному випадку точка M_0 називається неособливою (звичайною).

Теорема 4. *У кожній неособливій точці плоского скалярного поля градієнт поля направлений по нормалі до лінії рівня, що проходить через цю точку, в сторону зростання поля.*

7. *Екстремуми функцій двох змінних. Абсолютний і умовний екстремум функції двох змінних*

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякій області точки (x_0,y_0).

Означення 13. Ф*ункція $z=f(x;y)$ має в точці (x_0,y_0) строгий максимум (мінімум), якщо $f(x;y)<f(x_0;y_0)$ ($f(x;y)>f(x_0;y_0)$) для всіх точок $(x;y)$, достатньо близьких до x_0, y_0. Точка (x_0,y_0) – точка максимуму (мінімуму).*

Максимум і мінімум функції називають екстремумами функціями.

Теорема 5 (*необхідні умови екстремуму*).

Якщо диференційована функція $z=f(x;y)$ має екстремум в точці $P_0(x_0,y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, або не існують.

Точки в яких частинні похідні даної функції рівні нулю, або не існують називають критичними (або стаціонарними) точками.

Достатні умови існування екстремуму.

Нехай функція $z=f(x;y)$ неперервна в своїй області визначення $D(f)$ разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядків і точка $P_0(x_0,y_0)$ є критичною. Тоді обчислимо в точці P_0 числове значення похідних другого порядку і позначимо:

$$A = (z''_{xx})_{P(x_0,y_0)},\quad B = (z''_{xy})_{P(x_0,y_0)},\quad C = (z''_{yy})_{P(x_0,y_0)},\qquad \Delta H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A\cdot C - B^2,$$

тоді:

1) *якщо $\Delta>0$, то функція має в точці $P_0(x_0,y_0)$ екстремум: максимум якщо $A<0$ і мінімум якщо $A>0$.*
2) *якщо $\Delta<0$, то в точці $P_0(x_0,y_0)$ екстремум відсутній.*
3) *якщо $\Delta=0$, то висновок про існування або відсутність екстремуму зробити не можна, необхідним є додаткове дослідження.*

Примітка: ΔH – називають визначником матриці Гессе, або гессіаном.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$.

1) Область визначення функції D(z) є [-∞; +∞].
2) Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10$$

3) Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0, \\ x - 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

4) Роз'яжемо дану систему рівнять і знайдемо стаціонарні точки: x=2, y=3, тобто, стаціонарна точка єдина $P_0(2, 3)$.

5) Знайдемо частинні похідні другого порядку і їх значення у стаціонарній точці:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = -4.$$

Як бачимо, частинні похідні другого порядку сталі величини в будь-який точці, а значить і в стаціонарній точці $P_0(2;3)$.

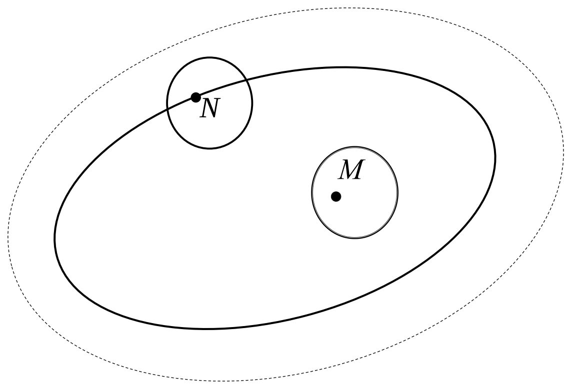
Тому A=-2, B=1, C=-4. $\Delta H = AC - B^2$=(-2).(-4) - 1= 7 > 0.

Таким чином, в точці P_0 (2;3) функція має максимум. Значення функції в точці максимуму рівне:

$$z_{\max} = z(2;3) = 2 \cdot 3 - 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 2 + 10 \cdot 3 - 8 = 8.$$

Абсолютний екстремум функції двох змінних.

Розглянемо деяку множину G точок площини, або простору.



Точка *M називається внутрішньою точкою для множини G, якщо вона належить цій множині разом з деяким її околом* (рис.12.3). Точка *N називається граничною для множини G, якщо у будь-якому її повному околі існують точки, які як належать області G, так і не належать їй.*

Рис. 3.

Сама N точка не обов'язково належить множині G.

Сукупність усіх граничних точок множини G називається *границею області G*.

Означення 14. *Множину G будемо називати областю, якщо усі його точки – внутрішні.*

Означення 15. *Найбільше або найменше значення функції в даній області називається абсолютним екстремумом функції (відповідно абсолютним максимумом або мінімумом) у цій області.*

Має місце *теорема Вейєрштрассе*: *функція неперервна в обмеженій і замкненій області, досягає у цій області свого найменшого і найбільшого значення.*

*<u>Теорема</u>.*6. *Абсолютний екстремум функції в даній області досягається або в критичній точці функції, що належить цій області, або в граничній точці області.*

<u>Приклад.</u> знайти абсолютний екстремум функції $z = x{\cdot}y$ в трикутній області S з вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,2)$. Рис. 4.

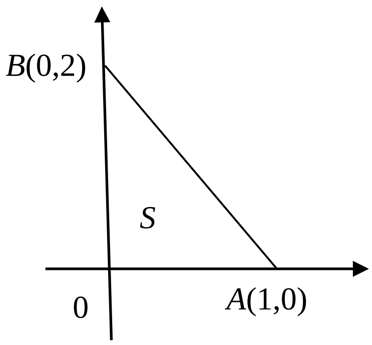


Рис. 4.

Маємо, $\frac{\partial z}{\partial x} = y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x$. Звідси знаходимо критичну точку $O(0,0)$, що належить області S. Вивчимо поведінку функції z на границі області $OABO$.

На відрізку OA : $y = 0$; $0 \le x \le 1$, тому $z = 0$.

На відрізку OB: $x = 0$; $0 \le y \le 1$, тому $z = 0$.

Відрізок AB заданий рівнянням $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow y = 2 - 2x$, $(0 \le x \le 1)$. Звідси $z=xy=$ 12–2x^2, отримали функцію однієї змінної, тоді: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 4x = 0 \Rightarrow; x = \frac{1}{2}$ і відповідно $y =$ $2 - 2{\cdot}1 = 1$.

Точка (1/2, 1) – критична так як $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4 < 0$, то в точці з координатами (1/2, 1) функція z досягає свого найбільшого значення на відрізку AB, а саме:

$z(1/2, 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Таким чином, можна зробити висновок: функція z в області S має найменше значення $z = 0$ в точках відрізків OA та OB, що є частинами границі області S. Найбільшого значення $z = \frac{1}{2}$ в заданій області функція досягає в точці (1/2, 1), що належить відрізку AB границі області S.

<u>Умовний екстремум функції двох змінних.</u>

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$, стосовно якої ставиться вимога знайти точки її екстремумів за умови, що виконується рівність $\varphi(x, y) = 0$.

Для визначення умовного екстремуму функцій багатьох змінних розроблено кілька методів, з яких ми розглянемо один під назвою *метод множників Лагранжа*.

Задача умовного екстремуму зводиться до знаходження звичайного екстремуму функції, що є комбінацією заданої функції z та рівняння – умови.

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

де F – функція Лагранжа; λ - множник Лагранжа.

Стаціонарні точки знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x + \lambda'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Характер умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: *якщо у стаціонарній точці* $d^2F > 0$ ($d^2F < 0$) *, то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).*

<u>Приклад.</u> Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y - 1 = 0$.

Функція Лагранжа буде мати вигляд $L = (x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

Запишемо необхідні умови існування екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0.$$

Звідки отримуємо:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Критична точка буде мати координати: $M = (1/2; 1/2)$, λ = -1

Знайдемо похідні функції Лагранжа $L = (x; y) = x^2 + y^2 - (x + y - 1)$.

$L'_x = 2x - 1$, $L'_y = 2y - 1$,

$L''_{xx} = 2 = A$, $L''_{yy} = 2 = C$, $L''_{xy} = 0 = B$,

Тоді визначник матриці Гессе $\Delta = AC - B_2 = 4 > 0$, А > 0, тобто, існує *min* функції: $\min z = z(1/2; 1/2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$.

<u>Питання для самостійного контролю знань.</u>

1. Дайте означення функції двох незалежних змінних.
2. Що називають областю визначення функції двох змінних? Геометричне зображення області визначення функції $z = f(x, y)$.
4. Яка функція називається неперервною в очці, області?
5. Що називають лінією рівня функції $z = f(x, y)$, ізоповерхнею?
6. Дайте визначення частинних похідних функції двох змінних.
7. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?
8. Приведіть необхідні і достатні умови існування екстремуму функції двох змінних.
9. Що називають локальним, абсолютним і умовним екстремумом функції двох змінних.
10. Дайте означення скалярного і векторного полів.
11. Дайте означення похідної функції (скалярного поля) за напрямком вектора *l*.
12. Дайте означення градієнта функції. Приведіть формулу для обчислення абсолютної величини градієнта скалярного поля.

Лекційне заняття №3-5 (6 год)

Тема 11. Функції багатьох змінних. Диференціальне числення функції декількох незалежних змінних

План лекційного заняття

1. Поняття диференціального рівняння.
2. Диференціальне рівняння першого порядку.
3. Рівняння першого порядку з розділеними змінними.
4. Лінійні диференційні рівняння першого порядку.
5. Диференціальні рівняння другого порядку.
6. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

1. *Поняття диференціального рівняння.*

Диференційними рівняннями називають рівняння *що пов'язують між собою незалежну змінну x, шукану функцію y та її похідні різних порядків по x.*

Порядок старшої похідної, що входить в дане рівняння, називають *порядком диференційного рівняння.*

Загальний вигляд диференційного рівняння наступний:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

У окремих випадках у це рівняння можуть і не входити x, y та окремі похідні порядку нижче ніж n.

Наприклад, рівняння: $y' + \frac{2}{x} y = Sin\, x$; $y'' + 4y' + 13y = 0$; $y''' + yy' = 0$ мають відповідно порядок: перший, другий і третій.

Диференціальне рівняння (1) називають *лінійним*, якщо ліва частина його є многочлен першого спепеня відносно невідомої функції y та її похідних $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ і не містить їх добутків, тобто це рівняння виду:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{2}$$

Тут функції $a_0(x), a_1(x), a_n(x)$, зазвичай визначені та неперервні в деякому загальному інтервалі, називаються *коефіцієнтами лінійного рівняння*, а функція *f(x)* – *правою частиною або вільним членом його.*

Якщо права частина *f(x)* рівняння (2) тотожно рівна нулеві, то рівняння називається *однорідним* (або без правої частини); у протилежному випадку рівняння (2) називають *неоднорідним* (або з правою частиною).

Будь яка функція *y = φ(x)*, підстановка якої в рівняння (1), перетворює його на тотожність називається *розв'язком* цього рівняння.

Розв'язати, або про інтегрувати, дане диференціальне рівняння – значить знайти його розв'язок в заданій області.

Графік розв'язку називають інтегральною кривою.

Основна задача інтегрального числення – знаходження функції *y*, похідна якої дорівнює даній неперервній функції *f(x)*, - зводиться до найпростішого диференційного рівняння $y' = f(x)$, загальний розв'язок якого має вигляд:

$$y = \int f(x)dx + C, \tag{3}$$

де C – довільна постійна (стала) величина; під інтегралом розуміють одну з множини первісних функції $f(x)$.

Вибираючи довільним чином сталу C, за умови неперервності функції $f(x)$ можна отримати будь який розв'язок цього диференційного рівняння.

При інтегрування диференційних рівнянь вищих порядків можливо отримати декілька довільних сталих.

Означення 1. *Загальним розв'язком диференційного рівняння* (1) *називається такий розв'язок його:* $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, *що містить стільки незалежних сталих* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *який порядок цього рівняння.*

Примітка. Функція φ вважається неперервно диференційованою за всіма своїми аргументами достатню кількість разів.

Довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ називають *незалежними* якщо, якщо їх загальна кількість що входить до функції φ , не може бути зменшена шляхом введенням інших довільних сталих, неперервно залежних від даних.

Якщо загальний розв'язок заданий у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$,
то він називається *загальним інтегралом.*

Означення 2. *Будь-який роз'язок диференційного рівняння, що отриманий із загального розв'язку, якщо надати певних значень довільним сталим, що входять до нього, називається частинним розв'язком цього диференційного рівняння.*

Правильність отриманого розв'язку диференційного рівняння перевіряють підстановкою функції – розв'язку в задане рівняння.

2. *Диференціальні рівняння першого порядку.*

Загальний вигляд диференційного рівняння першого порядку наступний: $F(x, y, y') = 0$

У найпростіших випадках це рівняння може бути роз'язане відносно похідної y:

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

Загальний розв'язок рівняння (13.4) має вигляд:

$$y = \varphi(x, C). \tag{5}$$

Геометрично загальний розв'язок (5) представляє собою *сімейство інтегральних кривих*, тобто сукупність ліній, що відповідають різним значенням сталої C.

Інтегральні криві мають властивість: в кожній їх точці $M(x, y)$ нахил дотичної до них задовольняє умову $tg\, \alpha = f(x, y)$.

Якщо задати точку $M_0(x_0, y_0)$, через яку повинна пройти інтегральна крива, то тим самим із нескінченного сімейства інтегральних кривих, в найпростішому випадку, *виділяється одна обрана інтегральна крива*, що відповідає частинному розв'язку даного диференційного рівняння.

Аналітично ця вимога зводиться до так званої *початкової умови*:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 .$$

Якщо відомий загальний розв'язок (5), то маємо: $y_0 = \varphi(x_0, C)$.

Із цієї умови можна визначити довільну сталу C і, таким чином, знайти відповідний частинний розв'язок. У цьому і є зміст *задачі Коші*.

Задача Коші. *Знайти розв'язок* $y = \varphi(x)$ *диференційного рівняння* (4), *що задовольняє задану початкову умову:* $y_0 = \varphi(x_0)$, *тобто приймаючий* при $x = x_0$ задане *значення* $y = y_0$.

Геометрично задача Коші сформулюється так: знайти інтегральну криву диференційного рівняння (4)*, що проходить через задану точку* $M_0(x_0, y_0)$.

У деяких випадках диференціальне рівняння (4) доцільно записувати у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ або у формі } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (6)$$

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ – наперед відомі функції.

Форма (6) зручна тим, що тут змінні x та y рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію іншої.

Під розв'язком рівняння (6) , у загальному випадку, *розуміють функції* $x = \varphi(t)$ *та* $y = \psi(t)$, *що задані параметрично (t - параметр) і задовольняють рівняння* (6).

Не існує загального методу розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку. Зазвичай розглядають лише деякі окремі типи таких рівнянь, для кожного з яких приводиться свій особливий метод розв'язку.

3. *Рівняння першого порядку з розділеними змінними.*

Означення 3. *Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з розділеними змінними, якщо воно має вигляд*

$$X(x)\, Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0, \qquad (7)$$

де $X(x)$, $X_1(x)$ *- функції лише змінної* x;
$Y(y)$, $Y_1(y)$ *– функції лише змінної* y.

Для розв'язку рівняння (7) розділимо обидві частини його на добуток $Y(y)\, X_1(x)$, припускаючи що даний добуток не рівний нулеві. Тоді, після елементарних перетворень, маємо

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y(x)}{Y_1(x)}dy = 0 \qquad (8)$$

У рівняння (8) при dx стоїть функція лише від x, а при dy стоїть функція лише від y. У цьому випадку говорять що *змінні розділені.* Беручи інтеграл від лівої і правої частини рівності (8), отримаємо

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y(x)}{Y_1(x)}dy = C, \qquad (9)$$

тут під інтегралом розуміють деякі відповідні первісні.

Співвідношення (9) є *загальним інтегралом рівняння* (7), в неявній формі.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Перепишемо дане рівняння так $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x \cdot dy = y \cdot dx$.

Розділимо обидві частини рівняння на добуток xy ($xy \neq 0$), тим самим розділимо змінні у рівнянні і знайдемо загальний інтеграл:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C,$$

Строго говорячи ми маємо писати $\ln|y| = \ln|x| + \ln|\overline{C}|$, але допущена «вольність» не вплине на остаточний результат, якщо при виконанні потенціювання довільну сталу вважати дійсним числом.

Тут довільна стала записана у логарифмічній формі, що цілком можливо, так як всяке додатне або від'ємне число C_1 може бути представлене як логарифм іншого числа:

$$C_1 = lnC, \quad \text{де} \quad C = e^{c_1}.$$

Потенціюючи останню рівність, остаточно отримаємо:

$$\ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow y = C \cdot x, \qquad (x \neq 0;\ C \neq 0).$$

Однорідні диференційні рівняння першого порядку.

Поняття диференційного рівняння першого порядку пов'язано з *однорідними функціями.*

Многочлен $P(x,y) = \sum a_{ij}x^iy^j$ називається *однорідним степені* n, якщо усі його члени мають один і той же порядок n, тобто для кожного такого члена $a_{ij}x^iy^j$ маємо $i + j = n$.

Наприклад, $P(x,y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ є многочлен степені 2.

Якщо аргументи x, y однорідного мночлена степені n замінити на пропорційні величини kx та ky, то в результаті початковий многочлен помножиться на n-й степінь коефіцієнта пропорційності k.

Так для многочлена $P(x,y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ маємо:
$P(kx,ky) = 2(kx)^2 - 3(kx)(ky) - 5(ky)^2 = k^2(2x^2 - 3xy - 5y^2) = k^2P(x,y)$.

Ця властивість покладена в основу загального означення однорідної функції.

Означення 4. Функція $P(x, y)$ називається однорідною степені n, якщо для довільного числа k має місце тотожність $P(kx,ky) = k^nP(x,y)$.

Розглянемо тепер диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{10}$$

Означення 5. Диференціальне рівняння першого порядку (10) *називається однорідним, якщо коефіцієнти $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ при диференціалах змінних x та y є однорідні функції однакового степеню.*

Можна довести, що *застосовуючи підстановку*

$$u = \frac{y}{x} \qquad \text{або } v = \frac{x}{y} \tag{11}$$

диференціальне рівняння (10) *приводиться до рівняння з розділеними змінними.*

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $(x + y)dx + xdy = 0$.

Тут $P = x+y$ і $Q = x$ - однорідні функції першого степеню, тому це рівняння може бути зведене до рівняння з розділеними змінними підстановкою (11).

$u = \frac{y}{x}$, і, відповідно $y = ux$, де u – невідома функція аргументів x та y. Звідси $dy = xdu + udx$.

Підставивши цей вираз в початкове рівняння маємо:

$$(x + xu)dx + x(xdu + udx) = 0 => xdu + (2u + 1)dx = 0$$

Розділивши змінні, отримаємо $\dfrac{du}{2u+1} = -\dfrac{dx}{x}$.

Для зручності домножимо обидві частини рівняння на 2 і інтегруємо почленно:

$$\int \frac{2du}{2u+1} = -2\int \frac{dx}{x} => \ln(2u+1) = -2lnx + lnC => 2u + 1 = \frac{C}{x^2}$$

Повертаючись до початкових змінних (зворотня підстановка) маємо

$\frac{2y}{x}+1=\frac{C}{x^2}$, і відповідно, загальний розв'язок рівняння такий:

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}$$

де $C_1=\dfrac{C}{2}$ - довільна стала.

У процесі рішення ми ділили на функції x та $(2u+1)$. Прирівнюючи їх до нуля, отримаємо можливі розв'язки:

$$\begin{cases} x=0 \\ 2u+1=0 \Rightarrow y=-\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Обидві функції задовольняють початкове диференціальне рівняння, крім того, розв'язок можна отримати із загального розв'язку при $C_1=0$.

Нехай тепер однорідне диференціальне рівняння має вигляд

$$y'=f(x,y), \qquad \text{або} \qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{12}$$

Записуючи рівняння (12) в диференціалах , отримаємо: $dy=f(x,y)dx$.

При dy стоїть коефіцієнт рівний 1, тобто однорідна функція нульового степеню, значить і $f(x,y)$ також має бути однорідною функцією нульового степеню.

Таким чином, *диференціальне рівняння* (12) *являється однорідним тоді і лише тоді, коли права частина його f(x. y) є функція однорідна нульового степеню.*

4. *Лінійні диференційні рівняння першого порядку.*

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$a(x)y'+b(x)y+c(x)=0, \tag{13}$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – задані функції. Якщо $a(x)\neq 0$, то рівняння (13.13) можна записати у *приведеному вигляді*

$$y'+p(x)y=f(x) \tag{14}$$

де $p(x)=\dfrac{b(x)}{a(x)}$; $f(x)=-\dfrac{c(x)}{a(x)}$, ($f(x)$ – вільний член або права частина рівняння).

Вважаємо, що коефіцієнт $p(x)$ та вільний член $f(x)$ рівняння (14) неперервні на деякому інтервалі (a, b).

Для розв'язку рівняння (14) шукану функцію y записують як добуток двох співмножників:

$$y=u(x)v(x)=uv, \tag{15}$$

де $u(x)$- деякий не нульовий розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$u'+p(x)u=0, \tag{16}$$

а $v(x)$– нова невідома функція. Враховуючи, що

$$y'=v\cdot u'+u\cdot v', \tag{17}$$

і підставляючи вирази (15) і (17) у диференціальне рівняння (14), отримаємо

$$v[u'+p(x)u]+uv'=f(x). \tag{18}$$

Із (16) маємо

$$uv'=f(x) \tag{19}$$

Фактично *функція u(x) підбирається так, щоб коефіцієнт при v* у *рівнянні* (18) *був рівний нулеві.*

Із рівнянь (16) та (19) послідовно знаходять функції u і v , причому для u вибирається деяке конкретне рішення, відмінне від нуля.

Зауваження. На практиці немає необхідності приводить лінійне рівняння (13) до виду (14); можна відразу застосовувати підстановку (15).

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' + 2y = x^2$.

Задане рівняння , очевидно, є лінійним, так як містить шукану функцію y та її похідну y' в першому степені і не містить їх добутків. Покладемо

$$y = uv,\ y' = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

Підставляючи ці вирази в початкове рівняння отримаємо:

$$v(xu' + 2u) + xuv' = x^2 .$$

Підбираємо функцію u так, щоб

$$(xu' + 2u) = 0; \qquad (1)$$

тоді $$xuv' = x^2 \qquad (2)$$

Із (1) отримуємо $xuv' = x^2 \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = -2u \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -2\dfrac{dx}{x}$;

Інтегруємо останній вираз $\displaystyle\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = -2\ln x + \ln C_0$.

Припустивши $C_0 = 1$ ($\ln C_0$), отримаємо $u = \dfrac{1}{x^2}$.

Підставимо отримане значення для u в (2):

$$xuv' = x^2 \Rightarrow x\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} = x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x^3 \Rightarrow v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C .$$

Остаточно знаходимо шукану функцію:

$$y = uv = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$$

5. *Диференціальні рівняння другого порядку.*

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку, що розв'язується відносно старшої похідної, наступний:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (20)$$

Загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \qquad (21)$$

цього рівняння містить дві незалежні довільні сталі C_1 та C_2.

Геометрично загальний розв'язок представляє собою нескінченну сукупність інтегральних кривих, що залежить від двох незалежних параметрів C_1 та C_2 .

Взагалі то, через кожну точку $M(x_0, y_0)$ площини Oxy проходить пучок інтегральних кривих. Тому, *щоб із цілого сімейства інтегральних кривих виділити одну криву, недостатньо вказати тільки точку $M(x_0, y_0)$, через яку вона проходить, необхідно задати напрямок, в якому обрана інтегральна крива проходить через цю точку, тобто задати тангенс кута α_0 , утвореного дотичною до цієї кривої в точці $M(x_0, y_0)$ з додатнім напрямком осі абсцис.*

Аналітично, якщо позначити $tg\alpha_0 = y'_0$, то приходимо до таких *початкових умов* $y = y_0, \quad y' = y'_0 \quad при \quad x = x_0$.

Використовуючи (21) початкові умови запишуться як система:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = \varphi'_ч(x_0, C_1, C_2) \end{cases} \qquad (22)$$

Із системи (22) можна знайти довільні сталі C_1 та C_2 і тим самим отримати частинний розв'язок $y = \varphi(x)$, що задовольняє рівняння (20) і задані початкові умови (*задача Коші*).

$$\begin{cases} y\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases} \qquad (23)$$

6. *Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.*

Нагадаємо: *диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним, якщо воно містить шукану функцію, похідну першого і похідну другого порядку в першій степені і не містить їх добутків.*

Означення 6. *Диференціальне рівняння виду*

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (26)$$

де p і q – постійні числа, називається однорідним лінійним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Для рішення рівняння (26) складають *характеристичне рівняння* виду

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (27)$$

та знайти його корені k_1 та k_2.

Якщо корені k_1 та k_2 *дійсні числа, причому різні*, то загальний розв'язок рівняння (26) знаходять за формулою

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} \qquad (28)$$

Якщо корені k_1 та k_2 *дійсні числа, але рівні між собою (кратні)*, то загальний розв'язок рівняння (26) знаходять за формулою

$$y = e^{k\,x}\left(C_1 + C_2x\right) \qquad (29)$$

Якщо корені k_1 та k_2 *комплексні спряжені числа, тобто* $k_1 = \alpha + i\beta$ *і* $k_2 = \alpha - i\beta$, то загальний розв'язок рівняння (26) знаходять за
формулою

$$y = e^{\alpha\cdot x}\left(C_1Cos\beta\cdot x + C_2Sin\beta\cdot x\right) \qquad (30)$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок наступних диференціальних рівнянь:
1) $y'' + 2y' - 15y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9 = 0$; 3) $y'' - 4y' + 13 = 0$.

1). $y'' + 2y' - 15y = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо корені його:

$k^2 + 2k - 15 = 0$, k_1 = -5 , k_2 = 3.

Застосовуємо формулу (28) та записуємо загальний розв'язок
$y = C_1e^{-5x} + C_2e^{3\,x}$, де C_1 та C_2 – довільні сталі.

2). $y'' - 6y' + 9 = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2-6k+9=0$ має кратні корені $k_1 = k_2 = 3$, тому використовуємо формулу (29): $y=e^{3x}\left(C_1+C_2x\right)$.

3). $y''+2y'-15y=0$.

Характеристичне рівняння $k^2-4k+13=0$ має комплексні корені $k_1 = 2+i3$, $k_2 = 2-3i$, тому використовуємо формулу (30):

$y=e^{2\cdot x}\left(C_1Cos3x+C_2Sin3x\right)$.

7. *Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.*

Розглянемо *лінійне неоднорідне рівняння другого порядку*

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{31}$$

де p і q – постійні числа, f(x (права частина))- невідома функція від x.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (31) *дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* $\tilde{y}$

$$\tilde{y}''+p\tilde{y}'+q\tilde{y}=0 \tag{32}$$

та деякого частинного розв'язку $y_ч$ *даного неоднорідного рівняння* (31):

$$y=\tilde{y}+y_ч \tag{33}$$

Розв'язок однорідного рівняння (32) знаходять за допомогою формул (28) – (30) в залежності від коренів характеристичного рівняння.

Розв'язок (частинний) неоднорідного рівняння (31) може бути знайдено *методом невизначених коефіцієнтів* в тих випадках, коли права частина рівняння (31), тобто функція *f(x)*, є многочлен, показникова фунція або тригонометрична функція.

В залежності від структури функції *f(x)* та коренів характеристичного рівняння (27) буде змінюватись і структура частинного розв'язку $y_ч$.

І. Права частина *f(x)* рівняння (31) – *многочлен n –го степеню*. Тоді має місце теорема.

*Теорема 2. Якщо права частина f(x) неоднорідного рівняння (*31*) є многочлен n –го степеню і число нуль не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок* $y_ч$ *необхідно шукати у вигляді многочлена того ж степеню. Якщо один з коренів характеристичного рівняння рівний нулеві, то частинний розв'язок* $y_ч$ *необхідно шукати у вигляді добутку многочлена того ж степеню на x.*

ІІ. Права частина *f(x)* рівняння (31) – *показникова функція*. Тоді має місце теорема.

*Теорема 13.3. Якщо права частина f(x) неоднорідного рівняння (*13.31*) є показникова функція виду* $f(x)=\alpha e^{mx}$ *і число m не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок* $y_ч$ *необхідно шукати у вигляді* $y_ч = A e^{mx}$*, де A – коефіцієнт який треба визначити.*

Якщо число m співпадає з одним з коренів характеристичного рівняння, то $y_ч = A\cdot x e^{mx}$.

Якщо число m співпадає з кожним з двох коренів характеристичного рівняння, то $y_ч = Ax^2 e^{mx}$.

ІІІ. Права частина *f(x)* рівняння (31) – *тригонометричний поліном*. Тоді має місце теорема.

<u>*Теорема*</u> <u>13.4.</u> *Якщо права частина f(x) неоднорідного рівняння* (31) *є тригонометричний поліном виду* $f(x)=e^{mx}(a\cdot Cosnx+b\cdot Sinnx)$ *і числа* $(m\pm ni)$ *не є коренями характеристичного рівняння (є дійсними числами), то частинний розв'язок шукають у вигляді*

$$y_ч = e^{mx}\left(A\cdot Cos\,nx + B\cdot Sin\,nx\right)$$

Якщо числа $(m\pm ni)$ *є коренями характеристичного рівняння (комплексні числа), то частинний розв'язок шукають у вигляді*

$$y_ч = xe^{mx}\left(A\cdot Cos\,nx + B\cdot Sin\,nx\right).$$

<u>*Питання для самостійного контролю знань.*</u>

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що називають порядком диференціального рівняння.
3. Що називається розв'язком диференціального рівняння?
4. Що називається загальним розв'язком диференційного рівняння?
5. Який геометричний зміст частинного розв'язку диференційного рівняння першого порядку? Загального розв'язку?
6. Яке диференційне рівняння називається рівнянням з розділеними змінними?
7. Яке диференційне рівняння першого порядку називається лінійним? Вкажіть його спосіб розв'язування.
8. Що називається загальним розв'язком диференційного рівняння другого порядку?
9. Який геометричний зміст початкових умов диференціального рівняння другого порядку?
10. Які диференціальні рівняння другого порядку допускають зниження порядку? Приведіть спосіб розв'язку таких рівнянь.
11. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням другого порядку?
12. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку?
13. Яке рівняння називається характеристичним і як воно знаходиться для даного лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами?
14. Який вигляд має загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння другого порядку, в залежності від коренів характеристичного рівняння?
15. Який вид має загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами?
16. Який вигляд має частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, в залежності від типу функції правої частини рівняння?

Лекційне заняття №6 (2 год)
Тема 12. Числові та степеневі ряди.

План лекційного заняття

1. Приклади нескінченних рядів.
2. Збіжність ряду.
3. Елементарні властивості рядів.
4. Ознаки збіжності рядів
5. Ознаки збіжності знакододатніх числових рядів.
6. Абсолютна збіжність ряду.
7. Степеневі ряди.

Теорія рядів має широке практичне застосування з огляду на можливість при широких умовах представляти обрану складну функцію у вигляді нескінченної послідовності більш простих функцій, що значно спрощує обчислення наближеного значення обраної функції, при заданому значенні аргументу.

1*. Приклади нескінченних рядів*

У деяких задачах розглядають суми, що складаються із нескінченної кількості доданків. Властивості таких нескінченних сум суттєво різняються від властивостей сум обмеженої кількості доданків. Такі суми називають нескінченними рядами.

Прикладом нескінченного ряду, що розглядається в елементарній алгебрі, є *нескінченно спадна геометрична прогресія*:

$$a + aq + aq^2 + \ldots. + aq^{n-1} + \ldots, \qquad \text{де} \qquad |q| < 1.$$

Тут кожен наступний член утворений за певним законом, а саме: кожен наступний член отриманий із попереднього множенням на знаменник прогресії q . Таким чином, n–член, що називається *загальним членом прогресії*, знаходиться за формулою:

$$u_n = aq^{n-1}, (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Іншим прикладом нескінченного ряду є *гармонійний ряд*:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots.+\frac{1}{n}+\ldots,$$

n- *член (загальний*) якого рівний $u_n = \frac{1}{n}$.

Існують ряди, членами яких є функції, наприклад,

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots.+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot \ldots\cdot n}+\ldots,$$

де n- член рівний $u_n = \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} = \frac{x^n}{n!}$.

Закон утворення членів ряду задається його n- членом, який називається загальним членом ряду. Маючи формулу загального члена можна знайти будь-який член цього ряду.

Постає задача: дослідити властивості нескінченних рядів, припускаючи, що відома формула його загального члена.

2. *Збіжність ряду.*

*Означення*1. *Нескінченна послідовність, складена за певним законом, чисел або функцій, формально з'єднаних між собою знаком плюс*

$$u_1+u_{2+}u_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ , \qquad 1)$$

називається нескінченним рядом.

Складові суми u_1, u_2, u_3, …, u_n , називаються членами цього ряду.

Якщо члени ряду - числа, то ряд називається числовим, якщо члени ряду – функції, то ряд називається функціональним.

Вивчення функціональних рядів зводиться до вивчення числових, якщо припустити що $u_n = f_n(x)$, (n = 1, 2, 3, …), то для кожного фіксованого значення агрументу x отримуємо числовий ряд (1), властивості якого підлягають дослідженню.

Член u_n ряду (1) , що стоїть на n – му місці, рахуючи від початку, називається загальним членом цього ряду. Ряд вважається заданим, якщо відомий його загальний член, виражений як функція номера n .

Вважаючи ряд (1) заданим, можна утворити *часткові суми* цього ряду:

$S_1 = u_1$.

$S_2 = u_1 + u_2$,

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$,

. . . .

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$.

Розглянемо числовий ряд (1) та можливі два результати його дослідження:

І. При необмеженному зростанні номера n сума n перших членів S_n ряду (1) наближається до числа S. Тобто, існує кінечна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\ . \qquad (2)$$

Тоді говорять що ряд (1) збіжний і число S є сумою цього ряду.

ІІ. При необмеженному зростанні номера n сума n перших членів S_n ряду (1) зростає необмежено, або взагалі не обмежена. Тоді говорять, що ряд (1) розходиться і суми не має.

Означення 2. Числовий ряд називають *збіжним,* якщо існує кінечна границя послідовності його часткових сум – ця границя називається сумою ряду. У протилежному випадку числовий ряд – *розбіжний*.

Якщо (1*) функціональний ряд,* тобто $u_n = f_n(x)$, (n = 1, 2, 3, …), то для кожного фіксованого значення x_0 аргументу x відовідний числовий ряд

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots,$$

або *збіжний або розбіжний*.

Відповідно, x_0 називають або *точкою збіжності*, або *точкою розбіжності* даного функціонального ряду.

Якщо $u_n = f_n(x)$, (n = 1, 2, 3, …) *і функціональний ряд* (1) *збіжний в кожній точці x деякої множини, то він називається збіжним на множині, а функція* $S = S(x)$, *що визначена для кожного значення аргументу x формулою*

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n(x)\,,$$

називається сумою даного ряду на заданій множині.

Якщо ряд (1) збіжний, то різниця між сумою S і частковою сумою S_n його

$$R_n = S - S_n \qquad (3)$$

називається n – м залишком ряду.

Залишок ряду R_n представляє собою похибку, яку отримаємо якщо в якості наближеного значення суми ряду S взяти суму S_n його перших n членів.

Так як S є границя послідовності S_n , то, очевидно

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

Тому, *взявши досить велике число членів збіжного ряду, можна суму цього ряду обчислити з будь-якоим ступенем точності*.

Основною задачею теорії рядів є дослідження ряду на збіжність. Задача на знаходження суми ряду є другорядною, так як після визначення збіжності ряду, наближена сума його може бути знайдена досить просто.

Приклад 1. нехай маємо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2};\frac{1}{2\cdot 3};\frac{1}{3\cdot 4};\frac{1}{4\cdot 5};\cdots;\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Доведемо збіжність цього ряду.

Візьмемо суму перших його n членів:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Окремі складники суми можуть бути представлені так:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5};\cdots\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Тому:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1-\dfrac{1}{n+1}=1$.

Таким чином заданий ряд збіжний і сума його рівна 1.

3. *Елементарні властивості рядів.*

Наступні властивості притаманні числовим рядам.

1) Збіжність ряду $u_1+u_2+u_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ не порушиться , якщо усі його члени помножити на одне і теж число k, відмінне від нуля, причому для суми цього ряду дійсною є рівність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) Під сумою (різницею) двох рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ розуміють ряд виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$

3) Сума (різниця) двох збіжних рядів є ряд сбіжний, причому:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n .$$

4. *Ознаки збіжності рядів*

Теорема 1. Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд $u_1+u_2+u_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, то його n-й член u_n при не обмеженому зростанні номера n наближається до нуля.

Наслідок. Якщо n-й член ряду при необмеженому зростанні його номера n не наближається до нуля, то даний ряд розбіжний.

Приклад 2. Розглянемо гармонійний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

Загальний член цього ряду $u_n=\frac{1}{n}$ наближається до нуля при необмеженому зростанні номера n. Але, доведемо, що даний ряд розбіжний. Для цього візьмемо суму 2^m перших членів ряду та згрупуємо ці члени наступним чином:

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

Можна бачити, що сума членів у кожній дужці, більше ½. Загальна кількість дужок – груп, не рахуючи перших двох членів ряду, очевидно, рівна $m-1$, тоді сума перших 2^m членів ряду : $S_{2^m} > 1+\frac{m}{2}$.

Якщо кількість членів ряду $n=2^m$ у сумі S_{2^m} зростає необмежено, то і показник m також зростає необмежено. Тому S_{2^m} наближається до нескінченності, таким чином, гармонійний ряд розбіжний.

З прикладу 2. можна зробити висновок, що необхідної умови не достатньо для однозначного визначення збіжності/розбіжності ряду. Розглянемо тепер ознаки, що дозволяють дати однозначну відповідь на питання збіжності ряду.

4. *Ознака порівняння рядів.*

Лема. Якщо в ряді $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots$ (4) відкинути обмежену кількість перших початкових членів, наприклад перших k членів, то отримаємо ряд $u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots$, який збігається (розбігається) одночасно з даним початковим рядом.

Наслідок 1. При дослідженні ряду на збіжність можна відкинути кінечне число його членів.

Наслідок 2. Якщо ряд (4) збігається і S є його сума, то n-й залишок ряду $R_n=S-S_n$ представляє собою суму ряду $u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots$, тобто

$$R_n=u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots.$$

Ознака порівняння рядів. Якщо члени ряду $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ не від'ємні і не перевищують відповідних членів збіжного ряду $v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots$, то даний ряд теж збіжний.

Доведення цієї ознаки грунтується на властивостях границь послідовностей.

Нагадування: будь-яка монотонно зростаюча обмежена послідовість має границю.

Наслідок. Якщо члени деякого ряду не менше відповідних членів знакододатнього ряду (з не від'ємними членами) і другий ряд розбіжний, то розбіжним буде і перший ряд.

Приклад 3. розглянемо ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

Так як $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{n}$, $(n = 2, 3, \cdots)$, то порівнюючи заданий ряд з гармонійним (прикдад 2), можна зробити висновок, що заданий ряд розбіжний.

5. *Ознаки збіжності знакододатніх числових рядів.*

Існує багато методів – ознак збіжності рядів за значенням їх коефіцієнтів, одною з таких ознак є *ознака збіжності Даламбера*.

Теорема 2. *Ознака збіжності Даламбера. Нехай усі члени ряду* $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *додатні, і нехай при необмеженому зростанні номера* n *границя відношення* $(n+1)$ *члена до* n*–го існує і дорівнює деякому числу* l, *тобто* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *У такому випадку:*

1. *Якщо границя* l *менше одиниці, то даний ряд збігається.*
2. *Якщо границя* l *більше одиниці, то даний ряд розбіжний.*
3. *Якщо границя* l *рівна одиниці, то ознака певної відповіді щодо збіжності/розбіжності ряду не дає, тобто рівноможливим є як збіжність, так і розбіжність ряду.*

Зауваження 1. Якщо ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ функціональний, тобто $u_n = f_n(x) > 0$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ і $l = l(x)$ - відповідна границя цього ряду, то ознака збіжності Даламбера залишається в силі для кожного x.

Зауваження 2. Якщо для деякого ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ виконується нерівність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то n –й член цього ряду не наближається до нуля при необмеженому зростанні його номера n.

Зауваження 3. Ознаку Даламбера доцільно застосовувати, якщо загальний член ряду містить вирази виду $n!$ та a^n.

Приклад 4. Розглянемо ряд

$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots + \frac{a^n}{n} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + \ldots$, де a додатнє число.

Маємо $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{n+1} \div \frac{a^n}{n} = a \cdot \frac{n}{n+1}$. Обчислимо границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = a$.

За ознакою Даламбера даний ряд збіжний при $0 < a < 1$ і розбіжний при $a > 1$. Якщо $a = 1$, то ознака Даламбера однозначної відповіді щодо збіжності ряду не дає. Але в цьому випадку початковий ряд перетвориться в гармонійний:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \ldots + \frac{a^n}{n} + \frac{a^{n+1}}{n+1} + \ldots \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

який, як було показано в прикладі 2, розбіжний.

Теорема 3. (*Ознака збіжності Коші). Нехай задано ряд зі знакододатніми членами та існує скінчена або нескінчена границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$ *Тоді:*

1) *Якщо границя* $l < 1$, *то даний ряд збігається.*
2) *Якщо границя* $l > 1$, *то даний ряд розбіжний.*
3) *Якщо границя* $l = 1$, *то потрібні додаткові дослідження.*

<u>Теорема 4.</u> *Інтегральна ознака Коші. Якщо члени знакододатнього ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *можуть бути зображені як числові значення деякої неперервної монотонно спадаючої на інтервалі* $[1; +\infty)$ *функції f(x) так, що* $u_1 = f(1)\,; u_2 = f(2); u_3 = f(3)\,; \ldots u_n = f(n) \ldots$, *то:*

1) *якщо невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *збіжний, то збіжний і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *;*

2) *якщо невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *розбіжний, то розбіжний і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

<u>*Нагадування*</u> :якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ межі інтегрування a і b (або одна з них) нескінченні, або підінтегральна функція не визначена і/або розривна на відрізку інтегрування $[a, b]$, то *інтеграл називають невласним*.

Обчислюють невласні інтеграли за допомогою граничного переходу:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

<u>Приклад 5</u>. Записати три перших члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

Беручи послідовно $n = 1, 2, 3, \ldots$запишемо даний ряд у вигляді:

$$\frac{5x}{1^2 \cdot 3} + \frac{5^2 x^2}{n^2 3^2} + \frac{5^3 x^3}{n^2 3^3} + \cdots$$

Для визначення області збіжності ряду використаємо ознаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}\cdot 5^n\cdot x^n}\right| = \frac{5}{3}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{5}{3}|x|.$$

Отриманий ряд збіжний для тих значень x, які задовольняють нерівність

$$\frac{5}{3}|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}.$$

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях отриманого інтервалу.

При $x = -\frac{3}{5}$ даний ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, цей ряд є знакопочережним, абсолютна величина його загального члена наближається до нуля при необмеженому зростанні номера n. Значить, за ознакою Лейбніца збіжності знакопочережних рядів, цей ряд збігається та $x = -\frac{3}{5}$ належить області збіжності ряду.

При $x = \frac{3}{5}$ даний ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}$. Досліджуємо збіжність цього ряду за інтергальною ознакою збіжності Коші. Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 0 + 1 = 1.$$

Так як невласний інтеграл збігається, то є збіжним і досліджуваний ряд. Значить, $x = \frac{3}{5}$ входить до області збіжності заданого ряду.

Остаточно, область збіжності ряду: $-\frac{3}{5} \le x \le \frac{3}{5}$.

6 *Абсолютна збіжність ряду.*

Приведені вище достатні ознаки збіжності рядів відносять до рядів з додатніми членами. Аналогічними властивостями наділені також і ряди з від'ємними членами. Розглянемо тепер ряди частина членів яких можуть бути додатніми, а частина в'ємними або рівними нулю. Такі ряди називають *знакозмінними*.

Теорема 5 . Якщо для знакозмінного ряду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

збігається ряд, складений із абсолютних величин його членів:
$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то даний ряд збігається.

Зауваження. Зворотнє твердженняне не вірне. А саме: якщо ряд збіжний, то ряд складений із абсолютних величин його членів не обов'язково збіжний, цей ряд може бути і розбіжним.

Означення 3. *Ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається як сам ряд, так і ряд складений із абсолютних величин його членів.*

Ряд називається умовно збіжним, якщо сам ряд збігається, а ряд, складений із абсолютних величин його членів, розбіжний.

Наприклад, збіжний ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \ldots$ є абсолютно збіжним, та як ряд,складений із абсолютних величин $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots$, також збігається. Обидва ряди - геометрична прогресія із знаменниками $-\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{2}$ відповідно.

Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$, є збіжним, але не абсолютно збіжним, так як ряд, складений із абсолютних величин його членів, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$, є розбіжний (гармонійний ряд).

Ознака абсолютної збіжності ряду. Нехай для деякого ряду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$.

Утакому випадку :

1) якщо $l < 1$, то даний ряд збіжний абсолютно;
2) якщо $l > 1$, то ряд розбіжний.

Дана ознака є ознакою Даламбера, стосовно ряду абсолютних величин.
$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$.

7. *Степеневі ряди.*

Ряд виду $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ (6)
розміщений в порядку зростання цілих невід'ємних степенів змінної x і маючий коефіцієнти $a_0; a_1; a_2; \cdots a_n$ *не залежні від x, називається степеневим рядом.*

Узагальнений степеневий ряд має вигляд:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \quad (7)$$

де *а*- деяке постійне число.

Ряд (7) легко приводиться до (6), якщо припустити $(x - a) = x'$, тому досліджувати будемо ряд (6).

Надаючи змінній *x* фіксоване значення, отримаємо числовий ряд, який, в залежності від *x* , збігається чим є розбіжним.

Можна довести що для будь-якого степеневого ряду (6) існує *обмежене або нескінченне невід'ємне число* R *– радіус збіжності ряду* – таке, що якщо $R > 0$, то при $|x| < R$, *ряд збігається*, а при $|x| > R$ - *є розбіжним*. При $|x| = R$, тобто при $x = R$ та при $x = -R$, *може мати місце як збіжність так і розбіжність степеневого ряду*.

Інтервал $(R; -R)$ називається *інтервалом збіжності степеневого ряду*.

Якщо $R = +\infty$, то інтервал збіжності представляє собою всю числову пряму. У випадку, якщо $R = 0$, то *степеневий ряд* (6) *збігається лише в точці* $x = 0$ і *інтервал збіжності*, точніше кажучи, *не існує*.

У найпростіших випадках інтервал збіжності степеневого ряду (6) може бути визначений за ознакою Даламбера.

Питання про збіжність ряду (6) *при* $R > 0$ *на кінцях інтервалу збіжності* $(-R; R)$, *тобто коли* $x = R$ *або* $x = -R$ *у кожному конкретному випадку вирішується окремо.*

<u>*Питання для самостійного контролю знань*</u>

1. Що називають числовим (функціональним) рядом, його загальним членом?
2. Який ряд називають збіжним (розбіжним)? Що називають сумою ряду?
3. Сформулюйте основні властивості збіжних числових рядів.
4. Що називають *n*-м залишком ряду.
5. Які ряди називають знакозмінними та знакопочережними.
6. Дайте означення степеневого ряду і області його збіжності.
7. Сформулюйте ознаку Даламбера збіжності знакододатнього числового ряду.
8. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші збіжності знакододатнього ряду.

Лекційне заняття №7-8 (4 год)
Тема 13. Основні поняття теорії ймовірностей.

План лекційного заняття

1. Основні поняття та означення. Випадкова подія. Класифікація подій. Операції над подіями.
2. Класичне означення ймовірності.
3. Елементи комбінаторики.
4. Операції над подіями.
5. Умовна ймовірність та її властивість.
6. Імовірність добудку подій. Теореми множення ймовірностей.
7. Формула повної імовірності. Формула Байєса
8. Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі.

1. *Основні поняття та означення. Випадкова подія. Класифікація подій. Операції над подіями.*

Математична наука, що вивчає закономірності масових подій, називається теорією ймовірностей.

Науку, що використовує теорію ймовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експерименту, називають математичною статистикою.

Послідовність операцій, виконуваних з додержанням певного комплексу умов, називають *експериментом* (дослідом, спробою). Наслідок будь-якого експерименту називають *подією*.

Класифікація подій. Події поділяються на *вірогідні*, *неможливі* та *випадкові*.

Якщо в результаті експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається *вірогідною*. Вірогідна подія позначається символом Ω («омега»).

Подія називається *неможливою*, якщо в результаті експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ (порожня множина).

Подія називається *випадковою*, якщо за певного комплексу умов у результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних факторів, дію яких передбачити неможливо.

Випадкові події позначають символами $A, B, C, \ldots$ або $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Отже, *випадкові події* пов'язані експериментами, наслідки яких є *неоднозначними.*

Для математичного опису випадкових подій — наслідків експерименту — застосовують такі точні поняття: *прості (елементарні)* та *складені випадкові події*, *простір елементарних подій*.

Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), називається *простою (елементарною) випадковою подією*.

Елементарні події позначаються ω_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії, не поділяються на простіші складові.

Приклад 1. Монету підкидають один раз. Визначити елементарні події цього експерименту.

Можливі такі елементарні випадкові події:

ω_1 = г (монета випаде гербом);

ω_2 = ц (монета випаде цифрою).

Випадкова подія називається *складеною*, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами: $A, B, C, D, \ldots$.

Приклад 2. Задано множину чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання із цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події: 1) з'явиться число, кратне 2; 2) число кратне 3; 3) число, кратне 5.

Ці випадкові події будуть складеними. Позначимо їх відповідно A, B, C. Тоді $A =$ $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $B = \{3, 6, 9, 12\}$; $C = \{5, 10,\}$.

Елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, $\omega_j \in B$, $\omega_k \in C$, які належать відповідно складеним випадковим подіям A, B, C, тобто є елементами цих множин, називають *елементарними подіями, які сприяють появі* кожної із зазначених подій унаслідок проведення експерименту (ω_i сприяють появі події A, ω_j — події B, ω_k — події C).

Кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може відбутися (настати) внаслідок його проведення: $\omega_i \in \Omega$. Множину називають *простором елементарних подій*.

Приклад 3**.** Гральний кубик, кожна грань якого позначена певною цифрою від 1 до 6, підкидають один раз. При цьому на грані випадає одна із зазначених цифр. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту (множину Ω) і такі випадкові події: 1) A — випаде число, кратне 2; 2) B — випаде число, кратне 3.

Оскільки кубик має шість граней, то в результаті експерименту може випасти одна із цифр від 1 до 6.

Отже, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 1) $A = \{2, 4, 6\}$; 2) $B = \{3, 6\}$.

Простір елементарних подій може бути як *дискретним,* так і *неперервним.* Якщо множина є зчисленною (зліченною), тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати (кожній елементарній події поставити у відповідність один і тільки один елемент нескінченної послідовності натуральних чисел 1, 2, 3, …), то простір елементарних подій називають *дискретним*. Він може бути обмеженим і необмеженим.

У протилежному випадку (тобто коли кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число) простір елементарних подій називають *неперервним*.

У розглянутих раніше прикладах простори елементарних подій були дискретними.

Приклади неперервних просторів елементарних подій дістанемо, розглянувши:

1) розміри однотипних деталей (діаметр, довжина), що їх виготовляє робітник або верстат-автомат;

2) покази приладів, що вимірюють масу, силу струму, напругу, опір і т. ін.

Мовою теорії множин випадкова подія A означується як довільна непорожня підмножина множини Ω ($A \subset \Omega$).

Операції над подіями:

1. *Додавання. Сумою двох подій A і B* називається така подія $C = A\bigcup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B. Подію $A\bigcup B$ схематично зображено на рис. 1 заштрихованою областю.

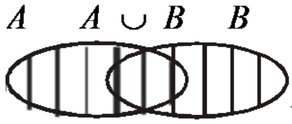


рис.1

Операція $A\bigcup B$ називається *об'єднанням* цих подій.

2. *Множення. Добутком двох подій A і B* називається така подія $C = A\bigcap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Операція $A\bigcap B$ називається *перерізом* цих подій (рис. 2).

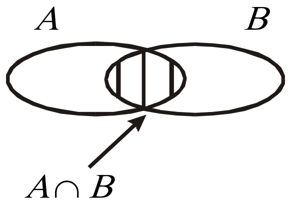


Рис. 2

3. *Віднімання. Різницею двох подій A і B* називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події А і одночасним ненастанням події В (рис. 3).

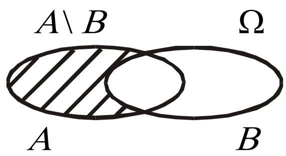


Рис.3

<u>Приклад 4</u>. Задано множину цілих чисел: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати випадкові події: 1) A —число кратне 2; 2) B — кратне 3.

Визначити $A\bigcup B$; $A\bigcap B$; $A \setminus B$.

1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо:

$A\bigcup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$;

$A\bigcap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\}$;

$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$.

Якщо $A\bigcap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними*.

Якщо $A\bigcap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають *несумісними*.

Повна група подій. Протилежні події. Якщо $A_1\bigcup A_2\bigcup A_3\bigcup \dots \dots\bigcup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то такі випадкові події утворюють *повну групу*, а саме: внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

<u>Приклад 5.</u> При одноразовому підкиданні грального кубика обов'язково з'явиться одна із цифр, що є на його гранях, а саме: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$, $A_5 = 5$, $A_6 = 6$. Отже, випадкові події A_i ($i = \overline{1,6}$) утворюють повну групу: $\bigcup_{i=1}^{6} A_i = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають *протилежними*.

Подія, яка протилежна A, позначається $\overline{A}$. Протилежні події у просторі елементарних подій ілюструє рис. 4. , що ілюструє також співвідношення: $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

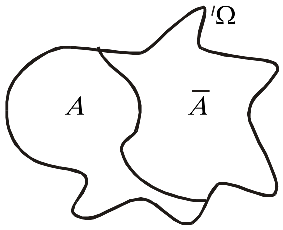


Рис. 4.

Елементарні випадкові події задовольняють такі умови: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.
Для дискретного простору Ω має місце *твердження:* 1) $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, $i \neq j$; 2) $\bigcup_{i=1} \omega_i = \Omega$.

Для *кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події*, що є числом такої ж природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

2. *Класичне означення ймовірності.*

Імовірністю випадкової події А називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \le m \le \le n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0$ ($m = 0$);

Для вірогідної події $P(\Omega) = 1$ ($m = n$).

Отже, для довільної випадкової події: $0 < P(A) < 1$.

Приклад 6. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?
Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту: $n = 15$.
Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти ($m = 9$). Згідно з (4.1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

3. *Елементи комбінаторики.*

Існує клас задач, в яких для обчислення n і m використовуються елементи комбінаторики: переставлення, розміщення та комбінації. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів.

Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані.

Множину називають *упорядкованою*, якщо при її побудові істотним є порядок розміщення елементів.

У противному разі множину називають *не впорядкованою*.

Перестановкою із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення.

Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)\,n, \tag{2}$$

де n набуває лише цілих невід'ємних значень.

Приклад 7. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер Я, І, Р, Е, О, Т. Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово ТЕОРІЯ? Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω)

$n = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, $m = 1$. Позначивши шукану подію через B, дістанемо:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Розміщенням із n елементів по m ($0 \le m \le n$) називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{3}$$

Наприклад, $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Приклад. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо 1973?

Кількість елементарних подій множини Ω буде $n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1, 9, 7, 3, дорівнює одиниці ($m = 1$). Позначимо цю випадкову подію через B. Тоді

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024}.$$

Комбінаціями з n елементів по $m(0 \le m \le n)$ називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом.

Кількість таких множин

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)} \tag{4}$$

Приклад. У цеху працює 10 автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в робочому стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Оскільки кожний верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах — робочому або не робочому, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію — із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

$$m = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120.$$

Отже, $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{2^{10}} = \frac{120}{2^{10}}.$$

4. *Операції над подіями.*

Теорема. Якщо A і B є несумісними ($A \cap B = \varnothing$), то виконується рівність:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

Приклад. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, \ldots, 30\}$. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що воно виявиться кратним 5 або 7?

Простір Ω містить $n = 30$ елементарних подій. Позначимо через A подію, що полягає в появі числа, кратного 5, а через B у появі числа, кратного 7. Тоді маємо:

$A = (5, 10, 15, 20, 25, 30)$, $m_1 = 6$;

$B = (7, 14, 21, 28)$, $m_2 = 4$;

$A \cap B = \varnothing$.

Згідно з теоремою 1: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{6}{30} + \frac{4}{10} = \frac{1}{3}$.

Теорема. Якщо A і B є сумісними ($A \cap B \neq \varnothing$), то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{6}$$

Приклад. В урні містяться 30 однакових кульок, які пронумеровані від 1 до 30. Навмання із урни беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться кратним 3 або 5?

Кількість усіх елементарних подій множини Ω $n = 30$.

Позначимо через $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ ($m_1 = 10$) — появу кульки з номером, кратним 3, а через $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ ($m_2 = 6$) — появу кульки із номером, кратним 5.

$A \cap B = (15, 30)$ $(m_3 = 2)$ є подіями сумісними.

Згідно з (6):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

5. *Умовна ймовірність та її властивість.*

Випадкові події A і B називають залежними, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої. У *протилежному випадку випадкові події A і B називаються незалежними.*

Якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) \neq 0 \tag{7}$$

Аналогічно

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \; P(A) \neq 0. \tag{8}$$

1. $P(A / B) = 0$, якщо $A \cap B = \varnothing$.
2. $P(A / B) = 1$, якщо $A \cap B = B$.
3. У решті випадків $0 < P(A / B) < 1$.

Приклад. Задана множина цілих чисел. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є парним?

Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2. Тоді $A = (3, 9, 12)$, $m_1 = 3$; $B = (2, 4, 8, 10, 12)$, $m_2 = 5$; $A \cap B = (12)$, $m_3 = 1$;

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};\ P(B) = \frac{5}{12};\ P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{1}{12};$$

$$P(A/B) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}.$$

Оскільки $P(A) \neq P(A/B)$, то події A і B є залежними.

6. *Імовірність добудку подій. Теореми множення ймовірностей*.

Нехай події A і B *не* залежні, тоді має місце теорема.

Теорема. Імовірність сумісної появи двох незалежних випадкових подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) \tag{9}$$

Нехай події A і B залежні, імовірності подій $p(A); p_A(B)$ відомі, тоді має місце теорема.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, за умови що перша подія відбулася.

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p_A(B) \tag{10}$$

Наслідок. Імовірність сумісної появи декількох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти подій, за умови, що ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущені що всі попередні події вже відбулися.

Наприклад. Для трьох залежних подій A, B, C:

$$p(A \cdot B \cdot C) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{AB}(C) \tag{10}$$

Приклад. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті герб?

Нехай поява числа, кратного трьом — подія A, а поява герба — подія B. Випадкові події A і B є між собою незалежними. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ P(B) = \frac{1}{2};\ P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Теорема. Імовірність появи хоча б однієї події. Імовірність появи хоча б однієї з групи подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею та добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$p(A) = 1 - p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \dots p(\overline{A_n}) \tag{11}$$

Якщо позначити за $p_1, p, \dots p_n$ імовірності подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, а за $q_1, q_2, \dots q_n$ імовірності протилежних подій $p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \dots p(\overline{A_n})$. То формулу (11) запишемо у вигляді:

$$p(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot\ \dots \cdot q_n \tag{12}$$

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають однакову ймовірність появи рівну p, то формула (12):

$$p(A) = 1 - q^n.$$

Сума протилежних подій (двох подій що утворюють повну групу) завжди рівна

$$p + q = 1.$$

7. *Формула повної імовірності. Формула Байєса*

Нехай подія *A* може відбутись тільки разом з однією із попарно несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, і утворюють повну групу $\sum_{i=1}^{n} p(B_i) = 1$. Нехай відомі ймовірності цих подій та умовні ймовірності $p_A(B_1),\ p_A(B_2), \dots, p_A(B_n)$ події *A*. Тоді, ймовірність події *A* визначає наступна теорема.

Теорема. Імовірність події A, що може настати лише за умови, що відбулася одна з несумісних випадкових подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A.

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p_{B_i}(A) =$$

$$= p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \cdots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A) \qquad (13)$$

Ця формула називається *формулою повної імовірності.*

Імовірність гіпотез. Формула Байєса.

Нехай подія *A* може відбутись тільки разом з однією із попарно несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, які утворюють повну групу $\sum_{i=1}^{n} p(B_i) = 1$. Так як наперед не відомо яка саме з цих подій настане їх називають *гіпотезами*. Імовірність появи події А визначає формула повної ймовірності (13). Припустимо, що в результаті деякого експерименту подія *A* настала, тоді ймовірність гіпотез визначає формула *Байєса:*

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)} \qquad (14)$$

8. *Повторні незалежні випробування за схемою Бернуллі.*

Якщо проводиться *n* незалежних випробувань (експериментів), кожен з яких має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p та q, то такі експерименти називаються е*кспериментами за схемою Бернуллі*.

Простір елементарних подій Ω для одного експерименту за схемою Бернуллі містить дві елементарні події, а для експериментів за схемою Бернуллі 2^n елементарних подій.

Формула Бернуллі.

Імовірність того, що в результаті *n* незалежних випробувань за схемою Бернуллі подія з'явиться рівно *m* раз, визначається за формулою:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \qquad (15)$$

Імовірність того що в результаті *n* незалежних випробувань за схемою Бернуллі подія з'явиться від m_1 до m_2 раз, визначається за формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \qquad (16)$$

Приклад. У цеху 8 моторів. Для кожного мотора ймовірність того, що він у даний момент включений, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що в даний момент: а) включені 5 моторів; б) включені всі мотори, в) включено 5 і більше моторів, г) включено менше 5 моторів.

За умовою задачі маємо: p= 0,7; q = 0,3, n = 8.

а) m = 5, тоді за формулою (6.1): $P_{5,8} = \frac{8!}{5!(8-5)!} 0{,}7^5 0{,}3^{8-5} = 0{,}254$

б) m =n = 5, тоді формула 6.1) матиме вигляд: $P_{8,8} = C_8^8 p^8 q^0 = p^8 = 0{,}7^8 = 0{,}057$,

в) $m_1 = 5$; $m_2 = 8$, тоді за формулою (6.2):

$$P_8(5 \le m \le 8) = \sum_{m=5}^{8} C_n^m p^m q^{n-m} = C_8^5 p^5 q^{n-3} + C_8^6 p^6 q^2 + C_8^7 p^7 q^1 + p^8$$
$$= 0{,}254 + 0{,}296 + 0{,}197 + 0{,}057 = 0{,}804$$

г) $m_1 = 0$; $m_2 = 4$, тоді шукану ймовірність знайдемо так:

$P_8(0 \le m \le 4) = 1 - P_8(5 \le m \le 8) = 1 - 0{,}804 = 0{,}196$

Найімовірніше число появи випадкової події (мода).

Найімовірнішим числом появи випадкової події *A* в результаті *n* незалежних випробувань за схемою Бернуллі називають таке число m_0 , для якого імовірність не перевищує або у всякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

Числове значення моди обчислюють з нерівності:

$$np - q \le m_0 \le np + p \tag{17}$$

Приклад. Відомо, що 1/6 частина продукції, що поставляється заводом, другого сорту, а решта - першого. Завезено партію з 300 виробів. Знайти найімовірніше число виробів першого сорту.

За умовою задачі n = 300 , p = 1 - $\frac{50}{300} =$ 0,83; q = 0,17, тоді за формулою (17) маємо:

$300 \cdot 0{,}83 - 0{,}17 \le m_0 \le 300 \cdot 0{,}83 + 0{,}83$;

$248{,}83 \le m_0 \le 249{,}83$.

Локальна теорема Лапласа.

Теорема. Якщо випробування виконуються за схемою Бернуллі, але n і m мають великі числові значення, то ймовірність настання події *A* рівно *m* разів обчислюється за асимптотичною формулою:

$$P_{m,n} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{17}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – називається функцією Гаусса. Функція Гаусса табульована, її значення при обчисленому *x* наведено у таблицях. Значення *x* обчислюють за формулою:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{18}$$

Властивості функції Гаусса.

1. $\varphi(x) > 0$, функція Гаусса визначена на додатній осі абсцис.

2. Функція Гаусса парна : $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
3. $\varphi(|x| > 4) = 0$.
4. $\varphi(x = 0) = 0{,}3989$.

Приклад. Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,8. Зроблено 100 пострілів. Знайти ймовірність того, що число влучень у мішень буде рівно 70.

Знаходимо значення параметра функції Гаусса

$$x = \frac{70-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{-10}{4} = -2{,}5.$$

За таблицею (додаток 1.) знаходимо $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) = 0{,}0175$

Шукана імовірність: $P_{70,100} = \frac{0{,}0175}{4} = 0{,}0044$.

Інтегральна теорема Лапласса.

Теорема. Якщо випробування виконуються за схемою Бернуллі, але n і m мають великі числові значення, то імовірноість настання події А від m_1 до m_2 разів обчислюється за асимптотичною формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{19}$$

де $x_1 = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}$ є функцією Лапласса, значення якої знаходять за таблицями при обчисленому значенні аргументу.

Властивості функції Лапласса.

1. $\Phi(x)$ визначена на усій осі абцис.
2. Функція Лапласса не парна : $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
3. $\Phi(|x| > 5) = 0{,}5$.
4. $\Phi(x = 0) = 0$

Приклад. Ймовірність появи події в кожнім з 2100 незалежних іспитів дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться: не менш 1400 і не більш 1500 разів.

За умовою: $n = 2100$; $m_1 = 1400$; $m_2 = 1500$; $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$.

Обчислюємо значеня параметрів функції Лапласса:

$$x_1 = \frac{1400-2100\cdot 0{,}7}{\sqrt{2100\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}} = \frac{-70}{21} = -3{,}33; \quad x_2 = \frac{1500-2100\cdot 0{,}7}{21} = \frac{30}{21} = 1{,}43.$$

Використовуємо формулу (19) $P_{2100}(1400 \le m \le 1500) = \Phi(1{,}43) - \Phi(-3{,}33) = \Phi(1{,}43) + \Phi(3{,}33) = 0{,}4236 + 0{,}4996 = 0{,}9232$.

За таблицями: $\Phi(1{,}43) = 0{,}4236$ і $\Phi(3{,}33) = 0{,}4996$

Використання інтегральної теореми Лапласса.

Якщо необхідно оцінити відхилення відносної частоти w появи події *A* в *n* незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі від імовірності p появи випадкової події А в одному випробуванні, то використавши наступний запис інтегральної теореми Лапласса:

$$P(|w - p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \tag{20}$$

де $w = \frac{m}{n}$

Приклад. Імовірність виходу з ладу пристрою, під час перевірки його на надійність, становить 0,2. Перевірці підлягають 400 пристроїв. Чому дорівнює імовірність того, що відхилення відносної частоти поломки від імовірності поломки одного пристрою, не перевищить 0,01.

За умовою задачі: n = 400; ε = 0,01; p = 0,2; q = 0,7.

$$P(|w-0{,}2| < 0{,}01) = 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{400}{0{,}3\cdot 0{,}7}}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2\cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій.

Точність асимптотичних формул знижується з наближенням імовірності p до нуля. Тому при виконанні умови $\begin{cases} n\to\infty \\ p\to 0 \\ \lambda = np = const \end{cases}$, імовірність появи випадкової події m раз обчислюється за асимптотичною формулою Пуассона:

$$P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \tag{20}$$

Значення функції $P_{m,n}$ заходять за таблицями, при заданому значенні m і обчисленому заченні λ.

Питання для самостійного контролю знань

1. Яка подія назівається вірогідною, неможливою, випадковою, елементарною і складеною.
2. Означення простору елементарних подій. Сума, добуток і різниця подій.
3. Класичне означення ймовірності. Означення і формули перестановки, комбінації і розміщення елементів.
4. Означення залежних і незалежних випадкових подій.
5. Визначення умовної ймовірності. Приклад.
6. Формули множення і додавання ймовірностей для двох залежних подій.
7. Формули моження і додавання ймовірностей для двох, та декількох незалежних випадкових подій.
8. Формули для обчислення ймовірності появи хочаб однієї випадкової події в n-незалежних випробуваннях.
9. Формула повної ймовірності.
10. Формула Байєса для ймовірності гіпотез.
11. Означення повторних незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Формула Бернуллі.
12. Найімовірніше число появи випадкової події (мода) – означення, формула для обчислення.
13. Локальна теорема Лаласа. Умови застосування. Приклад.
14. Інтегральна теорема Лапласа. Властивості інтегральної функції Лапласа.
15. Використання інтегральної теореми Лапласа. Приклад.
16. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій.

Лекційне заняття № 9 (2 год)
Тема 14. Одновимірні випадкові величини.

План лекційного заняття

1. Дискретні та неперервні випадкові величини.
2. Функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.
3. Числові характеристики дискретної випадкової величини.
4. Неперервна випадкова величина і її числові характеристики.
5. Основні закони розподілу ВВ.

Означення. Випадковою називають величину, яка внаслідок проведення експерименту прийме одне і тільки одне можливе значення, наперед не відоме і залежне від впливу випадкових факторів, дію яких наперед передбачити неможливо.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають *дискретною*. У протилежному випадку її називають *неперервною*.

Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z, ..., а їх можливі значення — малими $x; y; z, ...$.

Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й указати, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Означення. Співвідношення, що встановляє зв’язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають законом розподілу випадкової величини.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини X, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм імовірностей:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	......	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	.....	p_k

Оскільки випадкові події $(X = x_j)$ і $(X = x_m)$ є між собою несумісними $((X = x_i) \cap (X = x_m) = \varnothing$, $i \neq m$; $i, m = 1, 2, \ldots, k)$ і утворюють повну групу $\left(\bigcup_{j=1}^{k}\left(X = x_j\right) = '\Omega\right)$, то необхідною є умова нормування: $$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{k} p_i = 1. \qquad (1)$$

Наведену таблицю називають *рядом розподілу*.

Закон розподілу ймовірностей можна представити графічно.

Для цього на системі координат $(p_i\ O\ x_i)$, на осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини x_i, а на осі ординат — імовірності p_i цих можливих значень. Точки з координатами $(x_i;\ p_i)$ послідовно сполучають відрізками прямої. Утворену при цьому фігуру називають імовірнісним многокутником.

2. *Функція розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.*

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме: як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x) \tag{2}$$

$F(x) = P(X < x)$ - *це функція, що визначає імовірність того, що в наслідок експерименту випадкова величина набуває значення, меншого за x.* $F(x)$ *ще називають інтегральною функцією розподілу ВВ.*

Наприклад, $F(5) = P(X < 5)$ означає, що в результаті експерименту випадкова величина X (дискретна чи неперервна) може набути значення, яке міститься ліворуч від $x = 5$, що ілюструє рис. 1.

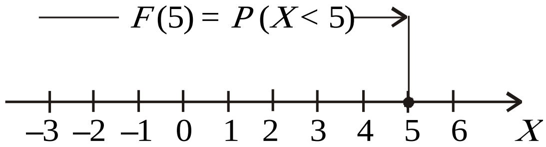


Рис. 1

Властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$. Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Із другої властивості $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення в деякому інтервалі $X = x \in [\alpha;\ \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції *F(x)* на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \tag{3}$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

Отже, для неперервної випадкової величини X справджуються такі рівності:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta). \tag{4}$$

3. Якщо $X \in \left]-\infty;\ \infty\right[$, виконуються два подані далі співвідношення.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

Оскільки подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від $-\infty$. А така подія є неможливою ($\varnothing$).

2) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

Подія $X < \infty$ полягає в тому, що випадкова величина X набуває числового значення, яке міститься ліворуч від $+\infty$. Ця подія є вірогідною (Ω), оскільки будь-яке число $X = x < \infty$

Із цих двох співвідношень можна зробити висновок: *якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку [a; b], то*

$$F(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \le a; \qquad F(x) = 1 \quad \text{для} \quad x > b. \tag{5}$$

<u>Приклад.</u> Записати функцію розподілу ДВВ заданої в табличній формі.

X	1	5	7	8	10
P	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}3; & 1 \le x < 5 \\ 0{,}5; & 5 \le x < 7 \\ 0{,}6; & 7 \le x < 8 \\ 0{,}9; & 8 \le x < 10 \\ 1; & x \ge 10 \end{cases}$$

3. *Числові характеристики дискретної випадкової величини.*

Закон розподілу ймовірностей як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні числові параметри, що характеризують випадкову величину сумарно. Ці параметри і називають *числовими характеристиками випадкових величин*. Такими *числовими характеристиками ВВ є математичне сподівання і дисперсія (середнє квадратичне відхилення)*

Математичне сподівання

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі Ω, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,. \tag{6}$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій: $M(C)=C$.

1. $M(CX) = CM(X)$.

3. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то
$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$

4. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то
$M(XY) = M(X)M(Y)$

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Наприклад, маємо дві ДВВ X і Y, закони розподілу яких задані таблицями:

x_i	– 0,5	– 0,1	0,1	0,5
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4

y_j	– 100	– 80	– 10	10	10	80
p_j	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Обчислимо $M(X)$ і $M(Y)$.

$$M(X) = \sum_{s=1}^{4} x_i p_i = -0{,}5 \cdot 0{,}4 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 =$$
$$= -0{,}2 - 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}2 = 0;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{6} y_j p_j = -100 \cdot 0{,}1 - 80 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}2 + 80 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}1 =$$
$$= -10 - 16 - 2 + 2 + 16 + 10 = 0.$$

Отже, два закони розподілу мають однакові математичні сподівання, хоча можливі значення для випадкових величин X і Y істотно різні. Із наведеного прикладу бачимо, що в разі рівності математичних сподівань ($M(X) = M(Y) = 0$) випадкові величини X і Y мають тенденцію до коливань відносно $M(X)$ та $M(Y)$, причому Y має більший розмах розсіювання відносно $M(Y)$, ніж випадкова величина X відносно $M(X)$. Тому математичне сподівання називають *центром розсіювання*. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають *дисперсією*.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{8}$$

Для обчислень дисперсіх зручно використовувати формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(x))^2 \tag{9}$$

де $M(X^2)$ - математичне сподівання квадрату випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини X дисперсія може обчислюватись за формулами (9), де $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$ і (10):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i; \tag{10}$$

Властивості дисперсії

1. Якщо C — стала величина, то: $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. Якщо A і B — сталі величини, то: $D(AX + B) = A^2 D(X)$.
4. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$
5. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то: $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною $(D(X \geq 0))$.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання. Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої ж розмірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{11}$$

Приклад . Обчислити числові хаактеристики ДВВ з прикладу 7.1.

X	1	5	7	8	10
P	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1

$M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}1 = 5{,}4.$

$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0{,}3 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 7^2 \cdot 0{,}1 + 8^2 \cdot 0{,}3 + 10^2 \cdot 0{,}1 = 39{,}4$.

$D(X) = M(X^2) - \left(M(x)\right)^2 = 39{,}4 - 5{,}4^2 = 10{,}24.$

$\sigma(X) = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2.$

4. *Неперервна виподкова величина і її числові характеристики.*

7.3.1. *Щільність імовірностей (диференціальна функція)*.

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою *щільності ймовірностей*, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції F(x):

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}, \qquad (12)$$

звідки $dF(x)=f(x)dx.$

Оскільки: $P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)\approx dF(x)=f(x)dx,$

то добуток $f(x)\,dx$ — ймовірність того, що випадкова величина X міститиметься у проміжку $[x, x+dx]$, де $dx=\Delta x$.

Геометрично на графіку щільності ймовірності $f(x)\,dx$ відповідає площа прямокутника з основою dx і висотою $f(x)$ (рис. 2).

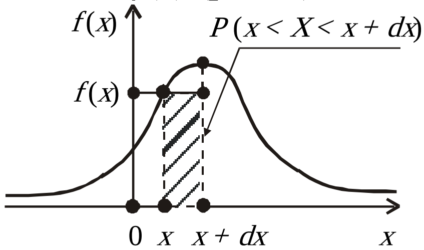


Рис. 2

Властивості f(x)

1. $f(x)\geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x=1.$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку $[a; b]$, то умова нормування має такий вигляд: $\int\limits_{a}^{в} f(x)dx=1.$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал $[\alpha;\beta]$ обчислюється за формулою: $P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$, або:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} dF(x)=F(x)\,|_{\alpha}^{\beta}=F(\beta)-F(\alpha).$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (13)$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу $[a; b]$, то

$$F(x)=\int\limits_{a}^{x} f(x)dx. \qquad (14)$$

Приклад. Маємо неперервну випадкову величину X , задану інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq -1;\\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1<x\leq 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{3}{64}(x+1)^2, & -1<x\le 3;\\ 0, & x<3.\end{cases}$$

Числові характеристики неперервної випадкової величини.

Математичне сподівання.

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X)=\int_{\Omega} x\, f(x)dx \tag{15}$$

Якщо $\Omega = (-\infty;\infty)$, то: $M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$. (16)

Якщо $\Omega = [a; b]$, то: $M(X)=\int_{a}^{в} x\, f(x)dx.$ (17)

Дисперсія НВВ.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx\ . \tag{18}$$

Якщо $X \in [a; b]$, то:

$$D(X)=\int_{a}^{ъ}(x-M(X))^2 f(x)dx\ . \tag{19}$$

Для обчислення дисперсії НВВ визначеної на інтервалі [a, b] доцільно використовувати формулу (7.9), *де математичне сподівання квадрату випадкової величини обчислюють за формулою:*

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx \tag{20}$$

Імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал [α, β].

Знаючи диференційну функцію розподілу можна обчислити ймовірність того, що НВВ прийме значення, що належить заданому інтервалу. Обчислення грунтуються на наступній теоремі.

Теорема. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення, що належить інтервалу [α, β], дорівнює означеному інтергалу від диференційної функції розподілу, взятому в межах від α до β.

$$p(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \tag{21}$$

або за формулою Ньютона-Лейбніця: $p(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ (22)

5. *Основні закони розподілу ВВ*

Біномінальний розподіл.

Нехай випадкова величина X – кількість появи події А в n незалежних дослідах, в кожному з яких ймовірність появи події А дорівнює p, а непояви – q =1-р. Очевидно, що X може приймати значення 0,1,2,..., n ймовірності яких обчислюються за формулою Бернуллі

Означення. Закон розподілу випадкової величини X, який має вигляд таблиці 5:

X	0	1	2	...	m	…	N
p				…		…	

називається біноміальним розподілом, якщо імовірність появи випадкової величини обчислюється за формуло. Бернуллі $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$

Таку назву він одержав у зв'язку з тим, що ймовірності співпадають з відповідними членами біному $(p+q)^n$:

Приклад. Скласти закон розподілу числа попадання в ціль при чотирьох пострілах, якщо ймовірність попадання при одному пострілі дорівнює 0,9.

Розв'язання. Випадкова величина X – число попадань в ціль при чотирьох пострілах – може прийняти значення 0,1,2,3,4, а відповідні їм ймовірності знаходимо за формулою Бернуллі:

Отже, даний закон розподілу можна представити таблицею:

X	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Рівномірний закон розподілу.

Неперервна випадкова величина X, що визначена на проміжку $[a, b]$, має рівномірний закон розподілу, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \qquad F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Числові характеристики

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{b+a}{2}; \qquad M(X) = \frac{b+a}{2}.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

де $M(X^2) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b x^2 dx = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3}.$

Тоді: $D(X) = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3} - \dfrac{(b+a)^2}{4} = \dfrac{(b-a)^2}{12}.$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

Нормальний закон розподілу.

Випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

де $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Отже, нормальний закон визначається звідси параметрами a і σ і називається загальним.

Тоді

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Якщо $a = 0$ і σ = 1, то нормальний закон називають *нормованим*.

У цьому разі

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty ,$$

тобто $f(x) = \varphi(x)$ є функцією Гаусса,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ для загального нормального закону залежно від параметрів a і σ зображені на рис. 3 і 4.

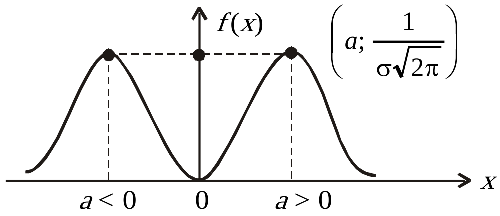


Рис. 3

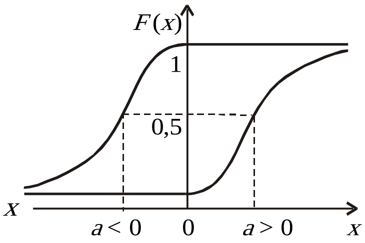


Рис. 4

Із рис. 3 бачимо, що графік $f(x)$ розміщений симетрично відносно умовно проведеного перпендикуляра в точку $X = a$. Зі зміною значень параметра a крива $f(x)$ зміщується праворуч, якщо $a > 0$ або ліворуч, якщо $a < 0$, не змінюючи при цьому своєї форми; $f(a) = \max$, отже, мода $M_o = a$.

Із рис. 4 бачимо, що графік $F(x)$ є неспадною функцією, оскільки $f(x) = F'(x) > 0$.

По визначенню медіани маємо

$$F(M_e)= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Me} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 0,5 \Rightarrow \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{Me}-a}{\sigma}=0 \Rightarrow \mathrm{Me}=a.$$

Отже, $\mathrm{Me} = a$.

Зі зміною значень параметра a крива $F(x)$ зміщується праворуч для $a > 0$ або ліворуч при $a < 0$, не змінюючи при цьому форми кривої.

Отже, для нормального закону $M_o = M_e = a$.

Зі зміною значень σ при $a = \text{const}$ змінюється крутизна кривих у околі значень $X = a$, що унаочнюють рис.5 і 6.

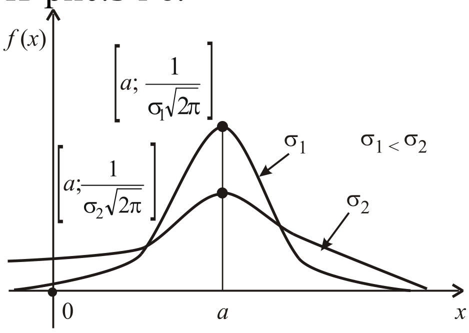


Рис. 5

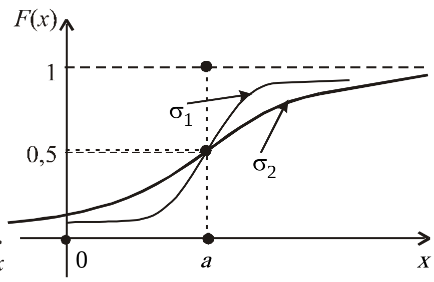


Рис. 6

Загальний нормальний закон позначають: $N(a; \sigma)$. Так, наприклад, $N(-2; 4)$ — загальний нормальний закон із значенням параметрів $a = -2$, $\sigma = 4$.

Нормований нормальний закон позначають $N(0; 1)$.

<u>*Формули для обчислення ймовірностей подій:*</u> $\alpha < x < \beta$; $|x - a| < \delta$.

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = z \to x = \sigma z + a,\ dx = \sigma\,dz \\ \alpha < x < \beta \to \dfrac{\alpha - a}{\sigma} < z < \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Отже,

1. $P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right).$

2. $P(|x-a| < \delta) = P(a - \delta < x < a + \delta) = |\alpha = a - \delta,\ \beta = a + \delta| =$

$$= \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Отже, $P(|x-a| < \delta) = 2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right).$

Для $N\,(0,\,1)$ формули наберуть такого вигляду:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha);$$

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi(\delta).$$

Правило трьох сигм для нормального закону

Коли $\delta = 3\sigma$, то маємо:

$$P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Практично ця подія при одному експерименті здійсниться, а тому її вважають практично вірогідною. Звідси:

$$P(|x-a| > 3\sigma) = 1 - P(|x-a| < 3\sigma) = 1 - 0{,}9973 = 0{,}0027.$$

Тобто ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина X, яка має закон розподілу $N\,(a;\,\sigma)$, не потрапить у проміжок $[a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$, дорівнює 0,0027. Це становить 0,27%, тобто практично вважається, що ця подія внаслідок проведення одного експерименту не здійсниться.

Експоненціальний закон розподілу.

Експоненціальним законом випадкової величини називають гамма-розподіл, в якому $\alpha = 1$.

Для цього закону розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ зображені на рис. 7 і 8.

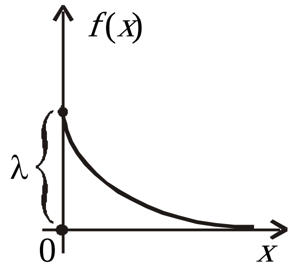


Рис. 7

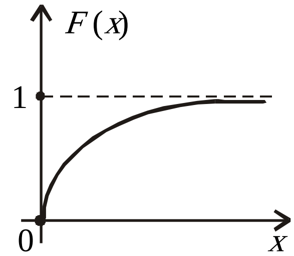


Рис. 8

<u>Числові характеристики.</u>

1. $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.
2. $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.
3. $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.
4. Me для експоненціального закону визначається так:

$$F(\mathrm{Me})=\frac{1}{2}\to 1-e^{-\lambda\mathrm{Me}}=\frac{1}{2}\to e^{-\lambda\mathrm{Me}}=\frac{1}{2}\to -\lambda\mathrm{Me}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2.$$

$$\mathrm{Me}=\frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Серед усіх законів неперервних випадкових величин лише експоненціальному притаманна властивість — відсутність післядії, а саме: якщо пов'язати випадкову величину із часом, то для цього закону минуле не впливає на передбачення подій у майбутньому. Цю властивість експоненціального закону використовують у марківських випадкових процесах, теорії масового обслуговування, теорії надійності.

Властивість відсутності післядії унаочнює рис. 9.

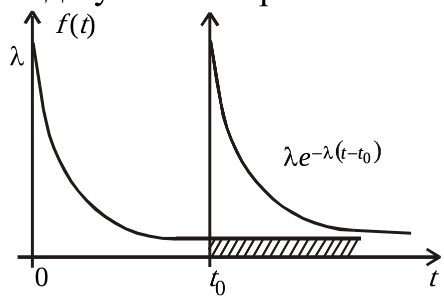


Рис. 9

На рис. 9 зображено щільність експоненціального закону $\lambda e^{-\lambda t}$. Коли збіжить час t_0, який вигляд матиме щільність експоненціального закону на проміжку $[t_0, \infty]$?

Розглянемо заштриховану область. Щоб звести заштриховану область до стандартного для щільності вигляду, маємо виконати таке нормування, щоб площа, обмежена $f(t)$ на проміжку $[t_0, \infty]$, дорівнювала одиниці. Дістанемо нову щільність імовірностей, визначену для $t \in [t_0, \infty]$, яка буде точною копією початкової функції.

<u>Питання для самостійного контролю знань</u>

1. Означення дискретних і неперервних випадкових величин. Приклад.
2. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Приклад.

3. Інтегральна функція розподілу неперервних випадкових величин. Властивості інтегральної функції розподілу.
4. Диференціальна функція розподілу неперервних випадкових величин, її властивості.
5. Числові характеристики дискретних випадкових величин.
6. Числові характеристики непрервних випадкових величин.
7. Властивості математичного сподівання і дисперсії випадкової величини.
8. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин, фукція розподілу.
9. Основні числові характеристики для системи двох дискретних випадкових величин.
10. Кореляційний момент, коефіцієн кореляції та його властивості.
11. Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин.
12. Умовне математичне сподівання, умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення.
13. Біномінальний закон розподілу ймовірностей цілочисленних випадкових величин.
14. Пуассонівський закон розподілу ймовірностей цілочисленних випадкових величин.
15. Рівномірний закон розподілу ймовірностей цілочисленних випадкових величин.
16. Основні закони розподілу неперервних випадкових величин (нормальний, експотенціальний, рівномірний, розподіл Стьюдента).
17. Числові характеристики неперервних випадкових величин розподіленних за основними законами.

Лекційне заняття № 10-11 (4 год)
Тема 14. Статистичні розподіли вибірок та їх числові характеристики.

План лекційного заняття

1. Генеральна та вибіркова сукупності.
2. Варіаційний ряд.
3. Дискретний статистичний розподіл вибірки.
4. Інтервальний статистичний розподіл вибірки.
5. Статистичні оцінки параметрів розподілу.
6. Оцінка генерального середнього. Стійкість вибіркових середніх.
7. Генеральна дисперсія. Оцінка генеральної дисперсії за виправленою вибірковою.
8. Точність статистичної оцінки, довірча ймовірність(надійність), довірчий інтервал.
9. Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу.
10. Оцінка істиного значення вимірюваної величини.
11. Довірчі інтервали для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу.
12. Оцінка точності вимірювань.

1. *Генеральна та вибіркова сукупності*

Основним завданням математичної статистики є систематизація, обробка і використання статистичної інформації для виявлення статистичних закономірностей ознаки або ознак певної сукупності елементів.

Математична статистика розв’язує дві категорії задач:

1) статистичне оцінювання (точкове, інтервальне) параметрів генеральної сукупності;

2) перевірка правдивості статистичних гіпотез про значення параметрів генеральної сукупності або про закон розподілу ознаки генеральної сукупності на підставі обробки результатів вибірки.

Оскільки суцільна обробка всіх елементів сукупності практично неможлива, то, як правило, застосовується вибірковий метод. Отже, розрізняють генеральну і вибіркову сукупності.

Множина Ω однотипних елементів, яким притаманні певні кількісні ознаки (розміри, вага, маса тощо), утворює генеральну сукупність. Кількість усіх елементів генеральної сукупності називають її обсягом і позначають символом N, значення якого здебільшого невідоме.

Кожна непорожня підмножина A множини Ω ($A \subset \Omega$) випадково вибраних елементів із генеральної сукупності називається вибіркою. Кількість усіх елементів вибірки називають її обсягом і позначають символом n. Його значення відоме, причому воно набагато менше за обсяг генеральної сукупності ($n << N$).

2. *Варіаційний ряд.*

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають *варіантою*.
Зростаючий числовий ряд варіант називають *варіаційним*.
Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$), число n_i називають *частотою варіанти* x_i.
При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \ , \tag{1}$$

де k — кількість варіант, що різняться числовим значенням;
n — обсяг вибірки.
Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її *відносною частотою* і позначають через W_i , тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n} . \tag{2}$$

Для кожної вибірки виконується рівність: $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X, яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд — це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють *інтервальний варіаційний ряд*.

На практиці для зручності, як правило, розглядають інтервальні варіаційні ряди, у котрих інтервали є рівними між собою.

3. *Дискретний статистичний розподіл вибірки.*

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом вибірки*.
Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією: $F^*(x)$.
Емпірична функція $F^*(x)$ та її властивості. Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} , \tag{4}$$

називається *емпіричною*, або *комулятою*.
Тут n — обсяг вибірки;
n_x — кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x;
$F^*(x)$ — називають ще *функцією накопичених відносних частот*.

Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
2) $F(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;
3) $F(x)\big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;
4) $F(x)$ є неспадною функцією аргументу x, а саме: $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 \geq x_1$.

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i; n_i)$, або $(x_i; W_i)$.

У першому випадку ламану лінію називають *полігоном частот*, у другому — *полігоном відносних частот*.

Приклад. За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки потрібно:

$X = x_i$	–6	–4	–2	2	4	6
n_i	5	10	15	20	40	10
W_i	0,05	0,1	0,15	0,2	0,4	0,1

1. Побудувати $F^*(x)$ і зобразити її графічно;
2. Побудувати полігони частот і відносних частот.

Згідно з означенням та властивостями $F^*(x)$ має такий вигляд:

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0 & x \le -6, \\ 0{,}05 & -6 < x \le -4, \\ 0{,}15 & -4 < x \le -2, \\ 0{,}3 & -2 < x \le 2, \\ 0{,}5 & 2 < x \le 4, \\ 0{,}9 & 4 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графічне зображення $F^*(x)$ подано на рис. 1.

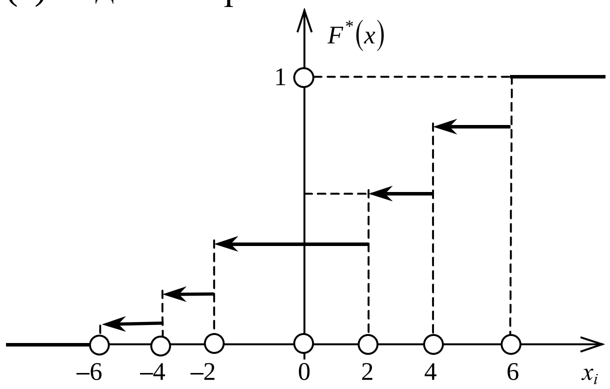


Рис.1

Полігони частот та відносних частот зображено на рис. 2, 3.

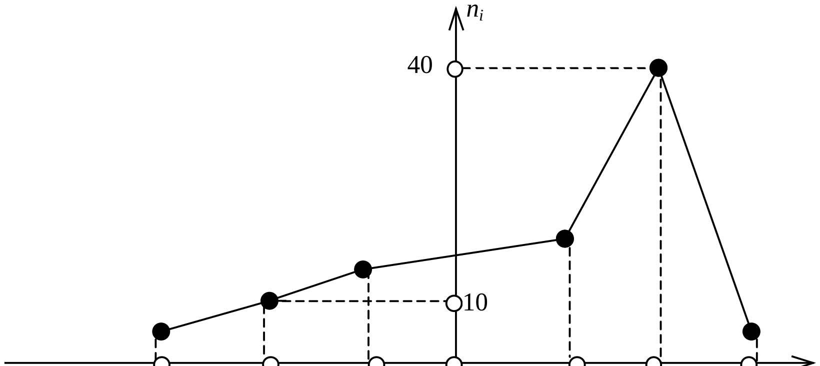


Рис. 2

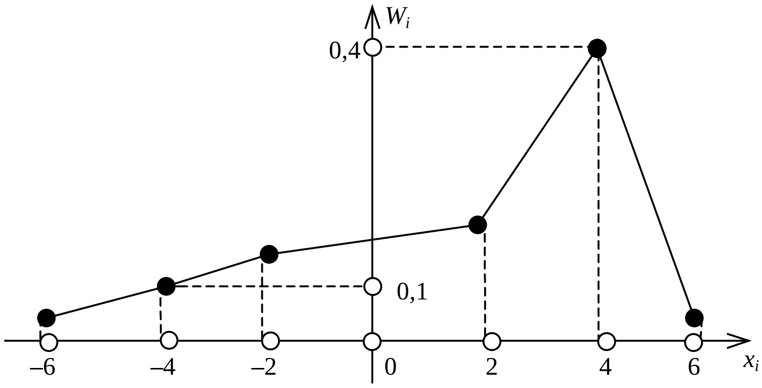


Рис. 3

<u>*Числові характеристики*</u>:

1) *вибіркова середня величина* $\bar{x}_{\text{В}}$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i n_i}{n}, \tag{5}$$

називають *вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки*.

Тут x_i — варіанта варіаційного ряду вибірки;

n_i — частота цієї варіанти;

n — обсяг вибірки ($n = \sum n_i$).

Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i}{n}; \tag{6}$$

2) *відхилення варіант*. Різницю $(x_i - \bar{x}_{\text{В}})n_i$ називають відхиленням варіант.

При цьому

$$\sum (x_i - \bar{x}_{\text{В}})n_i = \sum x_i n_i - \sum \bar{x}_{\text{В}} n_i = n \cdot \bar{x}_{\text{В}} - n \cdot \bar{x}_{\text{В}} = 0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулеві;

3) *мода* (Mo^*). *Модою дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається *одномодальним*, коли має дві моди — *двомодальним* і т. д.;

4) *медіана* (Me^*). *Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки* називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

5) *дисперсія.* Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_{\text{В}}$ вибирається дисперсія.

Дисперсія вибірки — це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_{\text{В}}$, яке обчислюється за формулою

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_{\text{В}})^2 n_i}{n} = D_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_{\text{В}})^2; \tag{7}$$

6) *середнє квадратичне відхилення вибірки* $\sigma_{\text{В}}$. При обчисленні $D_{\text{В}}$ відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки X, тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}}, \tag{8}$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\overline{x_B}$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X;

7) *розмах* (R). Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\bar{x}_{\text{В}}$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою $x_{\max}$ і найменшою $x_{\min}$ варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається *розмахом*

$$R = x_{\max} - x_{\min}\,; \tag{9}$$

8) *коефіцієнт варіації* V. Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_{\text{В}}$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_{\text{В}}}{\bar{x}_{\text{В}}} 100\%. \tag{10}$$

4. *Інтервальний статистичний розподіл вибірки.*

Перелік часткових інтервалів і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *інтервальним статистичним розподілом вибірки*.

У табличній формі цей розподіл має такий вигляд:

h	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	…	$x_{k-1} - x_k$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	N_k
W_i	W_1	W_2	W_3	…	W_k

Тут $h = x_i - x_{i-1}$ є довжиною часткового i-го інтервалу.

Інтервальний статистичний розподіл вибірки можна подати графічно у вигляді гістограми частот або відносних частот, а також, як і для дискретного статистичного розподілу, емпіричною функцією $F^*(x)$ (комулятою).

Гістограма частот та відносних частот. Гістограма частот являє собою фігуру, яка складається з прямокутників, кожний з яких має основу h і висоту $n_i \frac{1}{h}$.

Гістограма відносних частот є фігурою, що складається з прямокутників, кожний з яких має основу завдовжки h і висоту, що дорівнює $W_i \frac{1}{h}$.

Приклад8.2. За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки

$h = 8$	0—8	8—16	16—24	24—32	32—40	40—48
n_i	10	15	20	25	20	10
W_i	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2	0,1

побудувати гістограму частот і відносних частот.

Гістограми частот і відносних частот наведені на рис. 8.3, 8.4.

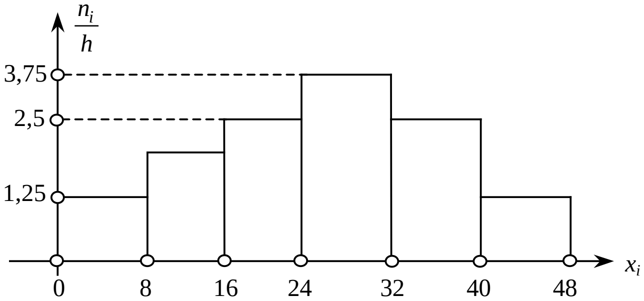


Рис. 4

Площа гістограми частот $S = \sum h\frac{n_i}{h} = \sum n_i = n = 100.$

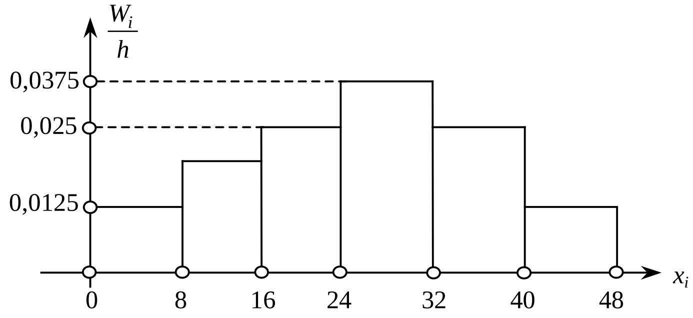


Рис. 5

Площа гістограми відносних частот

$$S = \sum h\frac{W_i}{h} = \sum W_i = 1 .$$

<u>*Емпірична функція $F^*(x)$ (комулята).*</u> При побудові комуляти $F^*(x)$ для інтервального статистичного розподілу вибірки за основу береться припущення, що ознака на кожному частинному інтервалі має рівномірну щільність імовірностей. Тому комулята матиме вигляд ламаної лінії, яка зростає на кожному частковому інтервалі і наближається до одиниці.

<u>Приклад 8.3</u> Для заданого інтервального статистичного розподілу вибірки

h = 10	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60
n_i	5	15	20	25	30	5

побудувати $F^*(x)$ і подати її графічно.

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}05 & 0 < x \le 10, \\ 0{,}2 & 10 < x \le 20, \\ 0{,}4 & 20 < x \le 30, \\ 0{,}65 & 30 < x \le 40, \\ 0{,}95 & 40 < x \le 50, \\ 1 & 50 < x \le 60. \end{cases}$$

Графік $F^*(x)$ зображено на рис. 6.

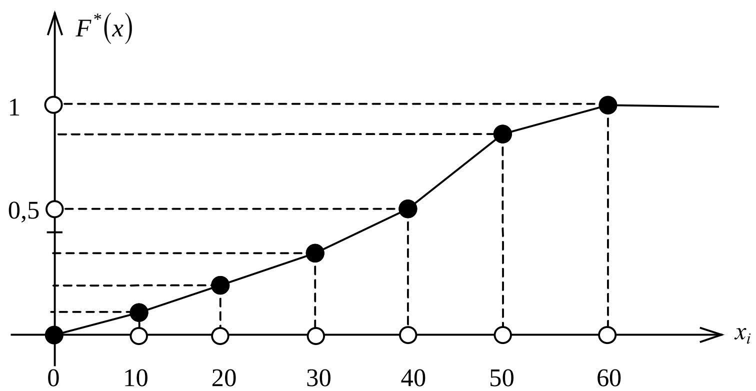


Рис. 6

Аналогом емпіричної функції $F^*(x)$ у теорії ймовірностей є інтегральна функція $F(x) = P(X < x)$.

Медіана. Для визначення медіани інтервального статистичного розподілу вибірки необхідно визначити медіанний частковий інтервал. Якщо, наприклад, на i-му інтервалі $[x_{i-1} - x_i]$ $F^*(x_{i-1}) < 0,5$ і $F^*(x_i) > 0,5$, то, беручи до уваги, що досліджувана ознака X є неперервною і при цьому $F^*(x)$ є неспадною функцією, всередині інтервалу $[x_{i-1} - x_i]$ неодмінно існує таке значення $X = \text{Me}$, де $F^*(\text{Me}) = 0,5$.

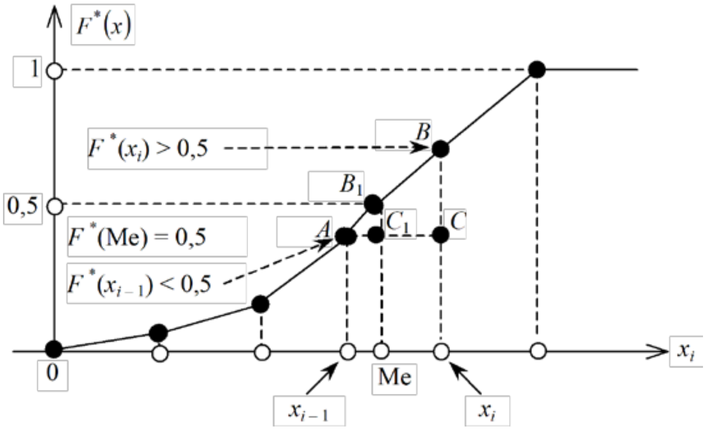


Рис. 7

З подібності трикутників ΔABC і ΔAB_1C_1, зображених на рис. 7, маємо:

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\text{Me}^* - x_{i-1}} = \frac{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})}{0,5 - F^*(x_{i-1})} \to \text{Me}^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} h, \qquad (12)$$

де $h = x_i - x_{i-1}$ називають *кроком*, або шириною інтервала.

Мода. Для визначення моди інтервального статистичного розподілу необхідно знайти модальний інтервал, тобто такий частинний інтервал, що має найбільшу частоту появи. Використовуючи лінійну інтерполяцію, моду обчислимо за формулою

$$\text{Mo}^* = x_{i-1} + \frac{n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1}}{2n_{\text{Mo}} - n_{\text{Mo}-1} - n_{\text{Mo}+1}} h, \qquad (13)$$

де x_{i-1} — початок модального інтервалу;
h — довжина, або крок, часткового інтервалу;
n_{Mo} — частота модального інтервалу;
$n_{\text{Mo}-1}$ — частота домодального інтервалу;
$n_{\text{Mo}+1}$ — частота післямодального інтервалу.

5. *Статистичні оцінки параметрів розподілу.*

Припустимо, що необхідно оцінити кількісну ознаку генеральної сукупності, причому з деяких теоретичних суджень вдалося встановити тип розподілу досліджуваної ознаки. Тоді виникає задача оцінки параметрів цього теоретичного розподілу. Наприклад, якщо ця ознака розподілена за нормалним законом, то необхідно оцінити (приблизно знайти) математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення, так як ці два параметра повністтю визначають нормальний розподіл. Зазвичай, у розподяджені дослідника є лише дані вибірки, через ці данні і виражають оцінюваний параметр генеральної сукупності.

Рзглядаючи данні вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ як незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$, можна вважати, що знайти статистичнк оцінку невідомого параметра генеральної сукупності – це знайти функцію від спостережених випадкових величин, що і дає приблизне значення оцінюваного параметра.

Таким чином, *статистичною оцінкою невідомого параметра теоретичного розподілу називають функцію від спостережених випадкових величин*.

Незміщені, ефективні та обгрунтовані статистичні оцінки.

Для того щоб статистичні оцінки забезпечували «хороше» наближення оцінюваних параметрів, вони мають задовольняти певним вимогам, а саме: *статистичні оцінки мають бути незміщені, ефективні і обгрунтовані.*

Позначимо Θ^* статистичну оцінку невідомого параметра Θ теоретичного розподілу, тоді:

1. *Незміщеною* називають статистичну оцінку Θ^*, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваному параметру Θ при будь-якому об'ємі вибірки, $M(\Theta^*) = \Theta$.

Незміщенність статистичної оцінки усуває систематичні помилки.

2. *Ефективною* називають статистичну оцінку Θ^*, яка при заданому об'ємі вибірки забезпечує найменшу можливу дисперсію.

При дослідженні вибірок великого об'єму ($n\to\infty$) до статитичних оцінок застосовується вимога обгрунтованості.

3. *Обгрунтованою* називають статистичну оцінку, яка при $n\to\infty$ наближається за ймовірністтю до оцінюваного параметру. Наприклад, якщо дисперсія незміщеної оцінки при $n\to\infty$ наближається до нуля, то така оцінка є обгрунтованою.

6. *Оцінка генерального середнього. Стійкість вибіркових середніх.*

Генеральною середньою називають середнє арифметичне значень ознаки генеральної сукупності.

Якщо якщо усі значення $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N різні, то:

$$\overline{x_{г}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

Якщо якщо усі значення $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N мають відповідні частоти $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причому $\sum_{i=1}^{k} N_i = N$,то генеральна середня є середня арифметична зважена:

$$\overline{x_{г}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i N_i}{N}.$$

Якщо розглядати досліджувану ознаку X генеральної сукупності як випадкову величину, то математичне сподівання ознаки X дорівнює генеральній середній цієї ознаки: $M(X) = \overline{x_{г}}$

Можна довести, що якщо в якості оцінки генерального середнього обрати *вибіркове середнє,* то останнє буде *незміщеною оцінкою генерального середнього*, тобто: $M(\overline{X_{в}}) = \overline{x_{г}}$.

Можна довести, що *вибіркова середня* також буде *обгрунтованою оцінкою генеральної середньої.* Дійсно, якщо припустити, що випадкові величини $N_1, N_2, \ldots, N_k$ мають обмежені дисперсії, то за теоремою Чебишева, при збільшенні об'єму вибірки

($n\to\infty$), середнє арифметичне досліджуваних величин ($\overline{X_в}$) наближається за ймовірністтю до математичного сподівання кожної з цих величин, тобто до генеральної середньої.

Таким чином, *для вибірок досить великого об'єму вибіркова середня наближається за ймовірністтю до генеральної середньої – вибіркова середня є обгрунтованою оцінкою генеральної середньої*

Із вище сказаного можна сформулювати властивість *стійкості вибіркових середніх*: *якщо за декількома вибірками досить великого обсягу, однієї генеральної сукупності, знайти вибіркові середні, то вони будуть між собою приблизно рівні*.

7. *Генеральна дисперсія. Оцінка генеральної дисперсії за виправленою вибірковою.*

Для того щоб охарактеризувати розсіювання значень кількісної ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього, вводять зведену характеристику – генеральну дисперсію.

Генеральною дисперсією $D_г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від її середнього значення $\overline{x_г}$.

Якщо якщо усі значення $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N різні, то:

$$D_г = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x_г})^2}{N}.$$

Якщо якщо усі значення $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N мають відповідні частоти $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причому $\sum_{i=1}^{k} N_i = N$,то:

$$D_г = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_г})^2 N_i}{N}.$$

Генеральним середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із генеральної дисперсії: $\sigma_г = \sqrt{D_г}$.

Можна довести, що *вибіркова дисперсія є зміщеною статистичною оцінкою генеральної дисперсії*, тобто математичне сподівання вибіркової дисперсії не дорівнює генеральній дисперсії, а дорівнює

$$\mathrm{M}(D_в) = \frac{n-1}{n} D_г$$

Легко виправити вибіркову дисперсію, щоб, таким чином, забезпечити незміщенність оцінки генеральної дисперсії. Достатньо для цього помножити $D_в$ на дріб $\frac{n}{n-1}$. Зробивши це отримаємо «виправлену» дисперсію, яку позначають S^2, і яка є незміщеною статистичною оцінкою генеральної дисперсії. Дійсно:

$$\mathrm{M}(S^2) = M\left[\frac{n}{n-1} D_в\right] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot D_г = D_г.$$

Таким чином, в якості оцінки генеральної дисзнаперсії приймають виправлену вибіркову дисперсію:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_г})^2 N_i}{n-1}. \qquad (14)$$

8. *Точність статистичної оцінки, довірча ймовірність(надійність), довірчий інтервал.*

Точковою називають статистичну оцінку, що визначається *одним числом*. Усі оцінки роглянуті вище – точкові.

При дослідженні вибірок малого об'єму точкові оцінки можуть значно відрізнятися від оцінюваного параметра, приводячи до грубих помилок. З цієї причини при дослідженні вибірок малого об'єму використовують інтервальні оцінки.

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу, в межах яких лежить числове значення оцінюваного параметра.

Інтервальні оцінки визначають точність та надіність статистичних оцінок.

Точністтю статистичної оцінки називають таке додатнє число δ, що дорівнює абсолютному значенню різниці між статистичною оцінкою та оцінюваним параметром: $|\theta - \theta^*|= \delta$.

Надійністтю (довірчою ймовірністтю) оцінки Θ параметра Θ називають імовірність γ, з якою виконується нерівність* $|\theta - \theta^*| < \delta$. Зазвичай надійність оцінки задається наперед і в якості γ беруть число близьке до одиниці. Наприклад 0,999; 0, 95; 0,99.

Нехай імовірність того, що $|\theta - \theta^*| < \delta$ рівна γ:

$P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma \Leftrightarrow P(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta) = \gamma$/

Дане співвідношення необхідно розуміти наступним чином: *імовірність того, що інтервал (Θ* – δ; Θ* + δ) містить в собі (покриває) невідомий параметр Θ, дорівнює γ.*

Довірчим називають інтервал Θ – δ; Θ* + δ)*, який покриває невідомий параметр із заданою надійністтю γ.

9. *<u>Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу</u>*.

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально N(a,σ). Необхідно оцінити невідоме математичне сподівання a за вибірковим середнім $\overline{X_в}$. Тобто, треба знайти довірчий інтервал, покриваючий невідомий параметр a з надійністтю γ.

Розглянема два випадки: перший – відоме середнє квадратичне відхилення; другий – невідоме середнє квадратичне відхилення.

<u>У першиму випадку</u> вибіркове середнє $\bar{x}$вважаємо випадковою величиною $\bar{X}$ ($\bar{x}$ різне для різних вибірок) і вибіркове значення ознаки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – однаково розподілені незалежні випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (ці значення також різняться для різних вибірок). Іншими словами, математичне сподівання кожної з цих випадкових величин дорівнює a, середнє квадратичне відхилення рівне σ.

Приймається без доведення припущення: якщо випадкова величина X розподілена нормально, то вибіркова середня $\bar{X}$, знайдена у незалежних випробуваннях, також розподілена за нормальним законом. Параметри розподілу $\bar{X}$ такі (ст 216. [5]):

$M(\bar{X}) = a$; $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Із означення довірчої ймовірності $P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma$, використовуючи формулу імовірності відхилення випадкової величини $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, замінивши X через $\bar{X}$ і σ через $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, отримаємо:

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \qquad (15)$$

де $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \Leftrightarrow \delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

тоді остаточно формула (15) матиме вигляд:

$$P(\bar{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) = \gamma \quad (16)$$

Зміст отриманого співвідношення наступний: з надійністтю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $(\bar{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ покриває невідомий параметр a. Точність оцінки $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Число t визначається з рівності $2\Phi(t) = \gamma$, або $\Phi(t) = \gamma/2$, де $\Phi(t)$ – функція Лапласа, значення якої табульовані.

Другий випадок – нехай кількісна ознака X генеральної сукупності має нормальний розподіл, але середнє квадратичне відхилення σ невідоме. Необхідно оцінити невідоме математичне сподівання a за допомогою довірчих інтервалів.

Доведено, що за даними вибірки можна побудувати випадкову величину з можливими значеннями, які позначимо t і яка має вигляд:

$$\mathrm{T} = \frac{\bar{X}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}. \quad (17)$$

Ця випадкова величина розподілена за законом Ст'юдента з $k = n$-1 ступенями волі. $\bar{X}$ - вибіркове середнє, S – виправлене середнє квадратичне відхилення, n – об'єм вибірки.

Як видно з (8.17) розподіл Ст'юдента визначається одним параметром – об'ємом вибірки n і незалежить від a і σ.

Виконавши розрахунки маємо остаточну формулу для довірчої ймовірності випадкової величини розподіленої за законом Ст'дента:

$$P(\bar{X} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}) = \gamma \quad (18)$$

t_γ – називають коефіцієнтом Ст'юдента, значення t_γ. приведені в статистичних таблицях і визначаються при заданих n та γ.

10. *Оцінка істиного значення вимірюваної величини.*

Нехай виконується n незалежних рівноточних випробувань деякої фізичної величини, істине начення якої наперед невідоме. Будемо розглядати результати окремих вимірів як незалежні випадкові величини X_1, X_2, …, X_n, що мають однакові математичні сподівання рівні a (істине значення вимірюваної величини), однакові дисперсії σ^2 (виміри рівноточні) і розподілені нормально (таке припущення доведено практично). Таким чином усі припущення які були зроблені при виведені формул (16), (18) виконуються і ці формули можна використати для оцінки істиного значення вимірюваної величини. Іншими словами, істине значення вимірюваної величини можна оцінити за середнім арифметичним результатів окремих вимірів за допомогою довірчих інтервалів. Так як σ невідоме доцільно використовувати формулу (18).

Приклад. За даними дев'яти незалежних рівноточних вимірів фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів окремих вимірів $\bar{X}$ = 42,319 і виправлене середнє квадратичне відхилення S = 5,0. Оцінити істине значення вимірюваної величини з надійністтю γ = 0,95.

Істине значення вимірюваної величини дорівнює її математичному сподіванню. Тому задача зводиться до оцінки математичного сподівання за допомогою довірчих інтервалів. Так як σ невідоме, то використовуємо формулу (18):

$\bar{X}$ - $t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$ < a <$\bar{X}$ + $t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$, використовуючи стат.таблиці (додаток 3) за γ = 0,95 і n = 9, знаходимо t_γ = 2,31.

Точність оцінки: δ = $t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$. = 2,31· $\frac{5}{9}$ = 3,85.

Межі довірчого інтервалу:

$\bar{X}$ - $t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$ = 42,319 – 3,85 = 38,469;

$\bar{X} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$ = 42,319 + 3,85 = 46,169.

Таким чином, з надійністтю 0,95 істине значення вимірюваної величини міститься в межах: 38,469 < a < 46,169.

11. *Довірчі інтервали для оцінки середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу.*

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена за нормальним законом. Треба оцінити невідоме генеральне середнє квадратичне відхилення σ за «виправленим» вибірковим середнім квадратичним відхиленням S.

Для того щоб оцінюваний параметр σ із заданою надійністтю γ покривався довірчим інтервалом, необхідно виконання умови:

$$P(|\sigma - S| < \delta) = \gamma, \text{ або } P((S - \delta < \sigma < S + \delta) = \gamma,$$

тоді довірчий інтервал $S - \delta < \sigma < S + \delta$ можна перетворити у рівносильну нерівність:

$$\mathrm{S}\left(1 - \frac{\delta}{S}\right) < \sigma < S\left(1 + \frac{\delta}{S}\right). \quad (19)$$

Позначивши $q = \frac{\delta}{S}$, отримаємо:

$$\mathrm{S}(1 - q) < \sigma < S(1 + q). \quad (20)$$

На практиці для визначення q користуються таблицями, при відомих значення n і γ (додоток 4).

1. *Оцінка точності вимірювань.*

У теорії похибок прийнято точність вимірювань (точність приладу) характеризувати за допомогою середнього квадратичного відхилення σ випадкових помилок вимірювань. Для оцінки σ використовють «виправлене» середнє квадратичне відхилення S.

Поскільки результати вимірювань взаємно незалежні, мають однакове математичне сподівання (істине зна = чення вимірюваної величини) і однакову дисперсію (у випадку рівноточних вимірів), то теорія викладена в попередньому пункті 8.6.5., застосовна для оцінки точності вимірювань.

Приклад. Виконано 15 рівно точних вимірювань фізичної величини. Обчислено «виправлене» середнє квадратичне відхилення S = 0,12. Визначити точність вимірювань з надійністю 0,99.

Точність вимірювань характеризується середнім квадратичним відхиленням σ випадкових похибок, тому задача зводиться до обчислення довірчого інтервалу (20), що покриває σ із заданою надійністю 0,99 .

За таблицею за $\gamma = 0{,}99$ і $n = 15$ знаходимо $q = 0{,}73$. Шуканий довірчий інтервал матиме вигляд:

$0{,}12(1 - 0{,}73) < \sigma < 0{,}12(1 + 0{,}73)$,

$0{,}03 < \sigma < 0{,}21$.

Питання для самостійного контролю знань

1. Статистичний розподіл вибірок (варіанта, частота, варіаційний ряд).
2. Визначеня неперервної і і дискретної варіації, гістограма,. Полігон, кумулята статистичного розподілу.
3. Числові характеристики вибірки – варіаційний розмах, середнє лінійне відхилення, середнє квадратичне відхилення.
4. Моменти статистичного розподілу, коефіцієнт асиметрії, ексцес.
5. Означення статистичної оцінки генеральної сукупності.
6. Точкові оцінки генеральної сукупності (зміщені і не зміщені, ефективні і спроможні).
7. Числові характеристики вибірки (мода, медіана, середнє).
8. Означення генеральної і вибіркової середньої, генеральної і вибіркової дисперсії, виправлена дисперсія.
9. Інтервальні оцінки, довірчий інтервал, довірчий інтервал для генерального середнього нормально розподіленої випадкової величини.