

## ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ВИБІРКОВОГО ПРОСТОРУ ПАРАМЕТРІВ НЕСТАЦІОНАРНОГО ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТУ

Суворі вимоги до достовірності оброблюваних і вихідних даних накладаються зростаючим обсягом інформації, що переробляється при стендових випробуваннях в автоматизованих системах управління і в інформаційних системах, застосуванням складних структур зберігання інформації типу баз даних і важливістю розв'язуваних задач. Істотної шкоди в управлінні об'єктом можуть нанести помилки в інформації, яка обробляється окремою задачею або підсистемою системи управління. При передачі таких помилкових даних в систему можна посилити можливі негативні наслідки для всієї системи. Процес переробки інформації включає етапи збору, передачі, обробки та видачі вихідних даних. На кожному з етапів можливе внесення помилки, яка може бути виявлена через деякий проміжок часу після її внесення. Тому виникає необхідність в створенні математичної моделі вибіркового простору параметрів для розв'язання задачі відновлення втраченої інформації. Аналіз ефективності існуючих методів розв'язання задачі відновлення втраченої інформації показав, що результати відновлення істотно залежать від параметрів математичної моделі, використаних в цих методах. Ефективним інструментом розв'язання складних задач є використання методів математичного моделювання. Таким чином, математичне моделювання процесу відновлення втраченої інформації в інформаційних системах є актуальним.

Для реалізації поставленої мети в статті обґрунтована математична модель вибіркового простору параметрів, виходячи з фізичних передумов, у вигляді множини випадкових процесів зі стаціонарними  $r$ -ми приростами, що мають стаціонарний взаємозв'язок.

Вибірковий простір  $r$ -х різниць вимірюваних параметрів метрично транзитивно і отримано з вихідної множини безперервних нестаціонарних вимірюваних параметрів досліджуваних динамічних об'єктів введенням операторів квантування за часом і рівнем і різницевого оператора.

Ключові слова: математична модель, вибірковий простір станів, простір параметрів, нестаціонарний динамічний об'єкт, відтворення інформації, взаємозв'язок параметрів.

А.О. ДЫМОВА  
Херсонский государственный аграрно-экономический университет  
ORCID: 0000-0002-5294-1756

## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ВЫБОРОЧНОГО ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Строгие требования к достоверности обрабатываемых и выходных данных накладываются возрастающим объемом перерабатываемой информации при стендовых испытаниях в автоматизированных системах управления и в информационных системах, применением сложных структур хранения информации типа баз данных и важностью решаемых задач. Существенный ущерб в управлении объектом могут нанести ошибки в информации, которая обрабатывается отдельной задачей или подсистемой системы управления. При передаче таких ошибочных данных в систему можно усилить возможные отрицательные последствия для всей системы. Процесс переработки информации включает этапы сбора, передачи, обработки и выдачи выходных данных. На каждом из этапов возможно внесение ошибки, которая может быть обнаружена через некоторый промежуток времени после ее внесения. Поэтому возникает необходимость в создании математической модели выборочного пространства параметров для решения задачи восстановления потерянной информации. Анализ эффективности существующих методов решения задачи восстановления потерянной информации показал, что результаты восстановления существенно зависят от параметров математической модели, использованных в этих методах. Эффективным инструментом решения сложных задач является использование методов математического моделирования. Таким образом, математическое моделирование процесса восстановления потерянной информации в информационных системах является актуальным.

Для реализации поставленной цели в статье обоснована математическая модель выборочного пространства параметров, исходя из физических предпосылок, в виде множества случайных процессов со стационарными  $r$ -ми приращениями, имеющими стационарную взаимосвязь.

Выборочное пространство  $r$ -х разниц измеряемых параметров метрически транзитивно и

получено из исходного множества непрерывных нестационарных измеряемых параметров исследуемых динамических объектов введением операторов квантования по времени и уровню и разностного оператора.

Ключевые слова: математическая модель, выборочное пространство состояний, пространство параметров, нестационарный динамический объект, восстановление информации, взаимосвязь параметров.

H. DYMOVA  
Kherson State Agrarian and Economic University  
ORCID: 0000-0002-5294-1756

## STUDY OF THE MODEL A NONSTATIONARY DYNAMIC OBJECT'S OF THE SELECTED PARAMETER SPACE

Strict requirements for the reliability of the processed and output data are imposed by the increasing volume of processed information during bench tests in automated control systems and information systems, the use of complex information storage structures such as databases and the importance of the tasks being solved. Substantial damage in information processed by a separate task or a subsystem of the control system can cause significant damage to the management of an object. By transmitting such erroneous data to the system, possible negative consequences for the entire system can be amplified. The information processing process includes the stages of collecting, transferring, processing and issuing output data. At each of the stages, it is possible to introduce an error, which can be detected after a certain period of time after its introduction. Therefore, it becomes necessary to create a mathematical model of a sample space of parameters for solving the problem of recovering lost information. Analysis of the effectiveness of existing methods for solving the problem of recovering lost information showed that the results of recovery significantly depend on the parameters of the mathematical model used in these methods. An effective tool for solving complex problems is the use of mathematical modeling methods. Thus, mathematical modeling of the process of recovering lost information in information systems is relevant.

To achieve this purpose, the article substantiates a mathematical model of the sample space of parameters, proceeding from physical prerequisites, in the form of a set of random processes with stationary  $r$ -th increments that have a stationary relationship.

The sample space of  $r$ -th differences of the measured parameters is metrically transitive and is obtained from the initial set of continuous non-stationary measured parameters of the investigated dynamic objects by introducing time and level quantization operators and a difference operator.

Keywords: mathematical model, the sample space of states, the parameter space, transient dynamic object, the recovery of information, the interlink of parameters.

### Постановка проблеми

При стендових випробуваннях динамічних об'єктів, згідно програми випробувань, контролюється певна множина параметрів, які на перехідних режимах, як правило, мають вигляд нестационарних випадкових процесів, інформація про які в окремих випадках пропадає. Тому виникає проблема відновлення цієї інформації.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задача відновлення зниклої інформації на малих інтервалах може бути розв'язана детермінованими методами за допомогою інтерполяційних і екстраполяційних формул Лагранжа, Ньютона та ін. [1, 2].

При статистичному підході розв'язання задачі відновлення методами екстраполяції та інтерполяції Колмогорова-Вінера на інтервалах, що перевищують інтервали автокореляції відновлюваної функції, призводить до великих помилок. Енергетичні можливості будь-якого динамічного об'єкта кінцеві і, отже, кінцеві прирости величин наростання і убування параметрів вибіркового простору контрольованих параметрів (швидкостей - перших різниць, прискорень - других різниць і так далі).

З припущення про незмінний функціональний зв'язок між параметрами (наприклад, для термодинамічних процесів - адіабатичні, ізотермічні, ізобаричні) приймемо для побудови математичної моделі наявність стаціонарної пов'язаності між приростами вибіркового простору параметрів. На підставі цього сформулюємо математичну модель множини вимірюваних параметрів [1, 4].

### Формулювання мети дослідження

Метою роботи є створення математичної моделі вибіркового простору параметрів для розв'язання задачі відновлення втраченої інформації. Для математичного розв'язання цієї задачі потрібно:

- 1) створити фізичну модель досліджуваного процесу;
- 2) на підставі фізичної моделі побудувати математичну модель, що задовольняє деяким критеріям;
- 3) аналітично або чисельно розв'язати поставлену задачу.

### Викладення основного матеріалу дослідження

Розглядається динамічний об'єкт, на виході якого  $n$ -мірний простір параметрів  $\Omega^n$  (точки якого будемо позначати  $\omega^n$ ) з наступними властивостями. В  $\Omega^n$  задане борелівське поле підмножин, що містить також само  $\Omega^n$ , і на цьому полі визначена цілком адитивна невід'ємна функція множини  $P$ , така, що  $P(\Omega^n) = 1$ , яка називається ймовірнісною мірою на  $\Omega^n$ . Дійсні функції  $\varphi(\omega^n)$ , що задані на  $\Omega^n$  і вимірювані відносно  $P$ , називаються випадковими величинами.

В просторі випадкових величин визначені оператор середнього значення (математичне очікування) і оператори середнього значення для всіх степенів  $\varphi(\omega^n)$  (початкові моменти), які задаються рівностями

$$\begin{aligned} M\varphi(\omega^n) &= \int_{\Omega} \varphi(\omega^n) dP(\omega^n) = \alpha_1, \\ M[\varphi(\omega^n)]^i &= \int_{\Omega} \varphi^i(\omega^n) dP(\omega^n) = \alpha_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Випадкові величини  $\varphi_j(\omega^n)$  вважаються стохастично залежними, тобто при будь-якому виборі  $q$  борелевських множин  $E_1^m, E_2^m, \dots, E_q^m$  у дійсному просторі  $\Omega^n$  буде мати місце нерівність (2)

$$P\{\varphi(\omega^m) \in E_j^m; j = \overline{1, q}\} \neq \prod_{j=1}^q P\{\varphi(\omega^m) \in E_j^m\}. \quad (2)$$

На прямому добутку простору  $\Omega^n$  та однопараметричного простору  $-\infty < T < \infty$  визначені функції двох змінних  $\varphi(t, \omega^n)$  таким чином, що при фіксованому  $t = t_i$ ,  $\varphi(t_i, \omega^n)$  повинна бути вимірюваною функція  $\omega^n$  (тобто випадковою величиною).

Для функцій  $\varphi(t, \omega^n)$  введені оператори квантування за рівнем і за часом:

$$A\{\varphi(t, \omega^n)\} = \varphi[t, k_1(\delta_1 \omega^n)] \quad (3)$$

$$B\{\varphi(t, \omega^n)\} = \varphi[k_2(\delta_2 t), \omega^n] \quad (4)$$

$$AB\{\varphi(t, \omega^n)\} = \varphi[k_2(\delta_2 t), k_1(\delta_1 \omega^n)], \quad k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

де  $(\delta_1 \omega^n)$  - елементарний  $n$ -мірний об'єм;

$(\delta_2 t)$  - елементарний (одичинний) інтервал часу.

Введення операторів  $A$  та  $B$  відповідає переходу до вибіркового простору  $\Omega_1^n$  меншої потужності, але тієї ж розмірності і до переходу від безперервної випадкової функції  $\varphi_j(t, \omega^n)$ ;  $j = \overline{1, n}$  до випадкової функції з дискретним аргументом та кінцевою рахунковою областю визначення аргументів, або до часового ряду [5]:

$$\{\varphi_j\} = \{\varphi_j[k_2(\delta_2 t), k_1(\delta_1 \omega^n)]\}. \quad (6)$$

Часовий ряд (6) є в загальному випадку нестационарним векторним рядом. Для часового ряду  $\{\varphi_j\}$  введемо різницевий оператор  $\Delta$ :

$$\Delta \varphi_{j, \nu} = \varphi_{j, \nu+1} - \varphi_{j, \nu}, \quad (7)$$

де  $\varphi_{j, \nu+1}$  та  $\varphi_{j, \nu}$  - наступний  $(\nu + 1)$ -й і попередній  $\nu$ -й члени ряду.

Аналогічно, застосувавши оператор  $\Delta$  до  $\{\Delta \varphi_j\}$ , отримаємо  $\{\Delta^2 \varphi_j\}$  і так далі при цьому  $\Delta^r = \Delta(\Delta^{r-1})$ , де  $\Delta^1 = \Delta$ .

Для зручності вважаємо  $\Delta^0 \{\varphi_j\} = \{\varphi_j\}$ .

Проста індукція показує, що

$$\Delta^0 \varphi_{j,v} = \sum_{k=0}^r C_r^k (-1)^{r+k} \varphi_{1,v+k}, \quad (8)$$

де  $C_r^k$  - число сполучень з  $r$  по  $k$ .

Формула (8) допускає обіг: можна виразити  $\varphi_{j,v}$  через різності, що стоять зліва в (8).

Справді

$$\varphi_{j,v} = -\Delta \varphi_{j,v} + \varphi_{j,v+1}. \quad (9)$$

Використовуючи (9) до  $\Delta \varphi_{j,v}$  та  $\varphi_{j,v+1}$ , отримуємо

$$\varphi_{j,v} = \Delta^2 \varphi_{j,v} - 2\Delta \varphi_{j,v+1} + \varphi_{j,v+1}.$$

Продовжуючи таким же чином приходимо до тотожності

$$\varphi_{j,v} = \sum_{k=0}^r C_r^k (-1)^{r+k} \varphi_{1,v+k}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (10)$$

При  $r - k = 1$

$$\varphi_{j,v} = \varphi_{j,0} + \sum_{i=1}^v \Delta \varphi_{j,i}. \quad (11)$$

В силу припущення про стаціонарність і стаціонарну зв'язність  $r$ -х різниць [6], будемо вважати

$$M \Delta_{\delta_2 t}(\varphi_{j,v}) = G(\delta_2 t) \quad (12)$$

та  $G(\delta_2 t) = const$  при  $\delta_2 t = const$ .

Тут  $(\varphi_{j,v}) = \begin{pmatrix} \varphi_{j,v}^{(1)} \\ \varphi_{j,v}^{(2)} \\ \vdots \\ \varphi_{j,v}^{(n)} \end{pmatrix}$  – реалізація випадкового  $n$ -мірного вектора, яка отримується в результаті заміру

$n$ -параметрів в  $\nu$ -й момент часу;

$(\Delta_{\delta_2 t}^r \varphi_{j,v}) = (\Delta^{r-1} \varphi_{j,v+1}) - (\Delta^{r-1} \varphi_{j,v}) = \begin{pmatrix} \Delta^r \varphi_{j,v}^{(1)} \\ \Delta^r \varphi_{j,v}^{(2)} \\ \vdots \\ \Delta^r \varphi_{j,v}^{(n)} \end{pmatrix}$  – реалізація випадкового  $n$ -мірного вектора  $r$ -х

різниць параметрів, виміряних в  $\nu$ -й та  $(\nu + 1)$ -й момент часу, і

$$G(\delta_2 t) = M \begin{pmatrix} \Delta^r \varphi_{j,v}^{(1)} \\ \Delta^r \varphi_{j,v}^{(2)} \\ \vdots \\ \Delta^r \varphi_{j,v}^{(n)} \end{pmatrix} = const, \quad \text{при } \delta_2 t = const$$

Внаслідок припущення про стаціонарність  $r$ -х різниць, математичне очікування не залежить від моменту часу та індекс  $\nu$  можна прибрати.

Позначим  $M \Delta^r \varphi_j^{(i)} = \mu_i$  – математичне очікування  $r$ -й різниці  $i$ -го параметра. Тоді коваріаційна матриця випадкового вектора  $(\Delta^r \varphi)$  (в припущенні, що процес  $\Delta^r \varphi$  відмінний від вінеровського) може бути записана

$$V = M \begin{pmatrix} (\Delta^r \varphi_j^{(1)} - \mu_1)^2 & (\Delta^r \varphi_j^{(1)} - \mu_1)(\Delta^r \varphi_j^{(2)} - \mu_2) & \cdots & (\Delta^r \varphi_j^{(1)} - \mu_1)(\Delta^r \varphi_j^{(n)} - \mu_n) \\ (\Delta^r \varphi_j^{(2)} - \mu_2)(\Delta^r \varphi_j^{(1)} - \mu_1) & (\Delta^r \varphi_j^{(2)} - \mu_2)^2 & \cdots & (\Delta^r \varphi_j^{(2)} - \mu_2)(\Delta^r \varphi_j^{(n)} - \mu_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Delta^r \varphi_j^{(n)} - \mu_n)(\Delta^r \varphi_j^{(1)} - \mu_1) & (\Delta^r \varphi_j^{(n)} - \mu_n)(\Delta^r \varphi_j^{(2)} - \mu_2) & \cdots & (\Delta^r \varphi_j^{(n)} - \mu_n)^2 \end{pmatrix}$$

Якщо позначити

$$M(\Delta^r \varphi_j^{(i)} - \mu_i)^2 = \sigma_i^2 \quad (13)$$

та

$$\frac{M(\Delta^r \varphi_j^{(i)} - \mu_i)(\Delta^r \varphi_j^{(l)} - \mu_l)}{\sigma_i \sigma_l} = \rho_{i,l}, \quad (14)$$

то для стаціонарності та стаціонарної зв'язності  $r$ -х різниць вимірюваних параметрів повинні припустити  $\sigma_i^2 = const$  для кожного  $i = \overline{1, n}$  і вважати послідовності  $m$ -залежними та  $m_l$ -взаємозалежними [4].

Послідовність  $\{\Delta^r \varphi_{j,v}^{(i)}, i = \overline{1, n}, v = 0, 1, 2, \dots\}$  називається  $m$ -залежною, якщо  $\Delta^r \varphi_{j,v_1}^{(i)}$  та  $\Delta^r \varphi_{j,v_2}^{(i)}$  для деякого цілого  $m$  незалежні при  $|v_2 - v_1| \geq m$  та

$$\lim_{(v_2 - v_1) \rightarrow m} \frac{M[(\Delta^r \varphi_{j,v_1}^{(i)} - \mu_i)(\Delta^r \varphi_{j,v_2}^{(i)} - \mu_i)]}{\sigma_i^2} = \rho_{i,i} \rightarrow 0. \quad (15)$$

Аналогічно визначимо  $m_l$ -взаємозалежність

$$\lim_{(v_2 - v_1) \rightarrow m_l} \frac{M[(\Delta^r \varphi_{j,v_2}^{(i)} - \mu_i)(\Delta^r \varphi_{j,v_1}^{(i)} - \mu_i)]}{\sigma_i \sigma_l} = \rho_{i,l} \rightarrow 0. \quad (16)$$

При реалізації алгоритмів відновлення інформації необхідно безперервно контролювати умови стаціонарності і стаціонарної зв'язності. Найбільш простим алгоритмом контролю стаціонарності є алгоритм, оснований на нерівності Чебишева, згідно якого ймовірність того, що точка відхилиться від свого математичного очікування більше ніж на  $3\sigma$ , менше  $1/9$ .

$$P(\Delta^r \varphi_{1,v}^{(i)} - \mu_i \geq 3\sigma_i) \leq \frac{\sigma_i^2}{9\sigma_i^2} = \frac{1}{9}.$$

При заданій ймовірності можна обрати число точок контролю. Наприклад, оцінку стаціонарності можна виконати за трьома точками. Ймовірність того, що три точки посліпіль  $P_{(3)}$  відхиляться від свого математичного очікування більше ніж на  $3\sigma$   $P_{(3)} = P_1 P_2 P_3 = P_1^3 = \frac{1}{9^3} = \frac{1}{729}$  подія малоімовірна.

Протилежна подія - зміна математичного очікування  $\left(P = \frac{728}{729} \approx 1\right)$  - подія майже достовірна, і процес нестационарний відносно математичного очікування. Аналогічні алгоритми будуть для перевірки стаціонарності відносно дисперсії та інших моментів. Більш строгі (і більш складні) алгоритми контролю стаціонарності можна побудувати, використовуючи нерівність Колмогорова [7, 8] для мартингалів, а також нерівність Кантеллі і нерівність Піка [5, 8], які є нерівностями чебишевського типу.

### Висновки

Вибірковий простір  $r$ -х різниць вимірюваних параметрів метрично транзитивно (метрична транзитивність та ергодичність в силу кінцівці ймовірнісної міри еквівалентні) [9]. Він отриманий з початкової множини безперервних нестационарних вимірюваних параметрів досліджуваних динамічних об'єктів введенням операторів квантування за часом та рівнем і різницевого оператора  $\Delta$ .

### Список використаної літератури

1. Анго А. Математика для электро и радиоинженеров. / А. Анго. М.: Наука, 1964. 780 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (в 3-х томах). / Г.М. Фихтенгольц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. т.1 - 680с.; т.2 - 864с.; т.3 -2001, 662с.
3. Димова Г.О. Методи і моделі упорядкування експериментальної інформації для ідентифікації і прогнозування стану безперервних процесів: монографія. / Ганна Олегівна Димова. Херсон: Видавництво ФОП Вишемирський В.С., 2020. 176 с.
4. Яглош А.М. Корреляционная теория процессов со стационарными n-ми приращениями. / А.М. Яглош. *Математический сборник*. 1955. №37(79), С. 141–196.
5. Хеннан Э. Анализ временных рядов. / Э. Хеннан. М.: Наука, 1974. 215 с.
6. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. / А.О. Гельфонд. М.: Гостехиздат, 1959. 400 с.
7. Карташов Г.Д. О нахождении функциональной зависимости между случайными величинами. / Г.Д. Карташов. *Теория вероятностей и ее применение*. 1965, том 10, выпуск 3, С. 584–593.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (в 2-х томах). / В.Феллер. М.: Мир, 2012. Т.1 – 528 с. Т.2. – 766 с.
9. Лоэв М. Теория вероятностей. / М. Лоэв. М.: ИЛ, 1962. 720 с.

### References

1. Ango A. Matematika dlya elektro i radioinzhenerov [Mathematics for electrical and radio engineers] Moscow: Nauka, 1964. 780 p.
2. Fikhtengolts G.M. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. (v 3-kh tomakh) [Differential and integral calculus course. (in 3 volumes)] Moscow: FIZMATLIT, 2003.vol. 1 - 680 p .; vol. 2 - 864 p .; vol. 3 -2001, 662 p.
3. Dymova H.O. Metody i modeli uporyadkuvannya eksperymental'noyi informatsiyi dlya identyfikatsiyi i prohnouzuvannya stanu bezperervnykh protsesiv: monohrafiya [Methods and models for ordering experimental information for identifying and predicting the state of continuous processes] Kherson: Publishing house FOP Vyshemyrskyy V.S., 2020. 176 p.
4. Yaglosh A.M. Korrelyatsionnaya teoriya protsessov so statsionarnymi n-mi prirashcheniyami [Correlation theory of processes with stationary n-th increments] Matematicheskiy sbornik [Mathematical collection], 1955. no. 37 (79), pp. 141–196.
5. Hennan E. Analiz vremennykh ryadov [Analysis of time series] Moscow: Nauka, 1974. 215 p.
6. Gelfond A.O. Ischisleniye konechnykh raznostey [Finite Difference Calculus] Moscow: Gostekhizdat, 1959. 400 p.
7. Kartashov G.D. O nakhozhenii funktsional'noy zavisimosti mezhdu sluchaynymi velichinami [Finding the functional relationship between random variables] Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniye [Probability theory and its application], 1965, volume 10, issue 3, pp. 584–593.
8. Feller V. Vvedeniye v teoriyu veroyatnostey i yeye prilozheniya (v 2-kh tomakh) [Introduction to the theory of probability and its applications (in 2 volumes)] Moscow: Mir, 2012.Vol. 1 – 528 p. T.2. – 766 p.
9. Loev M. Teoriya veroyatnostey [Probability Theory] Moscow: IL, 1962. 720 p.