ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра менеджменту та інформаційних технологій

В И Щ А М А Т Е М А Т И К А

С А М О С Т І Й Н О Г О В И В Ч Е Н Н Я Д И С Ц И П Л І Н И

ВИКЛАДАЧ: ДЕБЕЛА І.М.

ХЕРСОН - 2020

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Посібник містить опис основних розділів курсу вищої математики, що викладається у морському інституті післядипломної освіти імені контр-адмірала Ф.Ф. Ушакова.

Структурно посібник складається розділів, у кожному з яких окрім теоретичного матеріалу приведені приклади і задачі з детальним поясненням методу їх розв'язування. Кожний розділ посібника закінчується переліком питань та задач для самостійного контролю рівня засвоєння знань.

Метою створення навчального посібника є забезпечення прилеглих дисциплін фундаментального циклу підготовки необхідним математичним апаратом, формування у майбутніх фахівців базових математичних знань для розв'язування практичних задач зі сфери їх професійної діяльності; умінь аналітичного мислення та математичного формулювання прикладних задач з орієнтацією на проблеми фахової діяльності.

Основним завданням навчального посібника є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, що відповідають напряму їх фахової підготовки: означень, теорем, правил. Формування навиків самостійного розв'язку задач предмету «Вища математика». Формування бази знань та практичних навиків використання математичного апарату у процесі розв'язування прикладних фахових задач, побудови найпростіших математичних моделей реальних процесів, розвиток аналітичного мислення.

<u>РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.</u>

1.1.*Основні відомості про матриці*

Матрицею розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця $m \times n$ чисел, що містить m рядків та n стовбців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці. Індексами позначають: i-номер рядка ($i = 1 \div m$); j – номер стовпчика, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Матриця що складається з одного рядка (стовпчика) називається матрицею рядком (стовпцем), або вектором.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Дві матриці вважають рівними, якщо вони однакового розміру і елементи цих матриць попарно рівні між собою.

Матриця усі елементи якої нулі, називається нульовою, позначають 0. Квадратною матрицею називають матрицю у якої однакова кількість рядків і стовбців ($m=n$).

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Число n називають порядком квадратної матриці. Елементи a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратної матриці складають головну діагональ матриці, елементи a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} – побічну діагональ.

Діагональною називають квадратну матрицю, усі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулеві.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Одиничною називають діагональну матрицю, у якої усі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Позначають E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця називається *верхньою трикутною*, якщо усі елементи матриці, що розташовані нижче головної діагоналі нулі і *нижньою трикутною*, якщо усі елементи матриці, що розташовані вище головної діагоналі рівні нулю.

1.2.*Лінійні операції над матрицями та їх властивості*

Лінійними операціями над матрицями називають операції додавання, віднімання матриць та множення матриці на число.

Сумою (різницею) двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, однакової розмірності $m \times n$, називається така матриця $C = (c_{ij})$ розмірності $m \times n$, кожен елемент якої є сумою (різницею) відповідних елементів матриць A і B, тобто: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$.

<u>Приклад 1.1</u>.Знайти суму і різницю двох матриць A і B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}; \quad D = A - B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число α називається матриця $B = (b_{ij})$, елементи якої визначають як добуток числа α на елементи матриці A, тобто $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. Записують у вигляді $B = \alpha A = A\alpha$.

Матриця $(-1)A$ називається протилежною до матриці A і позначається $-A$.

Властивості лінійних операцій ад матрицями:

1. $A+B = B+A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $A+0 = A$
4. $A+(-A) = 0$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
7. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
8. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

1.3. *Добуток матриць, властивості операції множення матриць.*

Арифметична операція множення дійсна лише для *узгоджених* матриць. Дві матриці A і B називаються *узгодженими*, якщо кількість стовбців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Нехай матриця $A = (a_{ij})$ має розмірність $m \times n$, а матриця $B = (b_{ij})$ розмірність $n \times k$, тоді добутком матриці A на матрицю B називається матриця $C = (c_{ij})$ розмірністю $m \times k$, кожен елемент якої є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовбця матриці B,

тобто: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

<u>Приклад 1.2</u>. Знайти матрицю С = $A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

<u>Зауваження</u>: у загальному випадку операція множення матриць *не комутативна*, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$. Так за даними прикладу 2 маємо: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq A \cdot B$. Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці A і B називають *комутативними*.

Властивості операції множення матриць:

1. $A \cdot E = E \cdot A = A$
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
3. $(A \cdot B)\, C = A(B \cdot C)$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5. $(A + B)\, C = A \cdot C + B \cdot C$
6. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$

1.4. *Піднесення матриці до степеню, транспонування матриць*

Операція піднесення матриці до степеню дійсна лише для *квадратних матриць*.

Цілим додатнім степенем A^n , де $n>1$, квадратної матриці A називається добуток n матриць, рівних A, тобто $A^n = A \cdot A ... A ...$

За означенням $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$, $(A^n)^m = A^{nm}$

<u>Приклад 1.3</u>. Знайти A^2, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Зауваження: $A^n \cdot = 0$, не означає, що матриця $A=0$.

Матриця A^T називається *транспонованою до матриці A,* якщо у матриці A рядки замінити стовбцями, зберігши при цьому значення елементів.

Приклад 1.4. Транспонувати матрицю A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Властивості транспонованих матриць:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

1.5. *Визначники квадратних матриць, властивості визначників.*

Кожній квадратній матриці $A=(a_{ij})$ порядку n з дійсними або комплексними елементами можна однозначно поставити у відповідність дійсне або комплексне число Δ, яке називається визначником матриці A:

$$\Delta = \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1},$$

де a_{i1} –елементи першого стовбця матриці A, M_{i1} –визначник матриці $(n-1)$-го порядку, що отримується з A вилученням її i-го рядка і першого стовбця. M_{i1} - *н*азивається мінором елемента a_{i1} матриці A.

У загальному випадку *мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij} матриці A порядку n називається визначник матриці $(n-1)$-го порядку, одержаний з матриці A вилученням її i-го рядка і j – го стовбця. *Алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij} матриці A порядку n називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Тоді можна дати ще одне означення визначника матриці A: *визначником матриці A називається число, що обчислюється як сума добутків елементів будь-якого рядка або стовбчика на їх алгебраїчні доповнення.*

Визначник матриці другого порядку визначається як різниця добутків елементів головної та побічної діоганалей:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Визначник матриці третього порядку визначається за правилом трикутника:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Визначник трикутної матриці (також і діагональної) дорівнює добутку елементів її головної діагоналі.

Властивості визначників:

1. при транспонування матриці її визначник не змінюється;
2. якщо усі елементи деякого рядка (стовбця) матриці є нулями, то визначник такої матриці дорівнює нулю;
3. при перестановці двох рядків (стовбців) матриці визначник змінює знак на протилежний;
4. спільний множник усіх елементів рядка (стовбця) можна винести за знак визначника;
5. визначник матриці, що містить два пропорційні рядки (стовбці) дорівнює нулеві;
6. якщо *i*-й рядок (стовбець) матриці *C* є сумою відповідних *i*-х рядків (стовбців) матриць *A* і *B*, а усі інші рядки (стовбці) матриць *C, A, B* відповідно рівні між собою, то *ΔC = ΔA + ΔB*;
7. значення визначника не зміниться, якщо до елементів його одного рядка (стовбця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовбця), помножені на довільне число;
8. визначник добутку матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць.

<u>Приклад 1.5.</u> Обчислити визначник матриці трьома способами: 1) за правилом трикутника; 2) розкладенням визначника на алгебраїчні доповнення; 3) використавши властивості визначників.

1) $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot(-2) + (-2)\cdot3\cdot2 + (-2)\cdot0\cdot1 - 1\cdot1\cdot2 - (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) - 3\cdot0\cdot3 = -12$$

2) $$\Delta = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) + 2\cdot(-2) + 1\cdot(-2) = -12$$

3) Переставимо місцями перший і третій рядки, виносячи з третього рядка спільний множник:

$$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

4) Послідовно множимо перший рядок на 2 і додаємо до другого рядка, потім на (-3) і додаємо до третього рядка:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

5) Другий рядок множимо на 2 і додаємо до третього:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = -12$$, обчислили визначник трикутної матриці.

1.6. *Обернена матриця*

Оберненою матрицею до квадратної матриці A називається така матриця A^{-1}, для якої виконується рівність $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = E$, де E – одинична матриця. Для знаходження оберненої матриці доцільно використовувати формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{ij})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $(A_{ij})^{\mathrm{T}}$ – трансформована матриця, елементами якої є алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ елементів a_{ij} матриці A; Δ – визначник матриці A.

Квадратна матриця називається не виродженою, або не особливою, якщо визначник матриці відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$). У протилежному випадку ($\Delta = 0$) матриця називається особливою, або виродженою і оберненої до неї матриці не існує. Тобто можна сформулювати наступну теорему:

<u>*Теорема*</u> (необхідна і достатня умова існування оберненої матриці).

Обернена матриця A^{-1} існує тоді і тільки тоді, якщо матриця A не вироджена.

<u>Приклад 1.6</u>. Знайти матрицю обернену до даної матриці: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Знайдемо визначник матриці A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$ - матриця А на вироджена і до неї існує обернена A^{-1}.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів мтриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Отже обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Властивості не вироджених матриць:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$
3. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
4. $\det (A^{-1}) == \dfrac{1}{\det A}$.

1.7. *Ранг матриці. Елементарні перетворення матриці.*

Якщо в матриці A розмірності $m\times n$ викреслити будь-які рядки і стовбці, то можна виділити квадратні підматриці k–го порядку, де $k \le min\ (m,n)$. Визначники таких підматриць називають *мінорами k–го порядку матриці A*. Наприклад, з матриці А розмірності 3×4 можна отримати підматриці першого, другого та третього порядку.

Рангом матриці називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Ранг матриці позначається $rangA$, або $r(A)$.

Зауваження:

1.) ранг матриці A розмірності $m\times n$ завжди не більше значення мінімального з двох чисел m та n;

2.) $r(A)=0$ тоді і тільки тоді, якщо усі елементи матриці рівні нулеві;

3.) для квадратної матриці n-*го* порядку $r(A)= n$ тоді і лише тоді, коли матриця A невироджена.

Приклад 1.7. Визначити ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Мінор другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, при обчисленні мінорів третього порядку виявляється, що рівними нулю будуть лише ті мінори 3-го порядку, що містять обчислений Δ, як мінор:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

У такому випадку обчислення усіх інших мінорів 3-го порядку не доцільно і ранг матриці дорівнює двом.

Елементарні перетворення матриці. Елементарними перетвореннями називають такі дії над матрицями:

1.) Відкидання нульового рядка (стовбця) матриці.

2.) Множення усіх елементів рядка (стовбці) матриці на число відмінне від нуля.

3.) Перестановка місцями рядків (стовбців) матриці.

4.) Додавання до елементів одного рядка (стовбця) відповідних елементів іншого рядка (стовбця), помножених на будь-яке число.

5.) Транспонування матриці.

<u>Теорема:</u> *Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці*.

<u>Приклад 1.8.</u> Визначити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

При обчисленні рангу матриці доцільно виконати елементарні перетворення які приведуть матрицю до трапецієвидної (або трикутної) форми (усі елементи нижче головної діагоналі рівні нулю, або усі елементи останніх рядків рівні нулю і елементи головної діагоналі відмінні від нуля). Якщо елемент a_{11}=0, то перестановками рядків (стовбців) необхідно добитися протилежного $a_{11} \neq 0$. У нашому прикладі $a_{11}=1 \neq 0$; елементи першого рядка послідовно множимо на (-2), на (-3) та на (-4) і додаємо відповідно до другого, третього і четвертого рядків:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\2&2&1&3&1\\3&1&4&-1&0\\4&4&2&6&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&-8&1&-7&-3\\0&-8&-2&-2&-2\end{pmatrix}\to$$

Помножимо другий рядок на (-2) і додаємо до третього і четвертого рядків послідовно, результатом додавання другого і четвертого рядків є нульовий рядок, який відкидаємо.:

$$\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&0&3&-5&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&0&3&-5&-1\\&&&&\end{pmatrix}$$

Остання матриця містить мінор третього порядку відмінний від нуля:

$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&1\\0&-4&-1\\0&0&3\end{vmatrix}=-12\neq 0$, отже ранг матриці дорівнює 3,

(*r(A) рівний кількості діагональних елементів трикутної матриці*).

Властивості рангів матриці:

1.) $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

2.) $r(A+B)\geq /r(A)-r(B)/$

3.) $r(AA^T)=r(A)$

4.) $r(AB)\leq min\{r(A);r(B)\}$

5.) $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$, *де n* – число стовбців матриці A або рядків матриці B

6.) $r(AB)=r(A)$, якщо В квадратна матриця і $detB\neq 0$.

1.8.1. *Питання для самостійного контролю знань*.

1. Означення матриці.
2. Які види матриць ви знаєте?
3. Які операції над матрицями називаються лінійними?
4. .Властивості лінійних операцій над матрицями.
5. Добуток матриць: які матриці називаються узгодженими, властивості добутку матриць, піднесення матриці до степеню.
6. Визначники квадратних матриць; означення визначника, його властивості, способи обчислення визначників.
7. Мінор і алгебраїчне доповнення: означення і застосування.
8. Обернена матриця: означення оберненої матриці, необхідна і достатня умова існування оберненої матриці.

9. Які дії над матрицями називаються елементарними перетвореннями?

10. Ранг матриці: означення рангу матриці, співвідношення для рангу матриць, теореми про ранг матриці.

1.8.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Знайти суму, добуток і різницю матриць *A* і *B*.

а). $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

б). $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

Задача №2. Знайти добуток матриць *A* і·*B*. Обчислити добуток матриці *A* на число α = -3.

$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$

Задача№3. Знайти значення матричного многочлена $Z = 2A^2-6A+5E$,

при $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, якщо E - одинична матриця третього порядку.

Задача №4. Обчислити визначники

а). $\begin{vmatrix}-8 & 5\\ -5 & 1\end{vmatrix}$ *б).* $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}$

в). $\begin{vmatrix}1 & -5 & 3\\ 4 & 0 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ *г).* $\begin{vmatrix}3 & 7 & -5\\ 8 & 7 & -3\\ 2 & -1 & 8\end{vmatrix}$

$$д).\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad е).\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Задача №5. Знайти обернені матриці до заданих.

$$а).\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad б).\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad в).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$г).\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad д).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad е).\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача №6. Розв’язати матричні рівняння.

$$а).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad б).\ X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$в).\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad г).\ \mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача №7. Обчислити ранг матриць з допомогою елементарних перетворень.

$$а).\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad б).\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$в).\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad г).\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

РОЗДІЛ 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

2.1. *Поняття системи лінійних рівнянь*

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ або лінійною системою називається система вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+}a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{2+}a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{2+}a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.1)$$

числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи лінійних рівнянь, b_i (i=1÷m)– вільними членами, або правою частиною системи.

Лінійна система називається *однорідною*, якщо всі вільні члени рівні нулеві, якщо серед вільних членів системи хоча б один відмінний від нуля, то лінійна система називається *неоднорідною*.

Розв’язком системи (2.1) називається впорядкована сукупність чисел (c_1, c_2, ..., c_n), підстановка яких замість відповідних x_j (j =1÷n) перетворює кожне рівняння у тотожність.

Однорідні системи завжди мають принаймні один розв’язок (0, 0, ..., 0), який називають *тривіальним* (нульовим) розв’язком системи. Відповідно, питання про розв’зок однорідної системи лінійних рівнянь зводиться до питання про існування нетривіального розв’язку.

У загальному випадку система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв’язок і несумісною якщо система жодного розв’язку не має. Сумісна система, що має тільки один розв’язок називається *визначеною.* Якщо сумісна система має безліч розв’язків, вона називається *невизначеною*.

Дві системи вважаються *еквівалентними*, якщо множини їх розв’язків однакові (дві несумісні системи еквівалентні, бо жодна з них розв’язку не має). *Розв’язуючи ту чи іншу систему лінійних рівнянь, перш за все перевіряють її на сумісність*.

Систему (2.1) можна записати у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B, \qquad (2.2)$$

де матриця коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається основною матрицею системи, а матриці – стовбці $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - складені з невідомих і вільних членів системи.

Матриця $(A/b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ - називається розширеною матрицею системи.

Питання про сумісність системи m лінійних рівнянь з n невідомими розв'язує наступна теорема.

Теорема Кронекера-Капеллі: система лінійних рівнянь сумісна тоді і лише тоді, коли ранг $r(A)$ основної матриці системи дорівнює рангу $r(A/b)$ розширеної матриці цієї системи.

Характер множини розв'язків системи залежить лише від рангу основної матриці системи і від рангу розширеної матриці:

1.) якщо $r(A/b) \neq r(A)$, то неоднорідна система не має розв'язків – несумісна;

2.) якщо $r(A/b) = r(A) = g$, то система сумісна і:
при $g = n$ – має єдиний розв'язок (для однорідної системи - тривіальний розв'язок);
при $g < n$ має безліч розв'язків (для однорідної системи -має нетривіальний розв'язок).

2.2. *Методи розв'язування систем лінійних рівнянь*

2.2.1. *Метод оберненої матриці.*

Нехай число рівнянь системи (2.1) дорівнює числу невідомих, тобто $m=n$, тоді основна матриця системи буде квадратною. Припустимо, що визначник основної матриці A відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$), тобто матриця A невироджена, тоді існує обернена матриця A^{-1}.

Запишемо систему (2.1) у матричному вигляді (2.2) і помножимо зліва обидві частини рівності (2.2) на обернену матрицю:

$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} B$, використавши властивості невироджених матриць отримаємо:

$A^{-1}(A \cdot X) = (A^{-1}A) \cdot X = E \cdot X = X$, тобто*, розв'язком системи буде матриця-стовбець:*

$$X = A^{-1}B \tag{2.3}$$

<u>Приклад 2.1.</u> Розв'язати систему методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ і знайдемо обернену матрицю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю-стовбець $X = A^{-1}B$:

$$X = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - шуканий розв'язок системи.

2.2.2. *Метод Крамера.*

Формули Крамера використовують для розв'язку системи (2.1) лише тоді, коли основна матриця системи є квадратною невиродженою матрицею.

<u>Теорема Крамера</u>: нехай Δ – основний визначник системи лінійних рівнянь, а Δ_j (j =1÷n) визначник, який отриманий заміною j –го стовбця на стовбець вільних членів B. Тоді, якщо Δ ≠ 0, то система (2.1) *має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};\ \cdots;x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (2.3)$$

<u>Зауваження:</u> якщо Δ = 0, а серед визначників хоча б один відмінний від нуля, то неоднорідна система лінійних рівнянь несумісна. Для однорідної системи при Δ ≠ 0 існує лише тривіальне рішення, при Δ =0, то окрім тривіального, система має також і інші розв'язки.

<u>Приклад 2.2</u>. розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Визначник системи обчислили в <u>прикладі 9</u>: Δ=9≠ 0 – система сумісна і визначена, тобто має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники Δ_j (j =1÷3).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

За формулами (2.3) знайдемо значення невідомих:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1.$$

2.2.3. *Метод Гаусса*.

Метод Гаусса – метод послідовного виключення змінних,полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система лінійних рівнянь зводиться до рівносильної системи, розв'язати яку набагато простіше, ніж задану.

До елементарних перетворень системи лінійних рівнянь відносяться:

1.) множення рівняння системи на число, відмінне від нуля;

2.) додавання до одного рівняння системи іншого, помноженого на будь-яке число;

3.) перестановка місцями двох рівнянь системи.

Нехай маємо систему (2.1) m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{2+} a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{2+} a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Припускаючи, що в системі $a_{11}\neq 0$, застосовують елементарні перетворення послідовно виключають невідомі з усіх рівнянь (крім першого) таким чином, щоб у кожному наступному рівнянні, починаючи з другого, змінних було на одну менше ніж у попередньому. У результаті отримаємо систему еквівалентну початковій, що може мати одну із наступних форм:

1.) система трикутного виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_{2+} a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

така система, як і початкова, має єдиний розв'язок, який знаходиться «з кінця»: значення .x_n – з останнього рівняння, x_{n-1} - з передостаннього і т.д.

2.) система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases},$$

де $k<n$, (кількість рівнянь еквівалентної системи менше кількості невідомих). Така система має безліч розв'язків – система невизначена. Щоб отримати частинний розв'зок системи, обираємо k невідомих ($x_1, x_2, \dots, x_k$), залишаємо їх на своїх місцях і називаємо базисними, а решту (n- k) змінних переносимо у праві частини рівнянь системи і називаємо вільними змінними. Таким чином отримуємо трикутну систему k рівнянь з k невідомими.

3.) система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \qquad\qquad 0x_n = b_m \end{cases},$$

така система несумісна, оскільки не існує таких значень невідомих, що б задовольнили останнє рівняння.

Методом Гаусса можна розв'язати будь-яку систему m лінійних рівнянь з n невідомими, причому елементарні перетворення можна виконувати не над рівняннями системи, а над рядками розширеної матриці.

Приклад 2.3. Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю (A/b) системи:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Перший рядок залишаємо без змін, над другим і третім виконуємо елементарні перетворення: послідовно множимо перший рядок на (-2) і додаємо до другого, потім множимо на (-1) і додаємо до третього:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \to,$$

помінявши місцями другий і третій стовбці маємо трикутну матрицю: $\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$, повернемося до запису у вигляді системи, враховуючи, що з перестановкою стовбців матриці змінився порядок розміщення змінних у системі.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + 3x_3 = 5 \\ -3x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - 2\cdot(-2) + 1 = 2 \\ x_3 = \dfrac{5-2}{3} = 1 \\ x_2 = -\dfrac{6}{3} = -2 \end{cases}.$$

2.3.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Означення системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
2. Методи розв'язку систем лінійних рівнянь.
3. В чому полягає метод оберненої матриці розв'язування системи лінійних рівнянь?
4. Запишіть формули Крамера.
5. В чому полягає метод Гаусса розв'язування системи лінійних рівнянь?
6. Яка системи лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?

7. Теорема про існування та розв'язків системи лінійних рівнянь.
8. Теорема про сумісність системи *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

2.3.2. *Задачі для самостійної підготовки*.

Задача №1. Розв`язати систему лінійних рівнянь методом оберненої матриці та за формулами Крамера.

а). $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 - 7x_2 = 81 \end{cases}$

б). $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

в). $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}$

г). $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

д). $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$

е). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

Задача №2. Розв`язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

а). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

б). $\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5 \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8 \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4 \end{cases}$

в). $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3 \end{cases}$

г). $\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 3x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 8 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 17 \\ 12x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -9 \end{cases}$

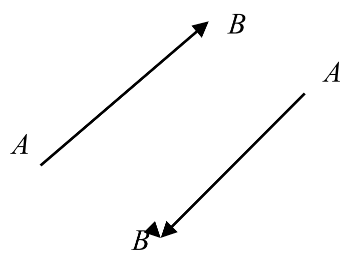
д). $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$

е). $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

3.1. *Вектори на площині та в просторі. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами.*

Під вектором розуміють відрізок у якому задано напрямок (направлений відрізок). Задати вектор означає вказати його довжину і напрямок. Таким чином, якщо A і B дві точки простору (площини), то вектор $\overrightarrow{AB}$, де A – початок вектора, B – кінець вектора, відрізняється від вектора $\overrightarrow{BA}$, напрямком (B – початок вектора, A – кінець вектора). Вектори позначають літерами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і т.д. якщо треба підкреслити, що точка A – початок вектора, B – кінець вектора, то пишуть $\overrightarrow{AB}$.



Відстань між початком вектора і його кінцем називають *довжиною*, або *модулем* вектора, позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, або $|\vec{a}|$.

Вектор початок і кінець якого співпадають називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$, нульовий вектор не має напрямку і довжина його рівна нулеві.

Вектори називають *колінеарними*, якщо вони розміщені на одній прямій, або паралельних прямих.

Два вектори називають *рівними*, якщо вони мають однакову довжину та напрямок, пишуть $\vec{a} = \vec{b}$. Таким чином, не розрізняють вектори, що мають однакові довжини і напрямки, але розміщені в різних точках простору. Іншими словами, вектор можна перенести в будь яку точку простору, без зміни напрямку і довжини (паралельно самому собі). Такі вектори називають *вільними*.

Ортом вектора $\vec{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниі, а напрям співпадає з напрямком даного вектора $\vec{a}$. Орт вектора $\vec{a}$ позначають $\overrightarrow{a_0}$ і дійсною є рівність: $\vec{a} = \overrightarrow{a_0} \cdot |\vec{a}|$, де $\overrightarrow{a_0} = 1$

Компланарними називають вектори, які належать одній площині.

Лінійними операціями над векторами є додавання векторів та множення вектора на дійсне число.

Добутком вектора $\vec{a}$ *на число* α називається вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, що має довжину $\left|\vec{b}\right| = \alpha|\vec{a}|$, нарям якого співпадає з напрямком вектора $\vec{a}$ якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому якщо $\alpha < 0$.

Протилежним вектором ($-\vec{a}$) називається добуток вектора $\vec{a}$ на число (-1).

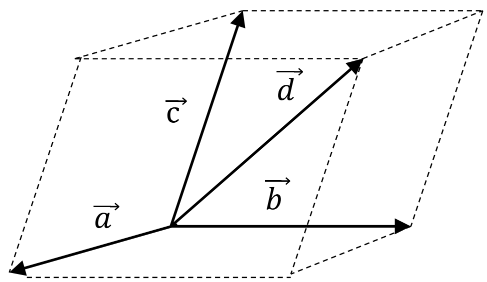


рис.3.2.

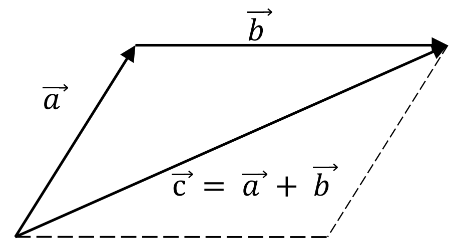


рис.3.1

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{b}$, при умові, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило трикутника). Або, за правилом паралелограма, вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ є діагональ паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, рис.3.1.

Сума векторів $\overrightarrow{a_1}, \vec{a}_2, \vec{a}_3,\ \vec{a}_n$ знаходиться послідовно: спочатку додаються вектори $\overrightarrow{a_1}, \vec{a}_2$, потім до їх результуючого вектора додається наступний вектор $\vec{a}_3$ і т.д. Сумою декількох векторів є вектор, що з'єднує початок першого вектора і кінець останнього, при умові, що початок кожного наступного вектора збігається з кінцем попереднього (правило многокутника).

На рис.3.2. зображено суму трьох векторів – вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, що є діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ що не лежать в одній площині, або паралельних площинах (правило паралелепіпеда).

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ і вектора($-\vec{b}$) - протилежного до $\vec{b}$.

У паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ одна діагональ є сумою цих векторів, інша – різницею, рис. 3.3.

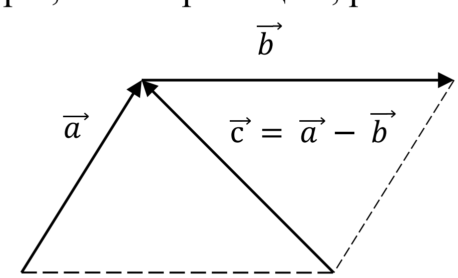


Рис.3.3.

<u>Теорема</u> (необхідна і достатня умова колінеарності векторів). Два ненульові вектори колінеарні тоді і лише тоді, коли $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ *де α - деяке дійсне число.*

3.2. *Проекція вектора на вісь. Координати вектора.*

Нехай задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Під кутом φ між цими векторами розуміють кут, на який потрібно повернути один з векторів, щоб його напрям співпав з напрямком іншого вектора. Вважають, що $0 \le \varphi \le \pi$.

Нехай вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки A і B перпендикулярні прямі до вектора $\vec{b}$. Позначимо точки перетину цих прямих - A' і B', рис.3.4.

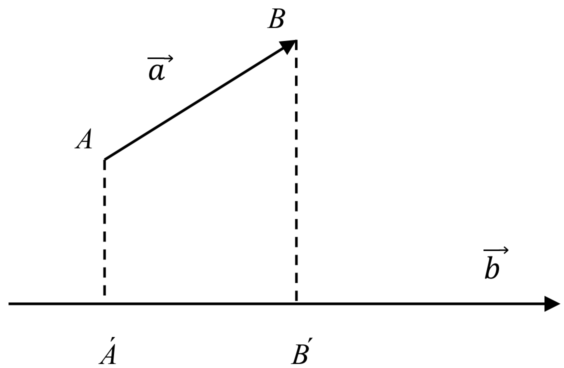


рис.3.4.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$. *на напрям вектора* $\vec{b}$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$, помноженій на косинус кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \text{Cos}\,\varphi$$

Нехай в просторі задана сисРозділ координат $0XYZ$ і довільний вектор $\vec{a}$, рис 3.5.

Розглянемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

Нехай $x = np_{ox}\vec{a}$, $y = np_{0y}\vec{a}$ і $z = np_{oz}\vec{a}$, тоді проекції x, y, z вектора $\vec{a}$ на осі координат називаються його *координатами.* При цьому пишуть $\vec{a} = (x,y,z)$.

Будемо вважати, що вектор $\vec{a}$ - виходить з початку координат і не належить жодній координатній площині.

Проведемо через точку A площини, перпендикулярні осям координат. Разом з координатними площинами вони утворюють прямокутний паралелепіпед, діагоналлю якого є відрізок OA. Оскільки, квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів, то:

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \textit{тобто} \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

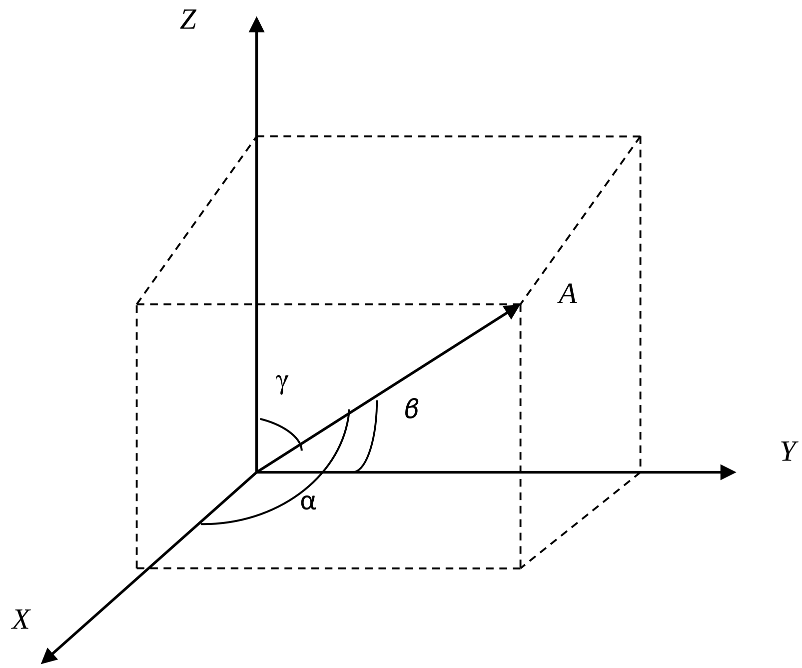


Рис. 3.5.

Позначимо через α, β, γ кути між вектором $\vec{a}$ та осями координат. Тоді $Cos\alpha$, $Cos\beta$, $Cos\gamma$, називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$. Вони обчислюються за формулами:

$$Cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad Cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad Cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Піднісши до квадрату ліву і праву частину кожної рівності та додавши їх почленно будемо мати:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

3.3. n - *вимірні вектори та дії над ними.*

n - *вимірним* вектором називається впорядкована сукупність n дійсних чисел, які записуються у вигляді $\vec{x} = (x_1, x_2,...,x_n)$.

Числа x_i =1, 2..., n називаються компонентами вектора вигляді $\vec{x}$.

Вектор у якого всі компоненти дорівнюють нулю, називається нульовим вектором і позначається $\vec{0}$ = (0, 0,...,0).

Два n -вимірні вектори називаються рівними, якщо їх відповідні компоненти рівні.

Правило додавання n - вимірних векторів. Сумою двох n -вимірних векторів однакової розмірності називається вектор, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент векторів-доданків.

Множення n-вимірного вектора на число. Добутком вектора $\vec{a}= (a_1,a_2,...,a_n)$ на дійсне число α називається вектор $(\alpha \cdot \vec{a})$, компоненти якого дорівнюють добуткам числа a на відповідні компоненти вектора $\overrightarrow{a}$:

$$\alpha \overrightarrow{a} = (\alpha a_1, a a_2, \ldots, a a_n)$$

Множина n -вимірних векторів з дійсними компонентами, в якій визначені операції' додавання векторів та множення вектора на число називається вектарним простором. Будемо позначати цей простір E_n.

Зауважимо, що елементи простору E_n можна розглядати не тільки як вектори, але і як елементи (об'єкти) довільної природи. В цьому випадку відповідна множина елементів називається *лінійним простором.*

3.4. *Розмірність та базис лінійного простору*.

Нехай задано m векторів векторного простору E_n: $a_1,a_2,...,a_m$. Задану множину векторів будемо називати *системою m векторів.*
Вектор $\overrightarrow{a}$ називається лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_m}$, якщо для деяких дійсних чисел $a_1,a_2,...,a_m$ має місце рівність:

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{a}_2 + \cdots + \alpha_m \overrightarrow{a}_m$$

Лінійна комбінація векторів усі коефіцієнти якої $a_1,a_2,...a_m$ дорівнюють нулю, називають *тривіальною.* В протилежному випадку, лінійна комбінація називається *нетривіальною.*

Система векторів векторного простору E_n називається *лінійно залежною,* якщо існують такі числа $a_1,a_2,...,a_m$ не всі рівні одночасно нулю, що виконується рівність: $\alpha_1 \overrightarrow{a}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{a}_2 + \cdots + \alpha_m \overrightarrow{a}_m = 0$, в протилежному випадку вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_m}$, називаються *лінійно незалежними.*

<u>*Теорема.*</u> *Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійної комбінацією інших.*

<u>Приклад 3.1.</u> Показати, що два неколінеарні вектори на площині лінійно незалежні.

Нехай задано два ненульові неколінеарні вектори $\overrightarrow{a_1}$ і $\overrightarrow{a_2}$. Припустимо, що вони лінійно залежні. Це означає, що рівність $a_1 \vec{a}_1 + a_2 \vec{a}_2=0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}_1$ чи $\vec{a}_2$, або обидва одночасно, не дорівнюють нулю. Припустимо, що $a_1 \neq 0$, тоді $\overrightarrow{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \overrightarrow{a_2}$. А це означає, що вектори $\overrightarrow{a}_1$ і $\overrightarrow{a}_2$ колінеарні. Ми прийшли до суперечності, так як за умовою задачі вектори неколінеарні. Отже, вектори $\overrightarrow{a}_1$ і $\overrightarrow{a}_2$ лінійно незалежні.

Приклад 3.2. З'ясувати, чи будуть вектори $\overrightarrow{a}_1$= (1,2,3,4), $\overrightarrow{a_2}$= (2,1,1,3) і $\overrightarrow{a}_3$,= (2,-1,1,3) лінійно залежні.

Запишемо векторну умову лінійної залежності векторів:

$\alpha_1 \overrightarrow{a}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{a}_2 + \alpha_3 \overrightarrow{a}_3 = 0.$

Перепишемо її у вигляді:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ця рівність еквівалентна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до діагонального виду за допомогою елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, маємо систему рівнянь: $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$

Знаходимо її розв'язок $a_1 = a_2 = \alpha_3 = 0$. А це означає, що рівність $\alpha_1 \overrightarrow{a}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{a}_2 + \alpha_3 \overrightarrow{a}_3 = 0$, можлива тільки при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Отже, вектори лінійно незалежні.

Базисом лінійного простору E_n називається довільна система n лінійно незалежних векторів.

В прикладі 3.2 було встановлено фундаментальну властивість множини векторів площини, яку можна сформулювати таким чином: *будь-які два неколінеарні вектори площини утворюють базис у множині векторів цієї площини.*

Лінійний простір E_n називається n-вимірним, якщо в ньому існує система n лінійно незалежних векторів, а будь-які з $(n+1)$ векторів є лінійно залежними. Число n називається розмірністю простору E_n.

Іншими словами, *розмірність простору - це максимальне число лінійно незалежних векторів, що містяться в ньому.*

<u>Теорема</u> *(про розклад вектора за базисом). Будь-який вектор $\vec{a}$ лінійного простору E_n можна представити і причому єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базиса.*

Рівність: $\vec{a}=\alpha_1\,\vec{e_1}+\alpha_2\,\vec{e}_2+\cdots+\alpha_n\,\vec{e}_n$ - називається розкладом вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e_1},\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$, а числа $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ - координати вектора $\vec{a}$ у цьому базисі.

Система векторів з простору E_n утворює базис, якщо ці вектори лінійно незалежні і будь-який вектор з E_n є лінійною комбінацією векторів даної системи.

<u>Приклад 3.3</u>. В базисі $\vec{e_1},\vec{e}_2,\vec{e}_3$, задано вектори $\vec{a}$ = (2,0,1), $\vec{b}$ = (1,-1,2), $\vec{c}$ = (3,1,1), $\vec{d}$ = (1,1,1). Показати, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}$. в базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис простору E_3, якщо вони лінійно незалежні.

Запишемо умову лінійної залежності векторів: $\alpha_1\,\vec{a}_1+\alpha_2\,\vec{a}_2+\alpha_3\,\vec{a}_3=0$, або:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0\\ -\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

Оскільки, основний визначник системи $\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&-1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$, то

сисРозділ має єдиний – тривіальний розв'язок $a_1=a_2=\alpha_3=0$, а це означає, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базис.

Позначимо координати вектора $\overrightarrow{d}$ = (a_1,a_2,a_3) в базисі векторів $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{d} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{b} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{c}$$

Ця векторна рівність рівносильна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \quad -\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Оскільки основний визначник системи Δ = -2 $\neq$ 0, то сисРозділ має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Знаходимо a_1 = -3, a_2 = 1, a_3 = 2.

Таким чином, в базисі векторів $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$, маємо $\overrightarrow{d}$ = (-3,1,2).

3.5. *Добутки векторів.*

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається *число*, позначене символом $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$, або $\vec{a} \cdot \overrightarrow{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними, тобто

$$\left(\vec{a},\overrightarrow{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot cos\varphi \tag{3.1}$$

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ або $\overrightarrow{b}$ нульовий, то за означенням $\left(\vec{a}\,,\overrightarrow{b}\right) = 0$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1. *Комутативність* множення: $\left(\vec{a}\ ,\overrightarrow{b}\right) = \left(\vec{b}\,,\vec{a}\right)$.

2. *Асоціативність* відносно множення на число: $\left(\alpha \cdot \vec{a}\,,\overrightarrow{b}\right) = \alpha \cdot \left(\vec{b}\,,\vec{a}\right)$.

3. *Дистрибутивність* відносно додавання векторів:

$\left(\left(\vec{a} + \overrightarrow{b}\right),\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\,,\vec{c}\,\right) + \left(\overrightarrow{b},\vec{c}\,\right)$.

Геометричні властивості скалярного добутку.

1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку, тобто *добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.*

2. *Два ненульових вектори* $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ *утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток додатний (від'ємний)*, або якщо $\overrightarrow{a} \neq 0$ і $\overrightarrow{b} \neq 0$, то $\left(\vec{a}\,,\overrightarrow{b}\right) > 0$, коли кут $\left(\widehat{\vec{a}\overrightarrow{b}}\right)$ – *гострий*, і $\left(\vec{a}\,,\overrightarrow{b}\right) < 0$, коли кут $\left(\widehat{\vec{a}\overrightarrow{b}}\right)$ – *тупий.*

3. Добуток $(\vec{a},\vec{a})$ позначається через $\vec{a}^2$ і називається *скалярним квадратом*. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора, тобто

$$(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 \quad , \tag{3.2}$$

звідки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ (3.3)

Запис скалярного добутку через координати.

<u>Теорема.</u> *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат, тобто:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (3.4)$$

<u>*Наслідки*</u>*:*

1. *Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, є рівність $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.*

2. *Кут між векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ визначається за формулою*

$$cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (3.5)$$

3. *Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою*

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (3.6)$$

4. *Довжина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається за формулою*

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (3.7)$$

5. *Для координатних векторів справедливі рівності*

$$\vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1, \vec{k}^2 = 1, \quad (\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0 \qquad (3.8)$$

<u>Приклад. 3.4.</u> Дано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

Оскільки $\overrightarrow{A_1A_2} = (5;3;1)$ та $\overrightarrow{A_1A_4} = (1;4;-2)$, то косинус кута φ між цими векторами дорівнює величині кута між ребрами A_1A_2 , A_1A_4 і за формулою (3.5) обчислюємо

$$cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4})}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}|} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot -2)}{\sqrt{25+9+1}\sqrt{1+16+4}} = \frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{15}}{7},$$

$$\varphi = arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

<u>Приклад. 3.5.</u> Дано $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Визначити, за яких значень α вектори $(\vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b})$ та $(\vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b})$ перпендикулярні.

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку за першою геометричною властивістю. Звідси для α маємо співвідношення:

$$\left(\left(\vec{a}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{b}\right),\left(\vec{a}-\vec{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)\right)=0$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку, розпишемо ліву частину останньої рівності:

$$\left(\left(\vec{a}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{b}\right),\left(\vec{a}-\vec{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)\right)=\vec{a}^2-\alpha\left(\vec{a},\overrightarrow{b}\right)+\alpha\left(\vec{b},\overrightarrow{a}\right)-\alpha^2\overrightarrow{b}^2=$$

$= |\vec{a}|^2-\alpha^2\overrightarrow{|b|}^2$.

Оскільки $|\vec{a}|=3, |\vec{b}\,|=5$, то $9-25\,\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\pm\frac{3}{5}$.

Приклад.3.6. Знайти довжину вектора $\vec{a}=\vec{x}-2\vec{y}$, якщо $|\vec{x}|=1$, $|\vec{y}|=2$, кут між векторами $\vec{x}$ та $\vec{y}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Маємо $(\vec{a}\cdot\vec{a})=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. Звідси $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$. Тому

$$|\vec{a}|=|\vec{x}-2\vec{y}|=\sqrt{(\vec{x}-2\vec{y})^2}=\sqrt{\vec{x}^2-4\vec{y}\vec{x}+4\vec{y}^2}=$$
$$\sqrt{|\vec{x}|^2-4|\vec{y}||\vec{x}|cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{y}|^2}=\sqrt{1-4\cdot2\cdot\frac{1}{2}+16}=\sqrt{13}.$$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається символами $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ або $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ і визначається такими трьома умовами:

1) *довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $\vec{c}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|sin\varphi$, де $\varphi=\widehat{\vec{a},\vec{b}}$;*
2) *вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;*
3) якщо $\vec{c}\neq0$, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

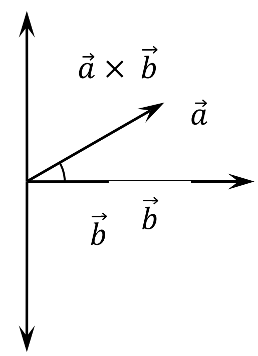


Рис. 3.6

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. *Антикомутативність* множення:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right),$$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак. Це випливає з того, що вектори $\vec{a}\times\vec{b}$ і $-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ мають однакові модулі, колінеарні, а трійка векторів $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\right)$ і $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{b}\times\vec{a}\right)$ протилежної орієнтації.

2. *Асоціативність відносно скалярного множника* λ:

$$\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right);\quad \vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

3. *Дистрибутивність відносно додавання векторів*:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного множення слід пам'ятати, що воно некомутативне: при перестановці співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

- *Геометричні властивості векторного добутку*

1. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

2. Модуль $|\vec{a} \times \vec{b}|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \tag{3.9}$$

3. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0;$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i};\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k};\ \vec{k} \times \vec{j}; = -\vec{i};\quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

<u>Приклад 3.7</u>:Обчислити $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \overline{2\vec{b}})$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$.

$$(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \overline{2\vec{b}}) = 3(\vec{a} \times \vec{a}) - 6(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) + 2(\vec{b} \times \vec{b})$$
$$= -6(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b}) = -5(\vec{a} \times \vec{b});$$

$$|-5(\vec{a} \times \vec{b})| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| sin\frac{\pi}{2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 60.$$

- *Вираз векторного добутку через координати.*

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a} = (a_x;\ a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x;\ b_y; b_z)$ Покажемо, що векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{3.10}$$

Використовуючи теорему 8.1 про розклад визначника, маємо

$$\vec{a} \times \vec{b} == \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \tag{3.11}$$

<u>Приклад 3.8.</u> Знайти площу трикутника, заданого вершинами A(1, 2, 0), B(0, -2, 1), C(-1, 0, 2).

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$

Оскільки $\overrightarrow{AB} = (-1, -4, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, 2)$, то векторний добуток цих векторів за формулою (3.10) буде

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 6\vec{k}$, остаточно за формулою (3.9) площа трикутника $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2}$.

Мішаний добуток векторів. При множенні двох векторів $\vec{\boldsymbol{a}}$ і $\vec{\boldsymbol{b}}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число ($\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}$), і векторний, результатом якого є вектор $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$.

Множення трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ можна виконати різними способами. Зокрема, можна утворити такі добутки:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}; \ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}; \ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Перший з цих добутків відповідає множенню скаляра $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ на вектор $\vec{c}$ і не розглядається. Те саме стосується добутків $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b}$; та $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

Результатом другого добутку є вектор $\vec{d}$, який називається *подвійним векторним* або *векторно-векторним добутком* даних трьох векторів і розглядається в наступному пункті.

Останній з наведених добутків $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ – це скалярний добуток вектора $(\vec{a} \times \vec{b})$ на вектор $\vec{c}$; тобто *число*, яке називають *мішаним добутком* векторів $(\vec{a} \times \vec{b})$ і $\vec{c}$. Цей добуток має чіткий геометричний зміст і широко використовується в задачах.

Властивості мішаного добутку

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то він змінить знак, наприклад: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{c}(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

3. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна поміняти місцями: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

4. Модуль мішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ *і* $\vec{c}$ віднесених до спільного початку:

$$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (3.12)$$

5. Якщо мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ додатний, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо від'ємний, то ліву.

6. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

<u>*Зауваження.*</u> Властивості 4-6 виражають геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів.

Вираз векторного добутку через координати

Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задано координатами $\vec{a} = (a_x;\ a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x;\ c_y; c_z)$. Координати вектора $(\vec{a} \times \vec{b})$ визначаються за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \ \vec{\imath}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \ \vec{\jmath}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Помноживши вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою (3.10) отримаємо:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (3.13)$$

<u>Приклад. 3.9.</u> Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2, -1, 0)$, $B(5, 5, 3)$, $C(3, 2, -2)$ і $D(4, 1, 2)$.

Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD}, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. За формулою (3.12) маємо $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right|$. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$= (3, 6, 3), $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -2)$, $\overrightarrow{AD}$ = (2, 2, 2). За формулою (3.12) обчислюємо об'єм:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

<u>Приклад. 3.10.</u> Довести, що точки $A(0, 1, 2)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(-1, 5, 8)$, $D(1, 6, 11)$ лежать в одній площині.

Точки *A*, *B*, *C*, *D*, лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні.

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 4; 6)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 5; 9)$.

Оскільки мішаний добуток: $\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$, то за властивістю 6 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні, відповідно, задані точки лежать в одній площині.

Приклад. 3.11. Яку трійку утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$, $\vec{c} = (1; -2; 5)$?

Обчислимо мішаний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0$, за властивістю 5 дані вектори утворюють праву трійку.

Подвійним векторним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається вектор $\vec{d}$, що дорівнює векторному добутку вектора $[\vec{a} \times \vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$ і позначається $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, або $\vec{d} = \left[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}\right]$.

Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ і вектора $\vec{c}$. Із перпендикулярності вектора $\vec{d}$ до векторного добутку $[\vec{a}\vec{b}]$ випливає, що $\vec{d}$ лежить у площині векторів $\vec{a}, \vec{b}$, оскільки ці вектори також перпендикулярні до векторного добутку$[\vec{a}\vec{b}]$.

Теорема: *Подвійний векторний добуток трьох векторів дорівнює різниці добутків середнього вектора на скалярний добуток мінус добуток того крайнього вектора, який міститься у внутрішніх дужках, на скалярний добуток інших векторів, тобто*

$$\left[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}\right] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{c}\vec{b}), \tag{3.14}$$

у загальному випадку

$$\left[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}\right] = -\left[\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]\right], \tag{3.15}$$

але $$\left[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}\right] \neq \left[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]\right].$$

Зауваження. В інших позначеннях формули (3.14) та (3.15) мають вигляд:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}\,;$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \tag{3.16}$$

Подвійний векторний добуток часто зустрічається у векторному численні, але певного геометричного змісту не має.

Приклад 3.12. Довести тотожність $\left[\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]\right] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$, не використовуючи твердження теореми.

Введемо декартову прямокутну систему координат таким чином. Вісь *Ox* напрямимо вздовж вектора $\vec{a}$, а вісь *Oy* помістимо в площині $\vec{a}, \vec{b}$ (вважаючи, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до спільного початку). В такому випадку матимемо: $\vec{a} = (x_1, 0, 0)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, 0)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Знайдемо координати вектора $\vec{d} = \left[\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]\right]$.

$$[\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = y_2 z_3 \vec{i} - x_2 z_3 \vec{j} + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{k}.$$

Отже, $\vec{d} = \left[\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & 0 & 0 \\ y_2 z_3 & -x_2 z_3 & x_2 y_3 - x_3 y_2 \end{vmatrix} = -(x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2)\vec{j} - x_1 x_2 z_3 \vec{k} = (0;\ (x_1 x_3 y_2 - x_1 x_2 y_3);\ - x_1 x_2 z_3)$.

Знайдемо $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$.

$(\vec{a}\vec{c}) = x_1 x_3;\ \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) = (x_1 x_2 x_3;\ x_1 x_3 y_2; 0);\ (\vec{a}\vec{b}) = x_1 x_2;\ \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}) = (x_1 x_2 x_3;\ x_1 x_2 y_3;\ x_1 x_2 z_3)$.

Тоді: $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}) = (0;\ (x_1 x_3 y_2 - x_1 x_2 y_3);\ - x_1 x_2 z_3)$, що збігається з виразом для $\vec{d}$.

3.6.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Що називається проекцією вектора на вісь; кутом між вектором і віссю?
2. Запишіть властивості проекцій та спробуйте їх довести.
3. Напрямні косинуси: визначення та обчислення.
4. Які дії з векторами називаються лінійними? Запишіть формули, за якими в ДПСК вектори додаються, віднімаються та множаться на число.
5. За яких умов вектори вважаються рівними та колінеарними?
6. Як обраховуються координати точки, що ділить відрізок в заданому відношенні?
7. Дайте визначення скалярного добутку векторів. Які алгебраїчні та геометричні властивості він має? В чому полягає геометричний зміст скалярного добутка? Запишіть скалярний добуток через координати векторів, які множаться.
8. Дайте визначення векторного добутку векторів. Які алгебраїчні та геометричні властивості він має? Запишіть векторний добуток через координати векторів, які множаться.
9. Дайте визначення мішаного добутку векторів. Які властивості він має? В чому полягає геометричний зміст мішаного добутку? Запишіть мішаний добуток через координати векторів, які множаться.
10. Який добуток векторів називається подвійним векторним? За якою формулою він обчислюється?

3.6.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – одиничні вектори, що утворюють з даною віссю $\vec{S}$ відповідно кути $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.

Знайти проекції на вісь $\vec{S}$ вектора $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

Задача №2. Знайти проекцію суми векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 6, |\vec{c}| = 8, |\vec{d}| = 12$, а кути, що утворюють вектори з віссю $\vec{S}$, відповідно дорівнюють $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{3}$.

Задача №3. Знайти модуль вектора $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k} - \frac{1}{5}(4i + 8\vec{\jmath} + 3\vec{k})$ та його напрямні косинуси.

Задача №4. Дано вектори $\vec{a}\,(1, -2)$; $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $\vec{c} = (2, 0)$. Знайти координати наступних векторів:

1) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}$; 2) $\frac{3\vec{a}-5\vec{b}}{2}$; 3) $\frac{\vec{c}-2\vec{b}}{3}$.

Задача №5. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2i + 3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ колінеарні?

Задача №6. Дано координати вершин паралелограма *ABCD*: *A*= (2, 2, 2); *B* = (6, 5, 0); *C* = (0, 3, 8). Знайти координати вершини *D*.

Задача №7. Вершини трикутника містяться в точках *A*= (2, -1, 3); *B* = (4, 0, 1); *C* = (-10, 5, 3). Знайти косинус кута $\widehat{ABC}$.

Задача №8. У трикутнику з вершинами *A*= (5, 4); *B* = (-1, 2); *C* = (5, 1) проведена медіана *AD*. Знайти її довжину.

Задача №9. Дано три вектори $\vec{a} = (4, -2, -4)$; $\vec{b} = (-2, 4, -3)$; $\vec{c} = (0, 2, -1)$. Обчислити мішаний добуток векторів $(\vec{a}\,\vec{b}\vec{c})$.

Задача №10. Визначити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

Задача №11. Дано трикутник з вершинами *A*= (2, -1, 2); *B* = (1, 2, -1); *C* = (3, 2, 1). Знайти його площу.

Задача №12. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ та $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$.

Задача №13. Чи будуть компланарними вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (2, 5, 7)$; $\vec{b} = (1, 1, -1)$; $\vec{c} = (1, 2, 2)$.

2) $\vec{a} = (2, 3, -1)$; $\vec{b} = (1, -1, 3)$; $\vec{c} = (1, 9, -1)$?

Задача 14. Дано три вектори $\vec{a} = (1, -1, 3)$; $\vec{b} = (-2, 2, 1)$; $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Знайти $(\vec{a}\,\vec{b}\vec{c})$.

Задача 15. Знайти об'єм піраміди, вершини якої розташовані в заданих точках.

1) A= (3, -2, 5); B = (1, 3, 1); C = (-1, -1, 3); D = (4, 3, 4).
2) A= (6, 1, 4); B = (2, -2, 5); C = (7, 1, 3); D = (1, -3, 7).

РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

4.1. *Лінії і-го порядку на площині та їхні рівняння.*

Дослідження ліній на площині та у просторі базується на методі координат: *оскільки кожній точці площини відповідає пара чисел – її координати, а геометрична фігура являє собою множину точок, то фігурі відповідає певна множина пар чисел*. Це дає можливість звести вивчення властивостей фігури до вивчення властивостей відповідної множини пар чисел. Така відповідність встановлюється за допомогою аналітичної умови. *Аналітичною умовою*, що визначає геометричну фігуру в даній системі координат, називається рівняння, нерівність та їхні системи, яким задовольняють координати будь-якої точки цієї фігури і не задовольняють координати тих точок, що не належать даній фігурі.

Алгебраїчною лінією називається *множина точок*, координати яких задовольняють рівняння:

$$F(x,\ y)=0 \tag{4.1}$$

в деякій системі координат, де $F(x,y)$ – многочлен, ступінь якого називається *порядком алгебраїчної лінії*, заданої рівнянням (4.1). Рівняння (4.1) називається *канонічним рівнянням лінії*.

Лінія, яка не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*. Ми будемо вивчати лише алгебраїчні лінії першого та другого порядку.

Таким чином, лінію на площині можна задати геометрично як сукупність точок з певними геометричними властивостями і аналітично – за допомогою рівняння.

У зв’язку з цим виникають дві типові для аналітичної геометрії задачі:

- *скласти рівняння лінії, яка задана геометрично*, для її розв’язання потрібно встановити геометричну властивість, яку задовольняють лише точки даної лінії, і записати цю властивість у вигляді рівняння, що пов’яже змінні координати точок даної лінії і ті відомі сталі величини, які геометрично визначають саме цю лінію.
- *встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично*, в аналітичній геометрії ця задача розв’язується для алгебраїчних ліній першого та другого порядку.

Приклад. 4.1. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок $A(-1, 0)$ і $B(1, 0)$ дорівнює 4.

Якщо точка $M(x, y)$ лежить на лінії, тоді за умовою $|AM|^2 + |BM|^2 = 4$.

Оскільки $|AM|^2 = (x+1)^2 + y^2$; $|BM|^2 = (x-1)^2 + y^2$, то $(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4$, звідки після спрощень отримаємо шукане рівняння

$x^2 + y^2 = 1$.

Приклад 4.2. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої розміщена від точки $A(1, 2)$ в два рази далі, ніж від точки $B(-2, 0)$.

Позначимо точку лінії через $M(x, y)$, тоді за умовою $|AM| = 2|BM|$, тобто

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$.

Перетворюючи це рівняння, отримаємо $3x^2 + 3y^2 + 18x + 4y + 11 = 0$.

Теорема 4.1. *Поняття алгебраїчної лінії та її порядок не змінюються при переході від однієї системи координат до іншої.*

Тобто, залежно від того, в якій системі координат розглядається алгебраїчна лінія, змінюється лише вигляд рівняння, яким ця лінія задається в даній системі координат.

4.1. *Види рівнянь лінії*

4.4.1. *Полярне рівняння лінії.*

Рівняння $\Phi(\rho, \varphi) = 0$ (4.2)

називається *рівнянням лінії l в полярних координатах*, або *полярним рівнянням*, якщо його задовольняють координати ρ і φ будь-якої точки лінії l і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії. Щоб від полярного рівняння (4.2) перейти до рівняння (4.1), потрібно полярні координати в рівнянні $\Phi(\rho, \varphi) = 0$ виразити через декартові.

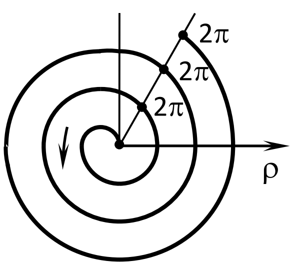


Рис. 4.1.

Наприклад, *Спіраллю Архімеда* називається лінія, описана точкою, що рівномірно рухається по променю, який сам рівномірно обертається навколо свого початку. Рівняння спіралі Архімеда (рис. 4.1) має вигляд $\rho = \alpha\,\varphi$, де $\alpha > 0$ – стала величина.

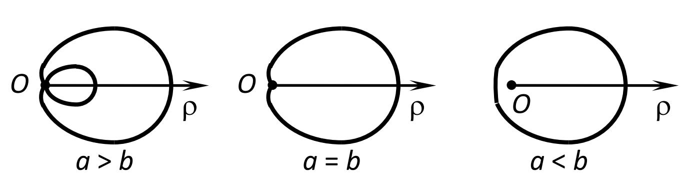


Рис. 4.2

Наприклад, *Равликом Паскаля* називають криву (рис. 4.2), що задається рівнянням $\rho = a\cos\varphi + b$.

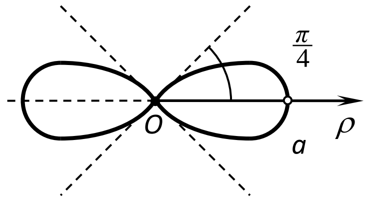


Рис. 4.3

Лемніскатою Бернуллі називають криву, що задається рівнянням

$\rho = a\sqrt{cos2\varphi}$

і має вигляд вісімки (рис. 4.3). У прямокутних координатах рівняння лемніскати Бернуллі записується складніше: $(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2) = 0$

Трипелюстковою трояндою називають криву (рис. 4.4), що задається рівнянням $\rho = a\cos 3\varphi$.

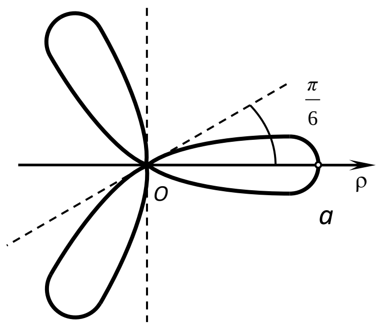


Рис.4.4

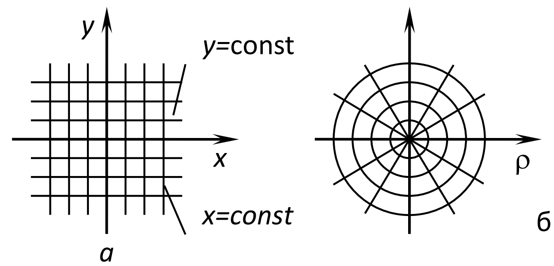


Рис. 4.5

Координатними лініями називають лінії, в яких одна з координат є сталою величиною. У декартових координатах координатні лінії утворюють два сімейства прямих, паралельних одній з осей координат (рис. 4.5, *а*). У полярних координатах лінії ρ = const утворюють сімейство концентричних кіл з центром у полюсі, а лінії φ = const – сімейство променів, що виходять з полюса (рис. 4.5, *б*).

4.1.2. *Параметричні рівняння лінії.*

Нехай залежність між змінними x та y виражена через третю змінну t, тобто

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (4.3)$$

Змінна t називається *параметром* і визначає положення точки (x, y) на площині. Наприклад, якщо $x = 2t + 1$, $y = t^2$, то значенню параметра $t = 3$ відповідає на площині точка (7, 9), тому що $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$; $y = 3^2 = 9$.

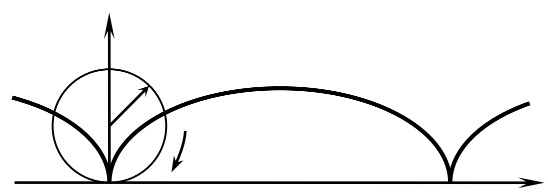
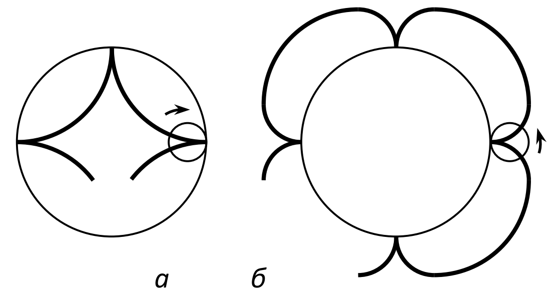


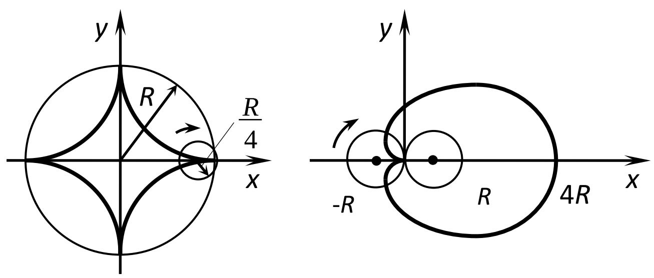
Рис. 4.6

Якщо t змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб завдання лінії називається *параметричним*, а рівняння (4.3) – *параметричними рівняннями лінії* l . Щоб від рівняння (4.3) перейти до канонічного рівняння (4.1), потрібно будь-яким способом з двох рівнянь (4.3) виключити параметр t (наприклад, з першого рівняння виразити x і результат підставити в друге рівняння). Але такий перехід не завжди доцільний і не завжди можливий, тому доводиться користуватися параметричними рівняннями (4.3).



а *б*

Рис. 4.7.



а *б*

Рис. 4.8

Розглянемо траєкторію точки кола, яке котиться без ковзання вздовж нерухомої прямої. Якщо вздовж осі *Ox* котиться без ковзання коло радіуса R, то будь-яка нерухома точка кола описує криву, яка називається *циклоїдою* (рис. 4.6) і задається рівняннями:

$$\begin{cases} x = R(t - sint) \\ y = R\,(1 - cost) \end{cases}; \qquad -\infty < t < \infty.$$

Якщо параметр t змінюється від 0 до 2π, то дані рівняння визначають першу арку циклоїди, якщо $2\pi < t < 4\pi$ – то другу і т. д.

Циклоїда є найпростішою з кривих, які описує на нерухомій площині точка однієї лінії, що котиться без ковзання по іншій лінії.

Гіпоциклоїдами (рис. 4.7, *а*) та *епіциклоїдами* (рис. 4.7, *б*) називаються криві, які описує точка, яка котиться по нерухомому колу всередині та відповідно ззовні. Вигляд і рівняння кривих залежать від відношення радіусів кіл.

Гіпоциклоїда при відношенні радіусів 1:4 називається *астроїдою* (рис. 4.8, *а*) і задається такими параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = Rcos^3 t \\ y = R\,sin^3 t \end{cases}; \qquad 0 < t < 2\pi,$$

а *епіциклоїда* при відношенні 1:1 називається *кардіоїдою* (рис. 4.8, *б*), має такі параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = 2Rcos(1 + cost) \\ y = 2R\,sint(1 + cost) \end{cases}; \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Простіше записується полярне рівняння кардіоїди: $\rho = 2R\,(1 + cos\varphi)$.

Усі ці криві застосовуються в теорії механізмів.

Евольвентою розгорткою кола або просто *евольвентою* (від латинського *evolvo* – розгортати) називається крива, що задається рівняннями:

$$\begin{cases} x = R(cost + tsint) \\ y = R\ (sint - tcost) \end{cases}; \quad 0 \le t \le +\infty.$$

Механічне креслення евольвенти виконується так: на коло туго намотують гнучку і нерозтяжну нитку, закріплену в точці A (рис. 4.3), і з вільним кінцем M в цій точці. Відтягуючи нитку за вільний кінець, змотують її з кола; точка M при цьому описує дугу евольвенти кола, тобто, якщо M – довільна точка евольвенти, то довжина дуги AB дорівнює довжині відрізка MB.

Профілі переважної більшості зубців зубчастих коліс окреслені з боків дугами евольвенти кола.

4.1.3. *Векторне рівняння лінії.*

Лінію можна також задати *векторним рівнянням* виду:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad (4.4)$$

де t – скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає цілком визначений вектор $\overrightarrow{r_0} = \vec{r}(t_0)$ площини. Таким чином, якщо параметр t набуває певної множини деяких значень, то рівняння (3.4) задає деяку відповідну множину векторів. Якщо від точки O (рис.3.10) площини відкласти вектори $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, то геометричне місце точок, які збігаються з кінцями цих векторів (за умови, що всі вектори компланарні), визначить на площині деяку лінію l.

Векторному рівнянню (4.4) в прямокутній системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння виду (4.3), тобто проекціями на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне та параметричні рівняння лінії мають такий *механічний зміст: якщо точка рухається на площині, то вказані рівняння* (4.3) *та* (4.4) *є рівняннями руху точки, а лінія* l *– траєкторією точки, параметром* t *при цьому є час.*

4.2. *Пряма на площині та її рівняння.*

<u>*Теорема* 4.2.</u> *Множина алгебраїчних ліній першого порядку є множина прямих*.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами:

- точкою і вектором, паралельним даній прямій;
- двома точками;
- точкою і вектором, перпендикулярним даній прямій, та ін.

Різним способам завдання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

4.2.1. *Різні види рівнянь прямої на площині.*

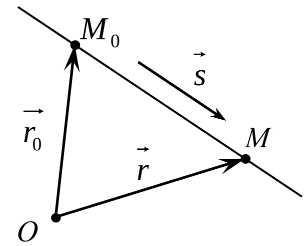


Рис. 4.9.

Нехай пряма проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні. Точка M_0 і напрямний вектор $\vec{s}$, цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо рівняння такої прямої. Позначимо через M (рис. 4.9) довільну точку цієї прямої і розглянемо радіус-вектори $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який лежить на даній прямій. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t\vec{s}$, де t – змінна, яка може набувати довільних дійсних значень і називається *параметром*, з останньої рівності отримуємо рівняння

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{s}, \tag{4.5}$$

що називається *векторно - параметричним рівнянням прямої*.

Зауваження. Векторне параметричне рівняння прямої має однаковий вигляд як на площині, так і у просторі.

Якщо точка M_0 і напрямний вектор $\vec{s}$, якими задається пряма l, мають такі координати: $M_0(x_0; y_0)$ і $\vec{s}(m; n)$, то прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ і $\overrightarrow{r_0} + t\vec{s}$, за формулою (4.5), одержимо систему:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \tag{4.6}$$

що визначає *параметричне рівняння прямої на площині*.

Приклад. 4.3**.** Побудувати пряму, задану параметрично

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 + 5t \end{cases}.$$

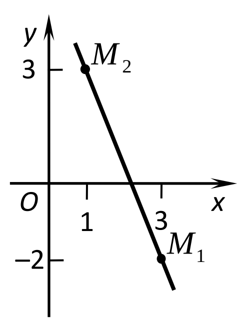


Рис. 4.10

Для побудови прямої достатньо знайти координати двох точок, які належать цій прямій. Поклавши $t_1 = 0$, знаходимо $M_1(3, -2)$, при $t_2 = 1$ знаходимо другу точку $M_2(1, 3)$. Побудувавши ці точки, проведемо через них шукану пряму (рис.4.10).

Виразимо в кожному з рівнянь системи (4.6) значення параметра t і, прирівнявши результати, отримаємо *канонічне рівняння прямої*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{4.7}$$

Приклад. 4.4. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M_0(-5, 2) паралельно вектору, який сполучає точки M_1(1, -1) та M_2(3, 2).

За напрямний вектор шуканої прямої візьмемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (2;\ 3)$. Замінивши в рівнянні (3.7) x_0 і y_0 координатами точки M_0, а m, n – координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, отримаємо шукане рівняння $\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{3}$.

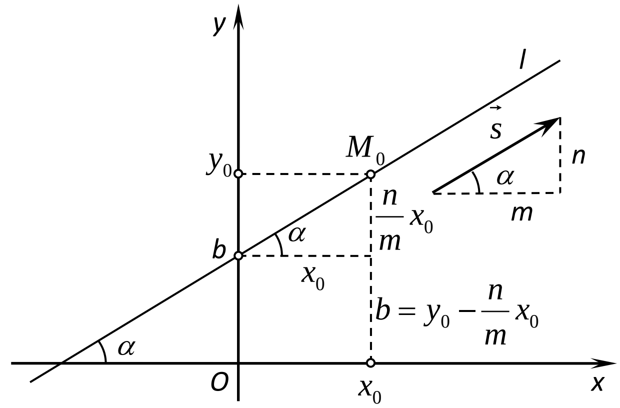


Рис. 4.11

Застосувавши основну властивість пропорції, одержимо такий *вигляд канонічного рівняння:*

$$(y - y_0)m = (x - x_0)n. \quad (4.8)$$

Зокрема, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ паралельно осі Ox, то її напрямний вектор $\vec{s}\ (m; 0)$, тому рівняння (4.8) набирає вигляду

$$(y - y_0)m = (x - x_0)0 \ => y = y_0 \quad (4.8')$$

а це і є рівняння прямої, паралельної осі абсцис. Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ паралельно осі Oy, то її рівнянням є

$$x = x_0 \quad (4.8'')$$

Приклад. 4.5 Дано трикутник з вершинами A(-1, -2); B(2, -2); C(1,3).

Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

За напрямний вектор шуканої прямої візьмемо вектор $\overrightarrow{AB} = (3, 0)$. Ордината напрямного вектора $n = 0$, тому рівняння шуканої прямої має вигляд (3.8′). Замінивши y_0 ординатою точки C, знайдемо $y = 3$.

Якщо пряма не перпендикулярна до осі Ox, то рівняння (4.7) можна записати так

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0) \text{ або } y = \frac{n}{m}x + \left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right).$$

Позначивши $\frac{n}{m} = k$, $y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b$, одержимо

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (4.9)$$

або

$$y = kx + b. \quad (4.10)$$

Відношення $k = \frac{n}{m}$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*, причому кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута, утвореного прямою з додатним напрямом осі абсцис, тобто $k = tg\alpha$, де α і є кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (рис. 4.11).

Величина $b = y_0 - \dfrac{n}{m}x_0$ є ординатою точки перетину прямої з віссю ординат і називається *початковою ординатою прямої*.

Рівняння (4.9) називається *рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт*, а рівняння (4.10) – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*. Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння такої прямої є частинний випадок рівняння (4.10), тобто

$$y = kx. \tag{4.11}$$

Часто потрібно обчислити кутовий коефіцієнт прямої за відомими координатами двох точок цієї прямої: $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$.

Нехай $x_2 > x_1$, $y_2 \geq y_1$ і $0 \leq \alpha < 90^0$ (рис. 4.12). З прямокутного трикутника M_1NM_2 маємо $k = \text{tg}\alpha = \dfrac{NM_2}{M_1N} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Отже,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.12}$$

Аналогічно можна довести, що формула (4.12) має місце і коли $90° < \alpha < 180°$.

При $x_1 = x_2$ пряма, що проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, паралельна осі Oy, тому її кутовий коефіцієнт не існує.

<u>Приклад. 4.6.</u> Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $M_1(-2; 3)$ і $M_2(5; -1)$.

Замінивши в формулі (4.12) x_1 і y_1 координатами точки M_1 та x_2, y_2 координатами точки M_2, отримаємо

$k = \dfrac{-1-3}{5-(-2)} = -\dfrac{4}{7}$.

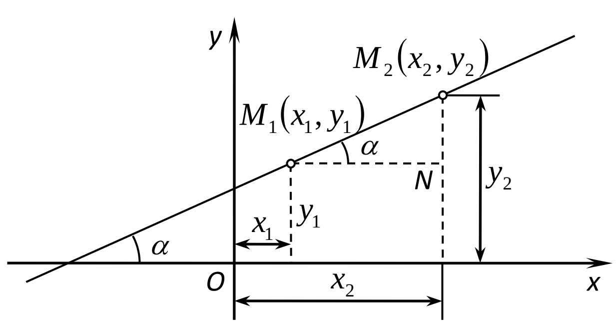


Рис. 4.12

<u>Приклад 4.7.</u> Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-3; 2)$ і утворює з додатнім напрямом вісі Ox кут $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої за означенням $k = \text{tg}\alpha = \text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1$. Замінивши у формулі (4.3) x_0 і y_0 координатами точки M_0, одержимо $y - 2 = -(x+3)$ або $x + y + 1 = 0$.

Нехай пряма l проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$., тоді оберемо за напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$, який має координати $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Підставивши в рівняння (4.7) координати точкиM_1, через яку проходить дана пряма, і напрямного вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, який має пряма l, отримаємо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{4.13}$$

що носить назву *рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*.

Якщо $x_1 = x_2$, то пряма паралельна осі Oy і має рівняння

$$x = x_1 \qquad (4.13')$$

Якщо $y_1 = y_2$, то пряма паралельна осі Ox і має рівняння

$$y = y_1. \qquad (4.13'')$$

Приклад 4.8. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-5; 3)$ і $M_2(2; 3)$.

Оскільки ординати точок рівні, то використаємо формулу (4.13″), тобто пряма, що проходить через дані точки має рівняння $y = 3$.

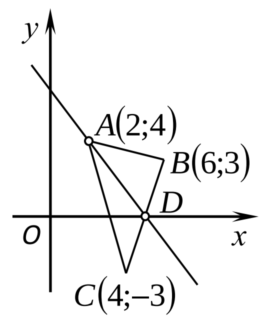


Рис.4.13

Приклад 4.9. Дано координати вершин трикутника ABC: $A(2; 4)$, $B(6; 3)$, $C(4; -3)$. Скласти рівняння медіани AD (рис. 4.13).

Координати точки D – середини сторони BC – знаходимо за формулами визначення координат середини відрізка, за умови, що точки розглядаються на площині, тобто

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \text{ і } y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0.$$

Підставивши в рівняння (4.13) замість x_1 і y_1 координати точки A, а замість x_2 і y_2 – координати точки D одержимо $\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{y - 4}{0 - 4}$ або

$$4x + 3y - 20 = 0.$$

Якщо пряма проходить через точки $A(a; 0)$ та $B(0; b)$, тобто відтинає на координатних осях відрізки a та b (рис. 4.14), то з рівняння (4.11) маємо $\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$, спростивши, одержимо

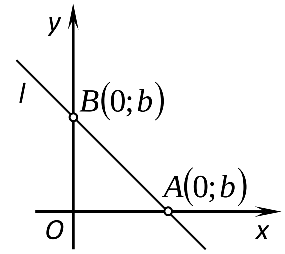


Рис. 4.14

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) називається *рівнянням прямої у відрізках на осях*.

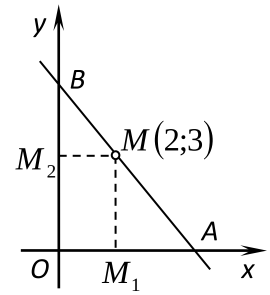


Рис. 4.15

Приклад. 4.10. Скласти рівняння прямої, якщо точка $M(2;\,3)$ є серединою її відрізка, який розташований між осями координат (рис. 4.15).

З точки M опустимо перпендикуляри MM_1 та MM_2 на координатні осі Ox і Oy, тоді точка M_1 має абсцису $x = 2$, а точка M_2 має ординату $y = 3$. Оскільки MM_1 і MM_2 є середніми лініями трикутника OAB, то $OM_1 = M_1A = 2$ та $OM_2 = M_2B = 3$. Таким чином, пряма відтинає на осі Ox відрізок OA довжиною 4, а на осі Oy – відрізок OB довжиною 6, тому її рівняння матиме вигляд

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1 \iff 3x+2y-12=0.$$

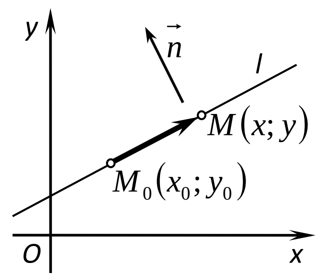


Рис. 4.16

Ненульовий вектор $\vec{n}=(A;B)$, який є перпендикулярним до даної прямої l, називається *нормальним вектором* цієї прямої. З множини усіх нормальних векторів прямої l (а їх безліч, вони всі паралельні і, значить, мають пропорційні координати) оберемо один. Візьмемо на прямій l, що проходить через точку $M_0(x_0;\,y_0)$, довільну точку $M(x;\,y)$ і введемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\,y-y_0)$ (рис. 4.16). Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежить на прямій l, то він перпендикулярний до нормального вектора, отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (4.15)$$

Рівняння (4.15) називається *рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора*.

Приклад. 4.11. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-1;\,3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;\,-3)$.

З умови задачі маємо $x_0 = -1$, $y_0 = 3$, $A=2$, $B = -3$. Підставивши ці значення в рівняння (4.15), одержимо $2(x+1)-3(y-3)=0 \iff 2x-3y+11=0$.

Приклад 4.12. Серед множини прямих $A(x+3)+B(y-4)=0$ оберіть ту, що перпендикулярна вектору $\vec{n}=-5\vec{i}+3\vec{j}$.

З рівняння даної множини прямих видно, що ці всі прямі проходять через точку з координатами (-3; 4). Маючи координати точки та вектора, який проходить перпендикулярно до даною прямої, можна, користуючись рівнянням (4.15), скласти рівняння шуканої прямої $-5(x+3)+3(y-4)=0$ або $5x-3y+27=0$.

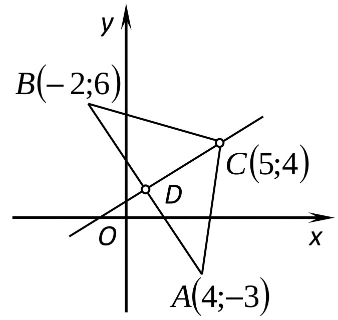


Рис. 4.17

Приклад 4.13. Дано трикутник *ABC* з вершинами *A*(4; -3), *B*(-2; 6), *C*(5; 4). Скласти рівняння висоти *CD* (рис. 4.17).

Висота *CD* проходить через точку *C*(5; 4), тому в рівнянні (4.15) $x_0 = 5$, $y_0 = 4$. За нормальний вектор прямої *CD* можна взяти вектор $\overrightarrow{BA}\ (6;-9)$. Отже, шукане рівняння має вигляд $6(x-5)-9(y-4)=0$ або $2x-3y+2=0$.

4.2.2. *Загальне рівняння прямої та його дослідження. Нормальне рівняння прямої.*

Розкриємо дужки в рівнянні (4.15) і утворений числовий доданок $(-Ax_1-By_1)$ позначимо буквою *C*, в результаті отримаємо рівняння

$$Ax+By+C=0, \tag{4.16}$$

яке називається *загальним рівнянням прямої*.

Всі одержані вище рівняння (4.5) – (4.8), (4.3), (4.10), (4.11), (4.13), (4.14), (4.15), кожне з яких зводиться до рівняння (4.16), прямої лінії є рівняннями першого порядку відносно змінних *x* і *y*, тобто є лінійними рівняннями. Отже, *рівняння будь-якої прямої, яка лежить на площині xOy, є лінійним рівнянням відносно змінних x і y. Правильним буде і обернене твердження: кожне лінійне рівняння виду* (4.16) *з двома змінними x і y визначає на площині в прямокутній системі координат пряму.*

Виходячи з позначень коефіцієнтів в загальному рівнянні прямої, можна отримати нові формули для знаходження кутового коефіцієнта та початкової ординати прямої, за умови, що $B \neq 0$. Отже,

$$k=-\frac{A}{B} \text{ і } b=-\frac{C}{B}. \tag{4.17}$$

Приклад 4.14. Знайти кутовий коефіцієнт та початкову ординату прямої $3x+2y-6=0$.

Використовуючи формули (4.17), знаходимо $k=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{2}$, $b=-\frac{C}{B}=-\left(-\frac{6}{2}\right)=3$, в результаті отримаємо пряму $y=-\frac{3}{2}x+3$.

Кутовий коефіцієнт та початкову ординату можна знайти, перетворивши дане рівняння до вигляду (4.10); для цього потрібно розв’язати початкове рівняння відносно y, тобто $2y = -3x + 6$ або $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Окремі випадки розміщення прямої в системі координат xOy залежно від значень коефіцієнтів A, B, C:

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат xOy залежно від значень коефіцієнтів A, B, C.

1. Якщо $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, то рівняння (4.16) зводиться до рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$, тобто пряма перетинає осі координат у точках з координатами $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ і $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ (рис. 4.18, *а*).

2. Якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = (0; B)$ прямої перпендикулярний до осі Ox, а координати даної точки задовольняють рівняння прямої (рис. 4.18, *б*).

3. Аналогічно попередньому, якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C=0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ (рис. 4.18, *в*).

4. Якщо $C = 0$, то пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат, тому що координати точки $O(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої (рис. 4.18, *г*).

5. Якщо $A = C = 0$, то згідно з попереднім рівняння $By = 0$ або $y = 0$ визначає вісь Ox (рис. 4.18, *д*).

6. Якщо $B = C= 0$, то $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає вісь Oy (рис. 4.18, *е*).

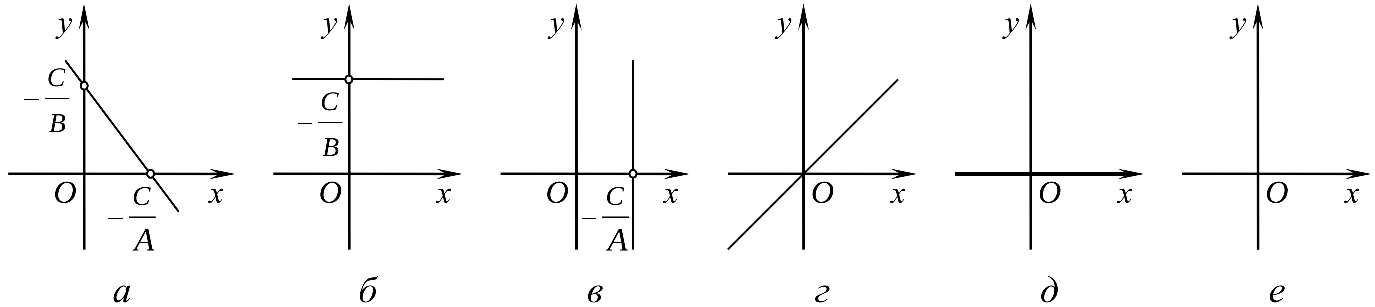


Рис. 4.18

Якщо обидві частини рівняння (4.16) помножити на число $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, яке називається *нормуючим множником*, причому знак перед радикалом потрібно вибирати так, щоб виконувалась умова $\mu \cdot C < 0$, то одержимо ще один вид рівняння прямої

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \tag{4.18}$$

де p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, а φ – кут, утворений цим перпендикуляром з додатнім напрямом осі Ox. Таке рівняння називається *нормальним рівнянням прямої*, і зводиться до інших видів рівнянь прямої.

<u>Приклад 4.15.</u> Дано рівняння прямої $\frac{x + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{y - 2\sqrt{5}}{2} = 0$. Записати:

1) загальне рівняння цієї прямої;
2) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
3) рівняння у відрізках;
4) нормальне рівняння.

1) для того, щоб записати дане рівняння прямої у загальному вигляді, зведемо дроби в лівій частині до спільного знаменника $\frac{x + 2\sqrt{5} + 2\left(y - 2\sqrt{5}\right)}{4} = 0$ і спростимо $x + 2\sqrt{5} + 2\left(y - 2\sqrt{5}\right) = 0$, в результаті пряма має такий загальний вигляд $x + 2y - 2\sqrt{5} = 0$;

2) розв'язавши отримане загальне рівняння даної прямої відносно змінної y, одержимо рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{5}$;

3) перенесемо вільний член загального рівняння в праву частину і поділимо на нього обидві частини рівності $\frac{x}{2\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 1$, отримане рівняння є рівнянням у відрізках;

4) знаходимо нормуючий множник $\mu = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (нормуючий множник одатній, бо вільний член загального рівняння прямої – від’ємний) і множимо на нього загальне рівняння прямої, одержимо $\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}} - 2 = 0$.

4.2.3. *Взаємне розташування прямих на площині.*

Варіантів взаємного розміщення двох прямих l_1 та l_2 на площині може бути лише три: або вони суміщаються, або паралельні, або перетинаються під різними кутами, зокрема, є перпендикулярними.

Очевидно, що всі ці варіанти зводяться до відшукання кута між цими прямими або між їхніми напрямними чи нормальними векторами,тобто кута $\varphi = \left(\widehat{l_1, l_2}\right)$.

Складемо порівняльну таблицю, в якій для трьох видів рівнянь, якими задані прямі l_1 та l_2 записано формули обчислення кута між цими прямими та умови їхньої паралельності та перпендикулярності.

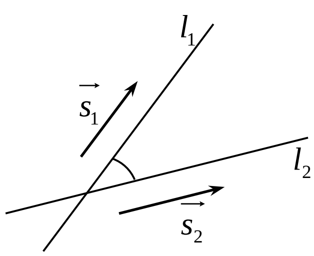


Рис 4.19

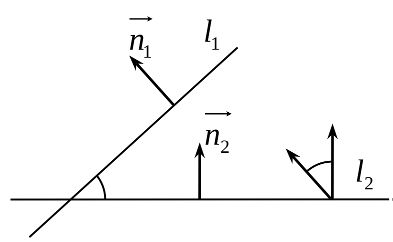


Рис.4.20

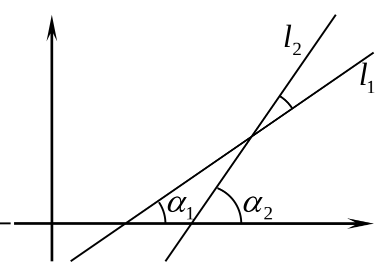


Рис. 4.21

Таблиця 4.1.

Спосіб завдання прямих	Прямі задані канонічними рівняннями $l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$, $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$ (рис. 4.19)	Прямі задані загальними рівняннями l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$, l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$ (рис. 4.20)	Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом l_1: $y=k_1x+b_1$, l_2: $y=k_2x+b_2$ (рис. 4.21)
Кут між прямими φ	Кут між напрямними векторами цих прямих, тобто $\varphi = (\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\vec{s_1}, \vec{s_2}})$	Кут між нормальними векторами цих прямих, тобто $\varphi = (\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\vec{n_1}, \vec{n_2}})$	Кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки пряму l_1, щоб вона збіглася з прямою l_2.
Тригонометрична функція кута	$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$ (4.20)	$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ (4.21)	$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$ (4.22)
Умова паралельності прямих	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (4.23)	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ (4.24)	$k_1=k_2$ (4.25)
Умова перпендикулярності прямих	$m_1m_2+n_1n_2=0$ (4.26)	$A_1A_2+B_1B_2=0$ (4.27)	$k_2=-\frac{1}{k_1}$ (4.28)

Приклад. 4.16**.** Знайти кут між прямими:

1) $3x-4y+1=0$ і $5x-12y+3=0$;

2) $y=-3x+7$ і $y=2x+1$.

1) прямі задані загальними рівняннями, тому для знаходження кута між ними використаємо формулу (4.21), в якій покладемо $A_1=3,\ B_1=-4,\ A_2=5,\ B_2=-12$, тобто

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot5+(-4)\cdot(-12)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{15+48}{5\cdot13}=\frac{63}{65}\approx0{,}96,$$ значить

$\varphi=\arccos0{,}96\approx16^\circ$.

2) Поклавши $k_1 = -3, k_2 = 2$ у формулі (4.22), одержимо $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot 2}\right| = 1$, тобто $\varphi = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4} = 45°$.

Приклад 4.17. Довести, що прямі:

1) $4x - 6y + 7 = 0$ і $20x - 30y - 11 = 0$ паралельні;

2) $y = 0{,}6x + 1{,}4$ і $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$ перпендикулярні.

1) знайдемо згідно формули (4.24) відношення відповідних координат нормальних векторів $\frac{4}{20} = \frac{-6}{-30} = \frac{1}{5}$, отже, умова паралельності прямих, заданих загальними рівняннями, виконується, значить, задані прямі є паралельними, що і треба було довести;

2) перевіримо виконання умови перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами, за формулою (4.28) $0{,}6 = -\frac{1}{-\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$, отже, прямі перпендикулярні, що і треба було довести.

Приклад 4.18. Медіани *BM* і *CN* (рис. 4.22) трикутника *ABC* лежать на прямих $l_1 : x + y - 3 = 0$ та $l_2 : 2x + 3y - 1 = 0$, а точка $A(1;1)$ – вершина трикутника. Скласти рівняння прямої *BC*.

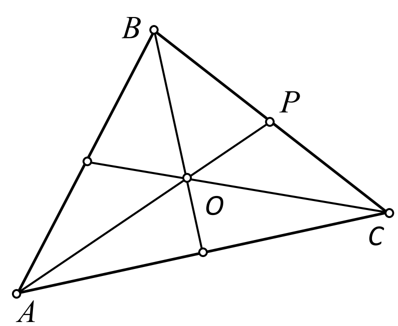


Рис. 4.22

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 2x + 3y - 1 = 0, \end{cases}$ знайдемо точку перетину прямих l_1 і l_2, тобто медіан: $O(8; -5)$. З властивості точки перетину медіан маємо: $\frac{AO}{OP} = \frac{2}{1} = \lambda$, де P – точка перетину медіани AO із стороною BC. Застосувавши формули поділу відрізка у заданому відношені:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

знайдемо координати точки P: $\frac{1+2x_P}{1+2} = 8 \Rightarrow x_P = \frac{23}{2}$, $\frac{1+2y_P}{1+2} = -5 \Rightarrow y_P = -8$.

Оскільки точки $B \in l_1$ і $C \in l_2$, то їхні координати задовольняють рівняння цих прямих. Точка P ділить відрізок BC навпіл, отже, можна скласти наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{23}{2}, \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + y_B - 3 = 0, \\ 2x_C + 3y_C - 1 = 0 \end{cases},$$

звідки $x_C = 11,\ y_C = -7$. Пряма BC проходить через точки $P\left(\dfrac{23}{2}; -8\right)$ і C (11; 7), тому складемо її рівняння за формулою (4.13), тобто $\dfrac{x - \frac{23}{2}}{11 - \frac{23}{2}} = \dfrac{y+8}{-7+8}$, і в результаті отримаємо (BC): $\quad 2x + y - 15 = 0$.

Якщо прямі, які перетинаються задані загальними рівняннями:

l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і

l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,

то рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (4.19)$$

де λ – числовий множник, визначає пряму лінію, що проходить через точку перетину заданих прямих.

Надаючи в рівнянні (4.19) λ різних значень, будемо отримувати різні прямі, що належать пучці прямих, центр якої є точка перетину прямих. Отже, рівняння (4.19) можна назвати як рівняння *пучки прямих з центром в точці перетину заданих прямих*.

Приклад. 4.19. Знайти пряму, яка:

1) належить пучку $2x + 3y + 5 + \lambda(x + 8y + 6) = 0$ і проходить через точку $M(1;1)$;

2) проходить через точку перетину прямих $3x - 4y + 7 = 0$ і $5x + 2y + 3 = 0$ паралельно осі ординат.

1) координати точки M повинні задовольняти рівняння шуканої прямої, тому для визначення λ у формулі (4.19) отримуємо рівняння $2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 5 + \lambda(1 + 8\cdot 1 + 6) = 0$ або $10 + 15\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$. Підставивши значення λ в рівняння пучка, отримаємо рівняння шуканої прямої $2x + 3y + 5 - \dfrac{2}{3}(x + 8y + 6) = 0$ або $4x - 7y + 3 = 0$.

2) пряма належить пучку $3x - 4y + 7 + \lambda(5x + 2y + 3) = 0$, тобто $(3+\lambda)x + (-4 + 2\lambda)y + (7 + 3\lambda) = 0$. Так як шукана пряма паралельна осі ординат, то коефіцієнт при y повинен дорівнювати нулю: $-4 + 2\lambda = 0$, тобто λ = 2.

Залишається підставити одержане значення λ в рівняння пучка, звідки отримуємо шукане рівняння $x+1=0$.

Приклад. 4.20. Дано рівняння сторін трикутника: $(AB)\colon x+2y+5=0$, $(BC)\colon 3x+y+1=0$ і $(AC)\colon x+y+7=0$. Скласти рівняння висоти, опущеної на сторону AC.

Висота належить пучку прямих $x+2y+5+\lambda(3x+y+1)=0$ або $(1+3\lambda)x+(2+\lambda)y+(5+\lambda)=0$.

Кутовий коефіцієнт прямої пучка дорівнює $-\dfrac{1+3\lambda}{2+\lambda}$.

Кутовий коефіцієнт прямої AC дорівнює –1, відповідно, кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 1, тоді для знаходження λ отримаємо рівняння $-\dfrac{1+3\lambda}{2+\lambda}=1$. Звідси $1+3\lambda+2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{3}{4}$. Підставивши одержане значення λ в рівняння пучки, отримаємо шукане рівняння висоти $\left(1-\dfrac{9}{4}\right)x+\left(2-\dfrac{3}{4}\right)y+\left(5-\dfrac{3}{4}\right)=0\Rightarrow 5x-5y-17=0$.

4.2.4. *Відстань від точки до прямої на площині. Рівняння бісектрис кута між прямими.*

Нехай задано пряму l загальним рівнянням (4.16) і точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Відстань d (рис. 4.23) від точки M_0 до прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, ($M_1(x_1;\ y_1)$ – довільна точка прямої l), на напрям нормального вектора прямої $\vec{n}=(A;B)$ прчямої l.

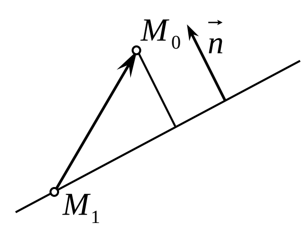


Рис.4.23.

Отже, $d=\left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Оскільки, $M_1\in l$, то $Ax_1+By_1+C=0$, значить $-Ax_1-By_1=C$, тому відстань від точки до прямої знаходиться за такою формулою:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{4.20}$$

Відхиленням δ точки $M_0(x_0;\ y_0)$ від прямої l із загальним рівнянням (4.16) називається число δ:

$$\delta=\pm\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{4.21}$$

Крім того, $\delta = d$, якщо точки $M_0(x_0; y_0)$ і O (0; 0) лежать по різні сторони від прямої l, і $\delta = -d$, якщо ці точки лежать по один бік від даної прямої.

Приклад. 4.21. Визначити відстань між паралельними прямими $l_1: 3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ і $l_2: 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$.

Розв'язання задачі зводиться до визначення відстані від довільної точки однієї прямої до іншої. Візьмемо точку на прямій l_1, для цього покладемо в рівнянні цієї прямої $x_0 = 0$ і знайдемо відповідну ординату точки $y_0 = 3\sqrt{10}$, отже, точка $M_0 \in l_1$ має координати $M_0(0;3\sqrt{10})$. Визначимо тепер за формулою (4.31) відстань від точки M_0 до прямої l_2:

$$d = \frac{\left|6 \cdot 0 + 2 \cdot 3\sqrt{10} + 5\sqrt{10}\right|}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 5{,}5.$$

Приклад 4.22. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на паралельних прямих $l_1: 4x - 3 - 10 = 0$ і $l_2: 8x - 6y + 15 = 0$.

Аналогічно попередньому прикладу візьмемо точку $M_0(1; -2)$, що належить прямій l_1 і знайдемо за формулою (4.20) відстань від цієї точки до прямої l_2

$$d = \frac{\left|8 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) + 15\right|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{7}{2} = 3{,}5,$$

а відстань між цими прямими для квадрата є довжиною його сторони, значить,

$$S_{\text{кв}} = d^2 = \frac{49}{4} = 12{,}25 \text{ (кв. од.)}.$$

Бісектриси кутів, утворених прямими, є, як відомо, геометричними місцями точок, рівновіддалених від цих прямих. Якщо прямі задані загальними рівняннями l_1: $A_1x + B_1y + C_1=0$, l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, причому $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, тобто прямі не є паралельними, то для будь-якої точки $\tilde{M}(\tilde{x}; \tilde{y})$, що лежить на одній з бісектрис, маємо, використовуючи формулу (4.20),

$$\frac{\left|A_1\tilde{x} + B_1\tilde{y} + C_1\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{\left|A_2\tilde{x} + B_2\tilde{y} + C_2\right|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Оскільки точка $\tilde{M}(\tilde{x}; \tilde{y})$ – довільна точка бісектриси, то її можна позначити $M(x; y)$. Враховуючи, що вирази, які стоять під знаком модуля, можуть мати різні знаки, отримаємо для однієї бісектриси рівняння

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

а для іншої рівняння

$$-\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Таким чином, рівняння обох бісектрис можна записати у вигляді:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (4.22)$$

Приклад 4.23. Дано вершини трикутника: $A(1;\ 1)$, $B(10;\ 13)$, $C(13;\ 6)$. Скласти рівняння бісектриси кута A.

I спосіб: знайдемо, користуючись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, рівняння тих сторін трикутника, які утворюють кут A:

$$(AB): \frac{x-1}{10-1}=\frac{y-1}{13-1}\Rightarrow (AB): 4x-3y-1=0 \text{ і } (AC): \frac{x-1}{13-1}=\frac{y-1}{6-1}\Rightarrow (AC): 5x-12y+7=0.$$

Тепер за формулою (4.20) складемо рівняння бісектрис між цими прямими: $\frac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\pm\frac{5x-12y+7}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$. Так як нам потрібен гострий кут, то обираємо варіант із знаком мінус, тобто $\frac{4x-3y-1}{5}=-\frac{5x-12y+7}{13}$. Після спрощення виразу та зведення подібних доданків одержимо рівняння $7x-9y+2=0$.

II спосіб: використовуючи властивість бісектриси. Нехай D – точка перетину бісектриси зі стороною BC. За властивістю бісектриси внутрішнього кута випливає, що $\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|AC|}$. Так як $|AB|=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15$ і $|AC|=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13$ то, $\lambda=\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{15}{13}$.

Знайдемо тепер координати точки D, за формулами: $x_D=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}$, $y_D=\frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}$ - ділення відрізку у заданому відношенні:

$$x_D=\frac{10+\frac{15}{13}\cdot 13}{1+\frac{15}{13}}=\frac{325}{28} \text{ і } y_D=\frac{13+\frac{15}{13}\cdot 6}{1+\frac{15}{13}}=\frac{259}{28}, \text{ тобто } D\left(\frac{325}{28};\frac{259}{28}\right).$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки A і D:

$$\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1}=\frac{y-1}{\frac{259}{28}-1}\Rightarrow (AD): 7x-9y+2=0.$$

4.3.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. В чому полягає сутність методу координат?

2. Що називається алгебраїчною лінією, її порядком?

3. Чи змінюється поняття, порядок та рівняння алгебраїчної лінії при переході від однієї афінної системи координат до іншої?

4. Які ви знаєте види рівнянь лінії на площині? Запишіть їх та наведіть приклади.

5. Що являє собою алгебраїчна лінія першого порядку на площині?

6. Дайте визначення напрямному і нормальному вектору прямої. Скільки напрямних та нормальних векторів має пряма? Що можна сказати про координати таких векторів?

7. Виведіть такі рівняння прямої: параметричне; векторне; канонічне; з кутовим коефіцієнтом (різні варіанти); що проходить через дві точки; у відрізках на осях; загальне; нормальне.

8. Які існують варіанти взаємного розташування двох прямих на площині?

9. За яких умов прямі є паралельними чи перпендикулярними?

10. Як обчислюється відстань між точкою і прямою; між паралельними прямими?

4.3.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Скласти рівняння лінії, всі точки якої: 1) рівновіддалені від точок $A(-2; 1)$ та $B(-1; -3)$; 2) віддалені від точки $A(3; -2)$ на відстань – 5.

Задача №2. Визначити, яка лінія визначається параметричними рівняннями:

1) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t - 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

Задача №3. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дану точку M_0 паралельно вектору $\vec{s}$, якщо:

1) $M_0(-4; 2)$, $\vec{s} = (2;\ -1)$; 2) $M_0(2; -1)$, $\vec{s} = (-2; 5)$;

3) $M_0(4; 0)$, $\vec{s} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$; 4) $M_0(0; -3)$, $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Задача №4. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через дану точку M_0 паралельно вектору $\vec{s}$, якщо:

1) $M_0(-4; 2)$, $\vec{s} = (2;\ -1)$; 2) $M_0(1; 3)$, $\vec{s} = (3; 2)$;

3) $M_0(3; -5)$ $, = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; 4) $M_0(-4; 0)$, $\vec{s} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

Задача №5. Написати параметричне рівняння кожної з даних прямих:

1) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{5}$; 2) $\frac{x}{4} = \frac{y+5}{3}$; 3) $\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{2}$; 4) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+8}{2}$.

Задача №6. Написати канонічне рівняння кожної з даних прямих:

1) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 5 + t; \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -t; \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -4 + 2t; \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = 7 + 3t. \end{cases}$

Задача №7. Скласти рівняння прямої, яка проходить перпендикулярно вектору $\vec{n}$ і через точку C, якщо:

1) $\vec{n} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$,C(4; -1); 2) $\vec{n} = (0;\ -2)$, C(-1; -2).

Задача №8. Дано трикутник з вершинами A(-3; 2), B(5; -2), C(0; 4). Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини B та виконати малюнок.

Задача №9. Дано трикутник з вершинами A(3; 4), B(2; 5), C(7; 8). Скласти рівняння прямої, що проходить через B перпендикулярно медіані BD.

Задача №10. Побудувати фігуру, обмежену лініями:

1) $x + 4 = 0$, $x - 3 = 0$, $y + 2 = 0$, $y + 5 = 0$; 2) $y = 0$, $x = 6$, $x - 2y = 0$.

Задача №11.Записати зальне рівняння кожної з прямих та вказати координати її нормального вектора:

1) $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-4}$; 2) $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y-2}{4}$; 3) $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -8t + 3 \end{cases}$;

4) $y = -3x + 5$; 5) $y = \dfrac{1}{3}x$.

Задача №12. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку A(0; 5) паралельно даній прямій: 1) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4}$; 2) $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = 3t \end{cases}$.

Задача №13. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B(-3;1) перпендикулярно даній прямій: 1) $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y}{3}$; 2) $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 5t \end{cases}$.

Задача №14. Дано трикутник з вершинами A(-5; 5), B(1; 7), C(5; -1). Скласти рівняння сторін і медіан цього трикутника.

Задача №15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки:

1) M_1(-2; 1) і M_2(1; -2); 2) M_1(6; 0) і M_2(3; -2); 3).

Задача №16 Знайти площу трикутника, обмеженого прямою
l: $2x - 5y - 10 = 0$ та осями координат.

Задача №17. Дослідити взаємне розташування пар прямих і, якщо вони перетинаються, знайти точку перетину:

1) $3x - 2y - 4 = 0$ і $x + 3y - 5 = 0$;

2) $x - 5y + 7 = 0$ і $3x - 15y + 4 = 0$;

3) $5x - 3y + 9 = 0$ і $6x + 10y + 13 = 0$;

4) $2x + 7y - 3 = 0$ і $6x + 21y - 9 = 0$;

5) $2x + 3y - 12 = 0$ і $x - y - 1 = 0$;

6) $x-2y-7=0$ і $4x+2y-3=0$.

Задача №18. Дано сторони трикутника: $(AB): x+2y+5=0$, $(BC): 3x+y+1=0$, $(AC): x+y+7=0$.

Скласти рівняння висоти трикутника, опущеної на сторону *AC*, користуючись рівнянням пучка прямих.

Задача №19. Знайти гострий кут, утворений з віссю ординат прямою, яка проходить через точки *A*(2; 1) і *B*(-2; 1).

Задача №20. Знайти пряму, яка проходить через точку перетину прямих $x+6y+5=0$, $3x-2y+1=0$ та через точку $M\left(-\frac{4}{5};1\right)$.

4.4. *Лінії другого порядку*

4.4.1. *Означення лінії 2-го порядку.*

Лінією другого порядку називається множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{4.23}$$

де коефіцієнти *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел *A*, *B*, *C* відмінне від нуля, тобто $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

До ліній другого порядку, зокрема, належать коло, еліпс, гіпербола, парабола. Рівняння (4.23) може визначати на площині також дві прямі, одну пряму, точку або не визначати ніякої фігури. Отже, коло, еліпс, гіпербола, парабола задаються рівняннями другого ступеня, але, на відміну від прямої лінії, обернене твердження неправильне.

Лінії другого порядку називають також *конічними перерізами* через те, що їх можна одержати як лінії перетину кругового конуса з площиною. Коло утворюється як лінія перетину площини, яка перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (рис.4.24, *а*); еліпс – лінія перетину площини, яка перетинає всі твірні конуса, не перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (рис.4.24, *б*); гіпербола – лінія перетину двопорожнього конуса площиною, паралельною двом твірним (рис.4.24, *в*); парабола – лінія перетину двопорожнього конуса площиною, паралельною одній твірній (рис.4.24, *г*).

Лінії другого порядку широко застосовуються в науці та техніці.

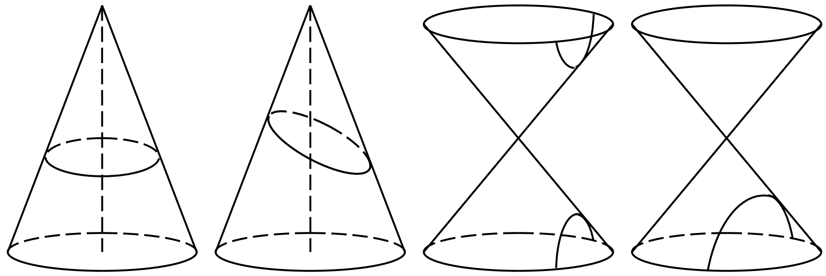


Рис. 4.24

4.4.2. *Коло.*

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається *центром* кола.

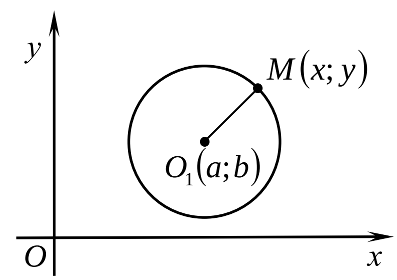


Рис. 4.25

Складемо рівняння кола радіуса r з центром в точці $O_1(a,b)$. Візьмемо на даному колі (рис. 4.25) довільну точку $M(x;\ y)$, значить, $O_1M = r$, тобто за формулою $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, отже, отримали рівняння:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \qquad (4.24)$$

яке називається *канонічним рівнянням* кола радіуса r з центром в точці $O_1(a;\ b)$, тому що це рівняння задовольняють координати будь-якої точки кола, і не задовольняють, якщо дана точка цьому колу не належить.

Якщо центр кола знаходиться на осі абсцис, тобто якщо $b = 0$, то рівняння (4.24) набуває вигляду

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2. \qquad (4.25)$$

Якщо ж центр кола знаходиться на осі ординат, тобто якщо $a = 0$, то рівняння (4.25) набуває вигляду:

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (4.26)$$

Нарешті, якщо центр кола знаходиться в початку координат, тобто якщо $a = b = 0$, то рівняння (4.25) набуває вигляду

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (4.27)$$

Приклад. 4.24. Скласти рівняння кола радіуса $r = 5$ з центром в точці $O_1(3;\ \text{-}2)$

Маємо: $r = 5, a = 3, b = -2$. Підставивши ці значення в рівняння (4.25), знайдемо: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$.

<u>Приклад. 4.25.</u> Арка має форму дуги кола. Знайти довжину l дуги арки, якщо її проліт і підйом відповідно дорівнюють $2a$ і b. (Підйом арки дорівнює відношенню її висоти до прольоту.)

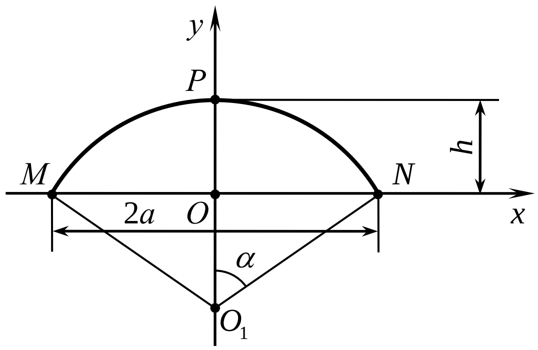


Рис. 4.26

Введемо систему координат так, як показано на рис.4.26, де арка MPN – дуга кола, $MO = ON$, $OP = h = 2ab$. В обраній системі координат точки M, P і N мають координати $M(-a;0)$, $P(0;2ab)$, $N(a;0)$. Нехай $O_1(0;y_0)$ і r відповідно центр і радіус кола, тоді його рівняння має вигляд $x^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Оскільки коло проходить через точки P і N, то $(2ab - y_0)^2 = r^2$ і $a^2 + y_0^2 = r^2$, звідки $r = \frac{(4b^2+1)a}{4b}$, $|y_0| = \frac{(4b^2-1)a}{4b}$. Знайдемо центральний кут $2\alpha = \angle MO_1N$, на який спирається дуга арки. Маємо $2\cos\alpha = \frac{|y_0|}{r} = \frac{|4b^2-1|}{4b^2+1} \Rightarrow 2\alpha = \arccos\frac{|4b^2-1|}{4b^2+1}$,

отже, $$l = 2r\alpha = \frac{(4b^2+1)a}{2b}\arccos\frac{|4b^2-1|}{4b^2+1}.$$

4.4.3. *Еліпс*

Еліпсом називається множина всіх точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок тієї ж площини, які називаються *фокусами еліпса*, є величина стала, причому більша, ніж відстань між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса

Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 і F_2 і - фокуси еліпса і розмістимо їх на координатній площині так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис.4.27).

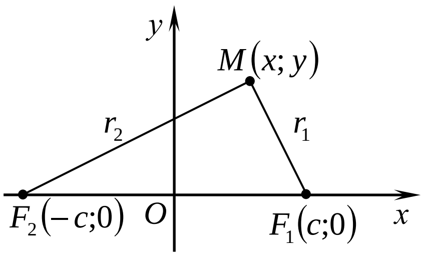


Рис..4.27

Позначимо відстань між фокусами, яку називають *фокальною*, через 2*c*, тобто $F_1F_2 = 2c$, тоді фокуси матимуть координати $F_1(c;\,0)$ та $F_2(-c;\,0)$.

Нехай *M*(*x*; *y*) – довільна точка еліпса. Відстані $r_1 = F_1M$ та $r_2 = F_2M$ називаються *фокальними радіусами* точки *M*. Покладемо $r_1 + r_2 = 2a$ (1), тоді згідно означення еліпса 2*a* – величина стала, причому2*a* > 2*c*, тобто *a* > *c*. Тоді за формулою (4.25) знаходимо $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ і $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Підставивши знайдені значення r_1 і r_2 в рівність (1), отримаємо *рівняння еліпса*

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (4.28)$$

Перенесемо один з доданків з лівої частини рівняння в праву $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, піднесемо до квадрату: $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$ і зведемо подібні доданки, отримаємо: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$, знову піднесемо до квадрату $a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$ і зведемо подібні доданки маємо рівність $\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$.

Так як *a* > *c*, то $a^2 - c^2 > 0$, і можна ввести позначення $a^2 - c^2 = b^2$, тоді рівняння (2) матиме вигляд: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (3), поділивши обидві частини рівності на a^2b^2 остаточно маємо

канонічне рівняння еліпса: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.29)$$

Так як координати *x* і *y* будь-якої точки *M* еліпса задовольняє рівняння (4.28), то вони задовольняють і рівняння (4.29).

Справедливим є і обернене твердження: якщо координати точки *M*(*x*; *y*) задовольняють рівняння (4.29), то вона належить еліпсу.

<u>Приклад. 4.26</u>. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1(3;2)$і $M_2\left(4;\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, якщо його фокуси лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

За умовою задачі, точки належать еліпсу, значить, їхні координати задовольняють рівняння (4.29), тобто $M_1 \in E \Rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ і

$M_2 \in E \Rightarrow \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{8}{9b^2} = 1$, де E – позначення точок еліпса. Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $a^2 = 18, b^2 = 8$.

Отже, шукане рівняння має вигляд $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

Для дослідження форми еліпса складемо порівняльну таблицю, в лівому стовбці якої будемо аналізувати властивості його рівняння, а в правому – записувати відповідні властивості фігури на площині відносно обраної декартової прямокутної системи координат (ДПСК).

Таблиця 4.2

Властивості канонічного рівняння еліпса	*Властивості фігури*
1. Координати точки $O(0;\ 0)$ не задовольняють рівняння.	1. Еліпс не проходить через початок координат.
2. СисРозділ, складена з рівняння еліпса (ІІ-го порядку) та прямої (І-го порядку), має не більше двох розв'язків: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a, \\ y = 0, \end{cases}$	2. Пряма перетинає еліпс не більш як в двох точках: - еліпс з віссю абсцис має дві спільні точки з координатами $A_1(a;\ 0)$ і $A_2(-a;\ 0)$;
$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \pm b \end{cases}.$	- еліпс з віссю ординат має дві спільні точки з координатами $B_1(0; b)$ і $B_2(0; -b)$.
2. Області зміни x і y визначаються нерівностями $\lvert x\rvert \le a$ і $\lvert y\rvert \le b$, тобто $-a \le x \le a$ та $-b \le y \le b$	3. Всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, обмеженого прямими $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$, (рис.4.27).
4. Змінні x та y входять до рівняння в парних степенях.	4. Еліпс симетричний відносно координатних осей, і відносно початку координат.
5. $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ і $x = \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$.	5. При зростанні $\lvert x\rvert$ від 0 до a величина $\lvert y\rvert$ спадає від b до 0, а при зростанні $\lvert y\rvert$ від b до 0 величина $\lvert x\rvert$ спадає від 0 до a.

Прямокутник, зображений на рис. 4.28, тобто обмежений прямими $x = \pm a$ та $y = \pm b$, називається *основним прямокутником еліпса*.

Врахувавши всі властивості фігури, вказані в таблиці 4.1, можна зробити висновок, що еліпс має форму, зображену на рис. 4.29.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називаються *вершинами еліпса*.

Відрізок $[A_1A_2]$, де $A_1A_2 = 2a$, $F_1 \in A_1A_2$, $F_2 \in A_1A_2$, називається *великою віссю еліпса*, а $OA_1 = OA_2 = a$, $F_1 \in OA_1, F_2 \in OA_2$ – *великою піввіссю еліпса*; відповідно відрізок $[B_1B_2]$, де $B_1B_2 = 2b$, називається *малою віссю еліпса*, а $OB_1 = OB_2 = b$ – *малою піввіссю еліпса*. Осі A_1A_2 і B_1B_2 є *осями симетрії еліпса*, а точка O – *центром симетрії* (або просто *центром*) *еліпса*.

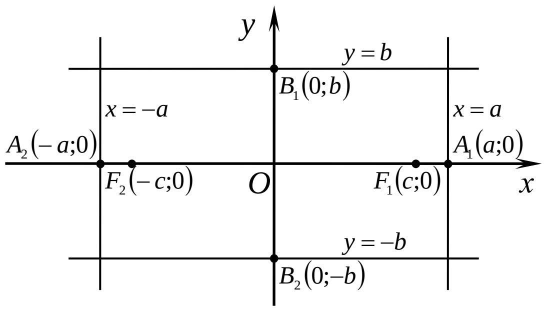


Рис. 4.28

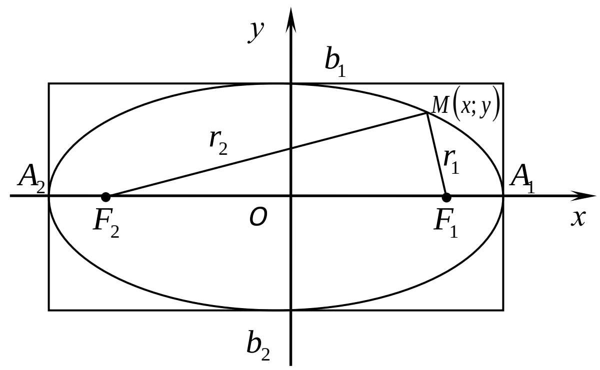


Рис. 4.29

<u>Приклад.4.27</u>**.** Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо фокусна відстань дорівнює 4, а мала вісь дорівнює 6.

Так як мала вісь дорівнює 6, то мала піввісь –3, тобто b = 3, $F_1F_2 = 10 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$. За формулою (4.7) $b^2 = a^2 - c^2$, тоді $a^2 = b^2 + c^2$, значить, $a^2 = 9 + 25 = 34$.

Отже, $\dfrac{x^2}{34} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

<u>Приклад. 4.28</u>. Визначити довжини осей та координати фокусів еліпса $24x^2 + 49y^2 = 1176$.

Зведемо рівняння до канонічного вигляду, розділивши обидві частини рівняння на 1176: $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$. Звідси $a^2 = 49 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow 2a = 14$, $b^2 = 49 \Rightarrow b = 2\sqrt{6} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{6}$, $b^2 = a^2 - c^2$, звідки $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, отже, $c = \sqrt{49 - 24} = 5$. Тоді: F_1(5; 0) і F_2(-5; 0).

В канонічному рівнянні еліпса виду (4.30) $a > b$. Якщо ж $a < b$, то еліпса не є канонічним, хоча і визначає еліпс велика вісь якого $2b$ лежить на осі ординат, а мала $2a$ – на осі абсцис. Фокуси такого еліпса знаходяться в точках $F_1(0;\,c)$ та $F_2(0;\,-c)$, де $c=\sqrt{b^2-a^2}$ (рис. 4.31.).

Якщо центр еліпса лежить не в початку координат, а в точці $O(x_0;\,y_0)$ і осі еліпса паралельні координатним осям, то *рівняння еліпса зі зміщеним центром* має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \qquad (4.30)$$

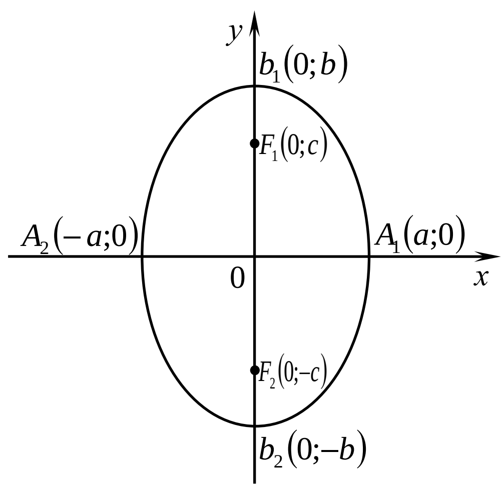


Рис. 4.30

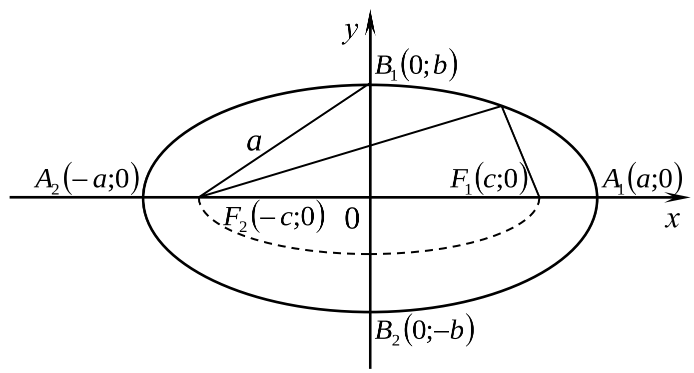


Рис. 4.31

4.4.4. *Гіпербола.*

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох даних точок тієї ж площини, які називаються *фокусами гіперболи*, є величиною сталою і меншою, ніж відстань між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи

Складемо рівняння гіперболи з фокусами в даних точках F_1 і F_2. Для цього оберемо ДПСК таким же чином, як і у п.4.3.3. Позначивши $F_1F_2=2c$, отримаємо $F_1(c;0)$ та $F_2(-c;0)$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка гіперболи. Відстані $r_1=F_1M$ та $r_2=F_2M$ називаються *фокальними радіусами* точки M.

За означенням гіперболи $|r_1-r_2|=2a$, де $2a$ – величина стала, і $2a<2c$, тобто $a<c$. Підставивши $r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ і $r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ в рівність (5), отримаємо *рівняння гіперболи*

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a. \qquad (4.31)$$

Рівняння (4.31) можна звести до більш простого вигляду, виконавши алгебраїчні перетворення:

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$ <=> $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$ <=>

<=> $x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$ <=>

$\mp a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=cx+a^2$ <=> $a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2+2a^2cx+a^4$, <=>

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$.

Так як $a<c$, то $c^2-a^2>0$ і позначивши:

$$c^2-a^2=b^2, \qquad (4.32)$$

перепишемо останню рівність у вигляді: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Поділивши обидві частини цієї рівності на a^2b^2 остаточно отримуємо *канонічне рівняння гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.33)$$

Так як координати довільної точки гіперболи задовольняють рівняння (4.31), то вони задовольняють рівняння (4.33). Як і у випадку з еліпсом, справедливе обернене твердження: якщо координати точки $M(x;y)$. задовольняють рівняння (4.33), то вона належить гіперболі.

Визначимо форму гіперболи за її канонічним рівнянням.

Таблиця 4.3

Властивості канонічного рівняння гіперболи	Властивості гіперболи
1	2
1. Координати точки $O(0;\,0)$ не задовольняють рівняння гіперболи.	1. Гіпербола не проходить через початок координат.
2. Сисма, складена з рівняння гіперболи (ІІ-го порядку) та прямої (І-го порядку), має не більше двох розв’язків: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm a,\\ y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y^2=-b^2\end{cases}$, сисма не має дійсних розв’язків	2. Пряма перетинає гіперболу не більш як в двох точках: -гіпербола з віссю абсцис має дві спільні точки з координатами $A_1(a;\,0)$ і $A_2(-a;\,0)$; - гіпербола з віссю ординат спільних точок не має.

1	2
3. Змінні x та y входять до рівняння в парних степенях.	3. Гіпербола симетрична відносно координатних осей, і, значить, відносно початку координат.
4. $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ і $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$, тобто . $\vert x\vert \geq a$ і y – будь-яке дійсне число.	4. Всі точки гіперболи розташовані зліва від прямої $x = -a$ і справа від прямої $x=a$ без обмежень по осі ординат.
5. $x \to +\infty, y \to \pm\infty$ $x \to -\infty, y \to \pm\infty$	5. Гіпербола складається з двох гілок: -правої, яка розташована справа від прямої $x=a$ - лівої, яка розташована зліва від прямої $x=-a$.

Приклад. 4.29. Скласти рівняння гіперболи, якщо її фокуси знаходяться в точках $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$, причому дана гіпербола проходить через точку $M\left(6;4\sqrt{3}\right)$.

Фокальна відстань $F_1F_2=10$, значить, c = 5. Згідно з формулою (4.11) $c^2=a^2+b^2$, підставивши значення c, маємо $a^2+b^2=25$. Так як точка M належить гіперболі, то її координати задовольняють рівняння цієї гіперболи, тобто $\frac{6^2}{a^2}-\frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1$, або $36b^2-48a^2=a^2b^2$.

Розв'язавши систему з двох отриманих рівнянь, маємо $a^2=9, b^2=16$, отже, гіпербола, що проходить через точку $M\left(6;4\sqrt{3}\right)$ і має фокуси в точках $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$, записується рівнянням $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

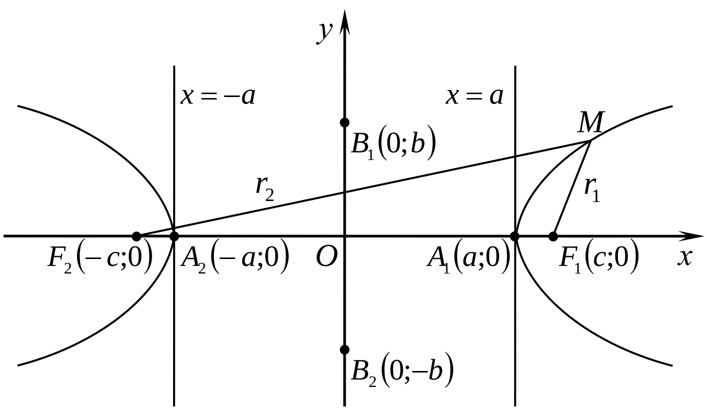


Рис. 4.32

Гіпербола має форму, зображену на рис. 4.32.

Точки $A_1(a;0), A_2(-a;0)$ перетину гіперболи з віссю абсцис називаються *вершинами гіперболи*. Відрізок $[A_1A_2]$, де $A_1A_2=2a$, який з'єднує вершини, називається *дійсною віссю гіперболи*, відповідно відрізок $[B_1B_2]$, де $B_1B_2 = 2b$, називається *уявною віссю гіперболи*, а $OB_1 = OB_2 = b$ – *уявною піввіссю гіперболи*. Осі A_1A_2 і B_1B_2 є *осями симетрії гіперболи*, а точка O – *центром* гіперболи.

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називається *основним прямокутником* гіперболи.

У гіперболи, яка задається рівнянням (4.33), фокуси завжди знаходяться на дійсній осі. Фокальні радіуси для довільної точки $M(x;y)$, розташованої на правій гілці, обчислюється за формулами:

$$r_1 = \frac{c}{a}x - a \text{ і } r_2 = \frac{c}{a}x + a, \tag{4.34}$$

а для точки $M(x;y)$, розташованої на лівій гілці, – за формулами

$$r_1 = -\left(\frac{c}{a}x - a\right) \text{ і } r_2 = -\left(\frac{c}{a}x + a\right) \tag{4.35}$$

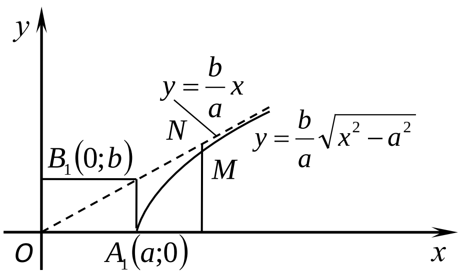


Рис. 4.33

<u>Приклад. 4.30.</u> Скласти канонічне рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться в точках $A_1(5;0)$ і $A_2(-5;0)$, а фокусна відстань дорівнює 14.

З умовою задачі :$b = 5$, $F_1F_2 = 14 \Rightarrow 2c = 14 \Rightarrow c = 7$, тоді

$b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 5^2 = 24$. Отже, шукане рівняння гіперболи : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$.

Асимптотами гіперболи називають прямі (рис.4.33), задані рівнянням:

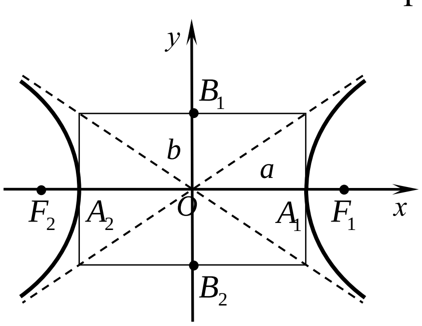


Рис. 4.34

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{4.36}$$

Асимптоти (4.36) є продовженням діагоналей основного прямокутника гіперболи. При цьому гілки гіперболи розташовані всередині вертикальних кутів, які утворюють асимптоти. (рис.4.33).

Приклад. 4.31 Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(2;1)$ і має асимптоти $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Із (4.36) маємо $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, тобто $b = \frac{3}{4}a$. Підставивши в рівняння гіперболи координати точки M та значення параметра b, одержимо $\frac{2^2}{a^2} - \frac{1^2}{\left(\frac{3}{4}a\right)^2} = 1$, тоді $a^2 = \frac{20}{9}$. Так як $b = \frac{3}{4}a$, то $b^2 = \frac{9}{16}a^2 = \frac{9}{16}\cdot\frac{20}{9} = \frac{5}{4}$, то шукане рівняння матиме вигляд $\frac{x^2}{\frac{20}{9}} - \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$, або $\frac{9x^2}{20} - \frac{4y^2}{5} = 1$.

Рівняння: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (4.37)

визначає гіперболу *спряжену до гіперболи* (4.34). Гіпербола (4.37) показана на рис. 4.35. штриховою лінією. Вершини спряженої гіперболи лежать в точках $B_1(0;b), B_2(0;-b)$, а її асимптоти збігаються з асимптотами гіперболи (4.33).

Рівносторонньою називається гіпербола, у якої довжини півосей рівні, тобто $a = b$. Рівностороння гіпербола залежить лише від одного параметра a, тому її канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ або } x^2 - y^2 = a^2. \quad (4.38)$$

Асимптотами рівносторонньої гіперболи є бісектриси координатних кутів з рівняннями

$y = \pm x$ (рис. 4.36).

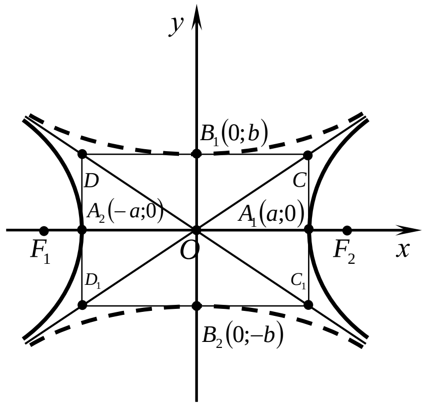


Рис. 4.35

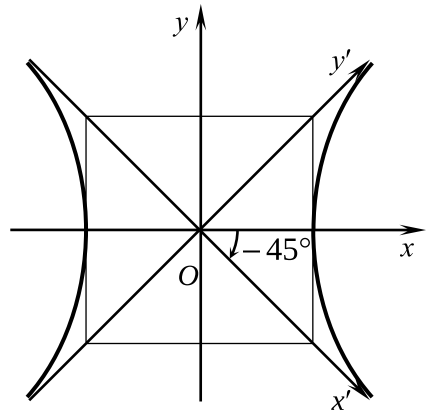


Рис. 4.36

Приклад. 4.32. Скласти канонічне рівняння рівносторонньої гіперболи, яка проходить через точку $M(7;-3)$.

Підстановко координат точки *M* в рівняння гіперболи, отримаємо $7^2-(-3)=\ a^2 => \ a^2=40$. Отже, шукане рівняння має вигляд $x^2-\ y^2=40$.

Якщо центр гіперболи знаходиться не в початку системи координат, а в точці $O(x_0;y_0)$, причому осі гіперболи паралельні осям координат, то рівняння такої гіперболи та гіперболи, спряженої до неї, мають вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (4.39)$$

і називаються *рівняннями гіпербол із зміщеним центром*.

4.4.5. *Ексцентриситет і директриси еліпса та гіперболи.*

Ексцентриситетом еліпса (гіперболи) називається відношення відстані між фокусами до довжини великої (дійсної) осі, яке позначається ε, тобто:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}. \qquad (4.40)$$

Формули ексцентриситету:
- для еліпса при $a > b$ або при $a < b$ відповідно

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \text{ або } \varepsilon=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} \qquad (4.41)$$

- для гіперболи $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ (4.42)

Відношення довжин півосей $\frac{b}{a}$:

- у еліпса $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ (4.43)

- у гіперболи $\dfrac{b}{a} = \sqrt{\dfrac{a^2 + c^2}{a^2}} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ (4.44)

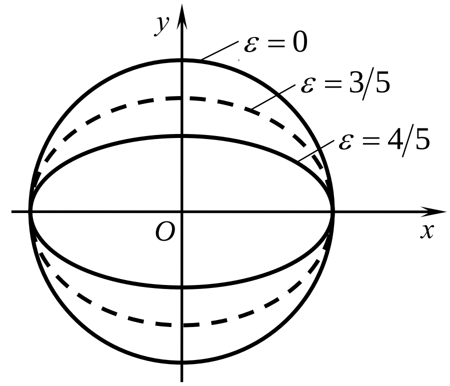


Рис. 4.37

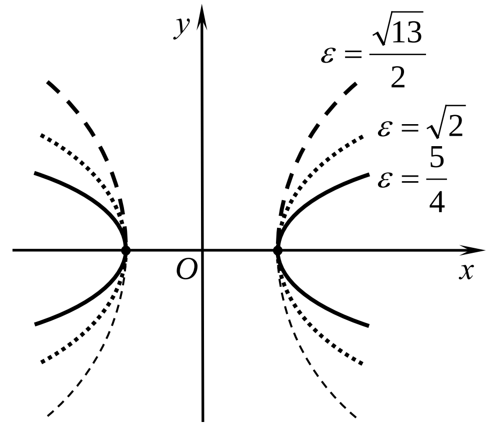


Рис. 4.38

З формул (4.43) і (4.44) випливає, що ексцентриситет еліпса знаходиться в межах $0 \le \varepsilon < 1$, при цьому зі збільшенням різниці між півосями збільшується і ексцентриситет еліпса, наближаючись до одиниці, при зменшенні різниці між півосями зменшується ексцентриситет, наближаючись до нуля.

Ексцентриситет гіперболи завжди більший за одиницю, тобто $\varepsilon > 0$.

Отже, *ексцентриситет еліпса та гіперболи характеризує їхню форму*.

Чим більший ексцентриситет (у гіперболи ексцентриситет може зростати до нескінченості, а у еліпса лише до одиниці), тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тим більше еліпс витягується вздовж великої осі (рис.4.37), і тим більше основний прямокутник гіперболи розтягується в напрямі осі *Oy*, тобто тим більше гіпербола відхиляється від осі *Ox* (рис. 4.38). Чим менший ексцентриситет (у гіперболи ближчий до одиниці, а у еліпса – до нуля), тим більше форма еліпса нагадує коло (бо якщо $\varepsilon = 0$, тобто $a = b$, то рівняння еліпса матиме вигляд $x^2 + y^2 = a^2$, а сам еліпс стане колом), і тим більше основний прямокутник гіперболи розтягується в напрямі осі *Ox*, а гіпербола наближається до цієї осі.

Директрисами еліпса і гіперболи називаються прямі:

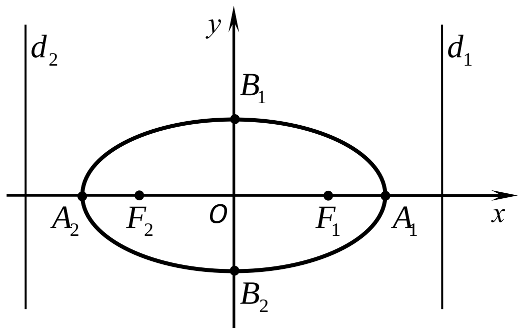
$$d_1 : x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ і } d_2 : x = -\frac{a}{\varepsilon},$$

де a – велика піввісь еліпса або дійсна піввісь гіперболи.

Еліпс знаходиться між директрисами (рис. 4.39, *а*), а гіпербола – зовні півплощини, що утворюють директриси (рис. 4.39, *б*).

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса чи гіперболи до відстаней від відповідних директрис є величина стала і дорівнює їхньому ексцентриситету:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \qquad (4.45)$$



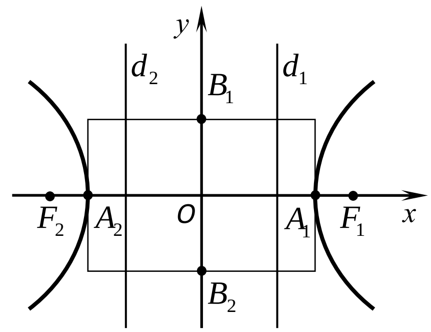


Рис. 4.39

<u>Приклад.4.33</u>**.** Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 14, а ексцентриситет $\frac{7}{9}$.

Оскільки $2c = 14$, то $c = 7$. З формул для ексцентриситету і фокусної відстані, одержимо, що $a = 9$, $b^2 = 32$. Тоді, шукане рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

4.4.6. *Парабола.*

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких рівновіддалена від даної точки, що називається фокусом параболи, та від даної прямої, що не проходить через фокус параболи і називається директрисою параболи.

Складемо рівняння параболи, для цього оберемо ДПСК таким чином: вісь Ox проведемо через точку-фокус F перпендикулярно до деякої директриси d в напрямі від d до F, а початок координат розташуємо посередині між фокусом та директрисою (рис. 4.40).

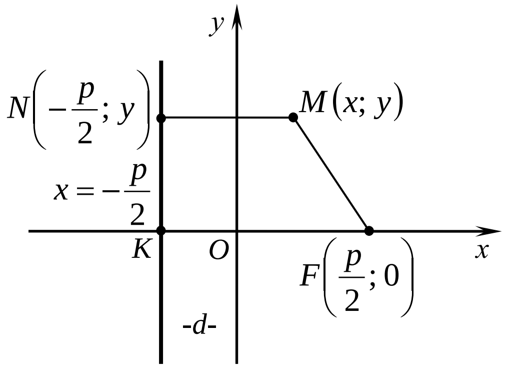


Рис. 4.40

Відстань від фокуса F до директриси d називається *параметром параболи* і позначається через p, причому $p > 0$.

З рис. 4.40 видно, що $p = FK$, тобто, фокус має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$ або $x + \frac{p}{2} = 0$

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка параболи. З'єднаємо точку M з F і проведемо $MN \perp d$.

Безпосередньо з рис. 4.39 видно, що $MN = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, а за формулою відстані між двома точками: $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. За означенням параболи:

$$MF = MN, \tag{4.46}$$

отже,
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{4.47}$$

Рівняння (4.47) є шуканим *рівнянням параболи*. Піднесемо обидві частини рівняння (4.47) до квадрату $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$; зведемо подібні доданки. Отримали *канонічне рівняння параболи*:

$$y^2 = 2px. \tag{4.48}$$

Вісь Ox називається *віссю симетрії параболи*. Точка $O(0;0)$ перетину параболи з віссю симетрії називається *вершиною параболи*. Відрізок FM називається *фокальним радіусом* точки M.

<u>Приклад.4.34.</u> Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її директрисою є пряма $x = -4$.

Відстань від директриси до початку координат дорівнює $\frac{p}{2}$. Отже, $\frac{p}{2} = 4$, тобто $p = 8$. Рівняння цієї параболи має вигляд (4.46), так як абсциса директриси від'ємна. Підставивши в це рівняння значення параметра p, отримаємо $y^2 = 16x$.

Властивості канонічного рівняння параболи приведемо у таблиці 4.4.

Таблиця 4.4

Властивості канонічного рівняння параболи	Властивості кривої
1. Координати точки $O(0;\ 0)$ задовольняють рівняння.	1. Парабола проходить через початок координат.
2. Система, складена з рівняння параболи (II-го порядку) та прямої (I-го порядку), має не більше двох розв'язків: $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ '	2. Пряма перетинає параболу не більш як в двох точках: - парабола з віссю абсцис має одну спільну точку – початок координат; - парабола з віссю ординат також перетинається лише в початку координат.
3. Змінна y входять у рівняння параболи в парному ступені.	3. Парабола симетрична відносно осі абсцис.
4. Так як $p > 0$, то з рівняння (4.26) випливає, що $x \geq 0$.	4. Парабола розташована справа від осі Oy.
5. При зростанні x від 0 до $+\infty$; y змінюється відповідно від 0 до $\pm\infty$.	5. Точки параболи необмежено віддаляються як від осі Ox, так і від осі Oy.

Парабола $y^2 = 2px$ має форму, зображену на рис. 4.41, *а*. Парабола, яка задається рівнянням виду (4.48), має вершину в початку координат, вісь симетрії – вісь абсцис і гілки, напрямлені вправо. Фокус цієї параболи знаходиться в точці $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь абсцис і гілки напрямлені вліво (мал. 4.41, *б*) має вигляд:

$$y^2 = -2px.$$

Рівняння її директриси: $x = \frac{p}{2}$, а фокус знаходиться в точці $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$.

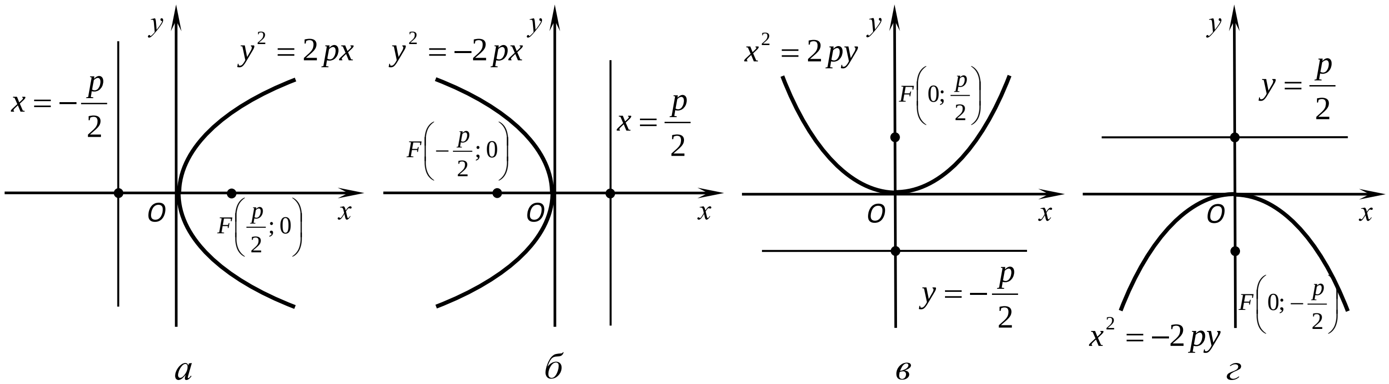


Рис. 4.41

Якщо парабола має вершину в початку координат, вісь симетрії – вісь ординат, гілки напрямлені вгору і директрису з рівнянням $y = -\frac{p}{2}$ і фокус в точці $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ (рис. 4.41, *в*), то її рівняння виглядає: $x^2 = 2py$.

Якщо ж парабола має вершину в початку координат, вісь симетрії – вісь ординат, директрису з рівнянням $y = \frac{p}{2}$, а гілки напрямлені вниз і фокус в точці $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ (рис. 4.41, *г*), то її рівняння: $x^2 = -2py$.

Рівняння параболи зі зміщеною вершиною в точці $O'(a; b)$, віссю симетрії, паралельною осі абсцис, і гілками, напрямленими вправо, має вигляд

$$(y-b)^2 = 2p(x-a). \tag{4.49}$$

<u>Приклад. 4.35.</u> Скласти рівняння параболи з вершиною в точці $O'(-4; 2)$ і фокусом в точці $F(-4; 6)$.

Так як абсциси вершини і фокуса однакові, то ці точки даної параболи лежать на прямій, паралельній вісі *Oy*, яка є віссю параболи. Так як ордината фокуса більше за ординату вершини, то гілки параболи напрямлені вгору. Вершина параболи зміщена, тобто, рівняння такої параболи знаходимо за формулою (4.49): $(x-a)^2 = 2p(y-b)$.

Відстань фокуса від вершини дорівнює $\frac{p}{2} = 6 - 2 = 4$, тобто $p = 8$. Замінивши в останньому рівнянні *a* і *b* координатами точки O' і *p* – його значенням, отримаємо

$$(x+4)^2 = 2 \cdot 8(y-2) \Rightarrow (x+4)^2 = 16(y-2).$$

4.4.7. С*прощення загального рівняння кривої другого порядку*.

Нехай крива другого порядку задана загальним рівнянням виду $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$,

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому, хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

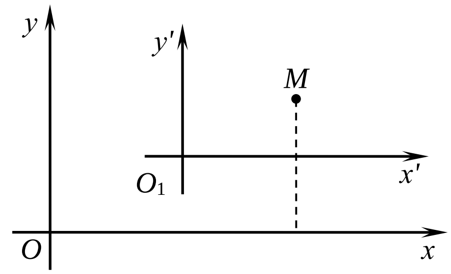


Рис. 4.42

При переході від системи координат xOy до нової системи $x'O_1y'$ (напрям осей координат не змінюється, за новий початок координат взято точку $O_1(a;b)$;(рис. 4.42) зв'язок між старими та новими координатами деякої точки M площини визначається формулами:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b; \tag{4.50}$$

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{4.51}$$

<u>Приклад. 4.36.</u> Визначити нові координати точки $M(7;8)$, якщо виконали паралельне перенесення осей координат, причому новий початок розміщено в точці $O_1(3;-4)$.

За умовою задачі: $a = 3$, $b = -4$, $x = 7$, $y = 8$. За формулами (4.51) знаходимо $x' = 7 - 3 = 4$, $y' = 8 - (-4) = 12$.

Поворот осей координат на кут α (початок координат такий самий, а α відраховується проти годинникової стрілки; рис. 4.43), пов'язує початкові координати x, y з новими x', y' формулами:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \tag{4.52}$$

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \; y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{4.53}$$

<u>Приклад. 4.37</u>. На площині xOy дана точка $M(4;3)$. Система координат повернута навколо початку координат так, що нова вісь пройшла через точку M. Визначити старі координати точки A, якщо її нові координати $x' = 5, y' = 5$.

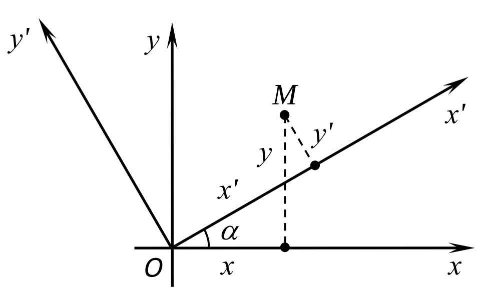


Рис. 4.43

Так як $|MO| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, то $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, тоді формули перетворення координат для даної задачі набудуть вигляду: $x = \dfrac{4}{5}x' - \dfrac{3}{5}y'$, $y = \dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y'$. Нехай $x' = y' = 5$, тоді $x = 1, y = 7$.

Приклад. 4.38. Система координат повернута на кут $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Визначити нові координати точки $M\left(\sqrt{3}; 3\right)$.

Використовуючи формули (4.53), отримаємо:

$$x' = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3, \qquad y' = -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Виконавши таке перетворення при відповідному виборі α, звільнимося в загальному рівнянні від члена з добутком змінних і отримаємо *п'ятичленне рівняння кривої другого порядку:*

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4.54}$$

яке на площині xOy визначає еліпс, гіперболу, параболу з осями симетрії, паралельними осям координат, в залежності від знаку добутку коефіцієнтів A і C.

Окремі випадки рівняння (4.54).

1. Нехай $AC > 0$, тоді рівняння (4.54) визначає еліпс (дійсний, уявний - еліпс, який задається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, або вироджений в точку); при $A=C$ еліпс перетворюється на коло.

2. Нехай $AC < 0$, тоді відповідна крива є гіперболою, яка може вироджуватися в дві прямі, що перетинаються, якщо ліва частина рівняння (4.54) розпадається на добуток лінійних множників:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = \left(a_1x + b_1y + c_1\right)\left(a_2x + b_2y + c_2\right). \tag{4.55}$$

3. Якщо $AC = 0$ (тобто або $A = 0,\ C \neq 0$, або $A \neq 0,\ C = 0$), то рівняння (4.54) визначає параболу загального виду $y = Ax^2 + Bx + C$ або $x = Ay^2 + By + C$, що можуть бути зведенні до канонічного вигляду. Парабола може вироджуватися в дві паралельні прямі (дійсні різні, дійсні сумісні, уявні), якщо ліва частина рівняння (4.55) не містить змінної x або y, тобто коли рівняння має вигляд:

$$Ax^2 + 2Dx + F = 0 \text{ або } Cy^2 + 2Ey + F = 0.$$

Приклад. 4.39. Звести рівняння параболи $y = 9x^2 - 6x + 2$ до канонічного вигляду.

I спосіб. Користуючись формулами (4.50), замінимо x на $x' + a$ і y на $y' + b$: $\quad y' + b = 9\left(x' + a\right)^2 - 6\left(x' + a\right) + 2$, або

$$y' = 9x'^2 + 6x'(3a-1) + \left(9a^2 - 6a + 2 - b\right).$$

Знайдемо такі значення a і b, при яких коефіцієнт при x' і вільний член перетвориться на нуль: $\begin{cases} 3a - 1 = 0, \\ 9a^2 - 6a + 2 - b = 0, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = 1$. Канонічне рівняння параболи має вигляд: $x'^2 = \frac{1}{9}y'$, а вершина параболи знаходиться в точці $O_1\left(\frac{1}{3};1\right)$ і $p = \frac{1}{18}$.

<u>II спосіб</u>. Задане рівняння виду $y = Ax^2 + Bx + C$ або $x = Ay^2 + By + C$ зводиться до канонічного рівняння параболи із зміщеним центром, тобто $(x-a)^2 = 2p(y-b)$, або відповідно $(y-b)^2 = 2p(x-a)$. Тоді точка $O_1(a;b)$ є вершиною параболи, а знак параметра p визначає, в який бік – додатній чи від'ємний відповідної осі координат (Oy чи Ox) – напрямлена парабола.

Початкове рівняння перетворюється наступним чином: $y = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + 2$, $y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$, $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(y-1)$.

Отримали аналогічний результат. Вершина параболи знаходиться в точці $O_1\left(\frac{1}{3};1\right)$, параметр $p = \frac{1}{18}$, а гілка параболи напрямлена в додатній бік вісі Oy.

Примітка. Вид кривої та її розташування на площині легко встановлюється перетворенням п'ятичленного рівняння (4.55) до виду $A(x-x_0)^2 + C(y-y_0)^2 = f$ (у випадку $AC>0$ або $AC<0$). У випадку не вироджених кривих переносом початку координат в точку $O_1(x_0;y_0)$ отримане рівняння еліпса чи гіперболи можна звести до канонічного виду.

<u>Приклад 4.40.</u> Яку лінію визначає рівняння:

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$; 2) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$?

1) Виконаємо перетворимо заданого рівняння:

$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4$, $4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4$;

$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = -4 + 4 + 36$; $4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$.

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей, взявши за новий початок координат точку. $O'(1;2)$ Використаємо формули: $x = x' + 1$,

$y = y' + 2$. Відносно нових осей рівняння кривої матиме вигляд $4x'^2 + 9y'^2 = 36$ або $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$. Отже, задана крива є еліпс.

2) Перепишемо дане рівняння так:

$\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 9\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) = 44$; $\quad (x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 44 + 1 - 36$;

$(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 9$.

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей, взявши за новий початок координат точку і змінивши координати $x = x' - 1$, $y = y' + 2$. Після перетворення координат отримаємо рівняння $x'^2 - 9y'^2 = 9$ або $\frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1$. Отже, задана крива – гіпербола.

Випадок розпаду кривої другого порядку на дві прямі може бути легко встановлений за початковим рівнянням наступним чином: розглядаючи дане рівняння як квадратне відносно *y* (зрозуміло, коефіцієнт при y^2 відмінний від нуля), розв'язують його відносно *y*; якщо при цьому під коренем матимемо повний квадрат деякого двочлена $ax + b$, то коренями для *y* будуть $y_1 = k_1 x + b_1$ та $y_2 = k_2 x + b_2$. Що доводить розпад кривих на дві прямі.

Дане рівняння може бути розв'язане і відносно *x*. Якщо в загальному рівнянні кривої другого порядку *A*= *C* = 0 (очевидно, що $B \neq 0$), то вказане рівняння визначає пару прямих тоді і лише тоді, якщо $\frac{B}{D} = \frac{2E}{F}$. В цьому випадку ліва частина рівняння розкладається на лінійні множники.

<u>Приклад. 4.41.</u> Довести, що рівняння $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$ визначає сукупність двох прямих.

Перепишемо рівняння у вигляді $3y^2 - 2(4x-1)y - \left(3x^2 - 14y + 8\right) = 0$ і розв'яжемо його відносно *y*: $y = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{(4x-1)^2 + \left(9x^2 - 42x + 24\right)}}{3}$, або $y = \frac{4x - 1 \pm (5x - 5)}{3}$. Отримуємо рівняння двох прямих $y = 3x - 2$ і $y = \frac{-x + 4}{3}$, або $3x - y - 2 = 0,\ x + 3y - 4 = 0$.

4.5.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Що називається алгебраїчною лінією другого порядку ? Перелічіть відомі лінії другого порядку. Яку іншу назву носять лінії другого порядку? Чому?.

2. Дайте визначення кола і виведіть його канонічне рівняння. Запишіть параметричне і полярне рівняння кола та рівняння кола з центром в різних точках.

3. Що називається еліпсом? Виведіть його канонічне рівняння. Яку форму має еліпс? Запишіть властивості його рівняння та алгоритм побудови.

4. Яка множина точок називається гіперболою? Виведіть її канонічне рівняння. Перелічіть властивості гіперболи та побудуйте її.

5. Що можна вважати асимптотою? Запишіть рівняння асимптот гіперболи.

6. Які гіперболи є спряженими, рівносторонніми. Запишіть рівняння таких гіпербол та їхніх асимптот.

7. Дайте визначення і запишіть формули ексцентриситету, директрис еліпса та гіперболи. Яким чином ексцентриситет характеризує форму еліпса та гіперболи?

8. Що називається параболою? Виведіть її канонічне рівняння та побудуйте.

9. Які існують інші рівняння параболи; від чого залежить форма їхнього запису?

10. Дайте загальне означення ліній другого порядку.

4.5.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Скласти рівняння кола, якщо

1) коло має центр в точці $O_1(2;-3)$ і проходить через точкуM(5;1);

2) кінці одного з діаметрів кола мають координати (3;9) і(7;3);

3) діаметром кола є відрізок прямої $4x-3y+12=0$, що міститься між осями координат;

4) коло дотикається до осі абсцис в точці $M_1(2;0)$ і проходить через точку $M_2(-1;3)$

5) коло проходить через точки $M_1(0;2)$, $M_2(1;1)$, $M_3(2;-2)$;

6) коло проходить через точки $M_1(-1;3)$, $M_2(0;2)$, $M_3(1;-1)$.

Задача №2. Знайти координати центра і радіус кола:

1) $x^2+y^2+6x-10y+13=0$; 2) $x^2+y^2+12y-13=0$;

3) $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$.

Задача №3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) дано вершини (0;3), (0;-3) і відстань між фокусами, що дорівнює 8;

2) еліпс проходить через точки $M_1\left(2\sqrt{3};\sqrt{6}\right)$ і $M_2(6;0)$;

3) півосі еліпса дорівнюють 7 і 9;

4) більша вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами – 6;

5) відстань між фокусами дорівнює 6, а ексцентриситет – 0,6;

6) мала вісь дорівнює 4, а $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

Задача №4. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет еліпса та побудувати його:

1) $9x^2+25y^2=4$; 2) $16x^2+25y^2=400$; 3) $2x^2+y^2=32$;

4) $x^2+4y^2=16$.

Задача №5. Скласти канонічне рівняння гіперболи з фокусами на вісі абсцис, якщо:

1) a =12 b = 5;

2) проходить через точки $M_1\left(-6;-\sqrt{7}\right)$, $M_2\left(6\sqrt{2};4\right)$;

3) $2c=10\sqrt{2}$, рівняння асимптот $y=\pm 0{,}75x$;

4) проходить через точки $M_1\left(-8;2\sqrt{2}\right)$, $M_2(6;-1)$;

5) $F(\pm 3;0)$, рівняння асимптот $y=\pm\sqrt{2}x$;

Задача №6. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо:

1) парабола розташована справа від осі Oy і $p=5$;

2) парабола розташована справа від осі Oy і проходить через точку M(3;-6);

3) парабола розташована нижче осі Ox і $p=3$;

4) парабола розташована вище осі Ox і проходить через точку M(-5;2);

5) фокус параболи має координати F(-2;0);

6) директриса параболи задана рівнянням $2y+5=0$.

Задача №7. Дано точку $M\left(\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)$. За нові координатні осі взято прямі $O_1x':2y-5=0$ і $O_1y':2x-1=0$. Знайти координати точки M в новій системі координат.

Задача №8. Встановити, які криві визначаються наступними рівняннями, та зобразити їх схематично:

1) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$;

2) $x^2+4y^2-4x-8y+8=0$; 3) $2x^2-4x+2y-3=0$;

4) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$;

5) $x^2+4y^2+8y+5=0$; 6) $x^2-6x+8=0$;

7) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$; 8) $x^2-y^2-6x+10=0$;

Задача №9. Показати, що рівняння визначають криві, які розпадаються на дві прямі, та знайти рівняння цих прямих:

1) $9x^2+24xy+16y^2-25=0$ 2) $25x^2+10xy+y^2-1=0$

3) $x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0$ 4) $8x^2-18xy+9y^2+2x-1=0$

Задача №10. Звести до канонічного вигляду рівняння:

1) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$;

2) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;

3) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

4) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

РОЗДІЛ 5. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ.

5.4. *Рівняння поверхні та площини у просторі.*

Рівнянням поверхні у просторі *xOyz* (Рис.5.1) називається рівняння виду:
$$F(x,y,z,)=0, \tag{5.1}$$
що пов'язує змінні *x, y* і *z* так, що координати довільної точки даної поверхні задовольняють це рівняння і не задовольняють координати решти точок простору, що не лежать на цій поверхні.

Найпростішою формою рівняння (5.1) є випадок, коли *x, y* і *z* входять лінійно. Тоді це рівняння описує площину (Рис.5.2).

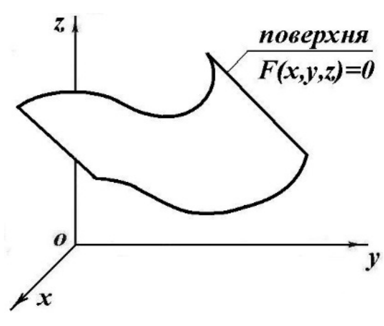


Рис 5.1

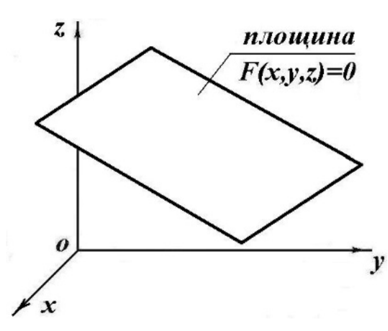


Рис 5.2

5.5. *Рівняння площини*

5.2.1. *Рівняння площини що проходить через відому точку, перпендикулярно до заданого вектора.*

<u>*Означення*</u>: *вектор, що перпендикулярний до площини α, називається вектором нормалі цієї площини і позначається* $\vec{n}$.

Кожна площина має безліч векторів нормалі (усі вони колінеарні). Оберемо довільну точку на площині α $A(x_0, y_0, z_0)$ і вектор нормалі $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3) цієї площини. Довільна точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{AM}(x\text{-}x_0;\ y\text{-}y_0;\ z\text{-}z_0)$ перпендикулярні. Отже їх скалярний добуток рівний нулю $(\overrightarrow{n \cdot AM} = 0)$:

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0 \qquad (5.2)$$

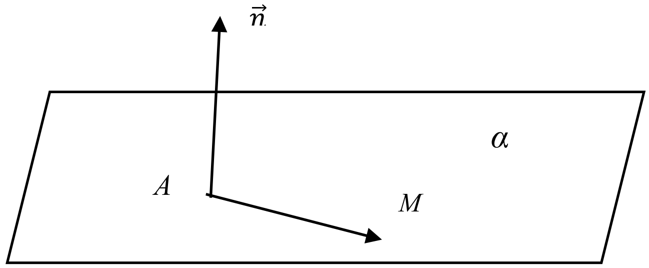


Рис. 5.3.

Маємо рівняння площини що проходить через точку перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$.

5.2.2. *Рівняння площини, що проходить через задану точку, паралельно двом неколінеарним векторам*.

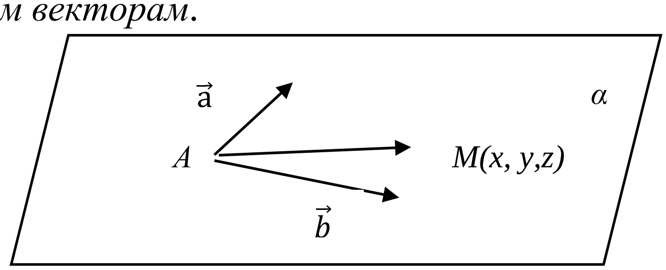


Рис 5.4.

Нехай маємо точку $A(x_0, y_0, z_0)$ площини α і два неколінеарні вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, паралельні цій площині (рис.5.4).

Довільна точка $M(x, y, z)$ належить площині α тоді і лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{AM}(x\text{-}x_0;\ y\text{-}y_0;\ z\text{-}z_0)$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ компланарні (належать одній площині), тобто їх мішаний добуток рівний нулю. У координатній формі ця умова записується так:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.3)$$

Приклад 5.1. Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(1, -2, 0)$ і паралельна векторам $\vec{a}$ (1, 2, 3), $\vec{b}$ (2, 0, 1)

$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, розкривши визначник третього порядку, маємо:

$2(x-1) + 5(y+2) - 4z = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 4z + 8 = 0$ - шукане рівняння площини.

5.2.3. *Рівняння площини, що проходить через три точки, рівняння площини «у відрізках на осях».*

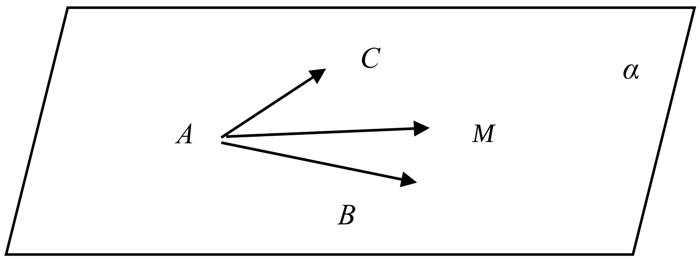


Рис 5.5.

Розглянемо три точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_b, y_b, z_b)$, $C(x_c, y_c, z_c)$ площини α, що не лежать на одній прямій, тоді довільна точка $M(x, y, z)$ належить площині α тоді і лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{AM}(x-x_A; y-y_A; z-z_A)$, $\overrightarrow{AB}(x_b-x_a; y_b-y_a; z_b-z_a)$, $\overrightarrow{AC}(x_c-x_a; y_c-y_a; z_c-z_a)$ компланарні, тобто:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_b-x_a & y_b-y_a & z_b-z_a \\ x_c-x_a & y_c-x_a & z_b-z_a \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.4)$$

Приклад 5.2. Написати рівняння площини, що перетинає осі OX, OY, OZ в точках відповідно $A(a, 0,0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$).

За формулою (5.4):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_b-x_a & y_b-y_a & z_b-z_a \\ x_c-x_a & y_c-x_a & z_b-z_a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad bcx + acy + abz = abc \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (5.5)$$

Рівняння (5.5) *називають рівнянням площини у відрізках на осях*.

5.2.4. *Загальне рівняння площини. Дослідження загального рівняння площини.*

<u>Означення</u>: загальним рівнянням площини називають рівняння виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (5.6)$$

де хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $(A^2+B^2+C^2)\neq 0$.

Коректність цього означення доводить теорема, яку приведемо без доведення:

<u>Теорема</u>: *будь-яка площина задається рівнянням виду* (5.6) *і, навпаки, будь-які рівняння виду* (5.6*) є рівнянням площини простору.*

Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ є вектором нормалі площини заданої рівнянням (5.6).

В залежності від наявності або відсутності певних змінних в загальному рівнянні площини, а також рівності або нерівності D нулю, площина буде певним чином розташувана у просторі.

Елементи дослідження загального рівняння площини:

- при відсутності в загальному рівнянні однієї певної змінної (при $D \neq 0$) площина буде паралельною осі, яка однойменна з відсутньою змінною;
- при $D = 0$ - площина проходить через початок координат;
- при відсутності в загальному рівнянні площини двох певних змінних (при $D \neq 0$) площина буде перпендикулярною осі, яка однойменна з наявною в рівнянні площини змінною;
- при відсутності в загальному рівнянні площини однієї певної змінної і $D = 0$ площина проходить через вісь, яка однойменна з відсутньою змінною;
- при відсутності в загальному рівнянні двох змінних і $D = 0$ площина буде співпадати з координатною площиною, яка перпендикулярна осі, однойменній з наявною в її рівнянні змінною.

Рівнянням в'язки площин називається рівняння виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (5.7)$$

Рівняння (5.7) описує сукупність площин, що перетинаються в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ але мають різну орієнтацію у просторі, в залежності від орієнтації нормального вектора $\vec{n}(A, B, C)$.

Рівнянням пучка площин називається рівняння виду:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (5.8)$$

Рівняння (5.8) визначає деяку площину, що проходить через пряму, по якій перетинаються дві площини, тобто через пряму, що визначається рівнянням:

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, *якщо дані площини паралельні, то пучок площин перетворюється на сукупність паралельних площин.*

5.2.5.*Взаємне розміщення двох площин. Відстань від точки до площини.*

Нехай дві площини задано загальним рівнянням (5.6):

$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Тоді можливі такі випадки розташування площин.

1). Якщо виконується умова $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, тобто, рівняння площин рівносильні, маємо дві площини що співпадають, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

2). Площини α_1 і α_2 паралельні тоді і лише тоді, коли вектори нормалей цих площин колінеарні (їх координати пропорційні): $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, але площини не співпадають.

3). Якщо вектори нормалей площин α_1 і α_2 неколінеарні, то площини перетинаються по прямій $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

<u>*Означення:*</u> кутом між площинами називають нетупий кут між векторами нормалей цих площин $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

Кут між площинами визначається формулою (5.9):

$$\varphi = arcCos\frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (5.9)$$

4). Площини α_1 і α_2 перпендикулярні тоді і лише тоді коли виконується рівність: $\quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad$ (5.10)

<u>*Означення:*</u> *відстанню від точки M_0 до площини α називають довжину перпендикуляра M_0H, опущеного з цієї точки на площину.*

<u>Приклад 5.3.</u> Показати розміщення площин у просторі. Площини задані рівняннями:

1) $5x+10y+4z-20=0$; 2) $3x-y+3z-9=0$; 3) $2x+3y-6=0$;

4) $x+3z+6=0$; 5) $z-3=0$; 6) $z = 0$.

Рівняння площин задані у загальному виді, для зручності, перетворюємо задані рівняння до виду рівнянь площин у відрізках на осях.

1). $5x+10y+4z=20$ => $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1$. Площина відтинає ва осях Оx, Oy і Oz відрізки довжиною 4, 2 і 5 відповідно (рис.5.6).

2). $3x - y + 3z = 9$ => $\frac{x}{-3} + \frac{y}{9} + \frac{z}{-3} = 1$. Площина відтинає ва осях *Ox*, *Oy* і *Oz* відрізки довжиною -3, 9 і -3 відповідно (рис.5.7).

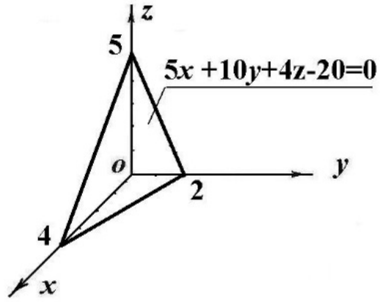


Рис. 5.6

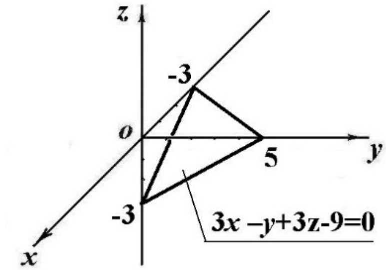


Рис. 5.7

3). $2x + 3y = 6$ => $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$. Площина відтинає на осях *Ox* і *Oy* відрізки довжиною 3 і 2 відповідно. На осі *Oz* площина відрізок не відтинає, так як паралельна осі *Oz* (рис. 5.8).

4). $x + 3z = -6$ => $\frac{x}{-6} + \frac{z}{2} = 1$. Площина відтинає на осях *Ox* і *Oz* відрізки, довжиною -6 і 2 і є паралельною до осі *Oy* (рис.5.9).

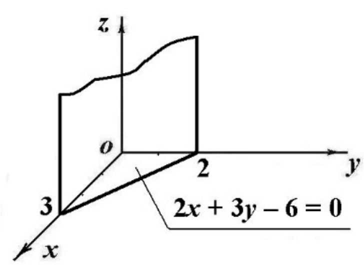


Рис. 5.8

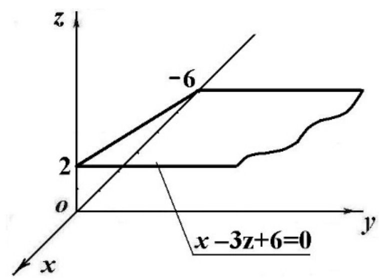


Рис. 5.9

5) $z - 3 = 0$ => $z = 3$ ділимо на 3 => $\frac{z}{3} = 1$ - площина відтинає на осі *Oz* відрізок довжиною 3 одиниці та не перетинає осі *Ox*, *Oy*, тобто є паралельною до площини *xOy* (рис.5.10).

6) $z = 0$. Як і у попередньому випадку площина перетинає вісь *Oz* в точці «0», але не паралельна, а співпадає з площиною *xOy* (рис.5.11).

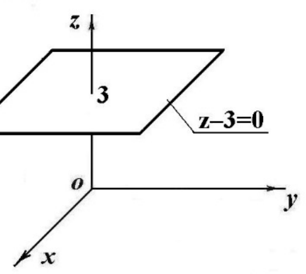


Рис.5.10

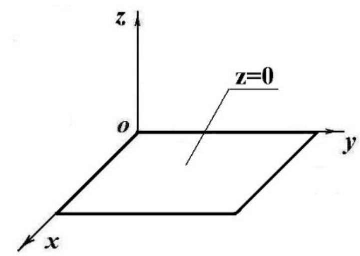


Рис.5.11

5.6. *Пряма у просторі*

5.3.1. *Види рівнянь прямої у просторі*.

Будь-яка лінія у просторі може бути представлена як лінія перетину двох поверхонь. Найпростіша з них – пряма лінія, що є перетином двох площин (рис. 5.12).

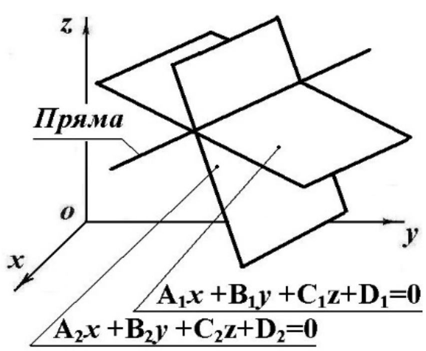


Рис. 5.12

Таким чином, *загальне рівняння прямої* записується як система рівнянь двох площин, які перетинаються у просторі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}.$$

Рівняння прямої (рис.5.13), яка проходить через відому точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має відомий вектором напряму $\vec{s}(m, n, p)$ називають *канонічним рівнянням прямої* і записують:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (5.11)$$

Рівняння прямої яка проходить через дві дані точки (рис.5.14.) $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (5.12)$$

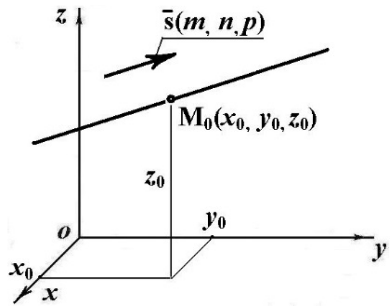


Рис. 5.13

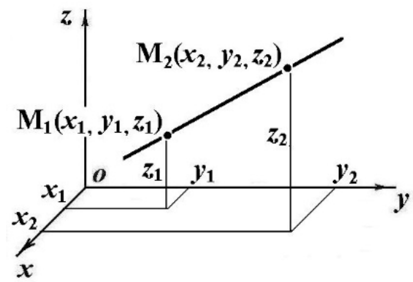


Рис.5.14

Приклад 5.4. Скласти рівняння прямої у просторі $xOyz$, якщо

1) пряма проходить через точку $M_0(3,0,-3)$ паралельно вектору $\vec{s}(4,-6,-1)$.

2) пряма проходить через дві точки $M_1(-1,-2,-3)$ $M_2(0,5,7)$.

1) В канонічне рівняння прямої (5.11) підставляємо значення координат точки M_0 : $x_0 = 3$, $y_0 = 0$ і $z_0 = -3$, а також значення координат напрямного вектора $\vec{s}(4,-6,-1)$: $m = 4$, $n = -6$ і $p = -1$, маємо: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ =>

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-0}{-6}=\frac{z-(-3)}{-1}$$

Приведемо канонічне рівняння прямої до загального вигляду.

$$\begin{cases}\frac{x-3}{4}=\frac{y}{-6}\\ \frac{y}{-6}=\frac{z+3}{-1}\end{cases} => \begin{cases}-6(x-3)=4y\\ -y=-6(z+3)\end{cases} => \begin{cases}6x+4y+18=0\\ y-6z-18=0\end{cases}.$$

2) В рівняння прямої, що проходить через дві відомі точки (5.12) підставляємо значення координат точки M_1 : $x_1=-1$, $y_1=-2$ і $z_1=-3$ та точки $M_2 : x_2=0$, $y_2=5$ і $z_2=7$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} => \frac{x-(-1)}{0-(-1)_1}=\frac{y-(-2)}{5-(-2)}=\frac{z-(-3)}{7-(-3)} =>$$

$$=> \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+3}{10}.$$

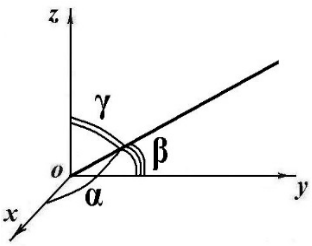
Отримали канонічне рівняння прямої. Запишемо його у загальному виді.

$$\begin{cases}\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{7}\\ \frac{y+2}{7}=\frac{z+3}{10}\end{cases} => \begin{cases}7(x+1)=y+2\\ 10(y+2)=7(z+3)\end{cases} => \begin{cases}7x-y+5=0\\ 10y-7z-1=0\end{cases}.$$

5.3.2. *Напрямні косинуси прямої у просторі.*

Нехай маємо деяку пряму, що утворює з осями *Ox*, *Oy* і *Oz* просторової системи координат *xOyz* кути α, β і γ відповідно (рис.5.15).

Косинуси кутів α, β і γ нахилу напрямного вектора $\vec{s}(m,n,p)$ прямої до осей координат називаються напрямними косинусами прямої у просторі і визначають формулами:



$$\cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\ \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (5.13)$$

Рис5.15.

Приклад. 5.5 Визначити напрямні косинуси прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{6}$.

Пряма задана канонічним рівнянням, з якого виписуємо координати напрямного вектора $\vec{s}=(m,n,p)$: $m = 3$, $n = 2$, $p = 6$ і підставляємо у формули (5.13).

$$\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{3}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7};$$

$$\cos\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{2}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{6}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{6}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{3}{7} = \arccos 0{,}43 = 64{,}6^\circ;\ \beta = \arccos\frac{2}{7} = \arccos 0{,}29 = 73{,}4^\circ;$$

$$\gamma = \arccos\frac{6}{7} = \arccos 0{,}86 = 31^\circ.$$

Таким чином, пряма у просторі утворює кут $\alpha = 64{,}6^\circ$ з віссю *Ox*, кут $\beta = 73{,}4^\circ$ з віссю *Oy*і кут $\gamma = 31^\circ$ з віссю *Oz*.

5.3.3. *Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Кут мж прямою і площиною.*

Прямі у просторі можуть бути паралельними (або співпадати), перпендикулярними, мимобіжними, або перетинатися під гострим кутом.

*Умова паралельності двох прямих:*дві прямі паралельні, якщо координати їх напрямних векторів $\vec{s}_1(m_1,n_1,p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2,n_2,p_2)$ пропорційні.

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (5.14)$$

Умова перпендикулярності двох прямих: дві прямі перпендикулярні, якщо сума добутків відповідних координат їх напрямних векторів $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ дорівнює нулю:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 . \tag{5.15}$$

Гострий кут між двома прямими у просторі.

Якщо дві прямі у просторі перетинаються під кутом φ, то кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ теж дорівнює φ і визначається за допомогою виразу:

$$\cos\varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} . \tag{5.16}$$

<u>Означення.</u> *Кутом між прямою l і площиною α називають кут β між прямою та проекцією цієї прямої на площину.*

Фактично, кутом між прямою і площиною є не тупий кут $\beta = (90^0 - \varphi)$, де φ кут між вектором нормалі $\vec{n}(A,B,C)$ площини α і напрямним вектором $\vec{s}(m, n, p)$ прямої l:

$$\beta = 90^0 - \varphi = 90^0 - arcCos \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \tag{5.17}$$

<u>Приклад. 5.6</u> Визначити взаємне положення двох прямих у просторі.

1) $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2}$ і $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-12} = \frac{z-1}{-6}$;

2) $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z+2}{-4}$ і $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{2}$;

3) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{2}$ і $\frac{x+1}{12} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}$.

1). Напрямні вектори $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ заданих прямих мають координати $\vec{s}_1(-1,4,2)$, $\vec{s}_2(3, -12, -6)$. Так як для цієї пари прямих виконується умова паралельності (5.14), то прямі паралельні:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{4}{-12} = \frac{2}{-6} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} .$$

2). Напрямні вектори $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ заданих прямих мають координати $\vec{s}_1(-2,3, -4)$, $\vec{s}_2(5,6,2)$. Ці прямі перпендикулярні, так як для них виконується умова перпендикулярності (5.15):

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \Rightarrow -2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + (-4) \cdot 2 = 0 \Rightarrow -10 + 18 - 8 = 0 .$$

3). Напрямні вектори $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ прямих мають координати $\vec{s}_1(2,1,2)$, $\vec{s}_2(12,3,4)$. Визначаємо кут φ між прямими за формулою (5.16).

$$\cos\varphi = \pm\frac{2\cdot 12+1\cdot 3+2\cdot 4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{144+9+16}} = \frac{35}{39} = 0{,}897 \Rightarrow \varphi = \arccos 0{,}897 = 26{,}2^\circ.$$

5.4.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Що називається рівнянням поверхні у просторі *xOyz*?
2. Які види рівнянь площини у просторі Ви знаєте?
3. Запишіть загальне рівняння площини у просторі та рівняння площини у відрізках на осях.
4. Які види рівнянь прямої у просторі Ви знаєте? Що називається напрямним вектором прямої?
5. Запишіть загальне і канонічне рівняння прямої у просторі та рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки.
6. Що називають напрямними косинусами прямої?
7. Як визначити кути, які пряма утворює з осями *Ox*, *Oy* і *Oz* просторової системи координат *xOyz*?
8. Сформулюйте і запишіть умову паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
9. Який вираз застосовується для визначення гострого кута між двома прямими у просторі?
10. Як визначити кут за відомим значенням його косинуса.

5.4.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Показати розміщення площин у просторі. Площини задані рівняннями:

1) $14x+4y-7z-28=0$; 2) $5x+4y-20=0$; 3) $y-5=0$; 4) $x=0$.

Задача №2. Скласти рівняння прямої у просторі *xOyz*, якщо

а) пряма проходить через точку $M_0(2, -1, -4)$ паралельно вектору $\vec{s}(1,-2,-1)$. Перетворити це рівняння до загального вигляду;

б) пряма проходить через дві точки $M_1(1, 4, -1)$ і $M_2(1, 0, 2)$.

У відповіді рівняння прямих записати в загальному вигляді.

Задача №3. Визначити напрямні косинуси прямої $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+1}{4}$.

Задача №4. Визначити взаємне положення двох прямих у просторі.

а) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+5}{1}=\dfrac{z+7}{2}$ і $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$;

б) $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{1}$ і $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+7}{2}$.

РОЗДІЛ 6. ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

6.1. *Поняття фунції. Область визначення і область значень.*

<u>Означення</u>: *залежність змінної у від змінної х називається функцією, якщо кожному значенню* х *відповідає єдине значення у. Записують у = f(х), де х – незалежна змінна-аргумент функції, у – залежна змінна.*

Областтю визначення функції - називають множину усіх можливих значень аргументу, позначають D**.**

Областтю значень функції називають множину всіх значень, яких може набувати функція для всіх значень аргументу з області визначення,означають Е.

<u>Приклад 6.1.</u> Знайти область визначення і область значень функції:

а). $f(x) = \sqrt{x-1}$;

б). *у = Sin2x;*

в). $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$

а). D(f): $\boldsymbol{x-1 \geq 0} \leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1}; \infty]$;

E(f): так як $f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0$ для усіх значень *х* із області визначення, то *E(f)* = $[0; +\infty]$.

б). *D(f)* = R, збігається з множиною дійсних чисел;

E(f) =$[-1; +1]$.

в). D(f) = (-∞, -2) ∪ (3;+ ∞); *E(f)* =(0;+ ∞).

6.2 . *Границя функції. Односторонні границі. Правила обчислення границь*

6.5.1. *Означення границі.*

Якщо задати деяке довільне додатнє число δ і для деякої точки x_0 *утворити інтервал* (x_0 - *δ ;* x_0 + *δ*), *то такий інтервал називають δ - околом точки* x_0, *і позначають О* (x_0). *Якщо розглядати усі точки інтервалу* (x_0 - *δ ;* x_0 + *δ*), *крім точки* x_0 , *то δ -окіл називається проколотим δ-околом точки* x_0 *і позначають О*(*x_0*).*

Нехай функція у = f(х) виначена в деякому околі О (x_0)*, або проколотому околі О*(*x_0*) точки* x_0.

<u>Означення 1.</u> *(за Гейне). Число А називається границею функції у = f(х) і точці* x_0, *якщо для будь-якої послідовності значень аргументу* $\{x_n\}, n \in N$, *з О*(*x_0*), що збігається до числа* x_0, *відповідна послідовність значень функції* $\{f(x_n)\}$, *збігається до числа А.*

Записують так: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = A$.

Означення 2. (За Коші). Число A називається границею функції y = f(x) в точці x_0, якщо для будь-якого числа ε>0, існує додатнє число δ таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, для x∈ D(f) , випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. *Записують так:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Означення 3. Якщо функція y = f(x), в точці x_0 дорівнює нулю, то така функція називається нескінченно малою в точці x_0.

Теорема.6.1. *Якщо функція y = f(x)в точці x_0 має границю, то така границя єдина.*

Примітка: доведення цієї теореми грунтується на доведенні єдиності границі послідовності, див. [2, 7]

При рішенні математичних задач, досить часто, виникає потреба дослідити поведінку функції при нескінченно малому (великому) значенні аргументу, тобто при x →±0 (x →±∞).

Означення 4. Число A називається границею функції y = f(x) при x →+∞, якщо для будь-яких послідовностей $\{x_n\}$ *таких, що* $\lim_{x \to \infty} x_n = +\infty$, *виконується рівність*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Записують так: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$

Означеня границі функції при x → -∞ формулюється аналогічно.

Означення 5. Якщо границя функції y = f(x), в точці x_0 не є скінченною величиною, то її називають нескінченною і записують так: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Наприклад: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

Означення 6. Якщо границя функції y = f(x) в точці x_0 (скінченній, або нескінченно віддаленій - x →∞) дорівнює ∞, то функцію називають нескінченно великою в точці x_0 , або на нескінченності . Якщо границія функції y = f(x) в точці x_0 рівна нулю, то функцію називають нескінченно малою в точці x_0 , або на нескінченності.

Звязок між поняттями нескінченно мала і нескінченно велика функція можна показати на прикладі.

Приклад 6.2. Нехай маємо функцію *y = f(x)*, яка при $x \to x_0$ є нескінченно малою, тобто $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функція z = $\frac{1}{f(x)}$, *при* $x_0 \neq x_0$ і *f(x)≠ 0* є нескінченно великою при $x \to x_0$, тобто, $\lim_{x \to x_0} z(x) = \infty$.

6.2.2. *Односторонні границі функції.*

Якщо в означенні 1 (за Гейне) додати умову, що усі точки розміщені зліва від точки x_0, то отримаємо «границю зліва» якщо справа від точки x_0, то отримаємо «границю справа».

Границя справа, або правостороння границя: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ *;*

Границя зліва, або лівостороння границя: $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

Означення 7. *Число A називається границею функції y=f(x) справа,(зліва) в точці x_0, якщо для будь-якого числа ε>0, існує додатнє число δ таке, що для усіх x з інтервалу (x_0; x_0 + δ) ((x_0 – δ; x_0)) виконується нерівність*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Приклад 6.3. Обчислити односторонні границі функції $y = f(x)$ в точці x_0.

а). $y = \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{|x|} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{|x|} = +\infty$,*- границі зліва і справа рівні.*

б). $y = tgx$ $x_0 = \pi/2$. $\lim\limits_{x \to \pi/2-0} tgx = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \pi/2+0} tgx = -\infty$,

Зв'язок між односторонніми границями і границею функції в точці доводить теорема 6.2.

Теорема 6.2. *Нехай функція y = f(x) визначена в деякому околі околі $O^*(x_0)$ точки x_0. Тоді, якщо функція y = f(x) у точці x_0 має границю, то в цій точці існує границя зліва, існує границя справа і односторонні границі рівні.*

6.2.3. *Правила обчислення границь.*

1. Границя постійної величини рівна самій постійній величині:

$$\lim C = C, \text{ де } C = const.$$

2. Границя суми кінечної кількості доданків дорівнює сумі границь цих доданків:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x) .$$

3. Границя добутку кінечної кількості співмножників дорівнює добутку границь співмножників:

$$\lim_{x \to x_0} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x)$$

4. Границя частки дорівнює відношенню границі діленого до границі дільника, за умови, що границя дільника не дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

5. Якщо існують границі функцій $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$ і ці границі обмежені, то має місце рівність:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} (f(x))^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

У найпростіших випадках обчислення границі зводиться до підстановки у вираз функції граничного значення аргументу.

Приклад 6.4. Обчислити границю функції в точці $x = 0$:

$$\lim_{x \to 1}(2\sqrt{x} + 3x^2 + lnx) = 2\lim_{x \to 1}\sqrt{x} + 3\lim_{x \to 1}x^2 + \lim_{x \to 1}lnx = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 = 5$$

У теорії границь (маргінальний аналіз) використовують так звані «чудові границі». Зазвичай розрізняють першу і другу «чудові границі».

Перша «чудова границя»: $\lim_{x \to 0} \frac{Sinx}{x} = 1.$

Друга «чудова границя»: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Друга «чудова границя» може бути використанна в іншій формі запису:

$$\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

6.3.*Приклади обчислення границь функції.*

Досить часто підстановка граничного значення у вираз функціїї приводить до невизначених виразів, таких як.

1). Відношення двох нескінченно малих величин, так звана «невизначенність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

2). Відношення двох нескінченно великих величин, так звана «невизначенність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

3). Різниця двох нескінченно великих величин, так звана «невизначенність $[\infty - \infty]$.

4.) Добуток нескінченно малої на нескінченно велику функції $[0 \cdot \infty]$.

5.) Невизначенність типу $[1^\infty]$.

Дії знаходження границь у таких випадках називають розкриттям невизначенності під знаком границі.

Приклад 6.5. Обчислити границі функцій.

1). $\lim_{x \to -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$.

Підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначенності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для усунення даної невизначенності розкладемо чисельник і знаменник на співмножники і скоротимо дріб на (x+3), таке скорочення допустиме, так як співмножник (x+3) відмінний від нуля.

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)\cdot(x+3)}{(3x+1)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)}{(3x+1)} = \frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1} = \frac{13}{8}.$$

2). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$

Вираз функції ірраціональний (містить радикал у чисельнику), підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначенності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для усунення невизначенності доцільно домножити чисельник і знаменник дробу на вираз спряжений з іраціональним.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x^2(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

3).$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)}{(\sqrt{2x+5}-3)}$

Безпосередня підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначенності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Для розкриття цієї невизначенності, множимо чисельник і знаменник дробу на добуток виразів спряжених до виразів чисельника і знаменника, що дасть змогу скоротити дріб на спільний співмножник (x -2), відмінний від нуля при $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)}{(\sqrt{2x+5}-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(\sqrt{3x-2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(\sqrt{3x-2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)} =$$

$$\frac{3}{2}\lim_{x\to 2}\frac{3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{3\cdot 6}{2\cdot 4} = \frac{9}{4}.$$

4). $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$

При $x \to \infty$, даний вираз має невизначенність типу [∞ - ∞]. Для усунення невизначенності помножимо і розділимо початковий вираз на $\sqrt{x^2+3x}+x$.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x.} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x.} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1.} = \frac{3}{2}.$$

5.) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x^2+4x}{3x^4-x^2+2x+5}.$

Маємо невизначенність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, що задана відношенням многочленів (або відношенням виразів, що містять радикали). Для усунення невизначенності ділимо чисельник і знаменние дробу на найвищу степінь x, в цих виразах.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-4x^2+4x}{3x^4-x^2+2x+5}==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}-4\frac{x^2}{x^4}+4\frac{x}{x^4}}{3\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+2\frac{x}{x^4}+5\frac{1}{x^4}}==\lim_{x\to\infty}\frac{1-4\frac{1}{x^2}+4\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}+5\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{3}.$$

Іншим способом усунення такої невизначеності є використання наступного правила.

Якщо невизначенність невизначенність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ задана відношенням многочленів, то:

1). якщо спенені многочленів чисельника і знаменника однакові, то в границі матимемо число, що дорівнює відношенню коофіцієнтів при найвищих спепенях многочленів чисельника і знаменника;

2). якщо спепінь многочлена чисельника нижче степені многочлена знаменника, то в границі матимемо 0;

3). якщо спепінь многочлена чисельника вище степені многочлена знаменника, то в границі матимемо ∞.

6). $\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}$

Маємо невизначенність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, і підграничний вираз містить тригонометричну функцію, в такому випадку використовуємо першу «чудову» границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{Sin2x}{2x}\cdot 2\cdot\frac{1}{Cos2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{Sin2x}{2x}\right)\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{Cos2x}=1\cdot 2\cdot 1=2$$

7). $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2}\right)^x$

Маємо невизначенність типу $[1^\infty]$. Для розкриття цієї невизначенності використовуємо другу «чудову» границю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{2\frac{x}{2}}=e^2.$$

6.4. *Неперевність функції в точці, на множині, точки розриву.*

<u>*Означення*</u> <u>8.</u> *Функція f(x) називається неперервною в точці* $x=x_0$, якщо:

1) *вона визначена в цій точці;*

2) *існує границя функції в цій точці*

$$\lim_{x\to x_0}f(x).$$

3) значення границі дорівнює значенню функції в точці $x=a$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Якщо одна із умов порушується, то функція називається *розривною в точці* $x=x_0$, а сама точка $x=x_0$ *називається точкою розриву.*

Усі елементарні функції є неперервними на інтервалах визначеності.

Означення 10. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на інтервалі $(a; b)$, якщо вона неперевна в усіх точках інтервалу $(a; b)$.

Означення 11. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперевна в усіх точках інтервалу $(a; b)$ і в точці a неперервна справа, в точці b неперервна зліва.

Властивості функцій неперевних на відрізку.

1). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x=x_2$ така, що в ній задовольняється невівність $f(x_1) \geq f(x)$, де x - будь-яка інша точка відрізка $[a;b]$.

Значення функції в точці x_1 називають найбільшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

2). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x=x_2$ така, що в ній задовольняється невівність $f(x_2) \leq f(x)$, де x - будь-яка інша точка відрізка $[a;b]$.

Значення функції в точці x_2 називають найменшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Таким чином, на відрізку $[a;b]$ функція $y = f(x)$ досягає найменшого і найбільшого значення, хоча б один раз.

Теорема Больцано – Коші: *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка набуває різних знаків, то між точками a і b існує принаймні одна точка $x = c$, в якій функція перетвориться на нуль: $f(c) = 0$, $a<c<b$.*

Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперевна на деякому інтервалі і на цьому інтервалі набуває найбільшого і найменшого значення, то на такому інтервалі вона набуває, принаймні один раз, усіх значень, що розміщуються між найменшим і найбільшим значеннями.

6.4.1. *Класифікація точок розриву.*

Означення 9. Точка x_0 називається точкою розриву першого роду функції $y = f(x)$, якщо існують скінчені односторонні границі справа:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = const\ ; \qquad \textit{та зліва}: \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = const. \tag{6.1}$$

Якщо, крім того, виконується хоча б одна із умов

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \end{cases}, \tag{6.2}$$

то *функція в точці $x=x_0$ має неусувний розрив першого роду*.

Якщо границі функції зліва і справа рівні, але функція не існує, то маємо усувний розрив першого роду.

Точка x_0 називається точкою розриву другого роду функції $y= f(x)$, якщо границя справа $\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x)$, або зліва $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існуює або нескінченна.

Стрибком функції в точці розриву $x=x_0$ називається різниця її односторонніх границь:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) - \lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ , якщо вони різні.}$$

6.4.2. *Дослідження функції $y = f(x)$ на неперервність.*

Правила дослідження функції на неперервність:

1) елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, але не може бути розривною на певному інтервалі.

2) елементарна функція може мати розрив в точці де вона не визначена за умови, що вона буде визначена хоча б із однієї сторони від цієї точки.

3) неелементарна функція може мати розриви як в точках, де вона невизначена, так і в тих, де вона визначена.

Наприклад, якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів, то на межі стику може бути розривною.

Розглянемо приклади знаходження точок розриву функцій.

Приклад 6.6. Знайти точки розриву функції $y = f(x)$.

а) $y = \frac{x}{x^2-1}$

Функція $y = \frac{x}{x^2-1}$ визначена в усіх точках окрім тих, де знаменник перетворюється в нуль, тоб-то $x=1$, $x= -1$. Область визначення функції наступна: D: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

Знайдемо односторонні границі в точках розриву.

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$

При знаходженні односторонніх границь подібного вигляду достатньо переконатися в знаку функції та в тому, що знаменник прямує до нуля. В результаті отримаємо границю рівну «+» нескінченності, або «-» нескінченності.

Оскільки в точках $x = 1$, $x = -1$ функція має нескінченні односторонні границі, то аргументи $x = 1$, $x = -1$ є точками розриву II роду. Графік функції наведено на рисунку 6.1.

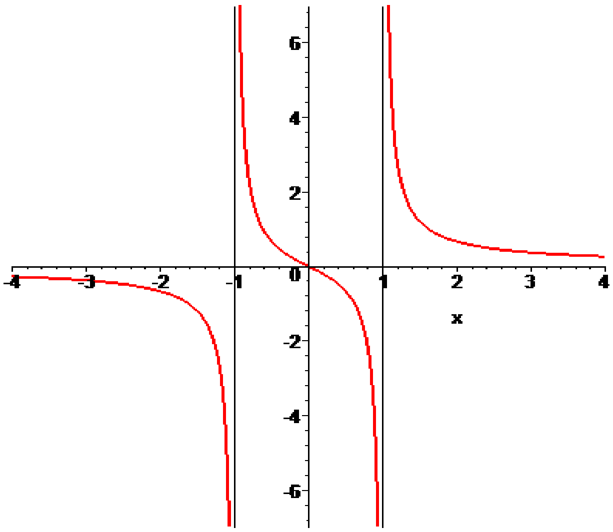


рис. 6.1.

б) $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$

Аналогічно попередньому прикладу знаходимо нулі знаменника:

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 16$; $x_{1,2} = \frac{-1\pm4}{2} \leftrightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = -3$

Таким чином функція визначена на всій осі OX, за виключенням точок x=-3; x=1, які є точками розриву.

Обчислимо односторонні границі справа та зліва, попередньо записавши функцію у зручному вигляді:

$y = \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)}$.

$\lim\limits_{x\to3+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\infty; \qquad \lim\limits_{x\to3-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = +\infty;$

$\lim\limits_{x\to1+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to1-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\infty;$

Границі функції нескінченні, тому, за означенням, маємо точки розриву x = -3; x =1 другого роду. Графік функції наведено на рис. 6.2.

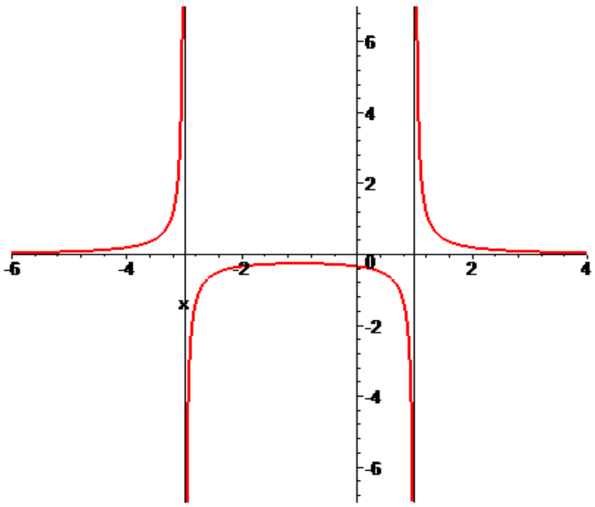


Рис. 6.2.

З графіків наведених функцій можна зробити висновок що *для деяких функцій відшукання точок розриву аналогічно знаходженню вертикальних асимптот.* Але деякі функції, що не мають вертикальних асимптот, мають розриви першого чи другого роду.

в) $y = 2\frac{|x+3|}{x+3}x + 6$

Задана функція неперервна на всій числовій осі окрім точки x = -3. Обчислимо односторонні границі в цій точці.

$\lim\limits_{x \to -3+0}\left(2\frac{(x+3)}{(x+3)}x + 6\right) = \lim\limits_{x \to -3+0}(2x + 6) = 0;$

$\lim\limits_{x \to -3-0}\left(2\frac{-(x+3)}{(x+3)}x + 6\right) = \lim\limits_{x \to -3-0}(-2x + 6) = 12.$

Отримані границі скінченні, але різні за значеннями. Отже точка x = -3 є *точкою неусувного розриву I роду*. Рис. 6.3.

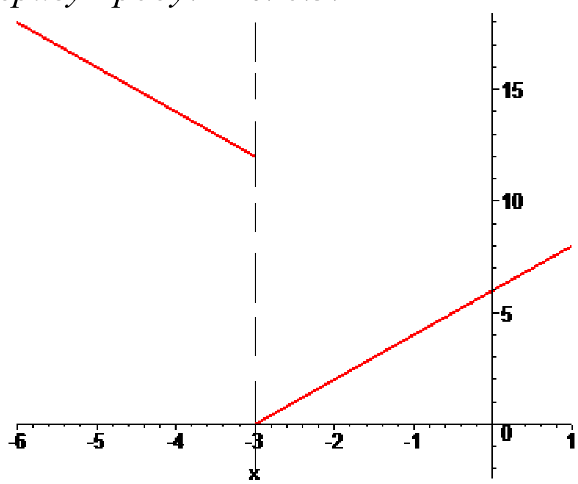


Рис. 6.3.

Приклад 6.7. Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. Обчислити стрибок функції в точці розриву. Побудувати графік функції.

а) $y = 2x - \frac{x-2}{|x-2|}$

Для заданої дробової функції з модулем у знаменнику точка x =2 є точкою розриву. Знайдемо границі, щоб визначити характер розриву.

$\lim\limits_{x \to 2+0} \left(2x - \frac{(x-2)}{(x-2)}\right) = \lim\limits_{x \to 2+0}(2x - 1) = 3;$

$\lim\limits_{x \to 2-0} \left(2x - \frac{(x-2)}{-(x-2)}\right) = \lim\limits_{x \to 2-0}(2x + 1) = 5;$

За означенням, точка x =2 є неусувною точкою розриву першого роду. Обчислимо стрибок функції при x =2.

$\lim\limits_{x \to 2+0} y - \lim\limits_{x \to 2-0} y = 3 - 5 = -2;$

Графік функції наведено на рис.6.4.

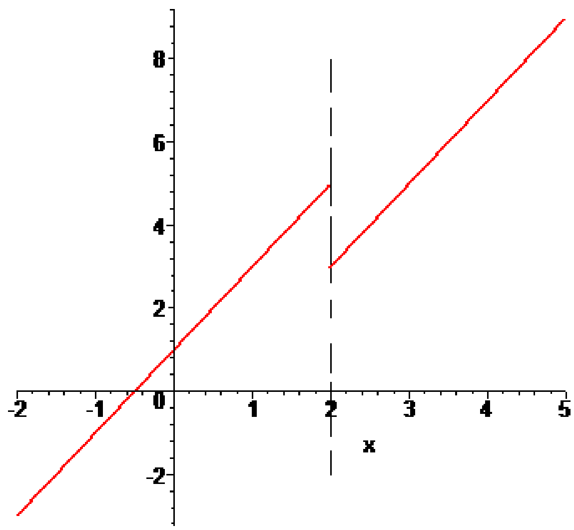


рис. 6.4.

б) $y = \begin{cases} 3\sqrt{x+2}, & 0 \le x \le 2 \\ 12 - 3x, & 2 \le x \le 5 \\ 7x - 6, & 5 \le x \le \infty \end{cases}$

Задана функція $y = f(x)$ – не елементарна і визначена для всіх невід'ємних значень аргументу. Точки, які розбивають функцію на інтервали можуть бути розривами. Для перевірки знайдемо односторонні границі для двох точок – спільних меж інтервалів, в яких функція змінює свій аналітичний вид.

1) x = 2: $\lim\limits_{x \to 2-0} y = \lim\limits_{x \to 2-0} 3\sqrt{x+2} = 3 \cdot 2 = 6;$

$\lim\limits_{x \to 2+0} y = \lim\limits_{x \to 2+0}(12 - 3x) = 6;$

$$y(2) = 3\sqrt{2+2} = 6.$$

Оскільки границі в точці x = 2 рівні значенню функції в цій точці, то функція – неперервна. Стрибка функції на межі інтервалів не існує.

2). Дослідимо на неперервність другу точку x = 5:

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 2-0}(12-3x) = 12 - 3\cdot 5 = -3;$$

$$\lim_{x\to 5+0} y = \lim_{x\to 2-0}(7x-6) = 7\cdot 5 - 6 = 29.$$

За означенням функція в точці x =5 має неусувний розрив I роду.

Стрибок функції в точці розриву рівний 29-(-3)=31.

Для заданої функції побудовано графік, рис 6.5.

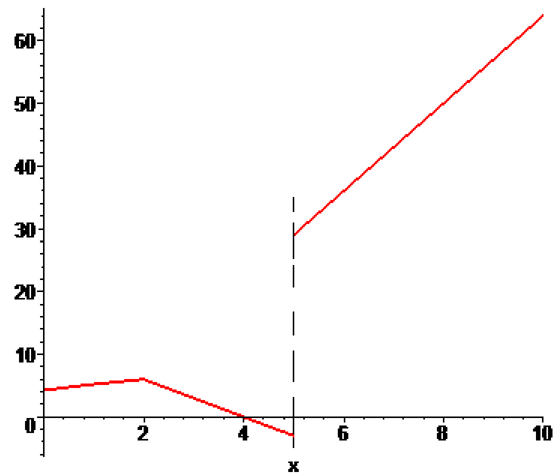


Рис. 6.5.

6.5. *Асимптоти графіка функції y = f(x)*

6.5.1. *Означення асимптот, види асимтот графіка функції y = f(x).*

Означення 10. *Асимптотою* кривої називається пряма, до якої необмежено наближається точка кривої, при необмеженому віддаленні її від початку координат.

Розрізняють *вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти*.

Графік функції $y = f(x)$ при $x \to a$ має *вертикальну асимптоту* (рис.6.6., *а* і *б*), якщо її границя при $x \to a$ дорівнює плюс або мінус нескінченність: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. У цьому випадку точка $x = a$ є точкою розриву другого роду. *Рівняння вертикальної асимптоти* має вигляд $x = a$.

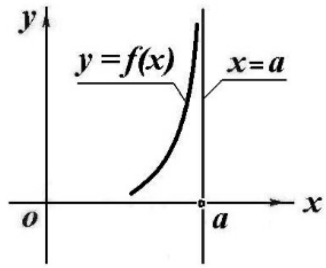


Рис. 6.6, *а*

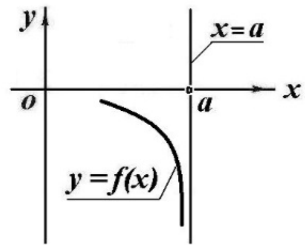


Рис. 6.6., *б*

Графік функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$ має *горизонтальні асимптоти* (рис.6.7., *а*), якщо існують кінцеві границі $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ та $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_1$. Якщо тільки одна з цих границь кінцева, то графік функції має одну горизонтальну асимптоту (рис.6.7., *б* і *в*).

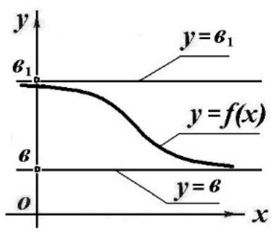


Рис.6.7., *а*

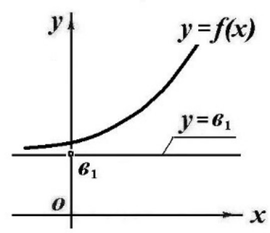


Рис. 6.7., *б*

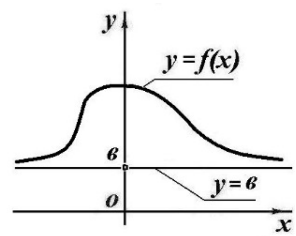


Рис. 6.7., *в*

Якщо границі $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ не обмежені, то графік функції не має горизонтальних асимптот. *Рівняння горизонтальної асимптоти* має вигляд $y = b$.

За означенням 10, асимптота є прямою лінією, тому *рівняння похилої асимптоти* можна записати як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис.6.8, *а* і *б*).

$$y = kx + b. \qquad (6.3)$$

Так як $y = f(x)$, то останнє рівняння перепишемо у вигляді
$f(x) = kx + b$ => $f(x) - kx - b = 0$.
В цьому випадку буде справедливим рівняння $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ =>
=> $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$, де $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{b}{x} = 0$.

Таким чином одержали формули для визначення параметрів *k* і *b* похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx). \qquad (6.4)$$

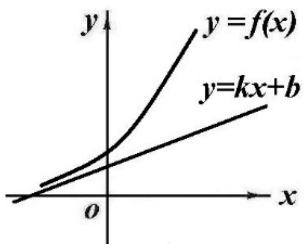


Рис. 6.8, *а*

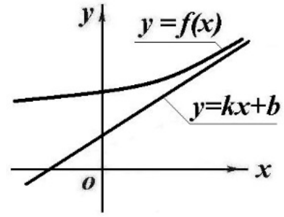


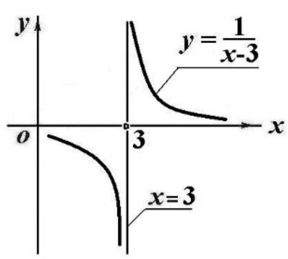
Рис. 6.8, *б*

6.5.2. *Приклади знаходження асимптот графіка функції* $y = f(x)$.

Приклад 6.8. Знайти асимптоти графіків функцій.

а). $y = \dfrac{1}{x-3}$.

Визначаємо, наявність горизонтальних асимптот, обчислюючи границю функції при $x \to \infty$.



$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$, отже функція *має горизонтальну асимптоту* $y = 0$.

Точка розриву кривої: $x = 3$, так як $(x - 3) = 0$, при $x = 3$.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to 3$ зліва, справа.

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

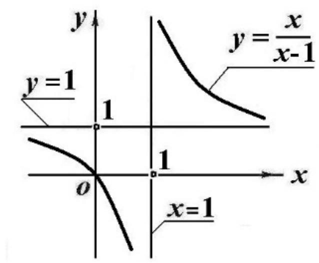
Отже крива *має вертикальну асимптоту* $x = 3$.

б). $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Визначаємо наявність горизонтальних асимптот, обчислюючи границю функції при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 1+0 = 1$$

Отже, $y = 1$ - *горизонтальна асимптота* графіка функції.



Знаменник (x - 1) функції перетворюється на нуль при x = 1.

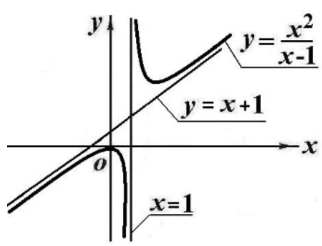
Досліджуємо поведінку функції при x→1, зліва і справа від точки розриву.

$\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x}{x-1}=+\infty$, отже крива *має вертикальну асимптоту* x = 1.

в). $y=\frac{x^2}{x-1}$.

Крива функції не має горизонтальних асимптот: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty$. Якщо x→1, то y→ $\pm\infty$, тому пряма x = 1 є *вертикальною асимптотою*.

Знаходимо похилу асимптоту $y=kx+b$:



$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1.$$

Графік функції має *похилу асимптоту* $y=x+1$.

6.6.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Сформулюйте означення поняття функції, що називають областтю визначення і областю значень функції? Які функції називають елементарними?
2. Сформулюйте означення границі функції, назвіть основні властивості границь.
3. Яка функція називається нескінченно великою, малою, який між ними зв’язок?
4. Дайте означення односторонніх границь функції в точці.

5. Яка функція називається неперервною в точці, на інтервалі? Приведіть означення точок розриву першого і другого роду.

6. Приведіть основні властивості неперервних на відрізку функцій.

7. Що називається асимптотою? Які види асимптот ви знаєте?

8. За яких умов графік функції $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту?

9. За яких умов графік функції $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту?

10. Який вигляд має рівняння похилої асимптоти? За якою формулою визначається параметри k і b?

6.6.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Обчислити границі функцій.

a). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; $б$). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $в$). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{\sin nx}$ $г$). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

Задача №2. Перевірити функції на неперервність, визначити характер точок розриву.

а). $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$ б). $y = \dfrac{x^2-25}{x-5}$

Задача №3. Які з даних функцій є неперервними в точці $x = 1$? Якщо є порушення неперервності, встановити характер точок розриву

а). $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & якщо \quad x \neq 1 \\ 2 & якщо \quad x = 1 \end{cases}$;

б). $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$; $y = \dfrac{1}{x-1}$;

Задача №4. Функція у задана різними аналітичними виразами для різних областей визначення. Необхідно:

1) знайти точки розриву функції, якщо вони існують;

2) знайти односторонні границі і скачок функції в точках розриву;

3) зробити схематичне креслення.

a). $f(x) = \begin{cases} x-2 & при \quad x > -1 \\ -2, & при \quad x = -2 \\ -x-2, & при \quad x < -2 \end{cases}$; $б$). $f(x) = \begin{cases} x^2 & при \quad x \geq 0 \\ x^2-1, & при \quad x < 0 \end{cases}$

$в$). $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & при \quad x \leq 2 \\ 6-2x, & при \quad x > 2 \end{cases}$ $г$). $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & при \quad x \leq 1 \\ 2x+3, & при \quad x > 1 \end{cases}$

Задача №5. Знайдіть асимптоти графіків функцій:

а). $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б). $y=\dfrac{2}{x+2}$; *в*). $y=\dfrac{5}{x^2-25}$; *г*). $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$.

<u>РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ</u>

7.1. *Похідна функції однієї змінної*

7.1.1. *Означення похідної.*

Нехай задано деяку функцю $y = f(x)$, на інтервалі (a, b). На цьому інтервалі візьмемо деяку точку $x= x_0$. Тоді значення функції в цій точці буде $f(x_0)$. Надамо аргументу приріст $\Delta x \neq 0$. Точка x_0. переходить у точку x_0.+ Δx, що відповідає значенню функції $f(x_0 + \Delta x)$, рис.7.1.

Різницю $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$, називають *приростом функції.*

<u>*Означення*</u>*: границю відношення приросту функції до приросту аргументу (якщо така границя існує), за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називають похідною функціїї* $y = f(x)$ *в точці* x_0.

Позначають так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{df}{dx}. \qquad (7.1)$$

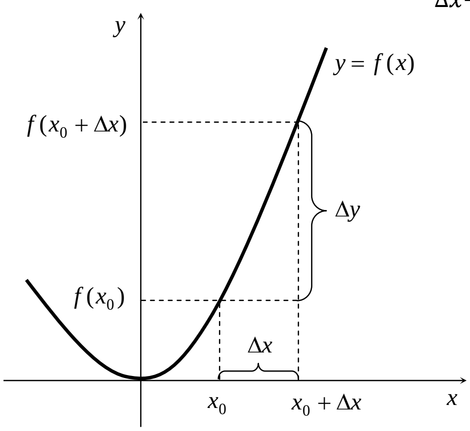


Рис. 7.1.

Функцію, що має похідну в точці x_0, називають *диференційованою в точці* x_0.

Функцію, що має похідну в кожній точці інтервалу (a,b) (скінченного або нескінченного), називають *диференційованою на інтервалі* (a,b).

Операціяю знаходження похідної функції називають *диференціюванням* функції.

7.1.2. *Геометричний зміст похідної*.

Можна визначити відношення приросту функції до приросту аргументу як: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=tg\varphi$, де φ– кут нахилу січної M_0M_1, а при $\Delta x\to 0$, січна M_0M_1 прямує до дотичної M_0M_2 графіка функції $y = f(x)$, в точці M_0 (рис.7.2).

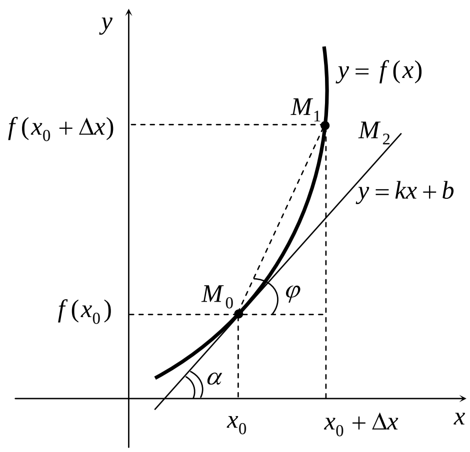


Рис. 7.2.

Якщо α – кут нахилу дотичної M_0M_2, то

$$tg\alpha = tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f^{/}(x_0)$$

Таким чином, *кутовий коефіцієнт k дотичної* до графіка функції $y = f(x)$. в точці x_0 є похідною цієї функції в точці x_0:

$$k = tg\alpha = f'(x_0) \qquad (7.2)$$

7.1.3. *Фізичний зміст похідної*.

Якщо тіло рухається за законом $S = S(t)$, де S – шлях, t – час, то середня швидкість руху від початкового моменту t часу до $t + \Delta t$, визначається за рівністтю:

$$\bar{v} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

Тоді швидкість в момент часу t:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t). \qquad (7.3)$$

Таким чином, *швидкість руху точки в момент часу t є похідною пройденого шляху за часом*.

Відповідно прискорення руху точки в момент часу t є похідною швидкості руху за часом: $\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}^{/}(t).$ (7.4)

7.1.4. *Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої.*

Нехай функція $y = f(t)$ визначена і неперервна на деякому проміжку $[a; b]$. Знайдемо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a, b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ у даному напрямі (рис. 7.2):

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (7.5)$$

де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.

Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з виразу (7.5) дістанемо рівняння дотичної у вигляді:
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (7.6)$$

<u>*Означення.*</u> *Нормаллю до графіка функції в точці M_0 називається перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці.*

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді:
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (7.6')$$

7.2. *Правила диференціювання. Таблиця похідних елементарних функцій.*

Нехай маємо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційованя на інтервалі (a, b). Тоді для них виконуються правила :

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (7.7)$$

Доведення цих рівностей див. [2, ст 203]

Приведемо таблицю похідних основних елементарних функцій.

1. $(c)' = 0$
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \cdot x'$
4. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$
5. $\left(e^x\right)' = e^x$
6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctg\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Приклад 7.1. Обчислити похідну першого порядку заданої елементарної функції однієї змінної x: $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$

За допомогою формул дії над степенями ($\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ і $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$) перетворюємо функцію до вигляду зручного для диференціювання, тоді похідна обчислюється за формулою 4

$$y=\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{2-\frac{3}{4}}=x^{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}}=x^{\frac{5}{4}}.$$

7.2.1. *Похідна складної функції.*

Означення. Функція $y = f(u(x))$, називається складною, змінна $u = u(x)$ – називається проміжною змінною.

Наприклад, складними функціями є $y = Cos^5 x$, $y = arctg\, x^3$, $y = 2^{Sin5x}$.

Похідна складної функції $y = f(u(x))$ за змінною x знаходиться за правилом: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (7.8)

Для знаходженя похідних $y'_u \cdot u'_x$ використовують таблицю похідних елементарних функцій.

Приклад 7.2. Обчислити похідну першого порядку складної функції $y = f(u)$, де $u=\varphi(x)$: $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$.

Застосовуємо формулу $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

$$y'=(\sqrt{x-\sqrt{x}})'=\frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot(x-\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}}\cdot\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}.$$

7.2.2. *Похідна неявно заданої функції.*

Означення. Функці $y = f(x)$, називається заданою неявно, якщо змінні x та y пов'язані між собою рівнянням виду $F(x, y) =0$.

Наприклад: $x^2 + y^2 = 1$; $Cosy = Sin2x$.

Для знаходження похідної неявно заданої функції диференціюють ліву і праву частини рівняння і отриманий вираз розв'язують відносно y'_x.

Приклад 7.3. Знайти похідну $'$, якщо функція $y = f(x)$ задана рівнянням: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(y + x') = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2y' - (y + xy') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(y^2 - x) + (x^2 - y) = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{x - y^2}.$$

7.2.3. *Похідна параметрично заданої функції.*

Означення. Функція називається заданою параметрично, якщо залежна змінна і аргмент пов'язані між собою через деякий параметр t:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Похідна параметрично заданої функції заходить за формулою: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Приклад 7.4. Знайти похідну y'_x, функції заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

$\frac{dy}{dt} = acost;$ $\frac{dx}{dt} = -asint,$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{cost}{sint} = ctgx.$

7.2.4. *Похідна степенево-показникової функції.*

Степенево – показникова функція має вигляд: $y = u^v$, *де* $u = u(x)$, $v = v(x)$, *тобто функції незалежної змінної x.*

Похідну степенево-паказникової функції можна визначити за формулою:

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right), \qquad (7.9)$$

або способом *логарифмічного диференціювання.*

Спосіб логарифмічного диференціювання включає в себе наступну послідовність дій:

1). початкову функцію логарифмують (натуральним логарифмом);

2). отриману функцію в неявному вигляді диференціюють;

3). знаходять вираз для y'_x.

Приклад 7.5. Обчислити похідну функції6 $y = (x+1)^{\cos x}$.

1) Логарифмуємо задану функцію і використовуємо властивості логарифма для спрощення виразу.

$$\ln y = \ln (x+1)^{\cos x}; \quad \ln y = \cos x \cdot \ln(x+1).$$

2). Знаходимо похідну лівої і правої частини рівності:

$$(\ln y)' = (\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot (\ln(x+1))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1}(x+1)'$$

3) Знаходимо вираз для y_x'

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1}\right), \quad y' = (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1}\right).$$

7.3. *Диференціал функції.*

Нехай задано деяку функцю $y = f(x)$, диференційовану на відрізку $[a, b]$. Приріст Δy цієї функції дорівнює різниці значень цієї функції в точці $x+\Delta x$ і в точці x: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ *називають величину*:

$$dy = f'(x)\,\Delta x \qquad (7.10.)$$

При достатньо малих приростах аргумента ($\Delta x \to 0$) приріст функції наближено дорівнює її диференціалу: $\Delta y \approx dy$ і можна записати $\Delta x \approx dx$, тоді формула (7.4) матиме вигляд:

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx, \qquad (7.11)$$

рівність $\Delta x = dx$ *можна вважати означенням диференціала незалежної змінної* x.

Приклад 7.6. Знайти диференціал функції $y = ln\sqrt{x}$.

$$dy = y'dx = (ln\sqrt{x})'dx = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{2x}.$$

7.3.1. *Застосування диференціалу функції однієї змінної до наближених обчислень.*

Обчислення наближеного значення приросту функції.

Приклад 7.7. Обчислити наближене значення приросту даної функцій y, якщо x - задане значення аргументу, якому надається приріст Δx.

$y = 3x^3 - 4$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$.

$\Delta y \approx dy$; $\Delta y \approx (3x^3 - 4)'\Delta x$; $\Delta y \approx 9x^2 \Delta x$; $\Delta y \approx 9 \cdot 2^2 \cdot 0{,}001$; $\Delta y \approx 0{,}036$.

Приклад 7.8. На скільки збільшиться при нагріванні об’єм кулі радіуса R, якщо довжина радіуса збільшилась на величину ΔR?

Об’єм кулі обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Вважаючи приріст ΔR аргумента R малим, замінимо приріст об’єму кулі її диференціалом: $\Delta V \approx dV$.

$$\Delta V \approx \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' \Delta R\,; \quad \Delta V \approx \frac{4}{3}\pi\, 3R^2 \Delta R\,;$$

Об’єм кулі збільшиться на величину: $\Delta V \approx 4\pi R^2 \Delta R$.

Обчислення наближеного значення функції.

Формула для наближеного обчислення приросту функції:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \tag{7.12}$$

Приклад 7.9. Знайти наближене числове значення функції $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$ в точці з абсцисою $2{,}01$.

Припустимо $x + \Delta x = 2{,}01$, де x=2 і $\Delta x = 0{,}01$, тоді

$f(2 + 0{,}01) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}01$, де $f(2) = 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 39$,

$y' = f'(x) = 15x^2 - 2$, $f'(2) = 58$, $f(2{,}01) = 39 + 58 \cdot 0{,}01 = 39{,}58$.

Обчислення наближеного значення степеня.

Нехай аргумент x степеневої функції $f(x) = x^n$ набуває приросту Δx, причому Δx досить мале. Обчислимо наближене значення функції $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ за формулою $f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x$,

де $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$, $f(x) = x^n$, $f'(x)\Delta x = nx^{n-1}\Delta x$.

Одержуємо формулу для обчислення наближеного значення степеня:

$$(x+\Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x. \tag{7.13}$$

Приклад 7.10. Знайти наближене значення $(4{,}003)^3$; $(9{,}993)^2$

$(4{,}003)^3 = (4 + 0{,}003)^3 \approx 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 0{,}003 = 64{,}144$

$(9{,}993)^2 = (10 - 0{,}007)^2 \approx 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot (-0{,}007) = 100 - 0{,}14 = 99{,}86$.

Обчислення наближеного значення кореня.

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Нехай аргумент x набуває малого приросту Δx, обчислимо наближене значення функції $f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x}$ за формулою: $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$,

де $f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x}$, $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

$$f'(x)\Delta x = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x = \frac{1}{n}\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x^1}\Delta x = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}\Delta x\,.$$

Таким чином одержали формулу для обчислення наближеного значення кореня: $\sqrt[n]{x+\Delta x} = \sqrt[n]{x} + \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}\Delta x$. (7.14)

Приклад 7.11. Знайти наближене значення $\sqrt[3]{1{,}006}$, $\sqrt{24{,}96}$.

$$\sqrt[3]{1{,}006} = \sqrt[3]{1+0{,}006} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{\sqrt[3]{1}}{3\cdot 1}\cdot 0{,}006 = 1 + 0{,}002 = 1{,}002.$$

$$\sqrt{24{,}96} = \sqrt{25-0{,}04} \approx \sqrt{25} + \frac{\sqrt{25}}{2\cdot 25}\cdot(-0{,}04) = 5 - \frac{5}{50}\cdot 0{,}04 = 5 - 0{,}004 = 4{,}996$$

7.3.2. *Правило Лопіталя.*

Розглянемо відношення $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, де функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені й диференційовні в деякому околі точки a, виключаючи, можливо, саму точку a. Можливі випадки, що при $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими величинами при $x \to a$. Тоді говорять, що в точці a функція $f(x)$ має невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції $f(x)$ при $x \to a$, тобто визначити спосіб для розкриття невизначеностей виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 7.1 *(правило Лопіталя)*. Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення похідних цих функцій (скінченній або нескінченній), якщо такі границі існують.

Зауваження. Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ при $x \to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють умови теореми 7.1, то повторне застосування правила Лопіталя дає формулу:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}, \text{ і т. д.}$$

Приклад 7.12. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Застосовуємо правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\cos x}{2} = \dfrac{7}{2}$.

7.4. *Похідні вищих порядків*.

Нехай функція $y = f(x)$, диференційована на інтервалі (a, b). Тоді для будь якого значення x із цього інтервалу цілком однозначно визначається функція f'_x.

Позначимо $f_1(x) = f'_x$. Якщо функція $f_1(x)$ диференційована в будь якій точці інтервалу (a, b), то $f_1{}'(x)$ називають другою похідною функції $f(x)$. Тобто можна записати: $f''(x) = \left(f'_x\right)'$

Аналогічно визначаються похіді вищих порядків. Позначають їх так:

$$f''(x);\ f'''(x);\ f^{(4)}(x);\quad f^{(5)}(x); \cdots; f^{(n)}(x)$$

Приклад 7.13. Обчислити похідну другого порядку заданої елементарної функції: $y = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)$.

$$y'' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)'' = \frac{5}{4}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{5}{16}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}.$$

Приклад 7.14. Обчислити похідну другого порядку складної функції $y=f(u)$, де $u = \varphi(x)$: $y = (\sqrt{x - \sqrt{x}})$

$$y'' = (\sqrt{x-\sqrt{x}})'' = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}\right)' = \frac{(2\sqrt{x}-1)'(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - (4\sqrt{x\sqrt{x}-x})'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - \frac{4}{2\sqrt{x\sqrt{x}-x}}(x\sqrt{x}-x)'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{x\sqrt{x}-x})\,\sqrt{x\sqrt{x}-x} - (x^{1+\frac{1}{2}}-x)'(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x(\sqrt{x}-1)\,\sqrt{x}\,\sqrt{x\sqrt{x}-x}} = \frac{4(x\sqrt{x}-x) - (\frac{3}{2}\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x^2(\sqrt{x}-1)\ \sqrt{\sqrt{x}-1}}.$$

7.5. *Застосування похідної для дослідження функції та побудови графіка.*

7.5.1. *Основні означення і теореми дослідження графіку функції.*

Теорема.7.2. *Якщо функція $y = f(x)$, диференційована на відрізку $[a, b]$ і зростає на цьому відрізку, то її похідна $f'(x)$ для усіх x з проміжку (a, b) невід'ємна, тобто $f'(x) \geq 0$.*

Якщо функція $y = f(x)$, неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на проміжку (a, b), причому $f'(x) > 0$, для усіх $a < x < b$, то функція зростає на відрізку $[a, b]$.

Аналогічною є теорема для спадної функції.

Теорема 7.3. *Якщо функція $y = f(x)$, диференційована на відрізку $[a, b]$ і спадає на цьому відрізку, то її похідна $f'(x)$ для усіх x з проміжку (a, b) від'ємна, тобто $f'(x) \leq 0$.*

Якщо функція $y = f(x)$, неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на проміжку (a, b), причому $f'(x) < 0$, для усіх $a < x < b$, то функція спадає на відрізку $[a, b]$.

Означення 1. *Функція $y = f(x)$ у точці x_0 має локальний максимум, якщо значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 перевищує її значеня в усіх інших точках деякого інтервалу, що містить точку x_0.*

Тобто, функція $y = f(x)$ має локальний максимум при $x = x_0$, якщо $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ для усіх Δx, досить малих за абсолютною величиною.

Означення 2. *Функція $y = f(x)$ має локальний мінімум при $x = x_0$, якщо $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ для усіх Δx, досить малих за абсолютною величиною.*

Максимум і мінімум функції називають *екстремумум функції*, точки в яких досягається екстремум називають *точками естремуму* функції.

Теорема. 7.4. (необхідна умова існування екстремуму функції).

Якщо функція $y = f(x)$, диференційована і має в точці $x = x_0$ екстремум, то в цій точці похідна функції перетворюється на нуль: $f'(x)=0$.

Означення 3. *Точки в яких похідна функції перетворюється на нуль, або не існує наиваються критичними.*

Теорема. 7.5. (достатня умова існування екстремуму функції).

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, який містить критичну точку x_0 і диференційована в усіх точках цього інтервалу (можливо, окрім точки x_0). Якщо при перебігу через точку x_0 похідна змінює знак « - » на «+», то в цій точці x_0 функція має мінімум, а якщо «+ » на «-», то в точці x_0 функція має максимум

Якщо при дослідженні функції постає питання щодо *найбільшого і найменшого* значення функції на відрізку, то необхідно виконати дії наступного алгоритму:

1) критичні точки і значення функції в них;

2) знайти значення функції на кінцях відрізка;

3) серед обчислених значень функції обрати найбільше і найменше, які й будуть, відповідно, найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку.

Приклад 7.15. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. На відрізку [-1; 4].

1). Критичні точки: $\begin{cases} y' = x^2 - 4x + 3 \\ y' = 0: \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x_1 = 3; \; x_2 = 1 \end{cases}$

значення функції в критичних точках: $y(1) = 2\frac{1}{3}$; $y(3) = 1$.

2). Значення функції на кінцях відрізка: $y(-1) = -4\frac{1}{3}$; $y(4) = 66\frac{1}{3}$.

3). Максимальне значення функції на відрізку [-1; 4] $y(4) = 66\frac{1}{3}$; мінімальне значення на відрізку [-1; 4] $y(-1) = -4\frac{1}{3}$.

<u>Означення 4</u>. *Графік функції y = f(x) має опуклість вгору на інтервалі (a,b), якщо усі точки графіка розміщені нижче будь-якої дотичної на цьому інтервалі. Криву називають опуклою вгору.*

Графік функції має опуклість вниз на інтервалі (a,b), якщо усі точки графіка розміщені вище будь-якої дотичної на цьому інтервалі. Криву називають опуклою вниз.

<u>Означення 5.</u> *Точку з області визначення функції, в якій змінюється характер опуклості називають точкою перегину .*

На рис. 7.3 зображено криву, що на інтервалі *(a, b)* опукла вгору, на інтервалі (*b, c)* опукла вниз. Точкою перегину є точка *b*.

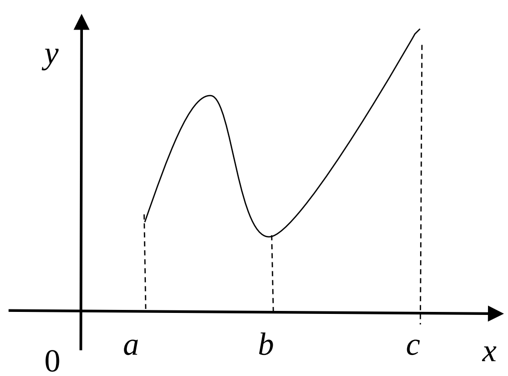


Рис. 7.3.

<u>Теорема. 7.6.</u> *Якщо в усіх точках інтервалу (a,b) друга похідна функції f(x) від'ємна, тобто $f''(x) < 0$, то крива y=f(x) на цьому інтервалі має опуклість вгору; якщо в усіх точках інтервалу (a,b) друга похідна функції f(x) додатня, тобто $f''(x) > 0$, то крива y=f(x) на цьому інтервалі має опуклість вниз.*

<u>Теорема 7.7</u>. *Якщо для функції y=f(x) в деякій точці $x=x_0$ виконується рівність $f(x_0)'' = 0$, або $f(x_0)''$ не існує і при перебігу через цю точку $x=x_0$ друга похідна змінює знак, то точка з абсцисою $x=x_0$ є точкою перегину графіка функції y=f(x)*

7.5.2. *Загальна схема дослідження функції і побудови графіка.*

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти точки розриву функції і асимптоти графіка функції.
5. Визначити інтервали монотонності функції і точки екстремуму.
6. Дослідити функцію на опуклість, визначити наявність точок перегину.

7. Побудувати в системі координат знайдені асимптоти та всі отримані при дослідженні точки. Потім, враховуючи інтервали монотонності, опуклості та угнутості, побудувати графік функції.

Інколи для більш детального зображення функції знаходять ще декілька довільних точок цієї функції і позначають їх на графіку.

Приклад 7.16. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^2+2}{x}$ та побудувати її графік.

Область визначення функції: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Парність, непарність: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+2}{(-x)} = \dfrac{x^2+2}{-x} = -\dfrac{x^2+2}{x} = -f(x)$,

функція непарна, тому її графік симетричний відносно початку системи координат. Точок перетину з осями координат не існує.

В точці $x = 0$ функція має розрив.

Односторонні границі зліва та справа від точки розриву:

$\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{x^2+2}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x^2+2}{x} = +\infty$. Вертикальна асимптота $x = 0$.

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0\cdot$$

Отже, похила асимптота $y = x$, при $x \to \pm\infty$.

Знайдемо горизонтальну асимптоту $y = b$:

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{2}{x}\right) = \infty$$

Тобто, графік функції горизонтальної асимптоти не має.

Знайдемо критичні точки першого роду. Для цього знайдемо похідну $f'(x)$ і розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x - (x^2+2)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 2}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2} = 0 \to x^2 - 2 = 0 \to x \neq 0;\ x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4$$

Запишемо критичні точки та інтервали, на які вони поділяють область визначення функції в таблицю 7.1. (перший рядок). Визначимо знак $f'(x)$ в кожному інтервалі і запишемо в другий рядок таблиці. В третьому рядку таблиці зазначимо характер монотонності функції.

Таблиця 7.1

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	*не існує*	–	0	+
$f(x)$	*зростає*↑	*max*	*спадає*↓	*не існує*	*спадає*↓	*min*	*зростає*↑

Отже, екстремуми функції:

$y_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \approx -2{,}8$; $y_{\min} = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$.

Знайдемо критичні точки другого роду. Для цього знайдемо другу похідну $f''(x)$ і розв'яжемо рівняння $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)' = \frac{2x\cdot x^2-(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^3-2x^3+4x}{x^4} = \frac{4x}{x^4} = \frac{4}{x^3} = 0,\ x \neq 0$$

Маємо одну критичну точку другого роду x=0, але ця точка не входить в область визначення. Таким чином, точок перегину графік функції не має.

Запишемо інтервали області визначення функції в таблицю 2 (в перший рядок). Визначимо знак $f''(x)$ в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третьому рядку таблиці зазначимо характер опуклості графіка функції.

Таблиця 7.2.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	–	*не існує*	+
$f(x)$	*Опукла вгору* ∩	*не існує*	*Опукла вниз* ∪

Побудуємо в системі координат пунктирною лінією похилу асимптоту *y=x* (асимптота *x=0* є віссю *Oy*) і відмітимо точки $y_{\max} \approx -2{,}8$, $y_{\min} \approx 2{,}8$. Враховуючи асимптоти, інтервали монотонності та опуклості, через знайдені точки побудуємо графік функції рис. 7.4.

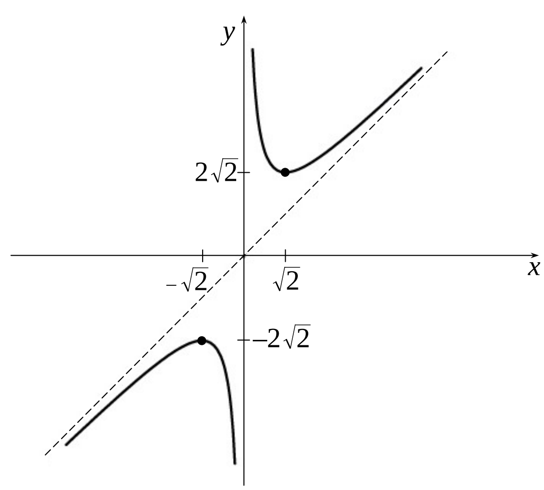


Рис. 7.4.

7.6.1. *Питання для самостійного контролю знань*

1. Що називається похідною функції однієї змінної?
2. Які правила знаходження похідної ви знаєте?
3. Як обчислити похідну складної та параметрично заданої функції?
4. Що називається диференціалом функції однієї змінної?
5. Чому дорівнює диференціал аргумента цієї функції?
6. В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції?
7. За яких умов можна вважати, що приріст функції наближено дорівнює її диференціалу: $\Delta y \approx dy$?
8. Що називається приростом аргумента, приростом функції?
9. Запишіть формулу для обчислення наближеного значення степеня.
10. За якою формулою обчислити наближене значення кореня?

7.6.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Знайти похідні функцій і обчислить їх значення при $x = x_0$.

а). $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$; $x_0 = 1$; *б*). $y = \dfrac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}$; $x_0 = \frac{1}{4}$;

в). $y = \sin x e^{\cos x}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$; *г*). $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1+tgx}{1-tgx}}$; $x_0 = 0$.

Задача №2. Тіло рухається прямолінійно по закону $s(t) = \dfrac{4t+3}{t+3}$, де s вимірюється в метрах, а t- в секундах. Знайти швидкість і прискорення тіла в момент t =6 *c*.

Задача №3. Знайти похідні від неявних функцій:

а). $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; *б).* $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$;

в). $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$; *г).* $x \sin y + y \sin x = 0$.

Задача № 4. Знайти похідні від функцій заданих параметрично:

а). $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$; *б).* $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t \\ y = e^{t}\cos t \end{cases}$.

Задача №5. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^2 + 2x + 3$ в точці x = 1 при Δx = 0,2.

Задача № 6. Обчислить приріст і диференціал функції $y = x^3 - x$ в точці x = 2 при заданих значеннях приросту аргументу

1) $\Delta x = 0{,}01$; 2) $\Delta x = 0{,}1$.

Задача №7. Знайти абсолютну похибку $\left|\Delta y - dy\right|$ і відносну похибку $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, які допускаються при заміні приросту функції її диференціалом.

Задача №8. Використовуючи поняття диференціала, обчислити:

а) $arcsin 0{,}51$; *б)* $cos 61^0$; *в)* $\sqrt[5]{33}$; *г)* $e^{1{,}03}$.

Задача №9. Дослідити на екстремум функції:

а). $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; *б)* $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$; в) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; *г)* $y = \frac{x}{\ln x}$;

Задача №10. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

а). $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $\left[-2{,}2\right]$; б) $y = arctg\frac{1-x}{1+x}$, $\left[0{,}1\right]$.

Задача №11. Знайти точки перегину і інтервали випуклості функцій:

а). $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$; *б*). $y = xe^{2x} + 1$.

Задача №12. Провести повне дослідження заданих функцій і побудувати їх графіки: *а*). $y = \frac{1}{x} + 4x^2$; *б)* $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

РОЗДІЛ: 8. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

8.1. *Первісна функції та невизначений інтеграл.*

Означення 1. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо на цьому проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Із означення слідує, що первісна $F(x)$ є диференційованою, а значить неперервною функцією на заданому проміжку, і її вигляд визначається проміжком, на якому вона розглядається.

Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тобто, $F'(x) = f(x)$, то функція $F(x) + C$, при будь-якій $C = const$, також буде первісною для $f(x)$, так як $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$.

Означення 2. Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку.

Інтегрування є операцією оберненою до диференціювання.

<u>Означення</u> <u>3.</u> Функція $F(x)+C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку, називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на заданому проміжку і позначається

$$\int f(x)dx = F(x)+C\,,\ \left(F'(x)= f(x)\right), \tag{8.1}$$

де $\int$ — знак невизначеного інтеграла;
$f(x)$ — підінтегральна функція;
$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;
dx — диференціал змінної інтегрування.

<u>Теорема</u> <u>8.1.</u> *(Коші).* Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

<u>Зауваження:</u> існують такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, що не можуть бути записані через елементарні функції, хоча існують у кожному із проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці функції називають «не інтегровними».

Наприклад: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \cos x^2 dx$.

8.2. *Властивості невизначеного інтеграла.*

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)= f(x)$.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $\int dF(x) = F(x)+C$.

3. Сталий множник, можна виносити з під знака інтеграла, тобто: $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,\quad k\neq 0.$

4. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто: $\int\left(f_1(x)+ f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx.$

8.3. *Таблиця основних інтегралів.*

Кожна з нище приведених формул справедлива у будь-якому проміжку із області визначення відповідної підінтегральної функції.

1. $\int 0\cdot dx = C$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

6. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, a \neq 1$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

11. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$

18. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$

19. $\int \dfrac{xdx}{x^2 + a} = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2 + a\right| + C$

20. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0$

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

8.4. *Основні методи інтегрування*

8.4.1. *Метод безпосереднього інтегрування.*

Метод безпосереднього інтегрувані базується на використанні табличних інтегралів, властивостей невизначених інтегралів і деяких елементарних перетворень, що приводять підінтегральний вираз до відомого табличного інтеграла, або функцій, інтергувати які простіше.

Приклад 8.1. $\int \dfrac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$

$= \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} + \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$

Іноді доцільно виконати операцію піднесення підінтегральної функції під знак диференціала:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Наприклад, коли φ(x) є лінійною функцією, тобто $\varphi(x)=ax+b,$, дістаємо:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

<u>*Зауваження.*</u> Під знак диференціала можна вносити будь-який постійний доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

$$d\varphi(x)=d(\varphi(x)+C).$$

<u>Приклад 8.2.</u> $\int\frac{\sin xdx}{1+3\cos x}=\int\frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x}=$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C.$$

8.4.2. *Метод заміни змінної інтегрування (метод підстановки).*

Найчастіше при обчислені інтегралів використовують метод підстановки, який базується на використанні теореми 8.2. (див. [3]):

<u>*Теорема* 8.2.</u> Якщо $f(x)$ — неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx=\left|\begin{array}{l}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt;\\ t=\varphi^{-1}(x)\end{array}\right|=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (8.2)$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\left|\varphi(x)=t\right|=\int f(t)dt. \qquad (8.3)$$

На практиці роблять так. Припускають, що $x = \varphi(t)$, диференціюючи цю функцію, знаходять $dx = \varphi^{/}(t)dt$ і підставляють в підінтегральний вираз. Після обчислення інтегралу, повертаються до початкової змінної x. Часто використовується і зворотня заміна змінної, тобто, підстановка $t = \varphi(x), dt = \varphi^{/}(x)dx$.

<u>Приклад 8.3</u>.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}=\left|\begin{array}{l}x=t^6,\\ dx=6t^5dt;\\ t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)}=6\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6(t-\operatorname{arctg}t)+C=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

<u>Приклад 8.4</u>. $\int\sin^5x\cos xdx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{array}\right|=\int t^5dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{6}\sin^6x+C.$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни. Вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом

8.4.3. *Метод інтегрування частинами.*

Як і метод підстановки, метод інтегрування частинами, належить до основних методів інтегрування. Формула інтегрування частинами записується так:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du. \tag{8.4}$$

де, $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – функції від x, що мають неперервні похідні.

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується обирати за таким правилом: підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу u та dv, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$, при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може легко знайдений.

<u>Приклад 8.5.</u>

$$\int x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Інколи при обчисленні інтеграла, доводиться виконувати інтегрування частинами кілька разів:

<u>Приклад 8.6.</u>

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$$

Використання формули інтегрування частинами передбачає, що в правій частині інтеграл $\int vdu$ можна обчислити легше ніж заданий інтеграл. У інтегралах виду $\int P(x)a^{\alpha x}dx$, $\int P(x)Sin(mx)dx$, $\int P(x)Cos(mx)dx$ за u приймать многочлен $P(x)$. Для інтегралів виду $\int P(x)\ln(x)\,dx,\ \ \int P(x)\,\mathrm{arctg}(x)\,dx,\ \int P(x)\arcsin(x)\,dx,$ доцільно за u приймати функції $\ln(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\arcsin(x)$.

У деяких випадках після інтегрування частинами інтеграла одержується рівняння, розв’язком якого є шуканий інтеграл.

Приклад 8.7.

$$G=\int e^x\cos x dx=\left|\begin{matrix}\cos x=u, \ du=-\sin x dx;\\ e^x dx=dv\Rightarrow v=e^x\end{matrix}\right|=$$

$$=e^x\cos x-\int -\sin x\cdot e^x dx=\left|\begin{matrix}\sin x=u, \ du=\cos x dx;\\ e^x dx=dv\Rightarrow v=e^x\end{matrix}\right|=$$

$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x dx=e^x(\cos x+\sin x)-G.$$

Отже, дістали рівняння $G=e^x(\cos x+\sin x)-G$, із якого знаходимо

$$G=\int e^x\cos x dx=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C\ .$$

8.5. *Інтегрування окремих класів функцій*

8.5.1. *Інтегрування раціональних функцій.*

«Нагадування»: раціональним дробом називають відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, то дріб називається *неправильним*. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Найпростішими раціональними дробами називаються такі дроби чотирьох типів:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

де $k\geq 2, k\in N, D=p^2-4q<0$, інтеграли від яких мають вигляд:

I. $\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

II. $\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$;

III. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$;

IV. $\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k}$ — інтегрується за допомогою рекурентних формул.

Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$ можна подати у вигляді скінченної кількості найпростіших дробів, використовуючи такі правила:

1). Якщо $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot g_{m-k}(x)$,

то: $$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-k}(x)};$$

2). Якщо $Q_m(x) = \left(x^2 + px + q\right)^k \cdot g_{m-2k}(x)$,

то $$\frac{P_n(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^k \cdot g_{m-k}(x)} =$$

$$= \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \ldots + \frac{A_k x + B_k}{\left(x^2 + px + q\right)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

де A_i, B_i, $i = (\overline{1,k})$ - деякі коефіцієнти, а - $\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ та $\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ - правильні раціональні дроби.

<u>Приклад 8.8</u>. Даний правильний раціональний дріб (n < 12) розкласти на суму простих дробів.

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2 x^3 \left(x^2 - x + 2\right)\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} +$$
$$+ \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 - x + 2} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Коефіцієнти A_1, B_1, B_2, ..., N_2 невідомі (невизначені коефіцієнти). Для їх знаходження треба праву частину рівності звести до найменшого спільного знаменника і знайдений чисельник прирівняти до чисельника заданого початкового дробу. Із тотожної рівності многочленів у чисельниках одержимо рівності коефіцієнтів при однакових степенях змінної x, що являють собою систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів A_1, B_1, B_2, ..., N_2. Описаний вище метод називають *методом невизначених коефіцієнтів*.

Алгоритм інтегрування раціональних функцій.

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то виліляють цілу частину дробу (за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу).

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та прості дроби.

<u>Приклад 8.9.</u> Обчислити інтеграл: $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$

1). Виділяємо цілу частину дробу – підінтегральної функції:

$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx \quad = \int \left(x - \frac{6x}{x^3+8}\right)dx$$

2). Розкладаємо знаменник правильного дробу на співмножники і записуємо дріб як суму двох дробів, визначаємо невідомі коефіцієнти:

1.

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 6x = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+4A+2C \; ;$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \\ x^1 & 6 = -2A+2B+C \\ x^0 & 0 = 4A+2C \end{array}\right\} \\ x=-2 \Rightarrow -12 = 12A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=2 \end{array}\right| = \int\left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \left|\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{array}\right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{t+3}{t^2+3}dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int\frac{tdt}{t^2+3} - 3\int\frac{dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(t^2+3) -$$

$$- \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln\sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \, .$$

8.5.2. *Інтегрування тригонометричних функцій.*

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R — раціональна функція відносно sin$x$, cos$x$, тобто над sin$x$, cos$x$ виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня, наприклад:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{2\sin^2 x + \cos^3 x}{3\sin^4 x - 4\sin x\cos^2 x} \, .$$

Існують такі підстановки, що приводять інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t)dt$.

1. *Універсальна тригонометрична підстановка* . $\left\{\begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\operatorname{arg\,tg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right.$

$$\int R(sinx, cosx)dx = \left| \begin{matrix} sinx = \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ cosx = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t)dt.$$

<u>Приклад 8.10</u> $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{matrix} \text{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\,\text{arctg}\, t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} =$

$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

<u>Зауваження</u>. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо sin*x*, cos*x* входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

2. *Підінтегральна функція - непарна відносно* sin*x* - *підстановка* cos*x* =*t*.

<u>Приклад 8.11.</u> $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx =$

$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$

$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$.

3. *Підінтегральна функція — непарна відносно* cos*x* - *раціоналізується за допомогою підстановки* sin *x*= *t*.

<u>Приклад 12</u>. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x}dx =$

$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)\sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| =$

$= \int (1-t^2)t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$.

4. *Підінтегральна функція* $R(\sin x, \cos x)$ - *парна відносно* sin*x* і cos*x* разом, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

У цьому випадку використовують підстановку $\text{tg}\, x = t$ або $\text{ctg}\, x = t$ ..

<u>Приклад 8.12.</u> $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{matrix} \text{tg}\, x = t, \ x = \text{arctg}\, t, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3x}-2\operatorname{ctg}x+C.$$

5. *Підінтегральна функція* $R(\operatorname{tg}x)$ *раціоналізується підстановкою* $\operatorname{tg}x=t$.

<u>Приклад 8.13.</u> $$\int\operatorname{tg}^3 xdx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t\\ x=\operatorname{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{t^3dt}{t^2+1}=\left|\begin{array}{l|l} t^3 & \dfrac{t^2+1}{t} \\ - & \\ \dfrac{t^3+t}{-t} & \end{array}\right|=$$

$$=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x-\ln\sqrt{\operatorname{tg}^2x+1}+C.$$

<u>*Зауваження.*</u> В інтегралах $\int\sin^{2n}x\cdot\cos^{2m}xdx$ рекомендується скористатись формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}.$$

<u>Приклад 8.14.</u>

$$\int\sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

<u>*Зауваження.*</u> При інтегруванні інтегралів типу:

$\int\sin(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int\cos(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int\sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$ $a\neq b$, можна скористатися тригонометричними рівностями:

$$\sin(ax)\cdot\cos(bx)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)x+\ +\sin(a-b)x),$$

$$\cos(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx)=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x).$$

<u>Приклад 8.15.</u>

$$\int\cos 2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin 3x)dx=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

8.5.3. *Інтегрування виразів що містять іраціональності.*

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів іраціональних функцій, при цьому $R(x;y)$ - означає раціональну залежність від змінних x та y.

1. $\int R\left(x,\sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx = \left| \begin{array}{l} ax+b=t^n \\ x=\dfrac{1}{a}\left(t^n-b\right) \\ dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}dt \end{array} \right| = \int R\left(\dfrac{t^n-b}{a}, t^m\right)\dfrac{nt^{n-1}dt}{a} = \int R^*(t)dt.$

<u>Приклад 8.16.</u> $\int \dfrac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array} \right| = \int \dfrac{\left(t^3-1\right)3t^2dt}{t^2} = 3\int\left(t^3-1\right)dt =$

$= \dfrac{3}{4}t^4 - 3t + C = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - \sqrt[3]{x+1} + C$.

2. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx = \left|\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n\right| = \int R^*(t)dt$.

<u>Приклад 8.17.</u>

$\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1}=t^2,\ x+1=t^2(x-1), \\ x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1};\ dx=\dfrac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \end{array} \right| = \int \dfrac{\left(t^2-1\right)^2 t(-4t)dt}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2} =$

$= 2\int \dfrac{t\cdot(-2t)dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} u=t, du=dt; \\ \dfrac{-2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=dv \Rightarrow v=\dfrac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \dfrac{2t}{t^2+1} - 2\int\dfrac{dt}{t^2+1} =$

$= \dfrac{2t}{t^2+1} - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + C =$

$= \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + C$.

3. $\int R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\dots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left|\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^s,\right.$

$\left. s=HCK(n_1,n_2\dots,n_k)\right| = \int R^*(t)dt$, де HKC – найменше спільне кратне

<u>Приклад 8.18.</u> $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x=t^{12}, 12=HCK(2,3,4) \\ dx=12t^{11}dt; t=\sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int\dfrac{t^6\cdot 12t^{11}dt}{t^8-t^3} =$

$= 12\int\dfrac{t^{14}dt}{t^5-1} = 12\int\dfrac{t^4\left(t^{10}-1+1\right)dt}{t^5-1} = 12\int\left(t^4\left(t^5+1\right)+\dfrac{t^4}{t^5-1}\right)dt =$

$= 12\left(\dfrac{t^{10}}{10}+\dfrac{t^5}{5}+\dfrac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right) + C = \dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \dfrac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \dfrac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right| + C$.

Підінтегральна функція $R_1(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ після виділення повного квадрата і заміни $x+\dfrac{b}{2a}=t$ раціоналізується тригонометричними підстановками; при цьому, залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта a можливі такі випадки:

$$4.\ \int R\left(t,\sqrt{k^2-t^2}\right)dt=\left|\begin{matrix} t=k\sin z\\ \text{або}\\ t=k\cos z\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix} t=k\sin z,\, z\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right), z=\arcsin\dfrac{t}{k},\\ dt=k\cos zdz;\sqrt{k^2-t^2}=\sqrt{k^2-k^2\sin^2 z}=\\ =k\sqrt{\cos^2 z}=k|\cos z|=k\cos z\end{matrix}\right|=$$

$$=\int R(k\sin z,k\cos z)k\cos zdz=\int R^*(\sin z,\cos z)dz\ .$$

$$5.\ \int R\left(t,\sqrt{t^2-k^2}\right)dt=\left|\begin{matrix} t=\dfrac{k}{\sin z}\\ \text{або}\\ t=\dfrac{k}{\cos z}\end{matrix}\right|=\int R^*(\sin z,\ \cos z)dz\ .$$

$$6.\ \int R\left(t,\sqrt{k^2+t^2}\right)dt=\left|\begin{matrix} t=k\operatorname{tg} z\\ \text{або}\\ t=k\operatorname{ctg} z\end{matrix}\right|=\int R^*(\sin z,\ \cos z)dz\ .$$

Приклад 8.19.

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}=\left|\begin{matrix} x=5\operatorname{tg}z,\quad z\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),\quad z\neq 0,\\ dx=\dfrac{5dz}{\cos^2 z};\quad z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5};\\ \sqrt{x^2+25}=5\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}=\dfrac{5}{\cos z}\end{matrix}\right|=\int\frac{\cos z\cdot 5dz}{5\cdot 25\operatorname{tg}^2 z\cdot\cos^2 z}=$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{\cos zdz}{\sin^2 z}=-\frac{1}{25\sin z}+C=-\frac{1}{25\sin\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}}+C=\frac{\sqrt{x^2+25}}{25x}+C.$$

Зауваження. Інтеграли типу $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можуть бути проінтегровані за допомогою підстановок Ейлера:

I $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, при $a>0$;

II., $\sqrt{ax^2+bc+c}=tx\pm\sqrt{c}$ при $c>0$;

III. $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$, при $b^2-4ac>0$,

де x_1, x_2 — корені тричлена ax^2+bx+c .

Приклад 8.20.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+1}=t-x,\ a=1>0;\\ x+x+1=t^2-2tx+x^2,\\ x=\dfrac{t^2-1}{2t+1},\quad dx=\dfrac{2\left(t^2+t+1\right)dt}{(2t+1)^2}\end{array}\right|=2\int\frac{\left(t^2+t+1\right)dt}{(x+t-x)(2t+1)^2}=$$

$$=\left|\frac{t^2+t-1}{t(2t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{(2t+1)^2}\Rightarrow t^2+t+1=A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+C\cdot t\Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=1\\ C=-\dfrac{3}{2}\\ B=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right|=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+\frac{3}{2(2t+1)}+C,$$

де $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

8.6.1. *Питання для самостійного контролю знань*

1. Що називається первісною функцією?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Перечисліть основні властивості невизначеного інтеграла.
4. У чому геометричний зміст невизначеного інтеграла?
5. Що розуміють під безпосереднім інтегруванням?
6. У чому суть метода підстановки?
7. Запишіть формулу інтегрування частинами.
8. Які основні прийоми інтегрування раціональних дробів.
9. Які основні прийоми інтегрування тригонометричних функцій?
10. Які основні прийоми інтегрування виразів що містять іраціональності?

8.6.3. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1-15. Обчислити невизначені інтеграли:

№1. $\int\frac{x^3dx}{1+x^8}$ №2. $\int\frac{x^3-3}{x^2+6x+7}dx$ №3. $\int\arcsin x dx$ №4. $\int\frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$

№5. $\int e^{x^2+3}xdx$ №6. $\int\frac{x^3}{x^2-4}dx$; №7. $\int x\sin 2x\,dx$ №8. $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$

№9. $\int\frac{\sqrt{arctg\ 2x\ dx}}{1+4x^2}$ №10. $\int x\cos 3xdx$ №11. $\int x^2 1n\ xdx$ №12. $\int\frac{\cos 3x\,dx}{4+\sin 3x}$

№13. $\int\frac{(\sqrt[4]{x}+1)\,dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$ №14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$ №15. $\int\frac{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

РОЗДІЛ 9. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

9.1. *Інтергальна сума і визначений інтеграл.*

Нехай функція $f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a, b]$ осі OX. Розіб'ємо цей відрізок на n частин, не обов'язково рівних, точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Отримаємо елементарні відрізки $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, де $i = 1, 2, 3, \ldots n$. На кожному відрізку візьмемо довільну точку ζ_i та обчислимо значення функції $f(\zeta_i)$ в кожній обраній точці.

Складемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = f(\zeta_1)\Delta x_1 + f(\zeta_2)\Delta x_2 + f(\zeta_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\zeta_i)\Delta x_i + \ldots + f(\zeta_n)\Delta x_n, \qquad (9.1)$$

Яка називається інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Для заданої функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ можна скласти нескінченну множину інтегральних сум, так як побудова інтегральної суми складається з довільного ділення заданого відрізка $[a, b]$ на елементарні відрізки і довільного вибору точок ζ_i на кожному елементарному відрізку.

Позначимо через $max\Delta x_i$ – довжину надовшого з елементарних відрізків.

Означення. *Границя інтегральної суми* (9.1) *за умови, що* $max\Delta x_i \to 0$ *(наближається до нуля), якщо ця границя існує і не залежить від способу розбиття відрізка* $[a, b]$ *на частини та від вибору точок* ζ_i*, називається визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *в межах від* a *до* b *і позначається так:* $\int_a^b f(x)dx$.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \qquad (9.2)$$

де $\int_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ -це число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та відрізку $[a; b]$ і не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

Означення. *Функція, для якої на* $[a;b]$ *існує визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *називається інтегровною на цьому проміжку.*

9.2. *Властивості визначеного інтеграла.*

1. Якщо $f(x)=c=\text{const}$, то $\int_a^b c dx = c\cdot(b-a)$.

2. Сталий множник можна виносити із під знака визначеного інтеграла, тобто $\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$.

3. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a;b]$, то $\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx$.

4. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить знак на протилежний, тобто $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

5. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0$.

6. Якщо $f(x)$ інтегровна в будь-якому із проміжків: $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Якщо $f(x)\ge 0$ і інтегровна для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

8. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровні та $f(x)\ge g(x)$ для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)\,dx.$$

9. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m\le f(x)\le M$ для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Теорема 9.1. (*теорема про середнє*).

Якщо функція f(x) — неперервна для усіх $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ *то знайдеться така точка з цього інтервалу* $x=c\in[a,\ b],$ *що:* $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$ (9.3)

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c), c\in[a,\ b]$ та $b–a$, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x)\ge 0$ та неперервна на проміжку $[a;\ b]$ (рис. 9.1).

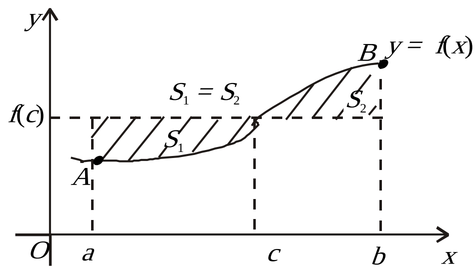


Рис. 9.1.

9.2. *Поняття визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування, формула Ньютона—Лейбніца.*

Розглянемо інтеграл $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування.

Змінній x надамо приросту Δx, що зумовить приріст функції (рис. 9.2).

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

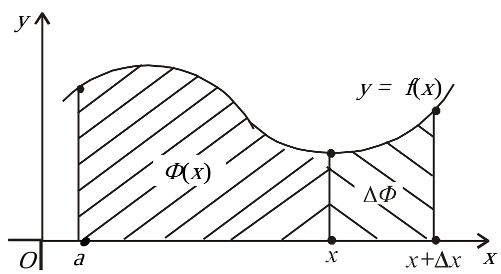


Рис.9.2

Теорема 9.2. *Якщо функція f(x) неперервна для будь-якого* $x\in[a;\,b]$, *то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто*

$$\Phi'_x(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x). \qquad (9.4)$$

Наслідки:

1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є одна із первісних для $f(x)$.

2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a;b]$ має на цьому проміжку первісну, яку, наприклад, завжди можна побудувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею, тобто: $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt.$

Приклад 9.1. Знайти $\int\frac{\sin x}{x}dx,\ x\in[1;+\infty)$.

Функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ — неперервна на проміжку $[1;+\infty)$, тому можна записати $\int \dfrac{\sin x}{x}dx=\int\limits_1^x \dfrac{\sin t}{t}dt+C, \forall x\in[1;+\infty)$.

<u>Теорема 9.3.</u> *(Ньютона—Лейбніца). Якщо функція* $f(x)$ *— неперервна для* $x\in[a;\, b]$, *то визначений інтеграл від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;\, b]$ *дорівнює приросту первісної функції* $f(x)$ *на цьому проміжку, тобто:*

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a),\ \text{де}\ F'(x)=f(x). \qquad (9.5)$$

Введемо позначення подвійної підстановки меж інтегрування $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$, тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b=(F(x)+C)\Big|_a^b=\left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b \qquad (9.6)$$

<u>*Наслідок.*</u> *Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.*

<u>Приклад 9.2</u>. $\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx=\int\limits_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right)=\dfrac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Big|_0^{\ln 2}=$

$=\dfrac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2}-1\right)^5-\left(e^0-1\right)^5\right)=\dfrac{1}{5}\left((2-1)^5-(1-1)^5\right)=\dfrac{1}{5}.$

9.3. *Методи інтегрування у визначеному інтегралі*

9.3.1. *Метод заміни змінної (підстановки) у визначеному інтегралі.*

Мета даного методу така ж як і при знаходженні невизначеного інтеграла методом підстановки, тобто, треба перетворити підінтегральний вираз так, щоб інтеграл прийняв вигляд відповідного табличного інтеграла.

Нехай функція *f(x)* неперервна на відрізку $[a, b]$ і нехай:

1) функція $x = \varphi(t)$ монотонна (зростаюча або спадна), неперерна і має неперервну похідну, коли *t* змінюється від α до β;

2) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Тоді справедлива *формула заміни змінної у визначеному інтегралі*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \qquad (9.7)$$

<u>*Зауваження.*</u> При обчислення визначених способом підстановки змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної, треба лише обчислити нові межі інтегруваня.

Приклад 9.3. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \quad dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$

$$= 2\int\limits_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\big(t - \ln|t+1|\big)\Big|_2^3 = 2\big(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)\big) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

9.3.2. *Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.*

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервні і мають неперервні похідні на відрізку $[a, b]$ то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int\limits_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du. \qquad (9.8)$$

Приклад 9.4. Обчислити інтеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

9.3.3. *Інтегрування парних і непарних функцій на відрізку, симетричному відносно початку координат.*

Якщо фунція *f(x) парна,* тобто *f(- x) = f(x),* то:

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Якщо фунція *f(x) непарна*, тобто *f(- x) = - f(x),* то:

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Дані формули використовують для обчислення визначених інтегралів, площ плоских фігур і об'ємів тіл обертання.

9.4. *Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат.*

Будь-яка плоска фігура, обмежена неперервними кривими лініями, може бути розділена лініями, паралельними осям координат, на частини – криволінійні трапеції. І тоді обчислення площі плоскої фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче плоских фігур – криволінійних трапецій.

1. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис.9.3).

Функція $f(x)$ — неперервна, крім того $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 9.4),

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \tag{9.9}$$

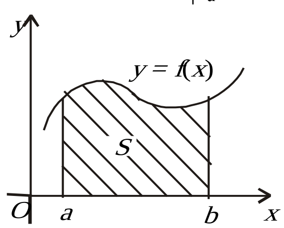


Рис. 9.3

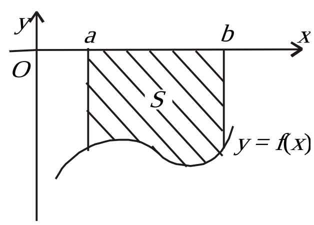


Рис. 9.4

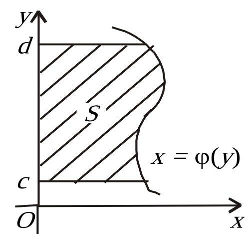


Рис. 9.5

2. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 9.5).

Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна і $\varphi(y) \geq 0$. Площа S такої фігури обчислюється так

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy, \tag{9.10}$$

а якщо $\varphi(y) \leq 0$ (рис. 9.6), то

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|. \tag{9.11}$$

3. Фігура обмежена лініями $y= f(x)$, $y= g(x)$, $x=a$, $x=b$. Функції $f(x)$ та $g(x)$ - неперервні і $f(x) \geq g(x)$ при $x \in [a,b]$ (рис. 9.7). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b: $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (9.12)

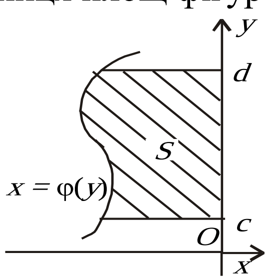


Рис. 9.6

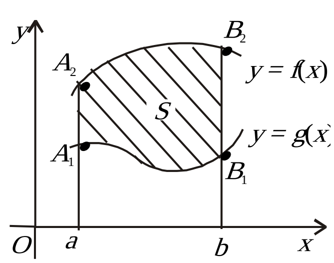


Рис. 9.7

<u>Приклад 9.5.</u> Обчислити площу фігури (рис.9.8), обмеженої лініями: $y = -x^2 + 4x + 5$ і $y = 2x - 3$.

Побудуємо на координатній площині фігуру, обмежену параболою $y=-x^2+4x+5$ (l_1) та прямою y=2x - 3 (l_2). Знайдемо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 9.8).

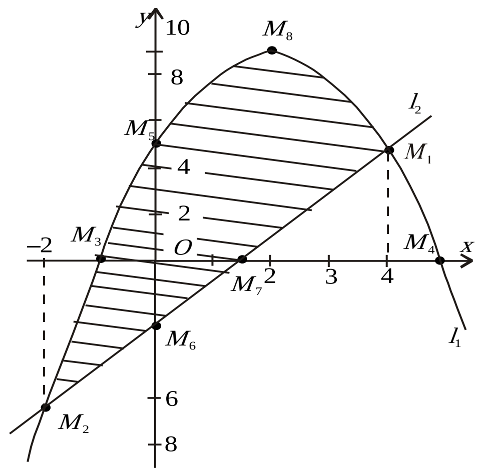


Рис. 9.8.

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=5 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2+4x+5 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ \ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y-9=-(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ обчислюється як інтеграл різниці функцій – кривих, що обмежують фігуру.:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

9.5. *Обчислення об'єму тіл обертання.*

Об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі *OX* фігури, обмеженої неперерною кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю обцисс (рис 9.9), обчислюється за формулою

$$V_x=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx \tag{9.13}$$

Об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі *OY* фігури, обмеженої неперерною кривою $x = \varphi(y)$, прямими $x = c$, $x = d$ та віссю ордина, обчислюється за формулою

$$V_y=\pi\int_c^d (\varphi(y))^2\,dy \tag{9.14}$$

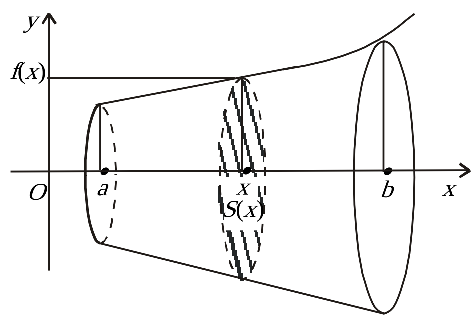


Рис. 9.9

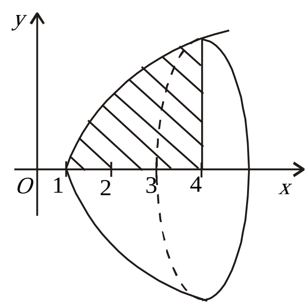


Рис. 9.10

Приклад 9.6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *OX* фігури, обмеженої лініями $y^2=3x-3$, $x = 1$, $x = 4$.

У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями (рис. 9.10).

За формулою (9.13) обчислюємо об'єм тіла:

$$V=\pi\int_1^4 y^2dx=\pi\int_1^4(3x-3)dx=\frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Bigg|_1^4=\frac{27}{2}\pi.$$

9.6. *Невласні інтеграли.*

При означенні визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ висувалися умови, що межі інтегрування a і b кінечні числа, а підінтегральна функція визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо порушується хоча б одна з цих умов, то *інтеграл називають невласним.*

Розглянемо інтеграли з нескінченними межами:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx;$ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx;$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

При цьому ввааємо що функція $f(x)$ обмежена і неперервна на інтервалах $[a; \infty]$, $[- \infty, b]$, $[-\infty; +\infty]$, відповідно.

Обчислюють невласні інтеграли за допомогою граничного переходу:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (9.15)$$

Якщо границя в правій частині рівності кінечна, то інтеграл називають збіжним. У протилежному випадку – розбіжним.

Інтеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ визначається аналогічно:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx\ . \qquad (9.16)$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ обчислюють наступним чином:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx. \qquad (9.17)$$

Даний інтеграл називається збіжним, якщо кожний з інтегалів правої частини рівності збіжний, в протилежному випадку називається розбіжним.

<u>Примітка</u>. У теорії ймовірностей використовується інтергал Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

<u>Приклад 9.7</u>. Знайти $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Застосуємо формулу (9.15):

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty$. Таким чином, інтеграл розбіжний.

Якщо *F(x)* первісна для підінтегральної функції *f(x)*, то збіжність для невласного інтеграла можна встановити за узагальненою формулою Ньютона – Лейбніця:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (9.18)$$

якщо $\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$ існує, о інтеграл збіжний.

<u>Приклад 9.8</u>. Перевірити на збіжність невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx.$$

$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1.$ Таким чином, заданий невласний інтеграл збіжний і дорівнює 1.

9.7. *Наближене обчислення визначеного інтеграла*.

У деяких випадках *F(x)* первісна підінтегральної функції *f(x)* існує, але не виражається через елементарні функції, такі інтеграли називають «неінтегровними» (див. Розділ 8, п.8.1). Відповідні їм визначені інтеграли обчислюються наближено. Для цього існує декілька способів. Розлянемо дві формули - прямокутників і трапеції.

Для того щоб наближено обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, треба розбити відрізок інтегрування $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Довжина кожної такої частини дорівнює $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. Далі визначають значення підінтегральної функції $y = f(x)$ в точках ділення, тобто обчислюють $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$ і обчислюють $\int_a^b f(x)dx$ за однією з формул.

1.) За формулою прямокутників (9.19)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) \qquad (9.19)$$

Якщо $f^{/}(x)$ існує і обмежена на відрізку $[a, b]$, то похибка обчислень за формулою прямокутників становить $|\delta_n| \leq \frac{M_1\,(b-a)^2}{2n}$, де $M_1 = max|f^{/}(x)|$ на відрізку $[a, b]$.

2.) За формулою трапецій (9.20)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) \qquad (9.20).$$

Якщо $f''(x)$ існує і обмежена на відрізку $[a, b]$, то похибка обчислень за формулою прямокутників становить $|\delta_n| \leq \frac{M_2\,(b-a)^3}{12n^2}$, де $M_2 = max|f''(x)|$ на відрізку $[a, b]$.

<u>Приклад 9.9</u>. Обчислити за формулою трапецій $\int_3^9 \frac{dx}{x}$. Прийняти $n = 6$. Оцінити похибку обчислень.

Результат проміжних розрахунків приведемо в таблиці.

$$\frac{b-a}{n} = \frac{9-3}{6} = 1, \quad y = \frac{1}{x}$$

x_i	$x_0 = 3$	$x_1 = 4$	$x_2 = 5$	$x_3 = 6$	$x_4 = 7$	$x_5 = 8$	$x_6 = 9$
y_i	$y_0 = 1/3 =$ 0,3333	$y_1 = 1/4 =$ 0,2500	$y_2 = 1/5 =$ 0,2000	$y_3 = 1/6 =$ 0,1667	$y_4 = 1/7 =$ 0,1429	$y_5 = 1/8 =$ 0,1250	$y_6 = 1/9$ $= 0{,}1111$

Підставимо отримані значення в формулу (9.20), маємо:

$$\int_3^9 \frac{dx}{x} \approx 1\left[\frac{0{,}3333+0{,}1111}{2} + 0{,}2500 + 0{,}2000 + 0{,}1667 + 0{,}1429 + 0{,}1250\right] = 1{,}1068.$$

Оцінимо допущену похибку обчислень. Так як $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ монотонно спадає на [3, 9] то найбільше значення вона приймає при $x = 3$.

Тоді $M_2 = f''(3) = \frac{2}{27}$, $|\delta_n| \le \frac{2\,(9-3)^3}{27\cdot 12\cdot 6^2} = 1/27 \approx 0{,}0037$.

9.8.1. *Питання для самостійного контролю знань*

11. Які задачі приводять до поняття визначеного інтеграла?
12. Що називається інтегральною сумою функції $y = f(x)$?
13. Що називається визначеним інтегралом і в чому його геометричний зміст?
14. Приведіть основні властивості визначеного інтегралу.
15. Запишіть формулу Ньютона – Лейбніця.
16. В чому полягає спосіб підстановки у визначеному інтегралі?
17. Запишіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
18. За допомогою яких формул можна наближено обчислити визначений інтеграл?
19. Запишіть формули для обчислення площ плоских фігур і об’єму тіл обертання.
20. Що називається невласним інтегралом?
21. Приведіть умови збіжності дл невласних інтегралів.
22. Приведіть формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла.

9.8.3. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1 Обчислити визначені інтеграли.

1. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$ 2. $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$ 3. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{Cos^2 x}$
4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+4x^2}$ 5. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$ 6. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x}}$
7. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{3x^3+1}}$ 8. $\int_{-1}^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$ 9. $\int_0^{\sqrt{5}} x\sqrt{x^2+4}dx$
10. $\int_0^{\pi/2} x^2\, cos2x\, dx$

Задача №2. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими кривими. Зробити креслення.

1.	$y = x^3,\ y = \sqrt{x}$	2.	$y={}^{5}/_{x'},\ y = 6 - x$
3.	$y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x$	4.	$y = x^2 + 2,\ y = 4 - x^2$
5.	$y = -x^2 + 1, y = x - 1$	6.	$y = x^2 - 4x + 4$, $y = x$
7.	$y = \frac{1}{4}x^2, y^2 = 4x$	8.	$y = \frac{6}{x}, y = 7 - x$
9.	$y = 3x^2 + 1, y = 3x + 7$	10.	$y = 2x - x^2, y = -x$

Задача №3. Обчислити об’єм тіла , утвореного обертанням навколо осі OX фігури, що обмежена заданими лініями. Зробити кресленя.

1. $y^2 = x$; $y = x^2$
2. $xy = 4$; $x = 1$; $y = 0$
3. $y = Sin\, x$ *(одна напівхвиля)*; $y = 0$
4. $y = x^2 + 1$; $y = 3x - 1$
5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача №4. Обчислити об’єм тіла , утвореного обертанням навколо осі OY фігури, що обмежена заданими лініями. Зробити креслення.

1. $y^2 = 4 - x$; $x = 0$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
3. $x + y - 2 = 0$; $x = 0$; $y = 0$
4. $x \cdot y = 2$; $x = 0$; $y = 1$; $y = 4$
5. $y = -x^2 + 4$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 3$.

РОЗДІЛ 10. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

10.1. *Поняття комплексного числа. Арифметичні операції з комплексними числами.*

Комплексні числа доповнюють множину дійсних чисел, використовуючи при цьому власні правила обчислень сум, часток і т.п.

Комплексні числа не є числами в елементарному значенні цього слова, що застосовуються при підрахунках і вимірюваннях, а є маРозділтичними елементами – виразами виду:

$z = a + bi,$

де a і b – дійсні числа, i – уявна одиниця, що визначається рівністтю:

$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$

Символ a - називаються *дійсною частиною комплексного числа* z і записують $Re z$, символ b *називають уявною частиною* комплексного числа z і записують $Im\, z$.

$a = Re\, z$, $b = Im\, z$.

Властивості комплексних чисел:

1. Комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ вважаються *рівними*, якщо рівні їхні дійсні й уявні частини $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.
2. Комплексне число $z = a + bi$ вважається рівним нулю, якщо його дійсна і уявна частини дорівнюють нулю ($a = b = 0$).

3. Комплексне число z = $a + bi$ при $b = 0$ вважається таким, що збігається з дійсним числом a $(a+0i = a)$,а при $a=0$ вважається *суто уявним* і позначається bi $(0+bi = bi)$.

4. *Сумою* комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є комплексне число Z, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина - сумі уявних частин: $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок додавання комплексних чисел z_1, і z_2, і записують $z = z_1 + z_2$. Числа z_1, і z_2 називають *доданками комплексного числа* z.

Властивості суми комплексних чисел:

- асоціативність: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

- комутативність: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Комплексне число – z = $(a + bi)$ називають *протилежним* комплексному числу z = $(a + bi)$. Сума протилежних комплексних чисел z і -z дорівнює нулю z + (-z) = 0.

Різницею комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є комплексне число z, що є сумою числа z_1 і числа протилежного z_2

$$z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

тобто комплексним числом, дійсна і уявна частини якого дорівнюють відповідно різниці дійсних і уявних частин зменшуваного і від'ємника. Про число z кажуть, що його дістали внаслідок віднімання комплексного числа z_2 від комплексного числа z_1, і записують $z = z_1 - z_2$.

Добутком комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є комплексне число: $z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2)i$.

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок множення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують $z_1 z_2$.

Числа z_1 і z_2 називають *співмножниками.*

Властивості операції множення комплексних чисел:

- асоціативність: $(z_1 . z_2) \cdot z_3 = z_1 . (z_2 \cdot z_3)$;

- комутативність: $z_1 . z_2 = z_2 z_1$.

Часткою двох комплексних чисел z_1 і z_2 , $z_2 \neq 0$, є таке комплексне число z, що задовольняє рівність $z_1 = z \cdot z_2$. Частку комплексних $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ обчислюють за формулою:

$$z = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 b_2^2} .$$

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Додавання і множення комплексних чисел пов'язані правилом, яке називається *законом дистрибутивності* множення відносно додавання:

$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ називається *модулем* комплексного числа $z = (a + bi)$.

Модулі двох будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 задовольняють співвідношення:

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; $\qquad |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$;

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $\qquad |z_1/z_2| \leq {}^{z_1}/_{z_2}$, $z_2 \neq 0$;

$|z^n| = |z|^n = |\bar{z}|^n$.

Комплексне число $\bar{z} = a - bi$ називається *комплексно спряженим* з числом $z = a + bi$

Приклад 10.1. Знайти x та y , вважаючи їх дійсними числами.

$(3-i)x + (1+3i)y = 1 - 7i$

Розкриємо дужки в лівій частині рівняння і зведемо доданки для дійсної та уявної частин:

$3x - ix + y + 3iy = 1 - 7i \rightarrow (3x + y) + i(-x + 3y) = 1 - 7i$.

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -x + 3y = -7i \end{cases}$,

і остаточно отримаємо: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Приклад 10.2. Розв'язати рівняння $(x+1)^4 + 16 = 0$

$(x+1)^4 = -16 \Rightarrow x + 1 = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{-1} \Rightarrow x = -1 + 2\sqrt{i}$.

10.2. *Комплексна площина. Тригонометрична і показникова форми запису комплексного числа. Арифметичні операції з комплексними числами у тригонометричній формі.*

За аналогією множини дійсних чисел, які можна відображувати точками числової прямої, множину комплексних чисел можна зображати точками площини. Можливість такої аналогії грунтується на ототожненні множини комплексних чисел $z = a + bi$ з множиною пар дійсних чисел (a,b), які в прямокутній системі координат Oxy можна зобразити як координати точок площини $x = a, y = b$, причому однозначно. Площину, на якій реалізована така відповідність називають *комплексною площиною*, а поняття «*комплексне число*» ототожнюється з поняттям «*точка комплексної площини*».

На осі Ox розміщують дійні числа $z = x + 0i = x$, тому вона називається дійсною віссю. На осі Oy розміщують уявні числа $z = 0 + yi = yi$ - називають уявною віссю.

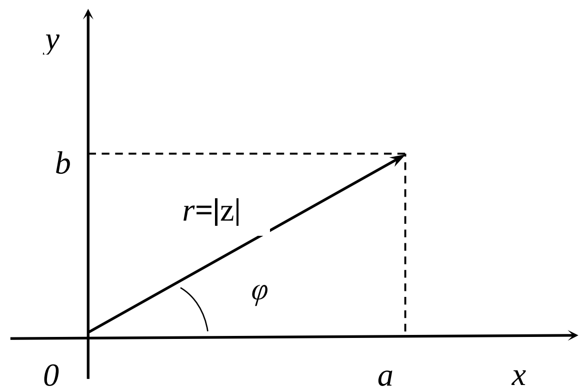


Рис. 10.1

Для кожної точки *A* координатної площини *Oxy* можна побудувати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат, тому кожне комплексне число z = $a + bi$ можна геометрично інтерпретувати як вектор $\overrightarrow{OA}$, з координатами ($x = a$; $y = b$) (рис.10.1).

Тригонометрична форма запису комплексного числа.

Нехай комплексне число $z = (a + bi) \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$, з координатами ($x=a$;$x=b$) (рис. 10.1). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ буквою r: $r = \left|\overrightarrow{OA}\right|$, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі *Ox*, - через φ (кут φ вважається виміряним у радіанах).

Скориставшись означеннями функцій $sin\varphi$ і $cos\varphi$: $sin\varphi = \frac{b}{r}$, $cos\varphi = \frac{a}{r}$,, тоді комплексне число $z = a + bi$ можна записати у вигляді:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{10.1}$$

де $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут φ визначається з рівностей

$$sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{10.2}$$

Вираз (10.1) має назву *тригонометрична форма* запису комплексного числа. Дійсне число *r є модулем комплексного числа або радіус-вектором* і позначається |z|, а кут φ, виміряний в радіанах, - його аргументом і позначається *Arg*z.

Модуль будь-якого комплексного числа визначено однозначно.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (10.2) з точністю до кута, кратного 2π. Якщо z = 0, то $r = 0$ і аргумент комплексного числа, що дорівнює нулю, не визначено.

З метою усунення неоднозначності, яка виникає при обчисленні аргументу комплексного числа, використовують поняття *головного значення аргументу* комплексного числа (позначення *arg*z*)*, вважаючи, що

$$arg z \in [-\pi; +\pi].$$

Аргумент комплексного числа відповідає співвідношенню: $Arg z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$ (Z – множина цілих чисел).

Модуль r і аргумент аргумент φ комплексного числа z можна розглядати як полярні координати точки z$(x.y)$. тоді з маємо:

$x = r\,cos\varphi,\qquad y = r\,sin\varphi;$

$$\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2} = \frac{y}{r},\quad \cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2} = \frac{x}{r}\ \ tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (10.3)$$

Використовуючі *формулу Ейлера* : $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$ (10.4)

отримуємо показникову форму запису комплексного числа z$(x.y)$:

$$z = re^{i\varphi} \qquad (10.5)$$

Приклад 10.3. Обчислити головні аргументи чисел 2, -1, i.

$arg\ 2 = 0;\quad arg\ (-1) = \pi;\ arg\ i = \pi/2.$

Нехай z_1 і z_2 - два комплексні числа, що відмінні від нуля, записано в тригонометричній формі: $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1),\ z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2).$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент - сумі аргументів співмножників:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора $\vec{z}$ проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2, і розтягом його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_2| > 1$ див. рис.10.2).

Частка двох комплексних чисел z_1 і z_2, що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент – різниці аргументів діленого і дільника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + isin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

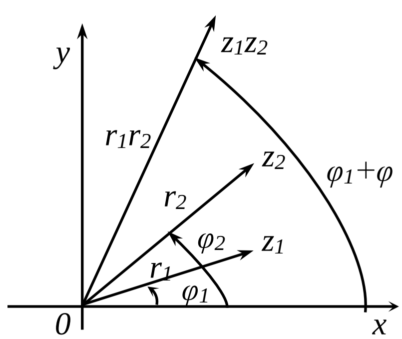


Рис. 10.2

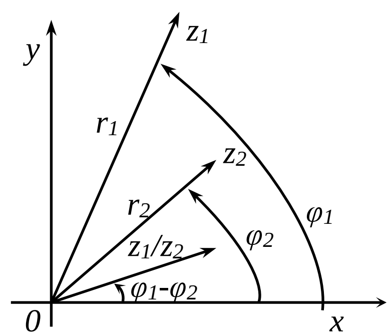


Рис. 10.3

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора, який зображує комплексне число z_1, за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2, і стиском його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_1| > 1$ див. рис. 10.3).

Натуральний степінь комплексного числа. n - м *степенем* комплексного числа z називається комплексне число w, знайдене внаслідок множення числа z самого на себе n раз: $w = z \cdot z \cdot z \cdot \cdots z$.

Звичайно використовують коротший запис: $w = z^n$, в якому число z є *основою степеня,* а натуральне число *n – показником степеня.*

n -й степінь комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі обчислюється за *формулою Муавра:*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,. \qquad (10.6)$$

Корінь n -го степеня з комплексного числа. Коренем n -го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число w, n -й степінь якого дорівнює z: $w^n = z$.

Корінь n -го степеня з комплексного числа z позначається символом $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня дійсного числа, корінь n - го степеня комплексного числа визначається неоднозначно. Саме в множині комплексних чисел існує рівно n коренів n -го степеня з даного комплексного числа.

Усі корені n -го степеня з комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі, обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + isin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),$$

де k = 1, 2, 3, …, n-1.

Геометрично всі корені n-го степеня з комплексного числа зображуються точками, що лежать на колі з центром в початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнює $\frac{2\pi}{n}$.

Приклад 10.4. Обчислити корені четвертого степеня з числа –1.

Число –1 у тригонометричній формі можна записати так:

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)\,.$$

Корені четвертого степеня з числа –1 - це комплексні числа

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}(\cos(\pi + 2\pi k)/4 + i\sin(\pi + 2\pi k)/4)\,,$$

де k = 1, 2, 3, тобто комплексні числа (рис.10.4)*:*

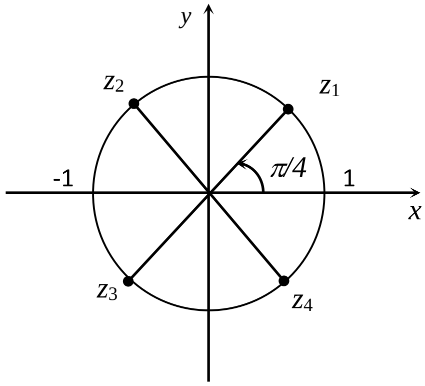


Рис. 10.4

$z_1 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2(1+i)$;

$z_2 = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = \sqrt{2}/2(-1+i)$;

$z_3 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = \sqrt{2}/2(-1-i)$;

$z_4 = \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \sqrt{2}/2(1-i)$.

За цим же алгоритмом, у множині комплексних чисел можна обчислити корінь *n*-го степеня з будь-якого дійсного числа. При цьому хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

10.3. *Поняття функції комплексної змінної.*

Нехай задано дві комплексні площини *Oxy* (площина *z*) та *O'uv* (площина *w*).

<u>Означення</u>: *якщо кожній точці* z *з множини E - точок площини* z *за деяким законом поставити у відповідність єдину точку w з множини E'-точок площини w, то говорять що w є однозначна функція від z: w=f(*z*), з областтю визначення E, значення якої належать множині E'.*

Якщо множина значень функції *f(*z*)* вичерпує всю множину *E'*, то *E'* називається областтю значень (областтю зміни) функції *f(*z*)* . у цьому випадку пишуть *E' = f(E)*.

Множини *E та E'* можна зображувати на одній комплексній площині.

Таким чином, кожна комплексна функція реалізує однозначне одностороннє відображення однієї множини в іншу. Розділ математики, що вивчає властивості комплексних функцій називається теорія функції комплексної змінної.

Приклад 10.5. у що переходить сектор E : $0< \arg z < \pi/2$; $0< |z| <1$ при відображені на $w = z^2$. Рис 10.5,а.

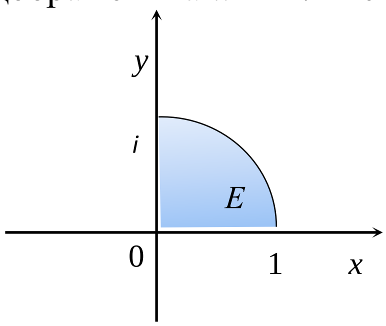


Рис. 10.5,а

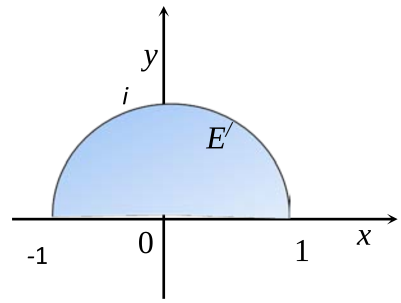


Рис. 10.5,б

$\arg w = 2 \arg z < \pi$ і $|w| = |z^2| < 1$, тому відображена область являє собою напівколо (рис 10.5.б).

10.4.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Що називають комплексним числом?
2. Які інтерпритації комплексних чисел ви знаєте?
3. Що називають дійсною та уявною частинами комплексного числа?
4. Що називається модулем і аргументом комплексного числа?
5. Що називається алгебраїчною та тригонометричною формами запису комплексного числа?
6. Показникова форма запису комплексного числа.
7. Які два комплексних числа називають протилежними?
8. Які два комплексних числа називають спряженими?
9. Приведіть правила арифметичних операцій з комплексними числами в алгебраїчній та тригонометричній формі
10. Запишіть формулу Муавра.

10.4.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Знайти x та y , вважаючи їх дійсними числами:

а) $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$

б) $12((2x + 1)(1 + i) + (x + y)(3 - 2i)) = 17 + 6i$

Задача №2. Розв'язати рівняння:

а) $4x^2 + 9 = 0$; б) $5x^2 + 8x + 4 = 0$; в) $x^2 - (3 - 2i)x + (5 - 5i) = 0$

Задача №3. Записати комплексні числа у тригонометричній формі:

а) 1; б) i; в) $-i$; г) $1 + \sqrt{3i}$

Задача №4. Обчислити вирази:

а) $(2 + 3i)(3 - i) + (1 + 2i)^2$; б) $(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i$; в) $-i$; г) $1 + \sqrt{3i}$;

г) $\frac{(1+i)\cdot(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)\cdot(3-i)}{3+i}$.

Задача №5. Знайти усі значення кореня:

а) $\sqrt{-i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{i}$ г) $\sqrt[6]{-27}$; г) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

РОЗДІЛ 11. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Теорія рядів має широке практичне застосування з огляду на можливість при широких умовах представляти обрану складну функцію у вигляді нескінченної послідовності більш простих функцій, що значно спрощує обчислення наближеного значення обраної функції при заданому значенні аргументу.

11.1. *Приклади нескінченних рядів*

У деяких задачах розглядають суми, що складаються із нескінченної кількості доданків. Властивості таких нескінченних сум суттєво різняються від властивостей сум обмеженої кількості доданків. Такі суми називають нескінченними рядами.

Прикладом нескінченного ряду, що розглядається в елементарній алгебрі, є *нескінченно спадна геометрична прогресія*:

$a + aq + aq^2 + \ldots. + aq^{n-1} + \ldots$, де $|q| < 1$.

Тут кожен наступний член утворений за певним законом, а саме: кожен наступний член отриманий із попереднього множенням на знаменник прогресії q . Таким чином, n–член, що називається *загальним членом прогресії*, знаходиться за формулою: $u_n = aq^{n-1}$, ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Іншим прикладом нескінченного ряду є *гармонійний ряд*:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+....+\frac{1}{n}+...,$$

n- *член (загальний*) якого рівний $u_n = \frac{1}{n}$.

Існують ряди, членами яких є функції, наприклад,

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+ ....+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}+...,$$

де n- член рівний $u_n=\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}=\frac{x^n}{n!}$.

Закон утворення членів ряду задається його n- членом, який називається загальним членом ряду. Маючи формулу загального члена можна знайти будь-який член цього ряду.

Постає задача: дослідити властивості нескінченних рядів, припускаючи, що відома формула його загального члена.

11.2. *Збіжність ряду.*

Означення1. *Нескінченна послідовність, складена за певним законом, чисел або функцій, формально з'єднаних між собою знаком плюс*

$$u_1+u_{2+}u_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ , \tag{11.1}$$

називається нескінченним рядом.

Складові суми $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, називаються членами цього ряду.

Якщо члени ряду - числа, то ряд називається числовим, якщо члени ряду – функції, то ряд називається функціональним.

Вивчення функціональних рядів зводиться до вивчення числових, якщо припустити що $u_n = f_n(x)$, (n = 1, 2, 3, …), то для кожного фіксованого значення агрументу x отримуємо числовий ряд (11.1), властивості якого підлягають дослідженню.

Член u_n ряду (11.1) , що стоїть на n – му місці, рахуючи від початку, називається загальним членом цього ряду. Ряд вважається заданим, якщо відомий його загальний член, виражений як функція номера n .

Вважаючи ряд (11.1) заданим, можна утворити *часткові суми* цього ряду:

$S_1 = u_1.$

$S_2 = u_1 + u_2,$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$

. . . .

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$.

Розглянемо числовий ряд (11.1) та можливі два результати його дослідження:

І. При необмеженному зростанні номера n сума n перших членів S_n ряду (11.1) наближається до числа S. Тобто, існує кінечна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\ . \tag{11.2}$$

Тоді говорять що ряд (11.1) збіжний і число S є сумою цього ряду.

ІІ. При необмеженному зростанні номера n сума n перших членів S_n ряду (11.1) зростає необмежено, або взагалі не обмежена. Тоді говорять, що ряд (11.1) розходиться і суми не має.

Означення 2. Числовий ряд називають *збіжним,* якщо існує кінечна границя послідовності його часткових сум – ця границя називається сумою ряду. У протилежному випадку числовий ряд – *розбіжний*.

Якщо (11.1*) функціональний ряд,* тобто $u_n = f_n(x)$, (n = 1, 2, 3, …), то для кожного фіксованого значення x_0 аргументу x відовідний числовий ряд

$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots,$

або *збіжний або розбіжний*. Відповідно, x_0 називають або *точкою збіжності*, або *точкою розбіжності* даного функціонального ряду.

Якщо $u_n = f_n(x)$, (n = 1, 2, 3, …) *і функціональний ряд* (11.1) *збіжний в кожній точці x деякої множини, то він називається збіжним на множині, а функція* $S = S(x)$, *що визначена для кожного значення аргументу x формулою*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

називається сумою даного ряду на заданій множині.

Якщо ряд (11.1) збіжний, то різниця між сумою S і частковою сумою S_n його

$$R_n = S - S_n \qquad (11.3)$$

називається n – м залишком ряду.

Залишок ряду R_n *представляє собою похибку, яку отримаємо якщо в якості наближеного значення суми ряду* S *взяти суму* S_n *його перших* n *членів.*

Так як S є границя послідовності S_n , то, очевидно

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0.$$

Тому, *взявши досить велике число членів збіжного ряду, можна суму цього ряду обчислити з будь-якоим ступенем точності*.

Звідси видно, що *основною задачею теорії рядів є дослідження ряду на збіжність*. Задача на знаходження суми ряду є другорядною, так як після визначення збіжності ряду, наближена сума його може бути знайдена досить просто.

Приклад 11.1. нехай маємо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2};\frac{1}{2\cdot 3};\frac{1}{3\cdot 4};\frac{1}{4\cdot 5};\cdots;\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Доведемо збіжність цього ряду.

Візьмемо суму перших його n членів:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Окремі складники суми можуть бути представлені так:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{4}-\frac{1}{5};\cdots\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Тому:

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = 1$.

Таким чином заданий ряд збіжний і сума його рівна 1.

11.2.1. *Елементарні властивості рядів.*

Наступні властивості притаманні числовим рядам.

1) Збіжність ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не порушиться , якщо усі його члени помножити на одне і теж число k, відмінне від нуля, причому для суми цього ряду дійсною є рівність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) Під сумою (різницею) двох рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ розуміють ряд виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$

3) Сума (різниця) двох збіжних рядів є ряд сбіжний, причому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

11.3. *Ознаки збіжності рядів*

<u>*Теорема* 11.1</u>. *Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд* $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то його* n*-й член* u_n *при необмеженому розстанні номера* n *наближається до нуля.*

<u>*Наслідок.*</u> *Якщо* n*-й член ряду при необмеженому зростанні його номера* n *не наближається до нуля, то даний ряд розбіжний.*

<u>Приклад 11.2</u>. Розглянемо гармонійний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Загальний член цього ряду $u_n = \frac{1}{n}$ наближається до нуля при необмеженому зростанні номера n. Але, доведемо, що даний ряд розбіжний. Для цього візьмемо суму 2^m перших членів ряду та згрупуємо ці члени наступним чином:

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right)$$

Можна бачити, що сума членів у кожній дужці, більше ½. Загальна кількість дужок – груп, не рахуючи перших двох членів ряду, очевидно, рівна $m-1$, тоді сума перших 2^m членів ряду : $S_{2^m} > 1+\frac{m}{2}$.

Якщо кількість членів ряду $n = 2^m$ у сумі S_{2^m} зростає необмежено, то і показник m також зростає необмежено. Тому S_{2^m} наближається до нескінченності, таким чином, гармонійний ряд розбіжний.

З прикладу 11.2. можна зробити висновок, що необхідної умови не достатньо для однозначного визначення збіжності/розбіжності ряду. Розглянемо тепер ознаки, що дозволяють дати однозначну відповідь на питання збіжності ряду.

11.3.1. *Ознака порівняння рядів.*

Лема. Якщо в ряді

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots \qquad (11.4)$$

відкинути обмежену кількість перших початкових членів, наприклад перших k членів, то отримаємо ряд $u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$, який збігається (розбігається) одночасно з даним початковим рядом.

Наслідок 1. При дослідженні ряду на збіжність можна відкинути кінечне число його членів.

Наслідок 2. Якщо ряд (11.4) збігається і S є його сума, то n-й залишок ряду $R_n = S - S_n$ представляє собою суму ряду $u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$, тобто $R_n = u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \cdots$.

Ознака порівняння рядів. Якщо члени ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ не від'ємні і не перевищують відповідних членів збіжного ряду $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots$, то даний ряд теж збіжний.

Доведення цієї ознаки грунтується на властивостях границь послідовностей.

Нагадування: будь-яка монотонно зростаюча обмежена послідовність має границю.

Наслідок. Якщо члени деякого ряду не менше відповідних членів знакододатнього ряду (з не від'ємними членами) і другий ряд розбіжний, то розбіжним буде і перший ряд.

Приклад 11.3. розглянемо ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Так як $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{n}$, $(n = 2, 3, \cdots)$, то порівнюючи заданий ряд з гармонійним (прикдад 11.2), можна зробити висновок, що заданий ряд розбіжний.

11.3.2. *Ознаки збіжності знакододатніх числових рядів.*

Існує багато методів – ознак збіжності рядів за значенням їх коефіцієнтів, одною з таких ознак є *ознака збіжності Даламбера*.

Теорема 11.2. *Ознака збіжності Даламбера. Нехай усі члени ряду* $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *додатні, і нехай при необмеженому зростанні номера* n *границя відношення (*n+1*) члена до* n*–го існує і дорівнює деякому числу* l*, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *У такому випадку:*

1. *Якщо границя* l *менше одиниці, то даний ряд збігається.*
2. *Якщо границя* l *більше одиниці, то даний ряд розбіжний.*
3. *Якщо границя* l *рівна одиниці, то ознака певної відповіді щодо збіжності/розбіжності ряду не дає, тобто рівноможливим є і збіжність і розбіжність ряду.*

Зауваження 1. Якщо ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ функціональний, тобто $u_n = f_n(x) > 0$, (n = 1, 2, 3, …) і $l = l(x)$ - відповідна границя цього ряду, то ознака збіжності Даламбера залишається в силі для кожного x.

Зауваження 2. Якщо для деякого ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ виконується нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то n –й член цього ряду не наближається до нуля при необмеженому зростанні його номера n.

Зауваження 3. Ознаку Даламбера доцільно застосовувати, якщо загальний член ряду містить вирази виду $n!$ та a^n.

Приклад 11.4. Розглянемо ряд

$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \; .... + \frac{a^n}{n} \; + \frac{a^{n+1}}{n+1}. + ..,$ де a додатнє число.

Маємо $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{n+1} \div \frac{a^n}{n} = a \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = a .$$

За ознакою Даламбера даний ряд збіжний при $0 < a < 1$ і розбіжний при $a > 1$. Якщо $a = 1$, то ознака Даламбера однозначної відповіді щодо збіжності ряду не дає. Але в цьому випадку початковий ряд перетвориться в гармонійний:

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\ ....+\frac{a^n}{n}\ +\frac{a^{n+1}}{n+1}.+...=>$$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ +\frac{1}{6}\ +\frac{1}{7}\ +\frac{1}{8}+...+\frac{1}{n}\ +....$ який, як було показано в прикладі 11.2., розбіжний.

Теорема 11.3. (*Ознака збіжності Коші). Нехай задано ряд зі знакододатніми членами та існує скінчена або нескінчена границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}\ =l$ *Тоді:*

1) *Якщо границя* l <1*, то даний ряд збігається.*
2) *Якщо границя* l >1*, то даний ряд розбіжний.*
3) *Якщо границя* l =1*, то потрібні додаткові дослідження.*

Теорема 11.4. *Інтегральна ознака Коші. Якщо члени знакододатнього ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *можуть бути зображені як числові значення деякої неперервної монотонно спадаючої на інтервалі* [1; +∞) *фуннкції* $f(x)$ *так, що* $u_1=f(1)\,;u_2=f(2);u_3=f(3)\,;\ldots u_n=f(n)\ldots,$ *то:*

1) *якщо невласний інтеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ *збіжний, то збіжний і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *;*

2) *якщо невласний інтеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ *розбіжний, то розбіжний і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Приклад 11.5. Записати три перших члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

Беручи послідовно n = 1, 2, 3, …запишемо даний ряд у вигляді:

$$\frac{5x}{1^2\cdot 3}+\frac{5^2x^2}{n^2 3^2}+\frac{5^3x^3}{n^2 3^3}+\cdots$$

Для визначення області збіжності ряду вирористаємо ознаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}\cdot 5^n\cdot x^n}\right|=\frac{5}{3}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{5}{3}|x|.$$

Отриманий ряд збіжний для тих значень x, які задовольняють нерівність

$$\frac{5}{3}|x|<1\Leftrightarrow|x|<\frac{3}{5}\quad\Leftrightarrow-\frac{3}{5}<x<\frac{3}{5}.$$

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях отриманого інтервалу.

При $x=-\frac{3}{5}$ даний ряд приймає вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, цей ряд є знакопочережним, абсолютна величина його загального члена наближається до нуля при необмеженому зростанні номера n. Значить, за ознакою Лейбніця збіжності знакопочережних рядів, цей ряд збігається та $x=-\frac{3}{5}$ належить області збіжності ряду.

При $x=\frac{3}{5}$ даний ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n}{n^2}$. Досліджуємо збіжність цього ряду за інтергальною ознакою збіжності Коші. Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=0+1=1.$$

Так як невласний інтеграл збігається, то є збіжним і досліджуваний ряд. Значить, $x=\frac{3}{5}$ входить до області збіжності заданого ряду.

Остаточно, область збіжності ряду: $-\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$.

11.3.3. *Абсолютна збіжність ряду*.

Приведені вище достатні ознаки збіжності рядів відносять д рядів з додатніми членами. Аналогічними властивостями наділені також і ряди з від'ємними членами. Розглянемо тепер ряди частина членів яких можуть бути додатніми, а частина в'ємними або рівними нулю. Такі ряди називають *знакозмінними*.

<u>*Теорема* 11.5</u> . Якщо для знакозмінного ряду

$$u_1+u_2+u_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

збігається ряд, складений із абсолютних величин його членів:
$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то даний ряд збігається.

<u>Зауваження</u>. Зворотнє твердженняне не вірне. А саме: якщо ряд збіжний, то ряд складений із абсолютних величин його членів не обов'язково збіжний, цей ряд може бути і розбіжним.

<u>*Означення* 3</u>. *Ряд називається абсолютно збіжним, якщо збігається як сам ряд, так і ряд складений із абсолютних величин його членів.*

Ряд називається умовно збіжним, якщо сам ряд збігається, а ряд, складений із абсолютних величин його членів, розбіжний.

<u>Наприклад</u>, збіжний ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\ldots$ є абсолютно збіжним, та як ряд,складений із абсолютних величин $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\ldots$, також

збігається. Обидва ряди - геометрична прогресія із знаменниками $-\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{2}$ відповідно.

Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$, є збіжним, але не абсолютно збіжним, так як ряд, складений із абсолютних величин його членів, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$, є розбіжний (гармонійний ряд).

Ознака абсолютної збіжності ряду. Нехай для деякого ряду

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$.

Утакому випадку :

1) якщо $l<1$, то даний ряд збіжний абсолютно;
2) якщо $l>1$, то ряд розбіжний.

Дана ознака є ознакою Даламбера, стосовно ряду абсолютних величин.
$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$.

11.3.4. *Знакопочережні ряди. Ознака збіжності Лейбніця.*

Знакопочережним рядом називають ряд виду

$$v_1-v_2+v_3-v_4+v_5-v_6+\cdots+(-1)^{n-1}v_n+\cdots, \text{ де } v_n\geq 0, \tag{11.5}$$

при $n = 1, 2, 3, \ldots$, тоб то ряд у якого будь-які два поряд розміщених члена його мають протилежні знаки.

Теорема *Лейбніця*. *Якщо абсолютні величини членів знакопочережного ряду (*11.5*) монотонно зменшуються при зростанні їх номера, тобто*

$$v_1\geq v_2\geq v_3\geq v_4\geq v_5\geq v_6\cdots$$

і n-й член ряду при необмеженому зростанні n наближається до нуля , тобто $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$*, то ряд (*11.5*) збігається (у загальному випадку, не абсолютно).*

Зауваження. Похибка при обчисленні суми збіжного знакопочережного ряду, що задовольняє умову теореми Лейбніця, за абсолютною величиною не перевищує абсолютної величини першого відкинутого члена.

Наприклад, ряд приведений в п.11.3.3. збіжний, так як для нього виконуються усі умови теореми Лейбніця.

11.4. *Степеневі ряди.*

Ряд виду $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ (11.6)

розміщений в порядку зростання цілих невід'ємних степенів змінної x і маючий коефіцієнти $a_0; a_1; a_2; \cdots a_n$ *не залежні від x, називається степеневим рядом.*

Узагальнений степеневий ряд має вигляд:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \qquad (11.7)$$

де a- деяке постійне число.

Ряд (11.7) легко приводиться до (11.6), якщо припустити $(x - a) = x'$, тому досліджувати будемо ряд (11.6).

Надаючи змінній x фіксоване значення, отримаємо числовий ряд, який, в залежності від x , збігається чим є розбіжним.

Можна довести що для будь-якого степеневого ряду (11.6) існує *обмежене або нескінченне невід'ємне число* R *– радіус збіжності ряду –* таке, що якщо $R > 0$, то при $|x| < R$, *ряд збігається*, а при $|x| > R$ - *є розбіжним*. При $|x| = R$, тобто при $x = R$ та при $x = - R$, *може мати місце як збіжність так і розбіжність степеневого ряду*.

Інтервал $(R; - R)$ називається *інтервалом збіжності степеневого ряду*.

Якщо $R = + \infty$, то інтервал збіжності представляє собою всю числову пряму. У випадку, якщо $R = 0$, то *степеневий ряд* (11.6) *збігається лише в точці* $x = 0$ і *інтервал збіжності*, точніше кажучи, *не існує*.

У найпростіших випадках інтервал збіжності степеневого ряду (11.6) може бути визначений за ознакою Даламбера. Для цього розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів ряду (11.6):

$$|a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \cdots + |a_n|x^n + \cdots \qquad (11.8)$$

Як відомо (див. п.11.3.3), якщо ряд (11.8) збігається, то буде збіжним і ряд (11.6), причому абсолютно. Для визначення збіжності ряду (11.8) скористаємося ознакою Даламбера.

Позначимо $(n+1)$ член ряду (11.8) через v_n , тобто $v_n = |a_n| \cdot |x|^n$, звідси $v_{n+1} = |a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}$. Складемо співвідношення $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|$.

Припустимо, що існує границя відношення

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l\,. \qquad (11.9)$$

Тоді: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| = l \cdot |x|$.

Очевидно, якщо $|x| < \dfrac{1}{l}$, то $l \cdot |x| < 1$ і ряд (11.8) збіжний. Значить, сходиться і ряд (11.6), причому абсолютно. Якщо $|x| > \dfrac{1}{l}$, то $l \cdot |x| > 1$ і ряди (11.8) та (11.6) розбіжні.

Величина $R = \frac{1}{l} \geq 0$ є *радіус збіжності степеневого ряду (*11.6) і використовуючи (11.9), маємо остаточну формулу для радіуса збіжності степеневого ряду (11.6):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (11.10)$$

Питання про збіжність ряду (11.6) *при R > 0 на кінцях інтервалу збіжності (-R; R), тобто коли x = R або x = -R у кожному конкретному випадку вирішується окремо.*

Приклад 11.6. Перевірити на збіжність ряд $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$.

У даному ряді $a^n = \frac{1}{n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, згідно (11.10) для радіуса збіжності маємо: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

Таким чином заданий ряд збіжний в інтервалі (-1; 1).

Для відповіді на питання збіжності ряду на кінцях інтервалу, візьмемо *x* = 1. Отримали гармонійний ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, який є розбіжним.

Тепер візьмемо *x* = - 1, тоді початковий ряд прийме вигляд: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots$.

Отриманий ряд збіжний умовно (не абсолютно) в силу теореми Лейбніця.

Остаточно, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд має областтю збіжності інтервал [-1; 1).

11.5. *Розклад даної функції в степеневий ряд*

11.5.1. *Розклад даної функції в степеневий ряд. Ряд Маклорена. Ряд Тейлора.*

Розклад даної функції *f(x)* в степеневий ряд означає, що функцію *f(x)* треба представити у вигляді суми степеневого ряду, що дає можливіть просто обчислювати значення функції з будь-якою наперед заданою точністтю.

Припустимо, що задана функція *f(x)* може бути розкладена в степеневий ряд (11.6):

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad , \qquad (11.11)$$

де $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ - невизначені коефіцієнти.

Крім того інтервал збіжності $|x| < R$ не зводиться до точки, тобто $R > 0$.

Відомо [6 ст.381], що *степеневий ряд в його інтервалі збіжності можна диференціювати почленно будь-яку кількість разів, крім того, усі отримані ряди будуть збіжними і їх суми дорівнюють відповідним похідним.*

Послідовно диференціюючи почленно ряд (11.11) нескінченну кількість разів матимемо:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 \cdots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 \cdots$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4x + 3\cdot 4\cdot 5a_5x^2 \cdots$$
$$f^{\mathrm{Iv}}(x) = 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5x \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

Допускаючи у цих рівностях, а також в (11.11), $x = 0$, отримаємо наступні значення похідних в точці $x = 0$

$$f(0) = a_0, f'^{(0)} = a_1, f''^{(0)} = 2a_2,\ f'''(0) = 2\cdot 3a_3,\ f^{(Iv)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4a_4, \cdots$$

Звідси

$$f(0) = a_0, \qquad \frac{f'^{(0)}}{1!} = a_1, \frac{f''^{(0)}}{2!} = a_2,\ \frac{f'''(0)}{3!} = a_3, \frac{f^{(Iv)}(0)}{4!} = a_4, \cdots$$

Підставляючи в (11.11) значеня коефіцієнтів, отримаємо ряд *Маклорена:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(\mathrm{Iv})}(0)}{4!}x^4 + \cdots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (11.12)$$

<u>Примітка</u>. У загальному випадку, фомально складений ряд Маклорена для функції f(x) не обов'язково збігається до цієї функції.

Деякі функції *f(x)*, або їх похідні не мають змісту в точці $x = 0$, такі функції не можуть бути розкладені в ряд Маклорена, у такому випадку застосовують ряд *Тейлора,* що є узагальненням ряду Маклорена:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$
$$\frac{f^{(\mathrm{Iv})}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \cdots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots, \qquad (11.13)$$

де x_0 - належним чином підібране постійне число. Зокрема, якщо $x_0 = 0$, отримаємо ряд Маклорена (11.12).

11.5.2. *Розклад в ряд Маклорена деяких функцій.*

Виконуючи послідовно дії пункту 11.5.1, можна отримати розклад в ряд Маклорена деяких основних функцій.

1) Розклад функції *f(x)* = e^x.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad (11.14)$$

2) Розклад функції *f(x) = Sinx*

$$sinx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (11.15)$$

3) Розклад функції *f(x) = Cosx*

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (11.16)$$

4) Розклад бінома Ньютона $f(x) = (1+x)^m$, де m – ціле або дробове, додатнє або від'ємне.

Нагадаємо, що біномінальним називають степеневий ряд виду

$$(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots \qquad (11.17)$$

Якщо $a = 1$ і $|b| <1$ тоді ряд біномінальний ряд матиме вигляд:

$$(1 \pm b)^n = 1 \pm nb + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3 + \cdots \qquad (11.18)$$

Біномінальний ряд у вигляді (11.18) можна розглядати як степеневий і обмеживши цей ряд до двох перший членів, використовувати його для обчислення степеню наближеного числа: $(1 \pm b)^n = 1 \pm nb$

5) Розклад функції $f(x) = ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ (11.19)

11.6. *Основні правила та засоби наближених обчислень. Похибки арифметичних операцій з наближеним значенням числа. Обчислення тригонометричних функцій малих кутів*

11.6.1. *Основні правила та засоби наближених обчислень.*

У багатьох наукових та прикладних задачах точне числове значення обчислень і вимірювань отримати не можливо, що пов'язано зі складністтю розв'язуваних задач, відсутністтю методу точного розрахунку та похибками вимірюваних приладів. В таких випадках застосовують наближені методи розв'язку, до яких можна віднести: наближене рішення рівнянь, інтерполяцію, обчислення функцій однієї або кілької змінних за допомогою рядів, наближене обчислення інтегралів і т.п.

Судоводіям, в міру своєї професійної діяльності, постійно доводиться виконувати різного роду обчислення. Під час таких обчислень використовуються числові данні, які або отримані в результаті спостережень та вимірів, або відібрані з різних існуючих таблиць, що також є результатом попередніх обчислень. Усі числові данні , отримані таким способом вважаються наближеними, такими, що містять в собі похибку, тобто, відхилення від «істиного» значення числа.

Розглянемо основні правила та засоби наближених обчислень, що використовуються в судноводінні.

1) Точність обчислень має відповідати точності спостережень, або вхідних числових даних розрахунку. Як правило, результат обчислень буде менш точним ніж вхідні данні. Для забезпечення максимально можливої точності результату доцільно дотримуватись певних правил підрахунку достатньої кількості десяткових знаків (простих чисел після коми), якщо результат не ціле число:

- сума (різниця), добуток (ділення) наближених чисел має містити стільки десяткових знаків, скільки містить їх число з найменшою кількісттю десяткових знаків;
- результат піднесення до степеню наближених чисел має містити таку ж кількість десяткових знаків, що і початкове число.

2). Результат обчислень необхідно перевіряти, для виявлення і усунення грубих помилок. Наприклад, проміжні обчисленя перевіряють оберненими діями, кінцевий результат звіряють з контрольними формулами, таблицямт, або іншим способом.

3). Після завершення обчислень результат перевіряють на нідійніть і достовірність, використовуючи формули та правила теорії похибок.

4). Для обчислень необхідно застосовувати найбільш досконалі методи, формули, сучасні вимірювальні прилади та інструменти.

5). Рутинні обчислення небхідно виконувати застосовуючи сучасну обчислювальну техніку і прикладні програмні засоби.

11.6.2. *Похибки арифметичних операцій з наближеним значенням числа.*

Головною вимогою до наближених обчислень є збереження заданої точності проміжних обчислень і кінцевого результату. Недопустимим є як і збільшення похибки (помилки) шляхом необгрунтованого округлення результату, так і штучне збільшення кількості десяткових розрядів числа, що не відповідає заданій точності. Похибки, що отримують при обчисленнях та округленнях чисел поділяють на абсолютні та відносні.

Означення Абсолютною похибкою Δ наближеного значення числа називається абсолютна величина різниці між приблизним значенням числа **α** і його дійсним (істинним) значенням *A*:

$$\Delta = \alpha - A \qquad (11.20)$$

Вимірюється абсолютна похибка в одиницях виміру вимірюваної величини.

Зазвичай, точне значення числа не відоме, тому за абсолютну похибки приймають статистичну оцінку абсолютної похибки Δ_μ. $\Delta \le \Delta_\mu$, де Δ_μ - гранична похибка, значення якої знаходять за статистичними таблицями, при заданому рівні значимості числа *A*.

Припустимо, що з однаковою абсолютною похибкою, що рівна 0,5 кбт, виміряно дві відстані 5 та 50 миль. Очевидно, що хоча похибка вимірювань для обох чисел однакова, для другого числа точність вимірювань більша, але довести це використовуючи лише означення абсолютної похибки не можливо. Тому для виявлення якості і точності вимірювань абсолютної похибки не досить і вводять поняття *відносної похибки*.

Відносною похибкою δ наближеного значення числа α називається відношення його абсолютної похибки Δ до абсолютного значеня числа α, за умови що α ≠0:

$$\delta = \frac{\Delta}{|\alpha|} = \frac{\Delta}{|\alpha|}100\%, \qquad (11.21)$$

відносна похибка величина безрозмірна і може бути виражена в долях одиниці, або у відсотках.

<u>Приклад 11.7.</u> Основа натурального логарифма для розрахунків прийнята за число *e* = 2,72, приймемо за точне значення число 2,7183. Знайти абсолютну і відносну поибки основи натурального логарифма.

$\Delta = \alpha - A = 2{,}72 - 2{,}7183 = 0{,}0017$

$\delta = \frac{\Delta}{|\boldsymbol{\alpha}|} = \frac{0{,}0017}{|2{,}72|} 100\% = 0{,}062\%$

Зауваження: величина відносної похибки не змінюється при пропорційній зміні самого наближеного числа α і його абсолютної похибки Δ. Так для числа 512, 5 що обчислене з похибкою $\Delta_1 = 1{,}2$ і числа 5125, що маж похибку $\Delta_2 = 12$, відносна похибка однакова: $\delta = \frac{12}{|5125|} = \frac{1{,}2}{|512{,}5|} = 0{,}0023 = 0{,}23\%$

За величиною відносної похибки можна приблизно визначити кількість значимих цифр (після коми, у десятковому записі) обчислюваного, або виміряного числа. Якщо число містить одну таку цифру, похибку допустимо приймати за 10 %, дві цифри - 1%, три цифри – 0,1%. *Небхідно враховувати, що значимі цифри числа відокремлюються від не значимих цифрою, абсолютна похибка якої не перевищує 0,5 одиниці розряду цієї цифри.*

Іноді допускається, щоб остання значима цифра, мала похибку рівну одиниці розряду цієї цифри. Кількість значимих (вірних) знаків числа визначається підрахунком від першошої значимої цифри наближеного числа до першої значимої цифри його абсолютної похибки. Наприклад, число 23,8368, задане з абсолютною похибкою 0,0044, має чотири правильних значимих цифри.

При виконанні арифметичних дій з наближеними числами, похибка результату, визначається похибками самих наближених чисел.

Похибка суми:

- *абсолютна похибка суми Δ_Σ дорівнює сумі абсолютних похибок складників.*

$$\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \qquad (11.22)$$

- *відносна похибка суми δ_Σ обчислюється за формулою:*

$$\delta_\Sigma = \frac{\Delta_\Sigma}{|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i|} \qquad (11.23)$$

Величина відносної похибки суми міститься в межах від мінімальної до максимальної похибки складників.

Похибка різниці:

- *абсолютна похибка різниці* $\Delta_р$ *двох чисел дорівнює сумі абсолютних похибок складників:*

$$\Delta_р = \Delta_1 + \Delta_2 \qquad (11.24)$$

- *відносна похибка різниці двох чисел* $\delta_р$ *обчислюється за формулою:*

$$\delta_р = \frac{\Delta р}{|\Delta_1 - \Delta_2|} \qquad (11.25)$$

Похибки добутку:

- абсолютна похибка добутку Δ_*дорівнює добутку його відносної похибки на сам добуток, взатий за абсолютною величиною:

$$\Delta_* = \delta_* \left|\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right| \qquad (11.26)$$

- *відносна похибка добутку* δ_* *обчислюється відносних похибок співмножників:*

$$\delta_* = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \qquad (1.27)$$

З приведених формул можна зробити висновок, що при множенні набчиженого α на точне число *М* (виміряне без похибок), абсолютна похибка збільшуєтьмя в *М* разів, а відносна не змінюється (так як $\Delta_М = 0$, $\delta_М = 0$).

Похибки частки:

- *абсолютна похибка частки* $\Delta_{\vdots}$*дорівнює добутку відносної похибки частки на модуль самої частки*:

$$\Delta_{\vdots} = \delta_{\vdots} \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| \qquad (11.28)$$

- *відносна похибка частки* $\delta_{\vdots}$ *дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника*:

$$\delta_{\vdots} = \delta_1 + \delta_2 \qquad (11.29)$$

Похибки степеню:

- *абсолютна похибка числа* α^n *дорівнює добутку відносної похибки* δ_α *числа* α на показник степеню і число α^n , взяті за абсолютною величиною:

$$\Delta^* = \delta_\alpha \left|\alpha^n \cdot n\right| \qquad (11.30)$$

- *відносна похибка числа* α^n *обчислюється за формулою:*

$$\delta^* = \left|n \cdot \delta_\alpha\right| \qquad (11.31)$$

Похибки кореня:

- *абсолютна похибка кореня наближеного числа α дорівнює добутку відносної похибки* δ_α *числа α на корінь цього числа, поділений на показник кореня* n:

$$\Delta_к = \delta_\alpha \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{n} \qquad (11.32)$$

- *відносна похибка кореня обчислюється за формулою:*

$\delta_к = \frac{1}{n}\,\delta_\alpha$ (11.33)

Зауваження: застосування приведенних вище формул, приводить до накопичення помилок, хоча в дійсності помилки наближених обчислень в процесі розрахунків фактично, компенсуються. Похибки проміжних обчислень, як правило, не враховуються.

11.6.3. *Приклад використання степеневих рядів рядів для наближених обчислень.*

Для прискорення і спрощення обчислювальних операцій і окремих розрахунків використовують формули наближених обчислень.

Приклад 11.8. Обчислити з точністю до 0,001: $Sin1$, $ln1{,}1$, $\sqrt[4]{e}$,

За формулою рокладу в ряд Макларена маємо:

$Sin1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \cdots \approx \frac{101}{120}$, так як $\frac{1}{5040} < 0{,}001$;

$ln1{,}1 = ln(1+\ 0{,}1) = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} + \frac{(0{,}1)^3}{3} - \frac{(0{,}1)^4}{4} + \cdots \approx 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} = 0{,}095$, так як $\frac{0{,}1^3}{3} < 0{,}001$;

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

$\sqrt[4]{e} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64\cdot 6} = \frac{493}{384}$, так як $\frac{1}{16\cdot 16\cdot 6\cdot 4} < 0{,}001$.

Приклад 11.8. Знайти приблизне значення числа: $\frac{1}{\sqrt[4]{0{,}992}}$.

Використаємо формулу біномінального розподілу: $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$

$\frac{1}{\sqrt[4]{0{,}992}} = (1-0{,}008)^{-0{,}25} \approx 1+0{,}25*0{,}008 = 1{,}002$;

Приклад 11.10. Знайти приблизне значення числа: $(1{,}05)^{-0{,}2}$. Обчислити похибку Δ розрахунку. Вважати похибкою перший з відкинутих членів біномінального ряду.

$(1{,}05)^{-0{,}2} = (1+0{,}05)^{-0{,}2} = 1 - 0{,}2*0{,}05 = 0{,}99$

$\Delta = \frac{n(n-1)x^2}{2!} = \frac{-0{,}2(-0{,}2-1)}{2}(0{,}05)^2 = 0{,}0003$

Приклад 11.11. Обчислити: $(0{,}991*1{,}015)$; $\frac{1{,}011}{0{,}975}$, резутьтат округлити до тисячних.

Використаємо формули арифметичних оперпцій з наближеними числами.

$(1 \pm \alpha)\cdot(1 \pm \beta) \approx 1 \pm \alpha \pm \beta$

$(0{,}991*1{,}015) = (1-0{,}009)*(1+0{,}015) \approx (1 - 0{,}009)(1+ 0{,}015) = 1{,}006$

$\frac{(1\pm\alpha)}{(1\pm\beta)} \approx 1 \pm \alpha \pm \beta$

$\frac{1{,}011}{0{,}975} = (1+0{,}011)/(1 - 0{,}025) \approx 1+ 0{,}11 +0{,}025 = 1{,}036$.

11.6.4.*Обчислення тригонометричних функцій малих кутів*.

Для вимірів кутів і дуг використовують дві системи одиниць. В першій одиницею виміру є частина кола, в другій частина радіуса кола.

У пешій системі використовують наступні одиниці виміру: градус (°), що рівний 1/360 частині кола; хвилина (′), що рівна 1/60 градуса; і секунда (″), що дорівнює 1/60 хвилини.

У другій системі за одиницю виміру приймають кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює її радіусу. Цей кут *називається радіаном*. Один радіан дорівнює 57° 17′ 44,80625″. Радіанну міру кутів та дуг називають теоретичною, тому що в основі радіанної міри лежить величина безрозмірна – відношення довжини дуги, що відповідає обраному куту, до радіуса кола, частиною якого є дуга. Тому в багатьох формулах приводять безрозмірні значення кутів і дуг в радіанах, що не порушує розмірності результату обчислень.

Для переходу з градусної системи виміру в радіанну можна використовувати наступні наближені формули:

$\alpha\ рад \approx \frac{\alpha^{\circ}}{57{,}3^{\circ}} \approx \frac{\alpha^{/}}{3438^{/}} = \frac{\alpha^{//}}{206265}$

$\alpha\ рад = \alpha^{\circ}\ arc\ 1^{\circ} = \alpha^{/}\ arc\ 1^{/} = \alpha^{//}\ arc\ 1^{//}$,

де - $arc\ 1^{\circ}$, $arc\ 1^{/}$, $arc\ 1^{//}$ - дуги $1^{\circ} 1^{/} 1^{//}$ в радіанній мірі.

Зворотній перехід, від радіанної міри до градусної виконується за формулами:

$\alpha^{\circ} = \frac{\alpha_{рад}}{arc1^{\circ}}$ $\qquad \alpha^{/} = \frac{\alpha_{рад}}{arc1^{/}}$ $\qquad \alpha^{//} = \frac{\alpha_{рад}}{arc1^{//}}$

$arc1^{\circ} \approx \frac{1}{57{,}3^{\circ}}$ $\qquad arc1^{/} \approx \frac{1}{3438^{/}}$ $\qquad arc1^{//} \approx \frac{1}{200000^{//}}$

При виведенні багатьох формул морської навігації і астрономії використовуються тригонометричні функції малих кутів. Одним з можливих способів обчислення тригонометричних функцій малих кутів є розклад їх в ряд Маклорена, з наступним визначенням кількості елементів розкладу, що забезпечить задану точність розрахунків і кінечного результату обчислень.

Запишемо роклад основних тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots;$$

$$\mathrm{Cos}\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}\alpha^5 + \ldots$$

Переведемо з радіанної міри кут α в градусну, як прийнято у судоводстві.

$$\sin\alpha = \alpha^{\circ} arc1^{\circ} - \frac{(\alpha^{\circ})^3}{3!}(arc1^{\circ})^3 + \cdots;$$

$\mathrm{Cos}\,\alpha = 1 - \frac{(\alpha^{\circ})^2}{2!}(arc1^{\circ})^2 + \ \ldots;$ $\qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \alpha^{\circ}(arc1^{\circ}) + \frac{(\alpha^{\circ})^3}{3}(arc1^{\circ}) + \ \ldots$

При малих значеннях кута α°, при обчисленні значення тригонометричної функції, допускається обмеження розкладу Маклорена тільки першими членами і допустимо вважати, що: $\sin\alpha = \alpha^{\circ} arc1^{\circ}$ *;* $\mathrm{Cos}\,\alpha = 1$*;* $\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha^{\circ}(arc1^{\circ})$

Граничні значення аргументу α тригонометричних функцій , при заданій точності обчислень приведені в таблиці:

Формула розрахунку	Граничні значення аргументу α тригонометричних функцій, при заданій похибці		
	$0{,}1'$	$1'$	$6'$
$\sin\alpha = \alpha^{\circ} arc1^{\circ}$	3,2	6,9	12,5
$\mathrm{Cos}\,\alpha = 1$	2,5	5,5	9,9
$\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha^{\circ} arc1^{\circ}$	0,4	1,4	3,4

Приклад 11.12. Судно здійснює перехід з точки *A* в точку *B* на відстань *l* = 120 миль. В наслідок помилки δ = 2 показників компаса судно прибуло в точку *C*. Визначити величину ε відхилення судна від заданої точки B.

Очевидно що величина відхилення *ε* = *AB* є основою прямокутного трикутника ABC, тоді маємо:

$tg\,\delta = \frac{\varepsilon}{l} = \delta\, arc1^{\circ}$, так як кут відхилення δ = 2 , досить малий. $arc1^{\circ} = \frac{1}{57{,}3}$

Тоді, $\varepsilon = l\,\delta\, arc1^{\circ} = 120*2/57{,}3 \approx 4$ милі.

11.7.1 *Питання для самостійного контролю знань*

1. Що називають числовим (функціональним) рядом, його загальним членом?
2. Який ряд називають збіжним (розбіжним)? Що називають сумою ряду?
3. Сформулюйте основні властивості збіжних числових рядів.
4. Що називають *n*-м залишком ряду.
5. Які ряди називають знакозмінними та знакопочережними.
6. Дайте означення степеневого ряду і області його збіжності.
7. Сформулюйте ознаку Даламбера збіжності знакододатнього числового ряду.
8. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші збіжності знакододатнього ряду.
9. Сформулюйте ознаку Лейбніца збіжності знакозмінного ряду.
10. Які знакопочережні ряди називають абсолютно (відносно) збіжними.
11. Як забезпечується необхідна точність при використанні степеневих рядів в наближених обчисленнях.

12.Правила виконання арифметичних операцій з наближеними числами.

13.Правила розрахунку абсолютних та відносних похибок обчислень наближеного значення числа.

14.Приклади використання біноміального ряду для наближених обчислень.

11.7.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача №1. Задано степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n \cdot x^n}{b^n \cdot \sqrt[3]{n+1}}$

При заданих значеннях a, b написати перші три члена ряду, знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

а) a=2, b= 3; *б*) a=4, b=7; *в*) a=3, b=4

Задача. №2. Обчислити з точністю до 0,001: $Sin1{,}44$; $ln1{,}01$; $\sqrt[8]{9}$.

Задача. №3. Знайти приблизне значення числа: $(0{,}95)^{-0{,}5}$. Обчислити похибку Δ розрахунку. Вважати похибкою перший з відкинутих членів біноміального ряду.

Задача. №4. Знайти приблизне значення числа:$(0{,}095)^{-0{,}4}$, $(0{,}0978)^{-3/2}$.

Задача. №5. Обчислити: (0,971*1,005); $\frac{1{,}001}{0{,}985}$, результат округлити до тисячних.

Задача. №6. Із судна, що стоїть на якорі пеленгують орієнтир *A*. На якій мінімальній відстані *D* має розміщуватись цей орієнтир, що б при можливій зміні положення судна на величину r =50*м*, похибка пеленгу Δ не перебільшила 0,2 градуси.

Задача. №7. Обчислити Sin 4^0 за формулою $sin\,x = x - \frac{x^3}{3!}$, з точністтю до десятитисячних.

РОЗДІЛ 12. ФУНКІЯ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

12.1. *Поняття функції багатьох змінних*.

У багатьох задачах геометрії, фізики, природознавства і т.п. приходиться мати справу з функціями двох, трьох і більше змінних. Наприклад.

Приклад 1. Площа трикутника $S = xy/2$ з основою x і висотою y є функція двох змінних x та y , що визначена в області $x \geq 0$ та $y \geq 0$.

Приклад 2. Розв'язуючи рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ відносно z , при $z \geq 0$ отримаємо $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тут апліката z цієї точки верхньої напівсфери є функція двох змінних x та y - абциси і ординати цієї точки. Дана функція визначена в колі $x^2 + y^2 \le R^2$.

Приклад 3. Величина сили тяжіння F двох матеріальних точок масою m і m_1, що займають положення $M(x, y, z)$ та $M_1(x_1, y_1, z_1)$ відповідно, у відповідності до закона Ньютона, дорівнює $F = k\dfrac{m \cdot m_1}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, де k - деяка константа (стала тяжіння).

Тобто, F є функція шести змінних x, y, z, x_1, y_1, z_1.

<u>Зауваження:</u> *будь-яка функція від багатьох змінних стає функцією від меншої кількості змінних, якщо частину змінних зафіксувати, тобто надати їм постійного значення.*

Наприклад, якщо маємо функцію $u = f(x, y, z)$ від трьох змінних x, y, z, то припустивши що z приймає постійне значення, $z = c$, то отримаємо функцію двох змінних x та y: $u = f(x, y, c)$. Далі, припустивши, що дві змінні y, z зберігають незмінне значення $y = b, z = c$, отримаємо функцію $u = f(x, b, c)$ однієї змінної x.

Таким чином, у різних питаннях, за бажанням, функцію $u = f(x, y, z)$ трьох змінних можна розглядати як функцію однієї, двох, трьох змінних.

Строго говорячи, *будь-яка фізична залежність дає нам приклад функції багатьох змінних. Але вивчаючи цю залежність ігнорують частину несуттєвих факторів і тим самим обмежують число незалежних змінних, приводячи його до мінімуму.*

Геометричним зображенням (графіком) функції двох змінних $z = f(x, y)$ являється, у загальному випадку, поверхня в просторі $Oxyz$.

Справді, нехай задана функція визначена в деякій області w площини Oxy. Тоді кожній парі значень x та y із області w відповідає, за формулою $z = f(x, y)$, деяке число z, тобто кожній точці $N(x, y, 0)$ області w ставиться у відповідність точка $M(x,y,z)$, що належить графіку функції і є кінцем перпендикуляра NM до площини Oxy.

Якщо точка N займає усі можливі положення в області w, то пов'язана з нею точка M, у загальному випадку, опише в просторі деяку поверхню P, що «нависає» над областтю w. Наочно можна представити собі, що P є «дах» пробудований над площадкою w.

Поверхня Р є геометричне зображення функції $z = f(x, y)$, рис 12.1.

Геометричне зображення функції трьох і більшої кількості змінних не має простого геометричного змісту.

У деяких випадках можна отримати наглядне геометричне представлення про характер зміни функції, розглядаючи її *лінії рівня* (або *поверхні рівня*), тобто лінії (або поверхні), де задана функція зберігає постійне значення.

Означення 1. *Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина усіх точок площини Oxy, для яких задана функція приймає одне і те ж саме значення (ізокрива)*.

Таким чином, рівняння лінії рівня для функції $z = f(x, y)$ є $f(x, y)= C$, де C – деяка постійна величина

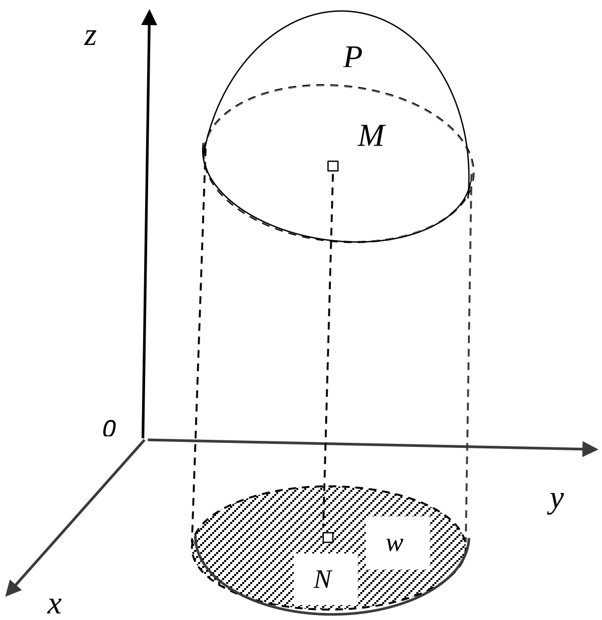


Рис. 12.1.

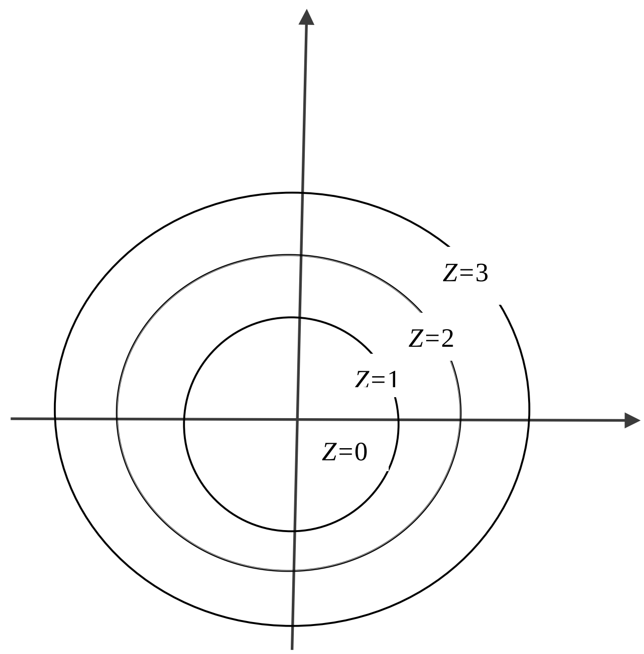


Рис.12.2

Приклад 12.1. Побудувати пімейство ліній рівня функції $z = x^2 + y^2$.

Задаючи z невід'ємні значення $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$(очевидно, що z не може бути від'ємним), отримаємо відповідні лінії рівня функції (рис 12.2):

1) $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0, 0)$;
2) $x^2 + y^2 = 1$ – коло радіуса R = 1 з центром в точці $O(0, 0)$;
3) $x^2 + y^2 = 2$ – коло радіуса R = $\sqrt{2}$ з центром в точці $O(0, 0)$ і т.д.

Таким чином, лінії рівня нашої функції представляють собою множину концентричних кіл з центром в точці $O(0, 0)$.

Побудувавши усі лінії рівня отримаємо «*карту поверхні*» для даної функції із поміченими висотами (рис 12.2).

На рис 12.2 наглядно видно, що функція z зростає уздовж кожного радіального напрямку. Тому у просторі $Oxyz$ геометричний образ функції представляє собою гігантську яму з круто зростаючими краями. Теоретично це параболоїд обертання.

<u>Означення 2</u>. Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, c)$ *називається множина усіх точок простору Oxyz, для яких дана функція приймає одне і те ж саме значення (ізоповерхні).*

Лінії і поверхні рівня постійно зустрічаються у фізичних задачах та задачах геодезії земної кулі. Наприклад, з’єднавши на карті поверхні землі точки з однаковим середньодобовим тиском або однаковою середньодобовою температурою, отримаємо відповідно ізобари та ізотерми, що використовуються як вхідні данні прогнозу погоди.

12.2. *Неперевність.*

Нехай $z = f(x, y)$ є функція двох змінних x та y, сукупність значень яких (x, y) будемо називати *точкою*, таким чином, z є *функція «точки»*. Надамо зміній x приріст Δx , залишивши значення y незмінним. Тоді різниця

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \qquad (12.1)$$

називається *частинним приростом функції* z *за змінною* x. Тобто, можна записати

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \qquad (12.2)$$

Аналогічно, якщо лише змінна y отримує приріст Δy, а змінна x лишається незмінною, то різниця

$$\Delta_y f(x, y) = f(x; y + \Delta y) - f(x; y) \qquad (12.3)$$

називається *частинним приростом функції* z *за змінною* y.

Якщо обидві змінні x та y отримують відповідні прирости Δx та Δy, то відповідний приріст функції $f(x, y)$

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \qquad (12.4)$$

називається *повним приростом функції* $f(x, y)$ (або просто *приростом функції*).

Із формул (12.2). (12.3). (12.4) слідує, що *повний приріст функції, у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних приростів цієї функції*.

Аналогічно визначаються і записуються частинні та повні прирости функції кількість змінних яких більше двох.

<u>Означення 3</u>. Функція $f(x, y)$ *називається неперевною в точці* (x_0, y_0)*, якщо:*

1) *функція визначена в даній точці і ця точка є граничною для області існування функції;*

2) *нескінченно малим приростам* $\Delta x_0 = x - x_0$ *і* $\Delta y_0 = y - y_0$ *змінних* x *та* y *відповідає нескінченно малий приріст* $\Delta f(x_0, y_0)$ *функції* $f(x, y)$*, тобто виконується умова*

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \Delta f(x_0 y_0) = \lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0) \right] = 0. \qquad (12.5)$$

Іншими словами, *функція f(x, y) є неперервною в точці (x_0, y_0), якщо вона визначена як у самій цій точці так і в околі її, причому, при досить малих за абсолютною величиною приростах аргументів у цій точці Δx_0 та Δy_0 має місце рівність* (12.5).

Означення 4. Функція f(x, y) називається непевревною в даній області, якщо ця функція неперервна в кожній точці цієї області, тобто, якщо для кожної точки (x, y) області виконується рівність

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,y) \right] = 0\,. \qquad (12.6)$$

Причому, тут, як завжди, припускаємо, що зміщена точка ($x + \Delta x$; $y+\Delta y$) *належить даній області і функція* $f(x + \Delta x$; $y+\Delta y)$ *існує*. Таким чином, можна говорити, *що функція неперервна тоді і лише тоді, коли нескінченно малим приростам її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції.*

12.3. *Частинні похідні першого порядку функції двох змінних.*

Нехай задана функція $z = f(x;y)$, визначена в деякому околі точки $(x;y)$ що розглядається, а також у самій точці $(x;y)$. Розглянемо відношення частинного приросту (12.1) $\Delta_x z = f(x + \Delta x;\, y) - f(x;\, y)$, функції z за змінною x, до приросту аргументу Δx:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x;\, y) - f(x;y)}{\Delta x},$$

тоді, *границя цього відношення при Δx→0, якщо така існує, називається частинною похідною (першого порядку) функції* $z = f(x;y)$ *по x* і позначається так: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x,y)$.

Тобто, $$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x;\, y) - f(x;y)}{\Delta x}$$

Аналогічно визначається частинна похідна функції $z = f(x;y)$ по y:

$$f_y'(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x;\, y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$$

Означення 5. *Частинною похідною функції від декількох змінних за однією з цих змінних називається границя відношення відповідного частинного приросту функції до приросту незалежної змінної що розглядається, за умови що останнє наближається до нуля.*

Можна дати означення частинних похідних і більш стисло.

Означення частинних похідних: $f_x'(x;y)$ - це похідна по x функції *f(x,y)* при фіксованому y, а $f_y'(x;y)$ - це похідна по y функції *f(x,y)* при фіксованому x.

Отже, *частинні похідні функції знаходять за звичайними правилами диференціювання; треба тільки при диференціюванні по x змінну y вважати сталою величиною, а при диференціюванні по y вважати сталою величиною x.*

Приклад 12.2. Обчислити частинні похідні функції

а) $f(x;y)=x^2y^3$.

$$f'_x(x;y)=(x^2y^3)'_x=y^3(x^2)'_x=y^3\cdot 2x=2xy^3,$$

$$f'_y(x;y)=(x^2y^3)'_y=x^3(y^2)'_y=x^3\cdot 3y^2=3x^2y^2.$$

б) $z=x^2y+x\sin xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+x\sin xy)=y\cdot 2x+\frac{\partial}{\partial x}(x\sin xy)=2xy+\sin xy+xy\cos xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+x\sin xy)=x^2+x^2\cos xy.$$

Частинні похідні $f'_x(x;y)$ і $f'_y(x;y)$ функції *f(x,y)*, якщо вони існують в кожній точці (*x*,*y*) деякої області, самі є функціями двох змінних. Отже, для них також можна розглядати частинні похідні.

Частинні похідні від частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x}$ *та* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *називаються частинними похідними другого порядку функції f(x,y).*

Очевидно, функція *f(x,y)* двох змінних має *чотири частинні похідні другого порядку*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Похідні $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, і $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, називаються частинними похідними другого порядку по *x* і по *y* відповідно і позначаються $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} і \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *Частинні похідні* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ *і* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ *називаються мішаними похідними другого порядку*. Можна довести, що якщо мішані похідні неперервні, то вони рівні між собою. У цьому разімішані похідні позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Приклад 12.3. Знайти частинні похідні першого і другого порядків функції $z=e^{xy}+y\sin x$.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+y\cos x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+\sin x.$$

Потім знайдемо «немішані» похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - y\sin x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

Обчислюємо мішані похідні

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) + \cos x = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$ остаточно маємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x.$$

<u>Приклад 12.4.</u> Знайти частинні похідні функції $z = f(x,y)$, що задовольняє рівняння $xz + ytgz = xy + 1$.

Продиференціюємо цю рівність по x, вважаючи змінну z функцією від аргументів x та у.

В результаті отримуємо рівняння $z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial x} = y$, з якого маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(x + \frac{y}{\cos^2 z}\right) = y - z. \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y-z)\cos^2 z}{x\cos^2 z + y}.$$

Аналогічно знаходимо частинну похідну за y:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + tgz + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cos^2 z - \sin z\cos z}{y + x\cos^2 z}.$$

12.4. *Повний диференціал функції.*

Нехай $z = f(x;y)$ є функція від двох незалежних змінних - аргументів x та у. Повний приріст цієї функції (див. п.12.2.) $\Delta z = f(x+\Delta x;\ y+\Delta y) - f(x;y)$

представляє собою різницю значень цієї функції в точках $M(x,y)$ та $M'(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Позначимо через ρ відстань між цими точками:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Якщо $\rho \to 0$ можна підібрати не залежні від приростів агрументів Δx та Δy величини A і B так, що вираз

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y \qquad (12.7)$$

буде відрізнятися від повного приросту Δz функції на величину вищого порядку малості порівняно з ρ, цей *вираз* (12.7) *називається головною лінійною частиною повного приросту функції.*

У цьому випадку отримуємо рівність:

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \gamma\rho, \qquad (12.8)$$

де $\gamma \to 0$ при $\rho \to 0$ (або, теж саме що $\gamma \to 0$ при $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$).

Вираз (12.8) можна записати по іншому (див. [3]):

$$\Delta z = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y, \qquad (12.8')$$

де $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$.

Тепер, узагальнюючи означення диференціалу функції однієї змінної на випадок функції двох незалежних змінних, можна дати наступні означення.

Означення 6. *Під диференціалом незалежної змінної розуміють приріст цієї змінної, тобто* $dx = \Delta x$ *та* $dy = \Delta y$.

Означення 7. *Повним диференціалом функції (або просто диференціалом функції)* $z = f(x;y)$ *двох незалежних змінних x та y називається головна лінійна частина повного приросту цієї функції.*

Дане означення справджується і для функції будь-якої кількості змінних.

Позначивши диференціал функції буквою d , можна записати:

$$dz = A\,\Delta x + B\,\Delta y\,, \tag{12.9}$$

де A та B не залежать від Δx та Δy і, крім того, $\Delta z - dz = \alpha\,\Delta x + \beta \Delta y$, де α і β – нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Функція що має диференціал в даній області називається диференційованою в цій області.

Якщо функція z диференційована, то для повного приросту Δz функції має місце формула (12.8) або (12.8′).

Можна довести що, якщо функція $z = f(x,y)$ має частинні похідні $f'_x(x;y)$ і $f'_y(x;y)$, то $\Delta_x f(x;y) = f'_x(x;y)\Delta x + \alpha \Delta x$, $\Delta_y f(x;y) = f'_y(x;y)\Delta y + \beta \Delta y$, де $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

Добутки $f'_x(x;y)\Delta x$ *і* $f'_y(x;y)\Delta y$ *називаються частинними диференціалами функції f(x,y) по x і по y відповідно.*

Якщо функція $z = f(x,y)$ *має неперервні частинні похідні* $f'_x(x;y)$ *і* $f'_y(x;y)$, *то сума частинних диференціалів*

$$df(x;y) = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y \tag{12.10}$$

називається повним диференціалом функції $z = f(x;y)$ *в точці* $(x;y)$.

Має місце теорема.

Теорема 12.1. *Диференціал функції дорівнює сумі добутків її частинних похідних на диференціали відповідних незалежних змінних.*

Наслідок. Дана функція має єдиний диференціал.

Прирости незалежних змінних Δx і Δy зазвичай позначають dx і dy. Тоді

$$df(x;y) = f'_x(x;y)dx + f'_y(x;y)dy \tag{12.11}$$

або

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{12.12}$$

Теорема 12.2. (*достатня умова диференційованості функції*). *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *має неперервні частинні похідні в даній області, то ця* *функція диференційована в цій області і її диференціал визначається формулою* (12.12).

Приклад 12.5. Знайти повний диференціал функції $z = x\sin xy.$ обчислити значення диференціалу в точках (0,0); (1,0); (0,1); (1,1).

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin xy + x\cos xy \cdot y = \sin xy + xy\cos xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = x^2 \cos xy.$$

Запишемо повний диференціал заданої функції в довільній точці області визначення $(x; y)$: $dz = (\sin xy + xy\cos xy)dx + (x^2 \cos xy)dy$.

Щоб обчислення значення диференціалу функції в заданій точці, замість x і y підставляємо координати цієї точки.

$$dz(0;0) = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0,$$
$$dz(1;0) = 0 \cdot dx + 1 \cdot dy = dy,$$
$$dz(0;1) = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0,$$
$$dz(1;1) = (\sin 1 + \cos 1)dx + \cos 1 \cdot dy.$$

Приклад 12.6. використовуючи означення диференціала обчислити наближене значення функції $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ у точках (3,1; 3,9) і (2,9; 4,1).

Розглядувані точки лежать в околі точки (3;4), в якій легко обчислити значення функції: $f(3;4) = 5$. Знайдемо диференціал заданої функції в точці (3;4):

$$f'_x(x; y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f'_x(3;4) = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

$$f'_y(x; y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f'_y(3;4) = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Отже, $df(3;4) = f'_x(3;4)\Delta x + f'_y(3;4)\Delta y = 0{,}6\Delta x + 0{,}8\Delta y$.

З формули (12.10) випливає, що

$f(x + \Delta x;\, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y$ тобто,

$$f(3 + \Delta x;\, 4 + \Delta y) \approx f(3;4) + 0{,}6\Delta x + 0{,}8\Delta y.$$

Для точки (3,1;3,9) маємо $\Delta x = 0{,}1; \quad \Delta y = -0{,}1$,

тому $f(3{,}1;3{,}9) \approx 5 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 - 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 4{,}98$.

Для точки (2,9;4,1) маємо Δx = -0,1; Δy = 0,1

і тому $f(2{,}9;4{,}1) \approx 5 - 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 5{,}02$.

12.5. *Поняття похідної функції за напрямком*.

Нехай $u = f(x,y)$ – функція, визначена в деякій області w . Розглянемо деяку точку $M(x,y)$ з області w і деякий напрямок l, що визначається напрямними косинусами $Cos\alpha$ і $Cos\beta = Sin\alpha$ (тобто $Cos\alpha$ і $Cos\beta$ – косинуси кутів, утворених променем l з додатніми напрямками осей координат Ox і Oy). Переміщення в даному напрямку l точки $M(x,y)$ в точку $M'(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$ що належить тійже області w надає функції $u = f(x, y)$ приросту

$$\Delta_l u=f(x+\Delta x;y+\Delta y) - f(x, y),$$

що називається приростом функції в даному напрямку l.

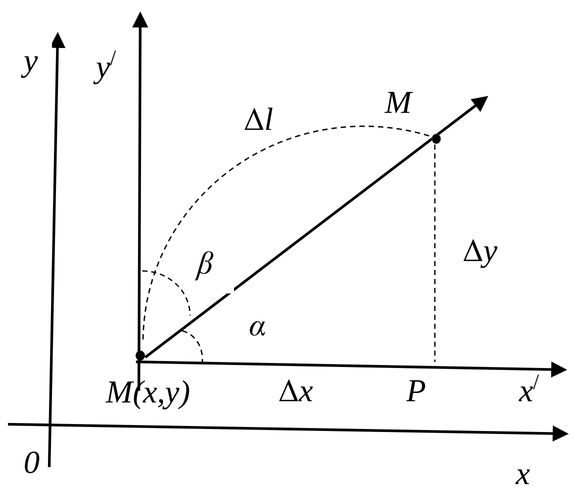


Рис. 12.2.

Якщо $|MM'| = \Delta l$ є величина переміщення точки M, то з прямокутного трикутника (рис 12.2) MPM' отримуємо

$\Delta x = \Delta l Cos\alpha,\ \Delta y = \Delta l Cos\beta,$ і відповідно

$\Delta_l u = f(x+ \Delta l Cos\alpha;\ y+ \Delta l Cos\beta) - f(x, y).$

Означення 8. *Під похідною функції за даним напрямком l розуміють границю відношення приросту функції в цьому напрямку до величини переміщення за умови, що останнє наближається до нуля, тобто:*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} \qquad (12.13)$$

З цієї точки зору *частинні похідні* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *та* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *можна розглядати як похідні функції u в додатніх напрямках осей координат* Ox і Oy.

Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ дає *швидкість зміни функції в напрямку l.*

Припускаючи що дана функція $u = f(x,y)$ диференційована, використовуючи означення повного диференціала (п.12.4), в граничному переході формули (12.13) при $\Delta l\to 0$ тобто при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$, отримуємо *формулу для похідної функції в даному напрямку*:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}Cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}Cos\beta, \qquad (12.14)$$

де $Cos\beta = Sin\alpha$.

Приклад 12.7. Знайти приріст функції $u = x^2 + xy - y^2$ при переміщенні точки $M(1, 2)$ в напрямку l, що утворює кут $\alpha = arctg\frac{3}{4}$ із додатнім напрямком осі Ox, на відстань $\Delta l = 0{,}1$. Чому дорівнює похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точці M?

Маємо $tg\alpha=\frac{3}{4},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Звідси $\sec\alpha=\sqrt{1+tg^2\alpha}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$, таким чином, $Cos\alpha=\frac{1}{Sec\alpha}=\frac{4}{5};\quad Sin\alpha=tg\alpha\cdot Cos\alpha=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}=Cos\beta$.

Використовуючи отримані напрямні косинуси напрямку l, знаходио для точки M приріст координат

$\Delta x = \Delta l\ Cos\alpha = 0{,}1\cdot\frac{4}{5} = 0{,}08$ і $\Delta y = \Delta l\ Cos\beta = 0{,}1\cdot\frac{3}{5} = 0{,}06$.

Таким чином, переміщена точка M_1 має координати

$x_1 = x + \Delta x = 1 + 0{,}08 = 1{,}08$ і $y_1 = y + \Delta y = 2 + 0{,}06 = 2{,}06$.

Звідси, шуканий приріст функції u дорівнює:

$\Delta_l u = (1{,}08^2 + 2\cdot1{,}08\cdot2{,}06 - 2{,}06^2) - (1^2 + 2\cdot1\cdot2 - 2^2) = 1{,}3724 - 1 - 0{,}3724.$

За умовою задачі $\Delta l = 0{,}1$, тоді $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}=\frac{0{,}3724}{0{,}1}\approx 3{,}7 = 0{,}08$.

Обчислимо значення похідної за напрямком в точці $M(1, 2)$.

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x-2y$; тому $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M=6;\quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M=-2$.

Таким чином маємо:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M\cdot Cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M Cos\beta=6\cdot\frac{4}{5}+(-2)\cdot\frac{3}{5}=3{,}6.$$

Зауваження. Для функції $u=f(x,y,z)$ її похідна за напрямком $l(Cos\alpha;Cos\beta;Cos\gamma)$ *дорівнює* $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}Cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}Cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}Cos\gamma$.

12.6. *Градієнт.*

Означення 9. Говорять, що в даній області w (множині) визначено скалярне поле, якщо для кожної точки M з області w задано деякий скаляр – число

$$u = f(M). \qquad (12.15)$$

Таким чином, *u є числова функція точки*.

Прикладами скалярних полів являються: температурне поле, тобто розподіл температур в нагрітому тілі; розподіл концентрації речовин у розчинах; і т.п.

Якщо область w розміщена на площині Oxy, то будь-яка її точка M визначається двома координатами (x, y), і *плоске скалярне поле* може бути записане у вигляді

$$u = f(x, y), \qquad ((x, y) \in w) \tag{12.16}$$

Аналогічно для області w, що знаходиться в просторі $Oxyz$, маємо

$$u = f(x, y, z), \qquad ((x, y, z) \in w) \tag{12.17}$$

Таким чином, поняття *скалярного поля* представляє собою *фізичну трактовку функції кількох змінних*.

<u>Означення 10.</u> *Говорять, що в даній області w визначено векторне поле, якщо для кожної точки M з області w задано деякий вектор*

$$a = F(M) \tag{12.18}$$

Прикладами векторних полів являються: поле швидкостей в даний момент часу точок потоку рідини; силове поле, утворене деяким центром тяжіння; і т.п.

Для випадку *плоского векторного поля* $((x, y) \in w)$ маємо вектор-функцію

$$a = F(x, y), \quad ((x, y) \in w). \tag{12.19}$$

Звідси, перейшовши до координат вектора a, отримаємо

$$a_x = F_1(x, y), \qquad a_y = F_2(x, y). \tag{12.20}$$

Таким чином, задання плоского векторного поля (12.19) рівносильно визначенню двох скалярних полів (12.20).

Аналогічно, для випадку *просторового векторного поля* ($w \in Oxyz$), отримуємо

$$a = F(x, y, z). \tag{12.21}$$

або, в координатах,

$$a_x = F_1(x, y, z), \qquad a_y = F_2(x, y, z), \qquad a_z = F_3(x, y, z), \tag{12.22}$$

тобто, векторне поле (12.21) еквівалентне трьом скалярним полям (12.22).

*Множина усіх точок M, для яких скалярне поле (*12.15*) зберігає постійне значення ($f(M) = const$), називається поверхнею (або лінією) рівня скалярного поля (ізоповерхні).*

<u>Означення 11</u>. *Нехай $u = f(x, y)$, - диференційоване плоске скалярне поле (тобто, $f(x,y)$ диференційована функція двох змінних), тоді вектор*

$$grad\ u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \tag{12.23}$$

називається градієнтом поля, або точніше

$$grad\, u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (12.24)$$

де i, j – одиничні вектори-орти осей координат Ox, Oy.

Аналогічно, *для просторового скалярного поля* $u = f(x, y, z)$ *його градієнт є вектор*

$$grad\, u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \qquad (12.25)$$

або $$u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (12.26).$$

Таким чином, *скалярне поле породжує векторне поле – поле градієнтів.*

Означення 12. *Похідною скалярного поля* $u = f(x, y, z)$ *в даному напрямку* l *є вираз*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}Cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}Cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}Cos\gamma, \qquad (12.27)$$

де $Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma$ *- напрямні косинуси вектора* l

Похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ *- є швидкість зміни поля в заданому напрямку.*

Теорема 12.3. *Похідна скалярного поля в даному напрямку дорівнює проекції градієнта поля на даний напрямок (у відповідній точці). Тобто,*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = np_l\, grad\, u. \qquad (12.28)$$

Одиничний вектор напрямку вектора l *позначають* l_0 *і записують так*

$$l_0 = \{Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma\}.$$

Наслідок. *Градієнт скалярного поля в даній точці за величиною і напрямком дорівнює максимальній швидкості зміни поля у цій точці і визначається рівністтю*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \qquad (12.29)$$

Зауваження: градієнт поля не залежить від вибору прямокутної системи координат $Oxyz$.

Приклад 12.8. Знайти величину і напрямок градієнта поля $u = \dfrac{x}{y} + z^2$ в точці $M_0(2,1,0)$.

Знайдемо значення частинних похідних в заданій точці:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(\frac{1}{y}\right)_{M_0} = 1; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)_{M_0} = -2; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} = (2z)_{M_0} = 0.$$

Таким чином, $grad\ u(M_0) = i - 2j$.

Звідси за формулою (12.29) і (12.27) маємо: $\left|grad\ u(M_0)\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{5}$

і $Cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $Cos\chi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $Cos\gamma = 0$, $l_0 = \{Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}; 0\right\}$.

Точка M_0 в якій $grad\ u(M_0) = 0$ *називається особливою для скалярного поля, у протилежному випадку точка M_0 називається неособливою (звичайною).*

<u>Теорема 12.4.</u> *У кожній неособливій точці плоского скалярного поля градієнт поля направлений по нормалі до лінії рівня, що проходить через цю точку, в сторону зростання поля.*

12.7 *Екстремуми функцій двох змінних. Абсолютний і умовний екстремум функції двох змінних*

12.7.1. *Екстремуми функцій двох змінних.*

Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякій області точки (x_0,y_0).

<u>Означення 13</u>. Функція $z=f(x;y)$ має в точці (x_0,y_0) строгий максимум (мінімум), якщо $f(x;y)<f(x_0;y_0)$ ($f(x;y)>f(x_0;y_0)$) для всіх точок $(x;y)$, достатньо близьких до x_0, y_0. Точка (x_0,y_0) – точка максимуму (мінімуму).

Максимум і мінімум функції називають екстремумами функціями.

<u>Теорема 12.5</u> (*необхідні умови екстремуму*).

Якщо диференційована функція $z=f(x;y)$ має екстремум в точці $P_0(x_0,y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, *або не існують.*

Точки в яких частинні похідні даної функції рівні нулю, або не існують називають критичними (або стаціонарними) точками.

<u>Достатні умови існування екстремуму</u>.

Нехай функція $z=f(x;y)$ неперервна в своїй області визначення $D(f)$ разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядків і точка $P_0(x_0,y_0)$ є критичною. Тоді обчислимо в точці P_0 числове значення похідних другого порядку і позначимо:

$A = \left(z''_{xx}\right)_{P(x_0,y_0)}$, $B = \left(z''_{xy}\right)_{P(x_0,y_0)}$, $C = \left(z''_{yy}\right)_{P(x_0,y_0)}$, $\Delta H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$,

тоді:

1) *якщо $\Delta>0$, то функція має в точці $P_0(x_0,y_0)$ екстремум: максимум якщо $A<0$ і мінімум якщо $A>0$.*
2) *якщо $\Delta<0$, то в точці $P_0(x_0,y_0)$ екстремум відсутній.*

3) *якщо $\Delta=0$, то висновок про існування або відсутність екстремуму зробити не можна, необхідним є додаткове дослідження.*

<u>*Примітка*</u>: *ΔH* – називають визначником матриці Гессе, або гессіаном.

<u>Приклад 12.9.</u> Дослідити на екстремум функцію $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$.

1) Область визначення функції D(z) є $[-\infty; +\infty]$.

2) Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10$$

3) Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0, \\ x - 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

4) Роз'яжемо дану систему рівнять і знайдемо стаціонарні точки: $x=2$, $y=3$, тобто, стаціонарна точка єдина $P_0(2, 3)$.

5) Знайдемо частинні похідні другого порядку і їх значення у стаціонарній точці:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = -4.$$

Як бачимо, частинні похідні другого порядку сталі величини в будь-який точці, а значить і в стаціонарній точці $P_0(2;3)$.

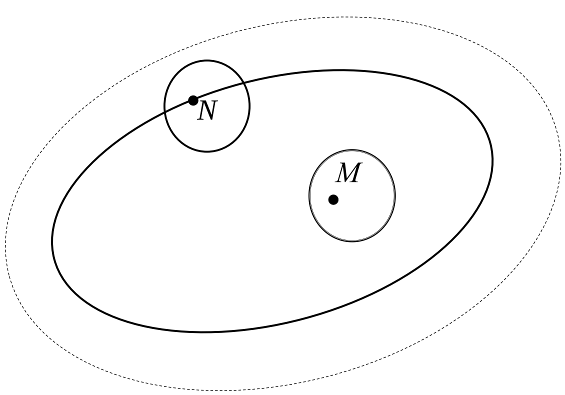
Тому $A=-2$, $B=1$, $C=-4$. $\Delta H = AC - B^2=(-2).(-4) - 1= 7 > 0$.

Таким чином, в точці P_0 (2;3) функція має максимум. Значення функції в точці максимуму рівне:

$$z_{\max} = z(2;3) = 2\cdot 3 - 2^2 - 2\cdot 3^2 + 2 + 10\cdot 3 - 8 = 8.$$

12.7.2. *Абсолютний екстремум функції двох змінних.*

Розглянемо деяку множину G точок площини, або простору.



Точка M *називається внутрішньою точкою для множини* G, *якщо вона належить цій множині разом з деяким її околом* (рис.12.3). Точка N *називається граничною для множини G, якщо у будь-якому її повному околі існують точки, які як належать області G, так і не належать їй.*

Рис. 12.3.

Сама N точка не обов'язково належить множині G.

Сукупність усіх граничних точок множини G називається *границею області G*.

<u>Означення</u> 14. *Множину G будемо називаим областтю, якщо усі його точки – внутрішні.*

<u>Означення</u> 15. *Найбільше або найменше значення функції в даній області називається обсолютним екстремумум функції (відповідно абсолютним максимумом або мінімумом) у цій області.*

Має місце *<u>теорема Вейєрштрасса</u>*: *функція неперервна в обмеженій і замкненій області, досягає у цій області свого найменшого і найбільшого значення.*

<u>*Теорема* 12.6</u>. *Абсолютний екстремум функції в даній області досягається або в критичній точці функції, що належить цій області, або в граничній точці області.*

<u>Приклад 12.10.</u> знайти абсолютний екстремум функції $z = x{\cdot}y$ в трикутній області S з вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,2)$. Рис. 12.4.

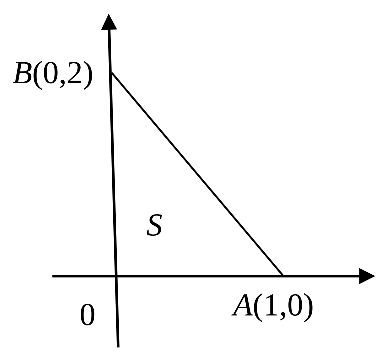


Рис. 12.4.

Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x$. Звідси знаходимо критичну точку $O(0,0)$, що належить області S. Вивчимо поведінку функції z на границі області $OABO$.

На відрізку OA : $y = 0$; $0 \le x \le 1$, тому $z = 0$.

На відрізку OB: $x = 0$; $0 \le y \le 1$, тому $z = 0$.

Відрізок AB заданий рівнянням $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow y = 2 - 2x$, ($0 \le x \le 1$). Звідси $z=xy=$ $12–2x^2$, отримали функцію однієї змінної, тоді: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 4x = 0 \Rightarrow; x = \frac{1}{2}$ і відповідно $y = 2 – 2{\cdot}1 = 1$.

Точка (1/2, 1) – критична так як $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4 < 0$, то в точці з координатами (1/2, 1) функція z досягає свого найбільшого значення на відрізку AB, а саме:

$z(1/2,\, 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Таким чином, можна зробити висновок: функція z в області S має найменше значення $z = 0$ в точках відрізків OA та OB, що є частинами границі області S. Найбільшого значення $z = \frac{1}{2}$ в заданій області функція досягає в точці (1/2, 1), що належить відрізку AB границі області S.

12.7.3. *Умовний екстремум функції двох змінних.*

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$, стосовно якої ставиться вимога знайти точки її екстремумів за умови, що виконується рівність $\varphi\,(x, y) = 0$.

Для визначення умовного екстремуму функцій багатьох змінних розроблено кілька методів, з яких ми розглянемо один під назвою *метод множників Лагранжа*.

Задача умовного екстремуму зводиться до знаходження звичайного екстремуму функції, що є комбінацією заданої функції z та різняння – умови.

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

де F – функція Лагранжа; λ - множник Лагранжа.

Стаціонарні точки знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x + \lambda'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Характер умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: *якщо у стаціонарній точці* $d^2F > 0$ ($d^2F < 0$) *, то ця точка є точкою умовного мінімуму (максимуму).*

<u>Приклад 12.11.</u> Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y - 1 = 0$.

Функція Лагранжа буде мати вигляд $L = (x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

Запишемо необхідні умови існування екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0.$$

Звідки отримуємо:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Критична точка буде мати координати: $M = (1/2; 1/2)$, λ = -1

Знайдемо похідні функції Лагранжа $L=(x;y)=x^2+y^2-(x+y-1)$.

$L'_x=2x-1$, $\quad L'_y=2y-1$,

$L''_{xx}=2=A$, $\quad L''_{yy}=2=C$, $\quad L''_{xy}=0=B$,

Тоді визначник матриці Гессе $\Delta = AC - B_2 = 4 > 0$, A > 0, тобто, існує *min* функції: $\min z = z(1/2;1/2)=1/4+1/4=1/2$.

12.8. *Побудова емпіричних формул за методом найменших квадратів.*

У природознавстві, зокрема у фізичних науках, приходиться користуватися емпіричними формулами, складеними на основі дослідів та спостережень.

Найпростішим методом отримання таких формул є *метод найменших квадратів*. Розглянемо суть цього методу, обмежившись випадком лінійної залежності двох Нехай треба встановити форму залежності між температурою *(x)* і зміною довжини прямолінійного металічного стержня *(y)*. Результат вимірів (наприклад, n -вимірів) температури і довжини приведемо в таблиці:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Будемо розглядати x та y як прямокутні координати точки на площині. Припустимо, що точки з відповідними координатами, взятими з таблиці, лежать на деякій прямій лінії, наприклад розміщуються так як показано на малюнку 12.5.

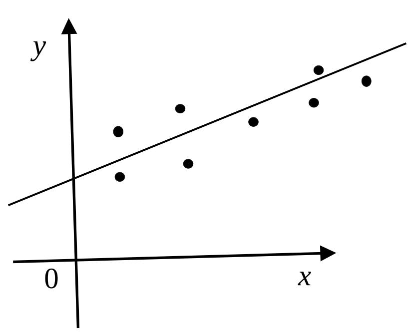


Рис. 12.5.

У такому випадку природньо вважати, що між x та y існує приблизно лінійна залежність, тобто, що y є лінійна функція від x:

$$y = b_0 + b_1 x \qquad (12.30)$$

де b_0, b_1 – невідомі коефіцієнти. Які треба визначити.

Формула (12.30) може бути переписана у такому вигляді:

$$b_0 + b_1 x - y = 0. \qquad (12.31)$$

Так як емпіричні точки ($x;y$) лише приблизно лежать на прямій, то формули (12.30) та (12.31) також наближені і строго кажучи рівніть (12.31) має бути записана у виді:

$$b_0 + b_1 x - y = e. \qquad (12.32)$$

де, e – деяке число (загалом то не рівне нулю), яке називають помилкою, або відхиленням емпіричного значення залежної змінної від її теоретичного значення (розрахованого за формулою (12.30).

Підставляючи в (12.32) табличні значення змінних $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ та $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, отримаємо ситему лінійних рівнянь:

$$b_0 + b_1 X - Y = E \qquad (12.33)$$

де, Y –вектор спостережень за залежною змінною; $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$;
X –вектор спостережень за незалежною змінною; $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;
b_0, b_1 – невідомі параметри моделі;
$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ - вектор випадкових величин (похибок).

Необхідно підібрати коефіціенти b_0, b_1 таким чином, щоб похибки були якнайменші, за обсолютною величиною. Спосіб найменших квадратів полягає у наступному: знайти такі параметрів b_0 і b_1, що мінімізують суму квадратів випадкових величин, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = f(b_0, b_1) \to \min \qquad (12.34)$$

Мінімум $f(b_0, b_1)$ досягається за необхідних умов, коли перші частинні похідні цієї функції за параметрами дорівнюють нулеві, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2)}{\partial b_0} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2)}{\partial b_1} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0 \end{cases} \qquad (12.35)$$

Виходячи з цієї умови отримують систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n b_0 + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}, \qquad (12.36)$$

яка називається нормальною.

Розв’язок системи (12.36) дає формули для визначення невідомих параметрів - коефіцієнтів b_0, b_1:

$$\mathrm{b}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x_i}^2 - (\bar{x})^2}, \qquad \text{де } \bar{\mathrm{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{12.37}$$

$$\mathrm{b}_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}, \qquad \text{де } \bar{\mathrm{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \; n \text{ – кількість спостережень.} \tag{12.38}$$

Приклад 12.12. Нехай результати вимірювань величин деяких фізичних величин x, y та їх обробка занесені в таблицю

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$\hat{y}_i$	$e_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$
1	18,0	2,5	324	45	2,54	0,0014
2	15,3	2,7	234,09	41,31	2,79	0,0074
3	15,7	2,9	246,49	45,53	2,75	0,0227
4	16,3	2,7	265,69	44,01	2,69	0,0000
5	17,7	2,6	313,29	46,02	2,56	0,0013
6	15,3	2,7	234,09	41,31	2,79	0,0074
7	18,0	2,5	324	45	2,54	0,0014
8	15,3	2,7	234,09	41,31	2,79	0,0074
9	15,7	2,9	246,49	45,53	2,75	0,0227
10	16,3	2,7	265,69	44,01	2,69	0,0000
Σ	163,6	26,9	2687,9	439,03	26,88	0,0718

Використовуючи метод найменших квадратів, встановити рівняння залежності y від x.

$$\bar{x} = 16{,}36 \quad \bar{y} = 2{,}69$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{10}\cdot 439{,}03 - 16{,}36\cdot 2{,}69}{\frac{1}{10}2687{,}9 - (16{,}36)^2} = -0{,}0924$$

$$b_0 = 2{,}69 - (-0{,}0924)\cdot 16{,}36 = 4{,}2$$

Шукане рівняння інійної залежності має вигляд: $\hat{y} = 4{,}2 - 0{,}0924\cdot x$.

Останні два стовбчика таблиці містять теоретичне (розраховане за формулою) значення залежної змінної $\hat{y}_i$ і вектор квадрату похибок.

12.9.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Дайте означення функції двох незалежних змінних.

2. Що називають областтю визначення функції двох змінних? Геометричне зображення області визначення функції $z = f(x, y)$.

4. Яка функція називається неперервною в очці, області?

5. Що називають лінією рівня функції $z = f(x, y)$, ізоповерхнею?

6. Дайте визначення частинних похідних функції двох змінних.

7. Що називають повним диференціалом функції двох змінних?

8. Приведіть необхідні і достатні умови існування екстремуму функції двох змінних.

9. Що називають локальним, абсолютним і умовним екстремумом функції двох змінних.

10. Дайте означення скалярного і векторного полів.

11. Дайте означення похідної функції (скалярного поля) за напрямком вектора *l*.

12. Дайте означення градієнта функції. Приведіть формулу для обчислення абсолютної величини градієнта скалярного поля.

12.9.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача № 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій двох змінних.

а). $z = x^2 - y^2$ б). $z = tg(x - y)$ в). $z = \ln(x^3 - 2xy)$.

Задача №2. Знайти частинні похідні першого та другого порядку від функцій:

а) $z = x^2 y - x + y + 5$, б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, в) $z = \frac{y}{x}$.

Задача № 3. Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, б) $z = x^2 \ln y$

Задача № 4. Дослідити на екстремум функції:

а) $z = x^2 y - 3x^2 + 2y - 1$; б) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$;

в) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; г) $z = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$.

Задача № 5. Визначити умовні екстремум функції

$z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, якщо $x + y + 3 = 0$.

Задача № 6. Знайти найбільше і найменше значення $z=(x,y)$ функції в замкнутій області D.

а) $Z=x^2+xy-6x-2y+2$, D: $1 \leq x \leq 3$; $1 \leq y \leq 4$;

б) $Z=x^2+4xy-y^2-5$, D: *трикутник обмежений осями OX, OY і прямою* $y=2-x$;

в) $Z=x^2+y^2-6x-8y+12$, *D: прямокутрик* $2 \le x \le 3$; $2 \le y \le 4$.

Задача № 7. Знайти $\frac{\partial u}{\partial l}$ якщо $u = \frac{2x}{\sqrt{y}}$ в точці $M_0(1,1)$ в напрямку l, що утворює кут α з віссю Ox, якщо $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$. Чому дорівнює $|grad\ u\ (M_0)|$?

Задача № 8. Задані функція $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ і вектор $a(a_1, a_2)$.
Знайти: $grad\ z$ у точці A; похідну в точці A за напрямком вектора a.
а) $z = x^2 + xu + y^2, A(1, 1), a(2, -1)$
б) $z = 2x^2 + 3xu + y^2, A(2, 1), a(3, -4)$
в) $z = 3x^4 + 2x^2y^3,\ A(-1, 2), a(4, -3)$.

РОЗДІЛ 13. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ.

13.1. *Основні поняття.*

Диференційними рівняннями називають рівняння *що пов'язують між собою незалежну змінну x шукану функцію y та її похідні різниї порядків по x.* Порядок старшої похідної, що входить в дане рівняння, називають *порядком диференційного рівняння.*

Загальний вигляд диференційного рівняння наступний:

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{13.1}$$

Взагалі то, у окремих випадках у це рівняння можуть і не входити x, y та окремі похідні порядку нижче ніж n.

Наприклад, рівняння: $y' + \frac{2}{x} y = Sin\, x$; $y'' + 4y' + 13y = 0$; $y''' + yy' = 0$ мають відповідно порядок: перший, другий і третій.

Диференціальне рівняння (13.1) називають *лінійним*, якщо ліва частина його є многочлен першого спепеню відносно невідомої функції y та її похідних $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ і не містить їх добутків, тобто це рівняння виду:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{13.2}$$

Тут функції $a_0(x), a_1(x), a_n(x)$, зазвичай визначені та неперервні в деякому загальному інтервалі, називаються *коефіцієнтами лінійного рівняння*, а функція *f(x) – правою частиною або вільним членом його.*

Якщо права частина *f(x)* рівняння (13.2) тотожньо рівна нулеві, то рівняння називається *однорідним* (або без правої частини); у протилежному випадку рівняння (13.2) називають *неоднорідним* (або з правою частиною).

Будь яка функція $y = \varphi(x)$, підстановка якої в рівняння (13.1), перетворює його на тотожність називається *розв'язком* цього рівняння.

Розв'язати, або проінтегрувати, дане диференціальне рівняння – значить знайти його розв'язок в заданій області.

Графік розв'язку називають інтегальною кривою.

Основна задача інтегрального числення – знаходження функції y, похідна якої дорівнює даній неперервній функції $f(x)$, - зводиться до найпростішого диференційного рівняння $y' = f(x)$, загальний розв'язок якого має вигляд: $y = \int f(x)dx + C$, (13.3)

де C – довільна постійна (стала) величина і під інтегралом розуміють одну з множини первісних функції $f(x)$.

Вибираючи довільним чином сталу C, за умови неперервності функції $f(x)$ можна отримати будь який розв'язок цього диференційного рівняння.

При інтегрування диференційних рівнянь вищих порядків можливо отримати декілька довільних сталих.

Означення 1. *Загальним розв'язком диференційного рівняння* (13.1) *називається такий розв'язок його:* $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, *що містить стільки незалежних сталих* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *який порядок цього рівняння.*

Примітка. Функція φ вважається неперервно диференційованою за всіма своїми аргументами достатню кількість разів.

Довільні сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ називають *незалежними я*кщо, якщо їх загальна кількість що входить до функції φ , не може бути зменшена шляхом введенням інших довільних сталих, неперервно залежних від даних.

Якщо загальний розв'язок заданий у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, то він називається *загальним інтегралом.*

Означення 2. *Будь-який роз'язок диференційного рівняння, що отриманий із загального розв'язку, якщо надати певних значень довільним сталим, що входять до нього, називається частинним розв'язком цього диференційного рівняння.*

Правильність отриманого розв'язку диференційного рівняння перевіряють підстановкою функції – розв'язку в задане рівняння.

13.2. *Диференційні рівняння першого порядку.*

Загальний вигляд диференційного рівняння першого порядку наступний: $F(x, y, y') = 0$

У найпростіших випадках це рівняння може бути роз'язане відносно похідної y:

$$y' = f(x, y) \tag{13.4}$$

Загальний розв'язок рівняння (13.4) має вигляд:

$$y = \varphi(x, C). \tag{13.5}$$

Геометрично загальний розв'язок (13.5) представляє собою *сімейство інтегральних кривих*, тобто сукупність ліній, що відповідають різним значенням сталої C. Інтегральні криві мають властивість: в кожній їх точці $M(x, y)$ нахил дотичної до них задовольняє умову $tg\ \alpha = f(x, y)$.

Якщо задати точку $M_0(x_0, y_0)$, через яку повинна пройти інтегральна крива, то тим самим із нескінченного сімейства інтегральних кривих, в найпростішому випадку, виділяється одна обрана інтегральна крива, що відповідає частинному розв'язку даного диференційного рівняння.

Аналітично ця вимога зводиться до так званої *початкової умови*: $y = y_0$ при $x = x_0$. Якщо відомий загальний розв'язок (13.5), то маємо: $y_0 = \varphi(x_0, C)$.

Із цієї умови можна визначити довільну сталу C і, таким чином, знайти відповідний частинний розв'язок. У цьому і є зміст *задачі Коші*.

<u>Задача Коші</u>. Знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ диференційного рівняння (13.4), *що задовольняє задану початкову умову: $y_0 = \varphi(x_0)$, тобто приймаючий* при $x = x_0$ задане *значення $y = y_0$.*

Геометрично задача Коші формулюється так: знайти інтегральну криву диференційного рівняння (13.4)*, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.*

У деяких випадках диференціальне рівняння (13.4) доцільно записувати у вигляді: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, або у формі $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, (13.6)

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ – наперед відомі функції.

Форма (13.6) зручна тим, що тут змінні x та y рівноправні, тобто кожну з них можна розглядати як функцію іншої.

Під розв'язком рівняння (13.6) , у загальному випадку, *розуміють функції $x= \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$, що задані параметрично (t - параметр) і задавольняють рівняння* (13.6).

Не існує загального методу розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку. Зазвичай розглядають лише деякі окремі типи таких рівнянь, для кожного з яких приводиться свій особливий метод розв'язку.

13.2.1. *Рівняння першого порядку з розділеними змінними*.

<u>Означення 3</u>. Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з розділеними змінними, якщо воно має вигляд

$$X(x)\,Y(y)dx + X_1(x)Y_1(y)dy = 0, \qquad (13.7)$$

де $X(x)$,$X_1(x)$ - *функції лише змінної x;*

$Y(y)$, $Y_1(y)$ – *функції лише змінної y.*

Для розв'язку рівняння (13.7) розділимо обидві частини його на добуток $Y(y)\ X_1(x)$, припускаючи що даний добуток не рівний нулеві. Тодя, після елементарних перетворень, маємо

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{Y(x)}{Y_1(x)}dy = 0 \quad (13.8)$$

У рівняння (13.8) при dx стоїть функція лише від x, а при dy стоїть функція лише від y. У цьому випадку говорять що *змінні розділені*. Беручи інтеграл від лівої і правої частини рівності (13.8), отримаємо

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{Y(x)}{Y_1(x)}dy = C, \quad (13.9)$$

тут під інтегралом розуміють деякі відповідні первісні.

Співвідношення (13.9) є *загальним інтегралом рівняння* (13.7), виражений у неявній формі.

Приклад 13.1. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Перепишемо дане рівняння так $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x \cdot dy = y \cdot dx$.

Розділимо обидві частини рівняння на добуток xy ($xy \neq 0$), тим самим розділимо змінні у рівнянні і знайдемо загальний інтеграл:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C,$$

Строго говорячи ми маємо писати $\ln|y| = \ln|x| + \ln|\overline{C}|$, але допушенена вольність не вплине на остаточний результат, якщо при виконанні потенціювання довільну сталу вважати дійсним числом.

Тут довільна стала записана у логарифмічній формі, що цілком можливо, так як всяке додатнє або від'ємне число C_1 може бути представлене як логарифм іншого числа: $C_1 = lnC$, де $C = e^{c_1}$.

Потенціюючи останню рівність, остаточно отримаємо:

$$\ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow y = C \cdot x, \qquad (x \neq 0;\ C \neq 0).$$

Приклад 13.2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = ctgx \cdot (y+1)$, що задовольняє умові $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Дане рівняння є рівнянням з розділеними змінними. Домноживши обидві частини на dx і розділивши на множник (y + 1), отримаємо рівняння з розділеними змінними

$$y' = ctgx \cdot (y+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{(y+1)} = ctgx(y+1) \cdot \frac{dx}{(y+1)} \quad \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{Cosx}{Sinx}dx$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, отримали загальний розв'язок:

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{Cosx}{Sinx}dx \quad \Rightarrow \ln|y+1|=\ln Sinx+\ln C\Rightarrow y+1=C\cdot Sinx\Rightarrow y=C\cdot Sinx-1.$$

Використовуючи початкові умови, знаходимо значення довільної сталої

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\Rightarrow 2=CSin\frac{\pi}{2}-1\Rightarrow 2=C-1\Rightarrow C=3.$$

Таким чином, $y=3Sinx-1$ є частинний розв'язок даного диференційного рівняння, що задовольняє початкові умови.

Приклад 13.3. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці температур тіла і повітря. Температура повітря дорівнює 20^0 С. Відомо, що протягом 20 хвилин тіло охолоджується від 100^0 до 60^0 . Визначити закон зміни температури тіла в залежності від часу.

Якщо позначити через t час, а через T температуру тіла, то швидкість охолодження тіла, точніше, швидкість зміни температури тіла, буде рівна похідній температури від часу $\frac{dT}{dt}$.

У відповідності до умови задачі маємо диференціальне ріняння:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20),$$

де k – коефіцієнт пропорціональності.

Розділимо змінні і обчислимо загальний інтеграл:

$$\frac{dT}{T-20}=k\cdot dt=>$$

$$\int\frac{dT}{T-20}=\int k\cdot dt=>\ln(T-20)=kt+lnC=>T-20=Ce^{kt}=>$$

$$T=Ce^{kt}+20.$$

Для визначенння постійних величин C і k використаємо початкові умови задачі:

$T = 100^0$ при $t = 0$ хв;

$\mathrm{T} = 60^0$ при $t = 20$ хв.

Підставляючи ці початкові умови в отриманий загальний розв'язок, будемо мати:

$$\begin{cases}100=20+C\\60=20+Ce^{20k}\end{cases}=>\begin{cases}C=80\\e^{20k}=\frac{1}{2}\end{cases}=>e^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Остаточно, отриманий закон зміни температури тіла в залежності від часу: $T=80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}+20.$

13.2.2. *Однорідні диференційні рівняння першого порядку*.

Поняття диференційного рівняння першого порядку пов'язано з *однорідними функціями.*

Многочлен $P(x,y) = \sum a_{ij}x^i y^j$ називається *однорідним степені* n, якщо усі його члени мають один і той же порядок n, тобто для кожного такого члена $a_{ij}x^i y^j$ маємо $i + j = n$.

Наприклад, $P(x,y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ є многочлен степені 2.

Якщо аргументи x, y однорідного мночлена степені n замінити на пропорційні величини kx та ky, то в результаті початковий многочлен помножиться на n-й степінь коефіцієнта пропорційності k.

Так для многочлена $P(x,y) = 2x^2 - 3xy - 5y^2$ маємо:
$P(kx,ky) = 2(kx)^2 - 3(kx)(ky) - 5(ky)^2 = k^2(2x^2 - 3xy - 5y^2) = k^2 P(x,y)$.

Ця властивість покладена в основу загального означення однорідної функції.

Означення 4. *Функція P(x, y) називається однорідною степені n, якщо для довільного числа k має місце тотожність* $P(kx,ky) = k^n P(x,y)$.

Розглянемо тепер диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{13.10}$$

Означення 5. *Диференціальне рівняння першого порядку* (13.10) *називається однорідним, якщо коефіцієнти P(x,y) та Q(x,y) при диференціалах змінних x та y є однорідні функції однакового степеню.*

Можна довести, що *застосовуючи підстановку*

$$u = \frac{y}{x} \qquad \text{або } v = \frac{x}{y} \tag{13.11}$$

диференціальне рівняння (13.10) *приводиться до рівняння з розділеними змінними*.

Приклад 13.4. Розв'язати диференціальне рівняння $(x + y)dx + xdy = 0$.

Тут $P = x+y$ і $Q = x$ - однорідні функції першого степеню, тому це рівняння може бути зведене до рівняння з розділеними змінними підстановкою (13.11).

$u = \frac{y}{x}$, і, відповідно $y = ux$, де u – невідома функція аргументів x та y. Звідси $dy = xdu + udx$.

Підставивши цей вираз в початкове рівняння маємо:

$$(x + xu)dx + x(xdu + udx) = 0 \Rightarrow xdu + (2u + 1)dx = 0$$

Розділивши змінні, отримаємо $\dfrac{du}{2u+1} = -\dfrac{dx}{x}$.

Для зручності домножимо обидві частини рівняння на 2 і проінтегруємо почленно:

$$\int \frac{2du}{2u+1} = -2\int \frac{dx}{x} => \ln(2u+1) = -2lnx + lnC => 2u+1 = \frac{C}{x^2}$$

Повертаючись до початкових змінних (зворотня підстановка) маємо $\frac{2y}{x} + 1 = \frac{C}{x^2}$, і відповідно, загальний розв'язок рівняння такий:

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}$$

де $C_1 = \frac{C}{2}$ - довільна стала.

У процесі рішення ми ділили на функції x та $2u+1$. Прирівнюючи їх до нуля, отримаємо можливі розв'язки:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2u + 1 = 0 \end{cases} => y = -\frac{x}{2}$$

Обидві функції задавольняють початкове диференціальне рівняння, крім того таке значення можна отримати із загального розв'язку при $C_1 = 0$.

Нехай тепер однорідне диференціальне рівняння має вигляд

$$y' = f(x,y), \qquad \text{або} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (13.12)$$

Записуючи рівняння (13.12) в диференціалах , отримаємо: $dy=f(x,y)dx$.

При dy стоїть коефіцієнт рівний 1, тобто однорідна функція нульового степеню, значить і *f(x,y)* також має бути однорідною функцією нульового степеню.

Таким чином, *диференціальне рівняння* (13.12) *являється однорідним тоді і лише тоді, коли права частина його f(x. y) є функція однорідна нульового степеня*.

13.2.3. *Лінійні диференційні рівняння першого порядку.*

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \qquad (13.13)$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – задані функції. Якщо $a(x) \neq 0$, то рівняння (13.13) можна записати у *приведеному вигляді*

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (13.14)$$

де $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$; $f(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}$, (*f(x)* – вільний член або права частина рівняння).

Вважаємо, що коефіцієнт *p(x)* та вільний член *f(x)* рівняння (13.14) неперервні на деякому інтервалі (a, b).

Для розв'язку рівнняння (13.14) шукану функцію y записують як добуток двох співмножників:

$$y = u(x)v(x) = uv, \qquad (13.15)$$

де *u(x)*- деякий не нульовий розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$u' + p(x)u = 0, \qquad (13.16)$$

а $v(x)$– нова невідома функція. Враховуючи, що

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v', \qquad (13.17)$$

і підставляючи вирази (13.15) і (13.17) у диференціальне рівняння (13.14), отримаємо

$$v\left[u' + p(x)u\right] + uv' = f(x). \qquad (13.18)$$

Із (13.16) маємо $uv' = f(x)$ (13.19)

Фактично *функція u(x) підбирається так, щоб коефіцієнт при v у рівнянні* (13.18) *був рівний нулеві.*

Із рівнянь (13.16) та (13.19) послідовно знаходять функції u і v, причому для u вибирається деяке конкретне рішення, відмінне від нуля.

Зауваження. На практиці немає необхідності приводить лінійне рівняння (13.13) до виду (13.14); можна відразу застосовувати підстановку (13.15).

Приклад 13.5. Розв’язати рівняння $xy' + 2y = x^2$.

Задане рівняння , очевидно, є лінійним, так як містить шукану функцію y та її похідну y' в першому степені і не містить їх добутків. Покладемо

$$y = uv, \; y' = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

Підставляючи ці вирази в початкове рівняння отримаємо:

$$v(xu' + 2u) + xuv' = x^2.$$

Підбираємо функцію u так, щоб

$$(xu' + 2u) = 0; \qquad (1)$$

тоді $xuv' = x^2$ (2)

Із (1) отримуємо $xuv' = x^2 \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = -2u \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -2\dfrac{dx}{x}$;

Інтегруємо останній вираз $\int \dfrac{du}{u} = -2\int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = -2\ln x + \ln C_0$.

Припустивши $C_0 = 1$ ($\ln C_0$), отримаємо $u = \dfrac{1}{x^2}$.

Підставимо отримане значення для u в (2):

$$xuv' = x^2 \Rightarrow x\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dx} = x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x^3 \Rightarrow v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

Остаточно знаходимо шукану функцію:

$$y = uv = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$$

Приклад 13.6. Знайти розв'язок рівняння $(x + y)y' = 1$, що задовольняє початкові умови: $y = 0$ при $x = -1$.

На вигляд дане рівняння не є лінійним. Але, якщо розглядати x як функцію від у, то враховуючи, що $y' = \frac{1}{x'}$, отримаємо лінійне рівняння

$$(x + y)y' = 1 => \begin{bmatrix} x = f(y) \\ y' = \dfrac{1}{x'} \end{bmatrix} = x' = x + y$$

Тоді, використовуючи формули (13.15) і (13.17), маємо:

$$\begin{cases} x = uv \\ x' = \dfrac{dx}{dy} = v\dfrac{du}{dy} + u\dfrac{dv}{dy} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Підставимо (2) у вираз для похідної x: $\qquad x' = x + y \Rightarrow$

$$\Rightarrow v\frac{du}{dy} + u\frac{dv}{dy} = uv + y \Rightarrow \left(\text{вибираємо}\ \frac{du}{dy} = u\right) \Rightarrow uv + u\frac{dv}{dy} = uv + y \ \Rightarrow u\frac{dv}{dy} = y \quad .(3)$$

Частинний розв'язок знаходимо з рівняння $\frac{du}{dy} = u$.

$$\int \frac{du}{u} = \int dy \Rightarrow u = e^y .$$

Із рівності (3) (інтегрування частинами) отримуємо

$$e^y \frac{dv}{dy} = y; \quad dv = ye^{-y}dy \Rightarrow v = \int ye^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C .$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння буде: $x = uv = -y-1+Ce^y$.

Підставляючи в останню рівність початкові умови ($y = 0$ при $x = -1$), маємо $\qquad -1 = -1 + C \Rightarrow C = 0$.

Остаточно, шуканий частинний розв'язок: $x = -y - 1 \Rightarrow y = -(x+1)$.

13.3. *Диференціальні рівняння другого порядку.*

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку, що розв'язується відносно старшої похідної, наступний:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{13.20}$$

Загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{13.21}$$

цього рівняння містить дві незалежні довільні сталі C_1 та C_2.

Геометрично загальний розв’язок представляє собою нескінченну сукупність інтегральних кривих, що залежить від двох незалежних параметрів C_1 та C_2 .

Взагалі то, через кожну точку $M(x_0,\ y_0)$ площини Oxy проходить пучок інтегральних кривих. Тому, щоб із цілого сімейства інтегральних кривих виділити одну криву, недостатньо вказати тільки точку $M(x_0,\ y_0)$, через яку вона проходить, необхідно задати напрямкок, в якому обрана інтегральна крива проходить через цю точку, тобто задати тангенс кута α_0 , утвореного дотичною до цієї кривої в точці $M(x_0,\ y_0)$ з додатнім напрямком осі абцис.

Аналітично, якщо позначити $tg\alpha_0 = y_0'$, то приходимо до таких *початкових умов* $y = y_0$, $y' = y_0'$ *при* $x = x_0$.

Використовуючи (13.21) початкові умови запишуться як система:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' = \varphi'_{ч}(x_0, C_1, C_2) \end{cases} \tag{13.22}$$

Із системи (13.22) можна знайти довільні сталі C_1 та C_2 і тим самим отримати частинний розв’язок $y = \varphi(x)$, що задовольняє рівняння (13.20) і задані початкові умови (*задача Коші*).

$$\begin{cases} y\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases} \tag{13.23}$$

За допомогою диференціального рівняння друого порядку записується основне рівняння динаміки.

Нехай матеріальна точка маси m рухається по осі Ox під дією змінної сили F. Якщо позначити через g прискорення цієї точки, то у відповідності до закону Ньютона маємо $mg = F$. (1)

У найбільш загальному випадку сила F залежить від часу t , координати x, що характеризує положення точки на осі Ox та швидкості руху $\frac{dx}{dt}$ цієї точки. Тобто, $F = F(x, t.\ \frac{dx}{dt})$

З іншого боку, як відомо, прискорення точки що рухається прямолінійно визначається як похідна швидкості за часом: $g = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Підставляючи два останні вирази у рівняння (1), отримаємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, t, \frac{dx}{dt}\right).$$

Щоби повністтю описати рух матеріальної точки, треба задати початкове положення точки на осі абцис і початкову швидкість руху точки - початкові умови:

$$\begin{cases} x\big|_{t=t_0} = x_0 \\ x'\big|_{t=t_0} = v_0 \end{cases}.$$

13.3.1. *Інтегровані диференціальні рівняння другого порядку*.

У загальному випадку диференціальне рівняння не може бути розв'язане в закінченому виді. Розглянемо кілька окремих випадків, коли диференціальне рівняння другого порядку розв'язується за допомогою *квадратур – застосуванням операцій невизначеного інтегрувапння.*

I. Нехай $y'' = f(x)$. Інтегруючи, маємо $y' = \int f(x)dx + C_1$. Інтегруючи повторно, остаточно отримаємо: $y = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2$, де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Тут невизначені інтеграли трактуються як первісні відповідних функцій.

II. Нехай $y'' = f(y)$. Позначимо $y' = p$. Звідси, розглядаючи p як функцію від y, маємо $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \quad \Rightarrow \quad p\frac{dp}{dy} = f(x)$.

Розділяючи змінні, отримаємо $pdp = f(y)dy$.

Інтегруванням останнього виразу знаходимо:

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y)dy + \frac{C_1}{2} \quad \Rightarrow p = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}.$$

Розділивши змінні в останньому виразі та інтегруючи його ще раз, остаточно будемо мати загальний розв'язок: $\int \frac{dy}{\pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm x + C_2$.

Не варто запам'ятовувати цю складну формулу загаального розв'язку, слід засвоїти спосіб інтегрування.

III. Нехай $y'' = f(y')$. Позначимо $y' = p$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$ і початкове рівняння приймає вид $\frac{dp}{dx} = f(p)$. Розділяючи змінні та інтегруючи, послідовно, будемо мати: $\frac{dp}{f(p)} = dx \Rightarrow \int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1$.

Звідси, враховуючи що $p = \frac{dy}{dx}$, шляхом повторного інтегрування можна знайти загальний розв'язок для *y*.

Приклад 13.7. Визначити закон руху матеріальної точки з масою m, підкинутої вертикально вверх з початковою швидкісттю v_0.

Вертикальну пряму – траєкторію руху точки, приймаємо за вісь Ox, дадатній напрям якої направлений верх. За початок координат візьмемо початкове положення матеріальної точки. Якщо нехтувати опором повітря, то єдина сила, що діє на точку, є сила тяжіння, чисельно рівна mg і направлена вниз. Відповідно до закону Ньютона маємо наступне диференціальне рівняння руху точки: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -g$. (1)

Крім того, мають місце початкові умови $\begin{cases} x\big|_{t=0} = 0 \\ \frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = v_0 \end{cases}$.

Виконуючи підстановку $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \end{cases}$ із рівняння (1) отримаємо: $\frac{dv}{dt} = -g \Rightarrow dv = -gdt$. Інтегруючи: $\int dv = -g\int dt \Rightarrow v = C_1 - gt$.

Використовуючи початкові умови знаходимо $C_1 = v_0$.

Звідси $v = v_0 - gt$, або $\frac{dx}{dt} = v_0 - gt$.

Інтегруючи ще раз отримаємо загальний розв’язок $x = C_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

В силу першої початкової умови $x = 0$ при $t = 0$, з останньої рівності знаходимо $C_2 = 0$.

Остаточно, закон руху матеріальної точки, підкинутої вертикально вверх з заданою початковою швидкістю v_0, без урахування опору повітря буде:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Зокрема, у найвищій точці підйому матеріальної точки має бути $v = 0$, звідси з рівняння $v = v_0 - gt$, знаходимо час підйому $t = \frac{v_0}{g}$, а з рівняння $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, знаходимо висоту підйому $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

Приклад 13.8. Розв’язати рівняня $y'' = y^{-3}$.

Тут покладемо $y' = p$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \Rightarrow p \cdot \frac{dp}{dy} = y^{-3}$.
Розділяючи змінні та інтегруючи послідовно маємо:

$$\int pdp = \int y^{-3} dy \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 - y^{-2}}, \quad (C_1 > 0).$$

Так як $y' = p$ то $y' = \frac{dy}{dx} = \left(\pm\sqrt{\left(C_1 - y^{-2}\right) \cdot \frac{y^2}{y^2}} \right) \cdot = \pm \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y}$.

Отримали рівняння першого порядка. Розділимо змінні і домножимо обидві частини отриманої рівності на C_1

$$\frac{ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx \Leftrightarrow \frac{C_1 ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm C_1 dx \Rightarrow \int \frac{C_1 ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm\int C_1 dx = \left(\pm C_1 x + C_2\right).$$

Обчислимо інтеграл лівої частини останньої рівності:

$$\int \frac{C_1 ydy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \left| C_1 ydy = \frac{1}{2} d\ (C_1 y^2 - 1) \right| = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(C_1 y^2 - 1\right)}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \sqrt{C_1 y^2 - 1}.$$

Таким чином: $\sqrt{C_1 y^2 - 1} = \left(\pm C_1 x + C_2\right)$ і остаточно: $C_1 y^2 - 1 = \left(C_1 x + C_2\right)^2$.

Приклад 13.9. Розв’язати рівняння $2y'y'' = 1$, що задовольняє початкові умови $y = 0,\ y'|_{x=1} = 1$.

Нехай $y' = p$ та $y'' = \frac{dp}{dx}$, тоді $2p\frac{dp}{dx} = 1$. Розділяючи змінні та інтегруючи послідовно отримаємо

$$2\int pdp = \int dx \Rightarrow p^2 = x + C_1. \qquad \left(p^2 = x + C\right)\Big|_{x=1} \Rightarrow 1 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Тепер $p^2 = x \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$. Перед коренем беремо знак «+», так як при $x = 1$ повинно бути $p = 1$.

Розділяючи змінні та інтегруючи останній вираз знаходимо загальний розв’язок $y = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_2$.

Обчислюємо довільну сталу C_2 з початкових умов $y = 0$ при $x = 1$:

$$0 = \frac{2}{3} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{2}{3}.$$

Таким чином, шукане рішення диференціального рівняння запишеться так: $y = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} - 1 \right)$.

13.3.2. *Випадки зниження порядку*.

Розглянемо два випадки, коли диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y'),$$

(формула 13.20) зводиться до диференціального рівняння першого порядку.

Випадок I. Нехай ліва частина рівняння (13.20) явно не містить x, тобто рівняння (13.20) приймає вигляд $y'' = f(y, y')$ (13.24)

Вважаючи тут $y' = p$, і $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$, отримали рівняння першого порядку $\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y.\ p)$, де за незалежну вважають змінну y.

Випадок II. Нехай ліва частина рівняння (13.20) явно не містить y, тобто рівняння (13.20) приймає вигляд $y'' = f(x, y')$ (13.25)

Позначивши $y' = p$ та $y'' = \frac{dp}{dx}$, отримали рівняння першого порядку $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$,

Примітка. Розглянуті в попередньому пункті типи рівнянь I та III є частинними випадками рівнянь (13.24) та (13.25) відповідно.

Приклад 13.10. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку $y'' = \frac{2xy'}{x^2 + 1}$, що задовольняє початкові умови: $y_{|x=0} = 1,\ y'\big|_{x=0} = 3$.

Дане рівняння не містить в явному вигляді функцію y. Припустимо, що $y' = p$ та $y'' = \frac{dp}{dx}$

Тоді задане рівняння прийме вид: $\frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{x^2 + 1}$. Розв'яжемо його відносно невідомої функції p, як рівняння з розділеними змінними

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{x^2 + 1} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{x^2 + 1} \Rightarrow \ln p = \ln\left(x^2 + 1\right) + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1\left(x^2 + 1\right) \Leftrightarrow y' = C_1\left(x^2 + 1\right)$$

Використовуючи початкову умову $y'\big|_{x=0} = 3$, обчислимо значення довільної сталої C_1: $3 = C_1(0 + 1) \Rightarrow C_1 = 3$

Тепер розв'язуємо диеренціальне рівняння першого порядку $y' = 3\left(x^2 + 1\right)$.

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(x^2 + 1\right) \Rightarrow dy = 3\left(x^2 + 1\right)dx \Rightarrow y = x^3 + 3x + C_2$$

Використовуючи початкову умову $y_{|x=0} = 1$, знаходимо значення довільної сталої C_2=1.

Таким чином, $y=x^3+3x+1$ є частинний розв’язок заданого диференціального рівняння другого порядку.

Приклад 13.11. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння другого порядку $(y-1)y''-2(y')^2=0$, що задовольняє початкові умови: $y_{|x=0}=2,\ y'\big|_{x=0}=3$.

Дане рівняння не містить в явному вигляді функцію x.

Припустимо, що $y'=p(y)$ та $y''=\dfrac{dp}{dy}\cdot p$ (випадок II). Тоді початкове рівняння прийме вид $(y-1)p\dfrac{dp}{dy}-2(p)^2=0$. Як видно, ми отримали диференційне рівняння першого порядку відносно змінних p та y. Розв’язуємо це рівняння.

$$(y-1)p\frac{dp}{dy}-2(p)^2=0 \Rightarrow p\left[(y-1)\frac{dp}{dy}-2p\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ (y-1)\dfrac{dp}{dy}-2p=0 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Рівняння (1): $p = 0$ або $y'=p(y)=0$, що протирічить початковій умові $y'\big|_{x=0}=3$.

У рівнянні (2) розділяємо змінні та інтегруємо

$$\frac{dp}{p}=\frac{2dy}{y-1} \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{2dy}{y-1} \Rightarrow \ln p = 2\ln|y-1|+\ln C_1 \Rightarrow p=C_1(y-1)^2 \Leftrightarrow y'=C_1(y-1)^2,$$

за умовою $y_{|x=0}=2,\ y'\big|_{x=0}=3$, тому $3=C_1(2-1)^2 \Rightarrow C_1=3$.

Тепер розв’язуємо рівняння першого порядку $y'=3(y-1)^2$. Розділивши змінні отримаємо загальний розв’язок:

$$\frac{dy}{(y-1)^2}=3dx \Rightarrow \int\frac{dy}{(y-1)^2}=3\int dx \Rightarrow -\frac{1}{y-1}=3x+C_2$$

Використовуючи умову $y_{|x=0}=2$, знаходимо значення довільної сталої C_2 = -1. Тоді, шуканий частинний розв’язок буде: $-\dfrac{1}{y-1}=3x-1 \Rightarrow \quad y=\dfrac{2-3x}{1-3x}$.

13.3.3. *Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.*

Нагадаємо: *диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним, якщо воно містить шукану функцію, похідну першого і похідну другого порядку в першій степені і не містить їх добутків*.

Означення 6. *Диференціальне рівняння виду*

$$y'' + py' + qy = 0\,, \qquad (13.26)$$

де p і q – постійні числа, називається однорідним лінійним рівнянням з постійними коефіцієнтами.

Для рішення рівняння (13.26) треба скласти *характеристичне рівняння* виду

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (13.27)$$

та знайти його корені k_1 та k_2.

Якщо корені k_1 та k_2 *дійсні числа, причому різні*, то загальний розв'язок рівняння (13.26) знаходять за формулою

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} \qquad (13.28)$$

Якщо корені k_1 та k_2 *дійсні числа, але рівні між собою (кратні)*, то загальний розв'язок рівняння (13.26) знаходять за формулою

$$y = e^{k\,x}(C_1 + C_2x) \qquad (13.29)$$

Якщо корені k_1 та k_2 *комплексні спряжені числа, тобто* $k_1 = \alpha + i\beta$ *і* $k_2 = \alpha - i\beta$, то загальний розв'язок рівняння (13.26) знаходять за формулою

$$y = e^{\alpha\cdot x}(C_1Cos\beta\cdot x + C_2Sin\beta\cdot x) \qquad (13.30)$$

Приклад 13.12. Знайти загальний розв'язок наступних диференціальних рівнянь:

1) $y'' + 2y' - 15y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9 = 0$; 3) $y'' - 4y' + 13 = 0$.

1). $y'' + 2y' - 15y = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо корені його:

$k^2 + 2k - 15 = 0$, k_1 = -5 , k_2 = 3.

Застосовуємо формулу (13.28) та записуємо загальний розв'язок

$y = C_1e^{-5x} + C_2e^{3\,x}$, де C_1 та C_2 – довільні сталі.

2). $y'' - 6y' + 9 = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має кратні корені k_1 = k_2 = 3, тому використовуємо формулу (13.29): $y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$.

3). $y'' + 2y' - 15y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$ має комплексні корені k_1 = 2 +i3, k_2 =2 – 3i, тому використовуємо формулу (13.30):

$y = e^{2\cdot x}\left(C_1 Cos3x + C_2 Sin3x\right)$.

<u>Приклад 13.13</u>. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + y' - 2y = 0$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

Спочатку знаходимо загальний розв'язок даного рівняння. Характеристичне рівняння $k^2 + k - 2 = 0$ має корені $k_1 = -2$ $k_2 = 1$, тому використовуючи формулу (13.28) маємо загальний розв'язок:

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ (1).

Диференціюючи обидві частини (1), отримаємо: $y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Підставляючи початкові умови, отримаємо систему двох лінійних рівнянь відносно довільних сталих C_1 та C_2: $\begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 0 = -2C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$.

Таким чином, $y = e^{-2x} + 2e^x$ є шуканий частинний розв'язок.

13.3.4. *Лінійні неоднорідні диференціальні рівняня другого порядку з постійними коефіцієнтами.*

Розглянемо *лінійне неоднорідне рівняння другого порядку*

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (13.31)$$

де p і q – постійні числа, f(x (права частина))- невідома функція від x.

Має місце наступна теорема.

<u>*Теорема*</u> <u>13.1</u>. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* (13.31) *дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння* $\tilde{y}$

$$\tilde{y}'' + p\widetilde{y}' + q\tilde{y} = 0 \qquad (13.32)$$

та деякого частинного розв'язку $y_ч$ *даного неоднорідного рівняння* (13.31):

$$y = \tilde{y} + y_ч \qquad (13.33)$$

Розв'язок однорідного рівняння (13.32) знаходять за допомогою формул (13.28) – (13.30) в залежності від коренів характеристичного рівняння.

Розв'язок (частинний) неоднорідного рівняння (13.31) може бути знайдено *методом невизначених коефіцієнтів* в тих випадках, коли права частина рівняння (13.31), тобто функція *f(x)*, є многочлен, показникова фунція або тригонометрична функція.

В залежності від структури функції *f(x)* та коренів характеристичного рівняння (13.27) буде змінюватись і структура частинного розв'язку $y_ч$.

І. Права частина *f(x)* рівняння (13.31) – *многочлен n –го степеню*. Тоді має місце теорема.

<u>*Теорема* 13.2.</u> *Якщо права частина f(x) неоднорідного рівняння (*13.31*) є многочлен n –го степеню і число нуль не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок* $y_ч$ *необхідно шукати у вигляді многочлена*

того ж степеню. Якщо один з коренів характеристичного рівняння рівний нулеві, то частинний розв'язок $y_ч$ *необхідно шукати у вигляді добутку многочлена того ж степеню на x.*

II. Права частина *f(x)* рівняння (13.31) – *показникова функція*. Тоді має місце теорема.

<u>Теорема 13.3.</u> *Якщо права частина f(x) неоднорідного рівняння (*13.31*) є показникова функція виду* $f(x)=\alpha e^{mx}$ *і число m не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок* $y_ч$ *необхідно шукати у вигляді* $y_ч = A e^{mx}$, *де A – коефіцієнт який треба визначити.*

Якщо число m співпадає з одним з коренів характеристичного рівняння, то $y_ч = A\cdot x e^{mx}$.

Якщо число m співпадає з кожним з двох коренів характеристичного рівняння, то $y_ч = Ax^2 e^{mx}$.

III. Права частина *f(x)* рівняння (13.31) – *тригонометричний поліном*. Тоді має місце теорема.

<u>Теорема 13.4.</u> *Якщо права частина f(x) неоднорідного рівняння (*13.31*) є тригонометричний поліном виду* $f(x)=e^{mx}(a\cdot Cosnx+b\cdot Sinnx)$ *і числа* $(m \pm ni)$ *не є коренями характеристичного рівняння (є дійсними числами), то частинний розв'язок шукають у вигляді*

$$y_ч = e^{mx}\left(A\cdot Cos\, nx + B\cdot Sin\, nx\right)$$

Якщо числа $(m \pm ni)$ *є коренями характеристичного рівняння (комплексні числа), то частинний розв'язок шукають у вигляді*

$$y_ч = xe^{mx}\left(A\cdot Cos\, nx + B\cdot Sin\, nx\right).$$

<u>Приклад 13.14</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння

$y'' + 2y' - 3y = 6x - 7$ (1).

Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + 2y' - 3y = 0$.

Корені відповідного характеристичного рівняння $k^2 + 2k - 3 = 0$, такі k_1 = -3 , k_2 = 1, значить, $\tilde{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

Так як число нуль не є коренем характеристичного рівняння, то, користуючись теоремою 13.2, визначаємо структуру частинного розв'язку неоднорідного рівняння, як многочлен першого степеню $y_ч = Ax + B$, тоді $y'_ч = A$ і $y''_ч = 0$.

Підставимо отримані значення в праву частину заданого рівняння (1), отримаємо: $0 + 2A - 3(Ax + B) = 6x - 7$.

Обираємо невизначені коефіцієнти так, щоб остання рівність стала тотожністю. Для цього прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях *x*. У результаті отримуємо систему двох рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A та B.

$\begin{cases} -3A = 6 \\ 2A - 3B = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}$. Тоді, частинний розв'зок: $y_ч$ =-2x + 1.

За формулою (13.33) запишемо загальний розв'язок заданого рівняння: $y = \tilde{y} + y_ч = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} - 2x + 1$.

Приклад 13.15. Знайти загальний розв'язок рівняння
$y'' - 7y' + 10y = 4e^{3x}$ (2).

Попередньо знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 7y' + 10y = 0$. Так як характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 10 = 0$ має два різних корені k_1 = 2 , k_2 = 5, то загальний розв'зок: $\tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$.

У даному прикладі маємо праву частину – показникову функцію, тому у знаходженні частинного розв'язку використовуємо теорему 13.3.

Число m = 3 не співпадає з жодним з коренів характеристичного рівняння, тому $y_ч$ =A e^{3x}. Щоб знайти значення коефіцієнта A, підставимо отримані значення в ліву частину заданого рівняння (2).

$$9Ae^{3x} - 21Ae^{3x} + 10Ae^{3x} = 4e^{3x} \Rightarrow -2Ae^{3x} = 4e^{3x} \Rightarrow A = -2 .$$

Таким чином $y = \tilde{y} + y_ч = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} - 2e^{3x}$.

Приклад 13.16. Знайти загальний розв'язок рівняння
$y'' - 6y' + 5y = 8Cosx + 38Sinx$ (3).

У правій частині рівняня (3) записано тригонометричний поліном, тому для визначення частинного розв'язку використовуємо теорему 13.4.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 6y' + 5y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 5 = 0$ має корені k_1 = 1 , k_2 = 5, тоді загальний розв'язок має вигляд: $\tilde{y} = C_1e^{x} + C_2e^{5x}$.

Так як в даному випадку корені характеристичного рівняння дійсні числа, то для знаходження $y_ч$ використовуємо формулу
$y_ч = e^{mx}(A \cdot Cos\,nx + B \cdot Sin\,nx)$.

В даному прикладі $f(x) = 8Cosx + 38Sinx$, тобто m = 0, a = 8, b = 38, n = 1. Тому, $y_ч = A \cdot Cosx + B \cdot Sinx$.

Диференціюємо двічі: $y'_ч = -ASinx + B \cdot Cosx$; $y''_ч = -ACosx - B \cdot Sinx$.

Підставивши отримані значення в ліву частину рівняння (3) отримаємо:
$-ACosx - BSinx + 6ASinx - 6BCosx + 5ACosx + 5BSinx = 8Cosx + 38Sinx$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових функціях, отримуємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A та B.

$$\begin{cases} 4A - 6B = 8 \\ 6A + 4B = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = 2 \end{cases}.$$

Остаточно: $y_ч = 5Cosx + 2Sinx$;

$y = \tilde{y} + y_ч = C_1e^x + C_2e^{5x} + 5Cosx + 2Sinx$.

13.4.1. *Питання для самостійного контролю знань.*

1. Яке рівняння називається диференційним?
2. Що називають порядком диференційного рівняння.
3. Що називається розв'язком диференційного рівняння?
4. Що називається загальним розв'язком диференційного рівняння?
5. Який геометричний зміст частинного розв'язку диференційного рівняння першого порядку? Загального розв'язку?
6. Яке диференційне рівняння називається рівнянням з розділеними змінними?
7. Яке диференційне рівняння першого порядку називається лінійним? Вкажіть його спосіб розв'язування.
8. Що називається загальним розв'язком диференційного рівняння другого порядку?
9. Який геометричний зміст початкових умов диференціального рівняння другого порядку?
10. Які диференціальні рівняння другого порядку допускають зниження порядку? Приведіть спосіб розв'язку таких рівнянь.
11. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням другого порядку?
12. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку?
13. Яке рівняння називається характеристичним і як воно знаходиться для даного лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами?
14. Який вигляд має загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння другого порядку, в залежності від коренів характеристичного рівняння?
15. Який вид має загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами?
16. Який вигляд має частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, в залежності від типу функції правої частини рівняння?

13.4.2. *Задачі для самостійної підготовки.*

Задача № 1. Показати що функція $y = Ce^{-x^2}$, де C – довільна стала, являється розв'язком рівняння $y' + 2xy = 0$.

Задача № 2. Показати що функція $y = e^x(C_1 Cos\, x + C_2 Sin\, x)$, де C_1, C_2– довільні сталі, являється розв'язком рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Задача № 3. Знайти інтегральну криву рівняння $xy' = 2y$, що проходить через точку $M_0(2,3)$.

Задача № 4. Проінтегрувати рівняння з розділеними змінними:

а) $xdx + ydy = 0$; б) $ydx + xdy = 0$; в) $dx - xdy = 0$; г) $y' = 2 + y$; д) $y' = e^{x+y}$

Задача № 5. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

а) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$;   б) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

Задача № 6. Знайти інтегральну криву рівняння $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, що проходить через точку (1,0).

Задача № 7. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння:

а) $xy' = x^3 + y$;   б) $(x + y^2)y' = 1$.

Задача № 8. Знайти розв'язок рівняння $y' Cos\, x + y Sin\, x = 1$, що задовольняє початкові умови $y\big|_{x=0} = 0$.

Задача № 9. Проінтегрувати рівняння другого порядку:

а) $y'' = Sin\, x$;   б) $y'' = -y$;   в) $2yy'' = 1 + (y')^2$.

Задача № 10. Проінтегрувати лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами:

а) $y'' + y' - 2y = 0$; б) $y'' + y' + 2y = 0$; в) $y'' + y' + y = 0$;

г) $y'' + y' - 2y = 6x^2,\ y(0) = -4,\ y'(0) = -1$;

д) $y'' - 2y' + y = 8e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$;

е) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

ж) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Соколенко О.І. Вища математика. Підручник. Київ «Академія»,2002.-430 с.
2. Збірник задач з математичного аналізу, ч.1, за редакцією Ю.К.Рудавського, Львів,"Львівська політехніка",2001.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник.–К:А.С.К.,2001.–648с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: Навч.посібник.–К.:Видавництво А.С.К.. 2003.-480 с.
5. Ефимов А.В., Демидович Б. П. "Сборник задач по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа" – М. Наука. 1981.
6. Киселев В.П. Высшая математика (математические основы судовождения). Конспект лекций. - Одесса, Латстар, 2000.-160 с.
7. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: физматлит, 2003.
8. С.О. Станішевський, 1996, 2002. Навчальне видання. Вища математика. Навчальний посібник
9. Математические основы судовождения: Учеб.для вузов.Для курсантов судоводительских факультетов морских академий./ Кожухов В.П., Жухлин А.М., Кондрашихин В.Т., Логвиновский В.А., Лукин А.Н. М.: Транспорт, 1993, 200 с.
10. Кранц П. Сферическая тригонометрия: Пер.с нем./Под ред. Я.Н.Шпильрейна. Изд.2-е.- М.: Изд. ЛКИ,2007 – 96с.