ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ХЕРСОНСЬКИЙ АГРАРНО ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра менеджменту та інформаційних технологій

В И Щ А М А Т Е М А Т И К А

М Е Т О Д И Ч Н І Р Е К О М Е Н Д А Ц І Ї Д Л Я

П Р А К Т И Ч Н И Х З А Н Я Т Ь

І СЕМЕСТР

ХЕРСОН 2020

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ЗМІСТОВА ЧАСТИНА 1 .ЛІНІЙНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

ТЕМА 1. *Основи лінійної алгебри. Матриці та операції над ними. Властивості матриць. Визначники. Властивості визначників. Обернена матриця. Ранг матриці.*

Завдання:

1. Ввиконання арифметичних операцій над матрицями;
2. Обчислення визначників матриць;
3. Обчислення оберненої матриці;
4. Визначення рангу матриць.

Задачі для розв'язку на практичному занятті.

№1.Знайти суму і різницю двох матриць А і В.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ 7 & 10\end{pmatrix};\quad D=A-B=\begin{pmatrix}5 & -7\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

№ 2. Знайти матрицю С = АВ.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}0\cdot 2+1\cdot 0 & 0\cdot 3+1\cdot 1\\ 2\cdot 2+3\cdot 0 & 2\cdot 3+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 9\end{pmatrix}$$

№ 3. Знайти A^2, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$$

№ 4. Транспонувати матрицю A.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 10\end{pmatrix};\qquad A^T=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\\ 4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

№ 5. Обчислити визначник матриці трьома способами: 1) за правилом трикутника; 2) розкладенням визначника на алгебраїчні доповнення; 3) використавши властивості визначників.

1) $$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\cdot 2+(-2)\cdot 0\cdot 1-1\cdot 1\cdot 2-(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)-3\cdot 0\cdot 3=-12$$

2) $$\Delta=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=3\cdot(-2)+2\cdot(-2)+1\cdot(-2)=-12$$

3) переставимо місцями перший і третій рядки, виносячи з третього рядка спільний множник:

$$\Delta=-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

Послідовно множимо перший рядок на 2 і додаємо до другого рядка, потім на (-3) і додаємо до третього рядка:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Другий рядок множимо на 2 і додаємо до третього:

$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = -12$, обчислили визначник трикутної матриці.

<u>№ 6</u>. Знайти матрицю обернену до даної матриці: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Знайдемо визначник матриці A:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$ - матриця А на вироджена і до неї існує обернена A^{-1}.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Отже обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

<u>№7.</u> Визначити ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Мінор другого порядку

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, при обчисленні мінорів третього порядку виявляється, що рівними нулю будуть лише ті мінори 3-го порядку, що містять обчислений Δ, як мінор:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

У такому випадку обчислення усіх інших мінорів 3-го порядку не доцільно і ранг матриці дорівнює двом.

№8. Визначити ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\2&2&1&3&1\\3&1&4&-1&0\\4&4&2&6&2\end{pmatrix}$

При обчисленні рангу матриці доцільно виконати елементарні перетворення які приведуть матрицю до трапецієвидної (або трикутної) форми (усі елементи нижче головної діагоналі рівні нулю, або усі елементи останніх рядків рівні нулю і елементи головної діагоналі відмінні від нуля). Якщо елемент a_{11}=0, то перестановками рядків (стовбців) необхідно добитися протилежного $a_{11}\neq 0$. У нашому прикладі $a_{11}=1\neq 0$; елементи першого рядка послідовно множимо на (-2), на (-3) та на (-4) і додаємо відповідно до другого, третього і четвертого рядків:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\2&2&1&3&1\\3&1&4&-1&0\\4&4&2&6&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&-8&1&-7&-3\\0&-8&-2&-2&-2\end{pmatrix}\to$$

Помножимо другий рядок на (-2) і додаємо до третього і четвертого рядків послідовно, результатом додавання другого і четвертого рядків є нульовий рядок, який відкидаємо.:

$$\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&0&3&-5&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&-4&-1&-1&-1\\0&0&3&-5&-1\\ & & & & \end{pmatrix}$$

Остання матриця містить мінор третього порядку відмінний від нуля:

$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&1\\0&-4&-1\\0&0&3\end{vmatrix}=-12\neq 0$, отже ранг матриці дорівнює 3 (*r(A) рівний кількості діагональних елементів трикутної матриці*).

Задачі для самостійного розв'язку.

№1. Знайти суму, добуток і різницю матриць A і B.

а). $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&-3&1\\4&2&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-4&0&2\\1&3&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

б). $A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\2&1&0&3\\3&2&1&0\\0&1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1&0\\0&3&4&1\\0&1&2&3\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$

№2. Знайти добуток матриць A і$\cdot B$. Обчислити добуток матриці A на число α = -3

$A=\begin{pmatrix}-3&2&-1\\0&-1&3\\2&3&-1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$

№3. Знайти значення матричного многочлена

$2A^2$-6A+5E при $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, якщо E - одинична матриця третього порядку.

№4. Обчислити визначники

$a).\begin{vmatrix}-8 & 5\\ -5 & 1\end{vmatrix}$ $б).\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}$

$в).\begin{vmatrix}1 & -5 & 3\\ 4 & 0 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ $г).\begin{vmatrix}3 & 7 & -5\\ 8 & 7 & -3\\ 2 & -1 & 8\end{vmatrix}$

$д).\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & -1\end{vmatrix}$ $е).\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3\\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3}\\ 7 & -8 & -4 & -5\end{vmatrix}$

№5. Знайти обернені матриці до заданих.

$a).\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$ $б).\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$ $в).\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$г).\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$ $д).\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ $е).\begin{pmatrix}3 & 3 & -4 & -3\\ 0 & 6 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$

№6. Розв’язати матричні рівняння.

$a).\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$ $б).\ X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$

$в).\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$ $г).\ X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}$

№7. Обчислити ранг матриць з допомогою елементарних перетворень.

$a).\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ $б).\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$

$в).\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3 & -4\\ 4 & -7 & -2 & 1\\ -3 & 5 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $г).\begin{pmatrix}24 & 19 & 36 & 72 & -38\\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80\\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118\\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72\end{pmatrix}$

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

ТЕМА 2. *Системи n-лінійних рівнянь з n- змінними. Метод Крамера. Матричний метод. Метод Гаусса.*

Завдання:

1. Розв'язування системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці.
2. Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Крамера.
3. Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

Задачі для розв'язку на практичному занятті.

№1. Розв'язати систему методом оберненої матриці: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

Запишемо матрицю коефіцієнтів системи $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ і знайдемо обернену матрицю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю-стовбець $X = A^{-1}B$:

$$X = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - шуканий розв'язок системи

№2. Розв'язати систему методом Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

Визначник системи обчислили в прикладі №1: $\Delta = 9 \neq 0$ – система сумісна і визначена, тобто має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники Δ_j ($j = 1 \div 3$).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

За формулами (2.3) знайдемо значення невідомих:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{18}{9}=2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-18}{9}=-2;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{9}{9}=1.$$

<u>№3.</u> Розв'язати систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$

Запишемо розширену матрицю (A/b) системи: $(A/b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$.

Перший рядок залишаємо без змін, над другим і третім виконуємо елементарні перетворення: послідовно множимо перший рядок на (-2) і додаємо до другого, потім множимо на (-1) і додаємо до третього:

$$(A/b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right)\to,$$

помінявши місцями другий і третій стовбці маємо трикутну матрицю: $\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$,

повернемося до запису у вигляді системи, враховуючи, що з перестановкою стовбців матриці змінився порядок розміщення змінних у системі. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3 \\ -x_2+3x_3=5 \\ -3x_2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-3-2\cdot(-2)+1=2 \\ x_3=\dfrac{5-2}{3}=1 \\ x_2=-\dfrac{6}{3}=-2 \end{cases}$.

<u>Задачі для самостійного розв'язку</u>.

№1 Розв`язати систему лінійних рівнянь методом оберненої матриці та за формулами Крамера.

а). $\begin{cases} 3x_1-5x_2=13 \\ 2x_1-7x_2=81 \end{cases}$ *б*). $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16 \\ 5x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$

в). $\begin{cases} 3x_1-4x_2=1 \\ 3x_1+4x_2=18 \end{cases}$ *г*). $\begin{cases} 4x_1+4x_2+5x_3+5x_4=0 \\ 2x_1+\quad +3x_3-x_4=10 \\ x_1+\quad x_2-5x_3\quad =-10 \\ \quad 3x_2+2x_3\quad =1 \end{cases}$

д). $\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15 \\ 5x_1-2x_2+2x_3=15 \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36 \end{cases}$ *е*). $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6 \end{cases}$

№2. Розв`язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

$$a). \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$б). \begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5 \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8 \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4 \end{cases}$$

$$в). \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 \qquad + 21x_3 + 13x_4 = 3 \end{cases}$$

$$г). \begin{cases} x_1 + \qquad 3x_3 - 3x_4 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 17, \\ \qquad 12x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -9 \end{cases}$$

$$д). \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

$$е). \begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 \qquad - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ \qquad 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3

ТЕМА 3. *Основи векторної алгебри. Вектори і дії над ними. Лінійна залежність і незалежність векторів. Добуток векторів (векторний скалярний, мішаний).*

Завдання:

1. Виконання лінійних операцій над векторами.
2. Знаходження координат векторів, розклад вектора за базисом.
3. Обчислення добутків векторів.

Задачі для розв'язку на практичному занятті.

№1. З'ясувати, чи будуть вектори $\overrightarrow{a_1} = (1, 2, 3, 4)$, $\overrightarrow{a_2}$ = (2, 1, 1, 3) і $\overrightarrow{a_3}$ = (2, -1, 1, 3) лінійно залежні?

Запишемо векторну рівність умови лінійної залежності векторів:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0$$

Перепишемо її у вигляді:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ця рівність еквівалентна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0\\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0\end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до діагонального виду за допомогою елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix}1&2&2&0\\2&1&-1&0\\3&1&1&0\\4&3&3&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-3&-5&0\\0&-5&-5&0\\0&-5&-5&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&-3&-5&0\\0&-5&-5&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&3&5&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&1&1&0\\0&3&5&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&1&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Таким чином, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0\\ \qquad \alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ \qquad\quad 2\alpha_3 = 0\end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок $a_1 = a_2 = \alpha_3 = 0$. А це означає, що рівність

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \alpha_3\overrightarrow{a_3} = 0$$

можлива тільки при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Отже, вектори лінійно незалежні.

№2. В базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$., задано вектори $\vec{a}$ = (2,0,1), $\vec{b}$= (1,-1,2), $\vec{c}$= (3,1,1), $\vec{d}$= (1,1,1). Показати, що задані вектори утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$утворюють базис простору E_3, якщо вони лінійно незалежні. Запишемо умову лінійної залежності векторів:

$$\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}, +\alpha_3\vec{c} = 0 \text{, або}$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases}2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0\\ \quad -\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0\end{cases}$

Оскільки, основний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\0 & -1 & 1\\1 & 2 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то система має єдиний – тривіальний розв'язок $a_1 = a_2 = \alpha_3 = 0$, а це означає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базис.

Позначимо координати вектора $\vec{d} = (a_1, a_2, a_3)$ в базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b}, +\alpha_3\vec{c}$$

Ця векторна рівність рівносильна системі лінійних рівнянь: $\begin{cases}2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 1\\ \quad -\alpha_2 + \alpha_3 = 1\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1\end{cases}$

Оскільки основний визначник системи $\Delta = -2 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Знаходимо $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$.
Таким чином, в базисі векторів$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,маємо $\vec{d} = (-3, 1, 2)$.

<u>№3.</u> Дано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

Оскільки $\overrightarrow{A_1A_2} = (5;3;1)$ та $\overrightarrow{A_1A_4} = (1;4;-2)$, то косинус кута між векторами згідно формули (8.31) $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ має вигляд

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{\left\langle\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right\rangle}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{5\cdot1 + 3\cdot4 + 1(-2)}{\sqrt{25+9+1}\sqrt{1+16+4}} = \frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}} = \frac{15}{7\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

тоді

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Величина кута між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і ,тому

$$\left(A_1A_2\,\widehat{\ }\,A_1A_4\right) = \left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

<u>№4.</u> Дано$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Визначити, за яких значень α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ перпендикулярні.

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку за першою геометричною властивістю. Звідси для α маємо співвідношення:

$$(\vec{a} + \alpha\vec{b})\,(\vec{a} - \alpha\vec{b}) = 0$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку, розпишемо ліву частину останньої рівності:

$$(\vec{a} + \alpha\vec{b})(\vec{a} - \alpha\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \alpha^2|\vec{b}|^2$$

Підставляючи числові значення отримаємо: $9 - 25\alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm\frac{3}{5}$.

<u>№5.</u> Знайти довжину вектора $\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{y}$, якщо $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{y}| = 2$, а кут між векторами $\vec{x}$ та $\vec{y}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Маємо $(\vec{a} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2$. Звідси $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Тому:

$$|\vec{a}| = |\vec{x} - 2\vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - 2\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{x}^2 - 4\vec{x}\,\vec{y} + 4\,\vec{y}^{\,2})} = \sqrt{\left(\overline{|x|}^2 - 4|\vec{x}||\vec{y}|\cos\frac{\pi}{3} + 4\,\overline{|y|}^{\,2}\right)}$$
$$= \sqrt{13}$$

<u>№6.</u> Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2, -1, 0)$, $B(5, 5, 3)$, $C(3, 2, -2)$ і $D(4, 1, 2)$.

Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD}, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, тобто, 1/6 частині мішаного добутку вказаних векторів.

$V = \frac{1}{6} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right|$. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB} = (3;6;3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;3;-2)$ та об'єм паралелепіпеда: $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

<u>№7.</u> Довести, що точки $A(0, 1, 2)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(-1, 5, 8)$, $D(1, 6, 11)$ лежать в одній площині.

Точки A, B, C, D, лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 4, 6)$, $\overrightarrow{AD} = 1, 5, 9)$.

Оскільки мішаний добуток: $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$, то вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні, відповідно, задані точки лежать в одній площині.

<u>№8.</u> Яку трійку утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$, $\vec{c} = 1, -2, 5)$?

Обчислимо мішаний добуток: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0$, за властивістю 5 (див лекції) дані вектори утворюють праву трійку.

<u>*Задачі для самостійноного розв'язку*</u>.

№1. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – одиничні вектори, що утворюють з даною віссю $\vec{S}$ відповідно кути $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. Знайти проекції на вісь $\vec{S}$ вектора $3\vec{a} + 2\,\vec{b} + \vec{c}$.

№2. Знайти проекцію суми векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, |\vec{c}| = 8, \vec{d} = 12$, а кути, що утворюють вектори з віссю $\overrightarrow{S}$, відповідно дорівнюють $0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{3}$.

№3. Знайти модуль вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \frac{1}{5}\left(4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ та його напрямні косинуси.

№4. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1, -2), \vec{b} = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \vec{c} = (2, 0)$. Знайти координати наступних векторів: 1) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\,\vec{c}$; 2)) $\frac{3\vec{a} - 5\,\vec{b}}{2}$; 3)) $\frac{\vec{c} - 2\,\vec{b}}{3}$.

№5. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ колінеарні?

№6. Дано координати вершин паралелограма *ABCD*: $A = (2;\,2;\,2)$, $B = (6;\,5;\,0)$, $C = (0;\,3;\,8)$. Знайти координати вершини *D*.

№7. Вершини трикутника містяться в точках $A = (2;\,-1;\,3)$, $B = (4;\,0;\,1)$, $C = (-10;\,5;\,3)$. Знайти косинус кута $\angle ABC$.

№8. У трикутнику з вершинами $A = (5;\,4)$, $B = (-1;\,2)$, $C = (5;1)$ проведена медіана AD Знайти її довжину.

№ 9. Визначити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$.

№ 10. Дано трикутник з вершинами $A = (2;\,-1;\,2)$, $B = (1;\,2;\,-1)$, $C = (3;\,2;\,1)$. Знайти його площу.

№ 11. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ та $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$.

№ 13. Чи будуть компланарними вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (2, 5, 7), \vec{b} = (1, 1, -1), \vec{c} = (1, 2, 2)$;

2) $\vec{a} = (3, 2, -1), \vec{b} = (1, -1,\ 3), \vec{c} = (1, 9, -1)$?

№ 13. Дано три вектори $\vec{a} = (1, -1,\ 3), \vec{b} = (-2,\ 2,\ 1), \vec{c} = (3, -2, 5)$. Знайти$(\vec{a}\,\vec{b}\vec{c})$.

№ 14. Знайти об'єм піраміди, вершини якої розташовані в точках з такими координатами:

1) $A(3;-2;5)$, $B(1;3;1)$, $C(-1;-1;3)$, $D(4;3;4)$; 2) $A(1;-2;-1)$, $B(4;4;4)$, $C(2;1;-1)$, $D(3;0;3)$;

3) $A(6;1;4)$, $B(2;-2;-5)$, $C(7;1;3)$, $D(1;-3;7)$; 4) $A(1;2;6)$, $B(0;3;8)$, $C(-1;-5;4)$, $D(-3;2;-6)$.

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4

ТЕМА 4. *Аналітична геометрія на площині. Пряма на площині. Взаємне розміщення двох прямих. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої. Лінії другого порядку. Загальне рівняння ліній другого порядку.*

Завдання:

1. Розв'язок задач «пряма на площині та просторі.
2. Визначення взаємного розміщення прямих, обчислення кута між прямими.
3. Визначення типу лінії другого порядку за аналітичним рівнянням.
4. Обчислення числових характеристик ліній другого порядку.

Задачі для розв'язку на практичному занятті.

№ 1. Дано трикутник з вершинами $A(-1;-2)$, $B(2;-2)$, $C(1;3)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

За напрямний вектор шуканої прямої візьмемо вектор $\overrightarrow{AB}=(3;0)$. Ордината напрямного вектора $n=0$, тому рівняння шуканої прямої має вигляд $y = y_0$. Замінивши y_0 ординатою точки C, знайдемо $y=3$.

№ 2. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $M_1(-2;3)$ і $M_2(5;-1)$.

Замінивши в формулі кутового коефіцієнта x_1 і y_1 координатами точки M_1 та x_2, y_2 координатами точки M_2, отримаємо $k=\dfrac{-1-3}{5-(-2)}=-\dfrac{4}{7}$.

№ 3. Дано координати вершин трикутника *ABC:* $A(2;4)$, $B(6;3)$, $C(4;-3)$. Скласти рівняння медіани AD (рис. 4.1).

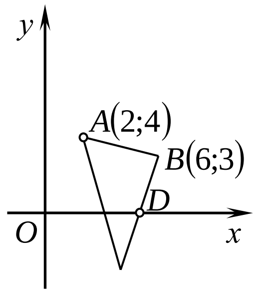


Рис.4.1

Координати точки D – середини сторони BC – знаходимо за формулами середини відрізка, за умови, що точки розглядаються на площині, тобто
$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{6+4}{2}=5 \text{ і } y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3+(-3)}{2}=0.$$
Підставивши в рівняння (4.13) замість x_1 і y_1 координати точки *A*, а замість x_2 і y_2 – координати точки D одержимо $\dfrac{x-2}{5-2}=\dfrac{y-4}{0-4}$ або
$$4x+3y-20=0.$$

№ 4. Серед множини прямих $A(x+3)+B(y-4)=0$ виділіть ту, яка перпендикулярна вектору $\vec{n}=-5\vec{i}+3\vec{j}$.

З рівняння даної множини прямих видно, що ці всі прямі проходять через точку з координатами $(-3;4)$. Маючи координати точки та вектора, який проходить перпендикулярно до даною прямої, можна, користуючись рівнянням (4.6), скласти рівняння шуканої прямої $-5(x+3)+3(y-4)=0$ або $5x-3y+27=0$.

№ 5. Дано трикутник *ABC* з вершинами $A(4;-3)$, $B(-2;6)$, $C(5;4)$. Скласти рівняння висоти CD (рис. 4.2).

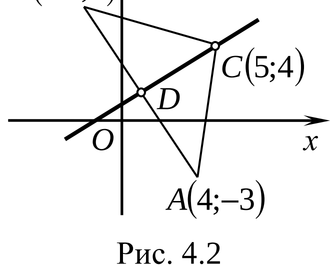


Рис. 4.2

Висота CD проходить через точку $C(5;4)$, тому в рівнянні (3.15) можна покласти $x_0=5, y_0=4$. За нормальний вектор прямої CD можна взяти вектор $\overrightarrow{BA}=(6;-9)$. Отже, шукане рівняння має вигляд $6(x-5)-9(y-4)=0$ або $2x-3y+2=0$.

<u>№ 6.</u> Дано рівняння прямої $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$. Записати:

1) загальне рівняння цієї прямої;
2) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
3) рівняння у відрізках;
4) нормальне рівняння.

1) для того, щоб записати дане рівняння прямої у загальному вигляді, зведемо дроби в лівій частині до спільного знаменника $\frac{x+2\sqrt{5}+2\left(y-2\sqrt{5}\right)}{4}=0$ і спростимо $x+2\sqrt{5}+2\left(y-2\sqrt{5}\right)=0$, в результаті пряма має такий загальний вигляд $x+2y-2\sqrt{5}=0$;

2) розв'язавши отримане загальне рівняння даної прямої відносно змінної y, одержимо рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$;

3) перенесемо вільний член загального рівняння в праву частину і поділимо на нього обидві частини рівності $\frac{x}{2\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}=1$, отримане рівняння є рівнянням у відрізках;

4) знаходимо нормуючий множник $\mu=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ (він береться із знаком плюс, бо вільний член загального рівняння прямої – від'ємний) і множимо на нього загальне рівняння прямої, одержимо $\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}-2=0$.

№ 7. Знайти кут між прямими:

1) $3x-4y+1=0$ і $5x-12y+3=0$;
2) $y=-3x+7$ і $y=2x+1$.

1) прямі задані загальними рівняннями, тому для знаходження кута між ними використаємо формулу (3.21), в якій покладемо $A_1=3, B_1=-4, A_2=5, B_2=-12$, тобто

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot5+(-4)\cdot(-12)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{15+48}{5\cdot13}=\frac{63}{65}\approx0{,}96,$$

значить $\varphi=\arccos0{,}96\approx16^\circ$;

2) Поклавши $k_1=-3, k_2=2$ у формулі (4.22), одержимо $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot2}\right|=1$, тобто $\varphi=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}=45^\circ$.

<u>№ 8</u>. Довести, що прямі:

1) $4x-6y+7=0$ і $20x-30y-11=0$ паралельні;
2) $y=0{,}6x+1{,}4$ і $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}$ перпендикулярні.

1) знайдемо згідно формули відношення відповідних координат нормальних векторів $\frac{4}{20}=\frac{-6}{-30}=\frac{1}{5}$, отже, умова паралельності прямих, заданих загальними рівняннями, виконується, значить, задані прямі є паралельними, що і треба було довести;

2) перевіримо виконання умови перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовими коефіцієнтами: $0{,}6=-\frac{1}{-\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$, отже, прямі перпендикулярні, що і треба було довести.

<u>№ 9</u>. Медіани BM і CN (рис. 4.3) трикутника ABC лежать на прямих $l_1: x+y-3=0$ та $l_2: 2x+3y-1=0$, а точка $A(1;1)$ – вершина трикутника. Скласти рівняння прямої BC.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x+y-3=0, \\ 2x+3y-1=0, \end{cases}$, знайдемо точку перетину прямих l_1 і l_2 , тобто медіан: $O(8;-5)$. З властивості точки перетину медіан маємо: $\dfrac{AO}{OP}=\dfrac{2}{1}=\lambda$, де P – точка перетину медіани AO із стороною BC. Застосувавши формули поділу відрізка у заданому відношені:

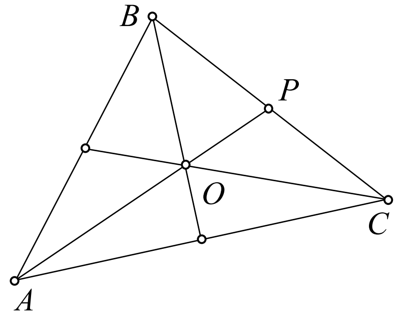


Рис. 4.3

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda},$$

знайдемо координати точки P: $\dfrac{1+2x_P}{1+2}=8\Rightarrow x_P=\dfrac{23}{2}$, $\dfrac{1+2y_P}{1+2}=-5\Rightarrow y_P=-8$.

Оскільки точки $B\in l_1$ і $C\in l_2$, то їхні координати задовольняють рівняння цих прямих. Точка P ділить відрізок BC навпіл, отже, можна скласти наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{23}{2}, \\ \dfrac{y_B+y_C}{2}=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B+y_B-3=0, \\ 2x_C+3y_C-1=0 \end{cases},$$

звідки $x_C=11,\ y_C=-7$. Пряма BC проходить через точки $P\left(\dfrac{23}{2};-8\right)$ і $C(11;-7)$, тому складемо її рівняння за формулою (4.13), тобто $\dfrac{x-\frac{23}{2}}{11-\frac{23}{2}}=\dfrac{y+8}{-7+8}$, і в результаті отримаємо:

$$(BC):\quad 2x+y-15=0.$$

<u>№ 10.</u> Дано рівняння сторін трикутника: $(AB): x+2y+5=0$, $(BC): 3x+y+1=0$ і $(AC): x+y+7=0$. Скласти рівняння висоти, опущеної на сторону AC.

Висота належить пучку прямих $x+2y+5+\lambda(3x+y+1)=0$ або $(1+3\lambda)x+(2+\lambda)y+(5+\lambda)=0$. Кутовий коефіцієнт прямої пучка дорівнює $-\dfrac{1+3\lambda}{2+\lambda}$; так як кутовий коефіцієнт прямої AC дорівнює –1, то кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 1, тоді для знаходження λ отримаємо рівняння $-\dfrac{1+3\lambda}{2+\lambda}=1$. Звідси $1+3\lambda+2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-\dfrac{3}{4}$. Підставивши одержане значення λ в рівняння пучки, отримаємо шукане рівняння висоти $\left(1-\dfrac{9}{4}\right)x+\left(2-\dfrac{3}{4}\right)y+\left(5-\dfrac{3}{4}\right)=0\Rightarrow 5x-5y-17=0$.

<u>№ 11.</u> Дано вершини трикутника: $A(1;1)$, $B(10;13)$, $C(13;6)$. Скласти рівняння бісектриси кута A.

І спосіб: знайдемо, користуючись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, рівняння тих сторін трикутника, які утворюють кут A:

$$(AB):\frac{x-1}{10-1}=\frac{y-1}{13-1}\Rightarrow(AB):4x-3y-1=0 \text{ і } (AC):\frac{x-1}{13-1}=\frac{y-1}{6-1}\Rightarrow(AC):5x-12y+7=0.$$

Тепер за формулою (4.20) складемо рівняння бісектрис між цими прямими: $\dfrac{4x-3y-1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\pm\dfrac{5x-12y+7}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$. Так як нам потрібен гострий кут, то обираємо варіант із знаком мінус, тобто $\dfrac{4x-3y-1}{5}=-\dfrac{5x-12y+7}{13}$. Після спрощення виразу та зведення подібних доданків одержимо рівняння $7x-9y+2=0$.

ІІ спосіб: використовуючи властивість бісектриси. Нехай D – точка перетину бісектриси зі стороною BC. За властивістю бісектриси внутрішнього кута випливає, що $|BD|:|DC|=|AB|:|AC|$. Але $|AB|=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15$ і $|AC|=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13$. Значить, $\lambda=\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{15}{13}$. Знайдемо тепер координати точки D, за формулами $x_D=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}$, $y_D=\frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}$ - ділення відрізку у заданому відношенні: $x_D=\frac{10+\frac{15}{13}\cdot 13}{1+\frac{15}{13}}=\frac{325}{28}$ і $y_D=\frac{13+\frac{15}{13}\cdot 6}{1+\frac{15}{13}}=\frac{259}{28}$, тобто $D\left(\frac{325}{28};\frac{259}{28}\right)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки A і D: $\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1}=\frac{y-1}{\frac{259}{28}-1}\Rightarrow(AD):7x-9y+2=0$.

<u>№ 12</u>**.** Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо фокусна відстань дорівнює 4, а мала вісь дорівнює 6.

Так як мала вісь дорівнює 6, то мала піввісь –3, тобто $b=3$, $F_1F_2=10\Rightarrow 2c=10\Rightarrow c=5$ тоді, $b^2=a^2-c^2$, тоді $a^2=b^2+c^2$, звідси, $a^2=9+25=34$. Отже, $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$.

<u>№ 13</u> Визначити довжини осей та координати фокусів еліпса $24x^2+49y^2=1176$.

Зведемо рівняння до канонічного вигляду, розділивши обидві частини рівняння на 1176: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$. Звідси $a^2=49\Rightarrow a=7\Rightarrow 2a=14$, $b^2=49\Rightarrow b=2\sqrt{6}\Rightarrow 2b=4\sqrt{6}$, $b^2=a^2-c^2$, звідки $c=\sqrt{a^2-b^2}$, отже, $c=\sqrt{49-24}=5$. Тоді: $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$.

<u>№ 14.</u> Скласти рівняння гіперболи, якщо її фокуси знаходяться в точках $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$, причому дана гіпербола проходить через точку $M(6;4\sqrt{3})$.

Фокальна відстань $F_1F_2=10$, значить, $c=5$. $c^2=a^2+b^2$, підставивши значення c, маємо $a^2+b^2=25$. Так як точка M належить гіперболі, то її координати задовольняють рівняння цієї гіперболи, тобто $\frac{6^2}{a^2}-\frac{(4\sqrt{3})^2}{b^2}=1$, або $36b^2-48a^2=a^2b^2$. Розв'язавши систему з двох отриманих рівнянь, маємо $a^2=9, b^2=16$, отже, гіпербола, що проходить через точку $M(6;4\sqrt{3})$ і має фокуси в точках $F_1(5;0)$ і $F_2(-5;0)$, записується рівнянням $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

<u>№ 15.</u> Скласти канонічне рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться в точках $A_1(5;0)$ і $A_2(-5;0)$, а фокусна відстань дорівнює 14.

З умовою задачі : $b=5$, $F_1F_2=14\Rightarrow 2c=14\Rightarrow c=7$, тоді $b^2=c^2-a^2=7^2-5^2=24$. Отже, шукане рівняння гіперболи : $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

<u>№ 16.</u> Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(2;1)$ і має асимптоти $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Маємо $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, тобто $b=\frac{3}{4}a$. Підставивши в рівняння гіперболи координати точки M та значення параметра b, одержимо $\frac{2^2}{a^2}-\frac{1^2}{\left(\frac{3}{4}a\right)^2}=1$, тоді $a^2=\frac{20}{9}$. Так як $b=\frac{3}{4}a$, то $b^2=\frac{9}{16}a^2=\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{9}=\frac{5}{4}$, то шукане рівняння матиме вигляд $\frac{x^2}{\frac{20}{9}}-\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$ або $\frac{9x^2}{20}-\frac{4y^2}{5}=1$.

№ 17. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 14, а ексцентриситет $\frac{7}{9}$.

Оскільки $2c=14$, то $c=7$. З формул для ексцентриситету і фокусної відстані, одержимо, що $a=9$, $b^2=32$. Тоді, шукане рівняння матиме вигляд $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{32}=1$.

№ 18. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її директрисою є пряма $x=-4$.

Відстань від директриси до початку координат дорівнює $\frac{p}{2}$. Отже, $\frac{p}{2}=4$, тобто $p=8$ Рівняння цієї параболи має вигляд (4.46), так як абсциса директриси від'ємна. Підставивши в це рівняння значення параметра p, отримаємо $y^2=16x$.

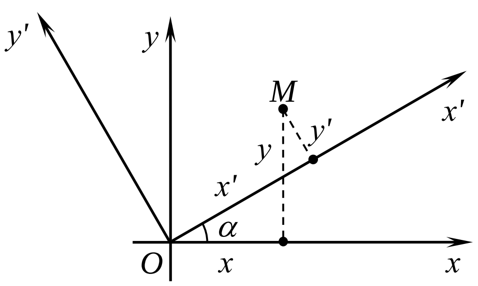
№ 19. Скласти рівняння параболи з вершиною в точці $O'(-4;2)$ і фокусом в точці $F(-4;6)$.

Так як абсциси вершини і фокуса однакові, то ці точки даної параболи лежать на прямій, паралельній вісі Oy, яка є віссю параболи. Так як ордината фокуса більше за ординату вершини, то гілки параболи напрямлені вгору. Вершина параболи зміщена, тобто: $(x-a)^2=2p(y-b)$. Відстань фокуса від вершини дорівнює $\frac{p}{2}=6-2=4$, тобто $p=8$. Замінивши в останньому рівнянні a і b координатами точки O' і p – його значенням, отримаємо $(x+4)^2=2\cdot 8(y-2)\Rightarrow(x+4)^2=16(y-2)$

№ 20. Визначити нові координати точки $M(7;8)$, якщо виконали паралельний перенос осей координат, причому новий початок розміщено в точці $O_1(3;-4)$.

За умовою задачі: $a=3$, $b=-4$, $x=7$, $y=8$. За формулами зміщення осей координат знаходимо $x'=7-3=4$, $y'=8-(-4)=12$.

Поворот осей координат на кут α (початок координат такий самий, а α відраховується проти годинникової стрілки) пов'язує початкові координати x, y з новими x', y' формулами:



$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$
$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha$$

№ 21. На площині xOy дана точка $M(4;3)$. Система координат повернута навколо початку координат так, що нова вісь пройшла через точку M. Визначити старі координати точки A, якщо її нові координати $x'=5, y'=5$.

Так як $|MO| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, то $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, тоді формули перетворення координат для даної задачі набудуть вигляду: $x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'$, $y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$. Нехай $x' = y' = 5$, тоді $x = 1, y = 7$.

№ 22. Система координат повернута на кут $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Визначити нові координати точки $M(\sqrt{3}; 3)$.

$$x' = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,\ y' = -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

№ 23. Звести рівняння параболи $y = 9x^2 - 6x + 2$ до канонічного вигляду.

*І спосіб***.** Користуючись формулами (4.50), замінимо x на $x' + a$ і y на $y' + b$: $y' + b = 9(x' + a)^2 - 6(x' + a) + 2$, або $y' = 9x'^2 + 6x'(3a - 1) + (9a^2 - 6a + 2 - b)$. Знайдемо такі значення a і b, при яких коефіцієнт при x' і вільний член перетвориться на нуль: $\begin{cases} 3a - 1 = 0, \\ 9a^2 - 6a + 2 - b = 0, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = 1$. Канонічне рівняння параболи має вигляд: $x'^2 = \frac{1}{9}y'$, а вершина параболи знаходиться в точці $O_1\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ і $p = \frac{1}{18}$.

ІІ спосіб. Задане рівняння виду $y = Ax^2 + Bx + C$ або $x = Ay^2 + By + C$ зводиться до канонічного рівняння параболи із зміщеним центром, тобто $(x - a)^2 = 2p(y - b)$, або відповідно $(y - b)^2 = 2p(x - a)$. Тоді точка $O_1(a; b)$ є вершиною параболи, а знак параметра p визначить, в який бік – додатній чи від'ємний відповідної осі (Oy чи Ox) – напрямлена парабола.

Початкове рівняння перетворюється наступним чином: $y = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + 2$, $y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$, $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(y - 1)$. Отримали аналогічний результат. Вершина параболи знаходиться в точці $O_1\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, параметр $p = \frac{1}{18}$, а гілка параболи напрямлена в додатній бік вісі Oy.

Примітка. Вид кривої та її розташування на площині легко встановлюється перетворенням п'ятичленного рівняння (див. Лекції) до виду $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f$ (у випадку $AC > 0$ або $AC < 0$). У випадку не вироджених кривих переносом початку координат в точку $O_1(x_0; y_0)$ отримане рівняння еліпса чи гіперболи можна звести до канонічного виду.

№ 24. Яку лінію визначає рівняння:

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$;

2) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$?

1) Виконаємо перетворимо заданого рівняння:

$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4$, $4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4$;

$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = -4 + 4 + 36$;

$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$.

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей, взявши за новий початок координат точку $O'(1;2)$. Використаємо формули: $x = x' + 1$, $y = y' + 2$. Відносно нових осей рівняння кривої матиме вигляд $4x'^2 + 9y'^2 = 36$ або $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$. Отже, задана крива є еліпс.

2) Перепишемо дане рівняння так:

$\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 9\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) = 44$,

$(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 44 + 1 - 36$,

$(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 9$.

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей, взявши за новий початок координат точку і змінивши координати $x = x' - 1$, $y = y' + 2$. Після перетворення координат отримаємо рівняння $x'^2 - 9y'^2 = 9$ або $\frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1$. Отже, задана крива – гіпербола.

<u>№ 25.</u> Довести, що рівняння $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$ визначає сукупність двох прямих.

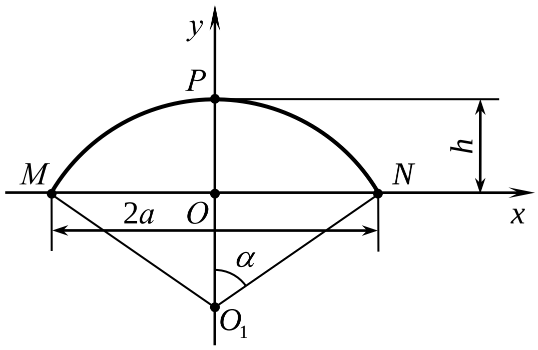
Перепишемо рівняння у вигляді $3y^2 - 2(4x-1)y - \left(3x^2 - 14y + 8\right) = 0$ і розв'яжемо його відносно *y*: $y = \frac{4x - 1 \pm \sqrt{(4x-1)^2 + \left(9x^2 - 42x + 24\right)}}{3}$, або $y = \frac{4x - 1 \pm (5x - 5)}{3}$. Отримуємо рівняння двох прямих $y = 3x - 2$ і $y = \frac{-x+4}{3}$, або $3x - y - 2 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$.

<u>№ 26.</u> Скласти рівняння кола радіуса $r = 5$ з центром в точці $O_1(3;-2)$.

Маємо: $r = 5, a = 3, b = -2$. Підставивши ці значення в рівняння (4.25), знайдемо:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

<u>№ 27.</u> Арка має форму дуги кола. Знайти довжину l дуги арки, якщо її проліт і підйом відповідно дорівнюють $2a$ і b. (Підйом арки дорівнює відношенню її висоти до прольоту.)



,

Введемо систему координат так, як показано на рисунку, де арка *MPN* – дуга кола, *MO*=*ON*, $OP = h = 2ab$. В обраній системі координат точки *M*, *P* і *N* мають координати $M(-a;0)$, $P(0;2ab)$, $N(a;0)$. Нехай $O_1(0;y_0)$ і r відповідно центр і радіус кола, тоді його рівняння має вигляд $x^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Оскільки коло проходить через точки *P* і *N*, то $(2ab - y_0)^2 = r^2$ і $a^2 + y_0^2 = r^2$ звідки $r = \frac{\left(4b^2+1\right)a}{4b}$, $|y_0| = \frac{\left(4b^2-1\right)a}{4b}$.

Знайдемо центральний кут $2\alpha = \angle MO_1N$, на який спирається дуга арки. Маємо $2\cos\alpha = \frac{|y_0|}{r} = \frac{\left|4b^2-1\right|}{4b^2+1} \Rightarrow 2\alpha = \arccos\frac{\left|4b^2-1\right|}{4b^2+1}$, отже, $l = 2r\alpha = \frac{\left(4b^2+1\right)a}{2b}\arccos\frac{\left|4b^2-1\right|}{4b^2+1}$.

<u>Задачі для самостійного розв'язку.</u>

№1. Скласти рівняння лінії, всі точки якої: 1) рівновіддалені від точок $A(-2;1)$ та $B(-1;-3)$; 2) віддалені від точки $A(3;-2)$ на відстань – 5.

№2. Визначити, яка лінія визначається параметричними рівняннями:

$$1)\ \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^2; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t - 3; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

№3. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дану точку M_0 паралельно вектору $\vec{s}$, якщо:

1) $M_0(-4; 2), \vec{s} = (2; -1)$; 2) $M_0(2; -1), \vec{s} = (-2; 5)$;

3) $M_0(4; 0), \vec{s} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$; 4) $M_0(0; -3), \vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

№4. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через дану точку M_0 паралельно вектору $\vec{s}$, якщо:

1) $M_0(-4; 2), \vec{s} = (2; -1)$; 2) $M_0(1; 3), \vec{s} = (3; 2)$;

3) $M_0(3; -5), \vec{s} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; 4) $M_0(-4; 0), \vec{s} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

№5. Написати параметричне рівняння кожної з даних прямих:

1) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{5}$; 2) $\frac{x}{4} = \frac{y+5}{3}$; 3) $\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{2}$; 4) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+8}{2}$.

№6. Написати канонічне рівняння кожної з даних прямих:

$$1)\ \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 5 + t; \end{cases}; \quad 2)\ \begin{cases} x = 3t, \\ y = -t; \end{cases}; \quad 3)\ \begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -4 + 2t; \end{cases}; \quad 4)\ \begin{cases} x = 5 - t, \\ y = 7 + 3t. \end{cases}$$

№7. Скласти рівняння прямої, яка проходить перпендикулярно вектору $\vec{n}$ і через точку *C*, якщо:

1) $\vec{n} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ і $C(4; -1)$; 2) $\vec{n} = (0; -2)$ і $C(-1; -2)$.

№8. Дано трикутник з вершинами $A(-3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(0; 4)$. Скласти рівняння висоти, опущеної з вершини *B* та виконати рисунок.

№9. Дано трикутник з вершинами $A(3; 4)$, $B(2; 5)$, $C(7; 8)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через *B* перпендикулярно медіані (BD), $D \in (AC)$.

№10. Побудувати фігуру, обмежену лініями:

1) $x+4=0$, $x-3=0$, $y+2=0$, $y+5=0$; 2) $y=0$, $x=6$, $x-2y=0$.

№11.Записати зальне рівняння кожної з прямих та вказати координати її нормального вектора:

1) $\frac{x+5}{2} = \frac{y}{-4}$; 2) $\frac{x}{7} = \frac{y-2}{4}$; 3) $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -8t + 3 \end{cases}$; 4) $y = -3x + 5$; 5) $y = \frac{1}{3}x$.

№12. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(0; 5)$ паралельно даній прямій: 1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$; 2) $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = 3t \end{cases}$.

№13. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $B(-3; 1)$ перпендикулярно даній прямій: 1) $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{3}$; 2) $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 5t \end{cases}$.

№14. Дано трикутник з вершинами $A(-5; -5)$, $B(1; 7)$, $C(5; -1)$. Скласти рівняння сторін і медіан цього трикутника.

№15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки:

1) $M_1(-2; 1), M_2(1; -2)$; 2) $M_1(6; 0), M_2(3; -2)$; 3) $M_1(5; -4), M_2(5; 2)$; 4) $M_1(1; 7), M_2(-3; 7)$

№16 Знайти площу трикутника, обмеженого прямою $l: 2x - 5y - 10 = 0$ та осями координат.

№17. Дослідити взаємне розташування пар прямих і, якщо вони перетинаються, знайти точку перетину:

1) $3x-2y-4=0$ і $x+3y-5=0$; 2) $x-5y+7=0$ і $3x-15y+4=0$;

3) $5x-3y+9=0$ і $6x+10y+13=0$; 4) $2x+7y-3=0$ і $6x+21y-9=0$;

5) $2x+3y-12=0$ і $x-y-1=0$; 6) $x-2y-7=0$ і $4x+2y-3=0$.

№18. Дано сторони трикутника : $(AB): x+2y+5=0$, $(BC): 3x+y+1=0$, $(AC): x+y+7=0$. Скласти рівняння висоти трикутника, опущеної на сторону AC, користуючись рівнянням пучка прямих.

№19. Знайти гострий кут, утворений з віссю ординат прямою, яка проходить через точки $A(2,1)$ і $B(-2,1)$.

№20. Знайти пряму, яка проходить через точку перетину прямих $x+6y+5=0$, $3x-2y+1=0$ та через точку $M\left(-\frac{4}{5};1\right)$.

№ 21. Скласти рівняння кола, якщо

1) коло має центр в точці $O_1(2;-3)$ і проходить через точку $M(5;1)$;

2) кінці одного з діаметрів кола мають координати $(3;9)$ і $(7;3)$;

3) діаметром кола є відрізок прямої $4x-3y+12=0$, що міститься між осями координат;

4) коло дотикається до осі абсцис в точці $M_1(2;0)$ і проходить через точку $M_2(-1;3)$

5) коло проходить через точки $M_1(0;2)$, $M_2(1;1)$, $M_3(2;-2)$;

6) коло проходить через точки $M_1(-1;3)$, $M_2(0;2)$, $M_3(1;-1)$.

№ 22. Знайти координати центра і радіус кола:

1) $x^2+y^2+6x-10y+13=0$; 2) $x^2+y^2+12y-13=0$; 3) $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$.

№ 23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) дано вершини $(0;3)$, $(0;-3)$ і відстань між фокусами, що дорівнює 8;

2) еліпс проходить через точки $M_1\left(2\sqrt{3};\sqrt{6}\right)$ і $M_2(6;0)$;

3) півосі еліпса дорівнюють 7 і 9;

4) більша вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами – 6;

5) відстань між фокусами дорівнює 6, а ексцентриситет – 0,6;

6) мала вісь дорівнює 4, а $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

№ 24. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет еліпса та побудувати його:

1) $9x^2+25y^2=4$; 2) $16x^2+25y^2=400$; 3) $2x^2+y^2=32$; 4) $x^2+4y^2=16$.

№ 25. Скласти канонічне рівняння гіперболи з фокусами на вісі абсцис, якщо:

1) $a=12$, $b=5$;

2) проходить через точки $M_1\left(-6;-\sqrt{7}\right)$, $M_2\left(6\sqrt{2};4\right)$;

3) $2c=10\sqrt{2}$, рівняння асимптот $y=\pm 0{,}75x$;

4) проходить через точки $M_1\left(-8;2\sqrt{2}\right)$, $M_2(6;-1)$;

5) $F(\pm 3;0)$, рівняння асимптот $y=\pm\sqrt{2}x$;

№ 26. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо:

1) парабола розташована справа від осі Oy і $p=5$;

2) парабола розташована справа від осі Oy і проходить через точку $M(3;-6)$;

3) парабола розташована нижче осі Ox і $p=3$;

4) парабола розташована вище осі Ox і проходить через точку $M(-5;2)$;

5) фокус параболи має координати $F(-2;0)$;

6) директриса параболи задана рівнянням $2y+5=0$.

№ 27. Дано точку $M\left(\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)$. За нові координатні осі взято прямі $O_1x':2y-5=0$ і $O_1y':2x-1=0$. Знайти координати точки M в новій системі координат.

№ 28. Встановити, які криві визначаються наступними рівняннями, та зобразити їх схематично:

1) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$; 2) $x^2+4y^2-4x-8y+8=0$; 3) $2x^2-4x+2y-3=0$;

4) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$; 5) $x^2+4y^2+8y+5=0$; 6) $x^2-6x+8=0$;

7) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$; 8) $x^2-y^2-6x+10=0$; 9) $x^2+2x+5=0$.

№ 29. Показати, що рівняння визначають криві, які розпадаються на дві прямі, та знайти рівняння цих прямих:

1) $9x^2+24xy+16y^2-25=0$; 2) $25x^2+10xy+y^2-1=0$;

3) $x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0$; 4) $8x^2-18xy+9y^2+2x-1=0$.

№ 30. Звести до канонічного вигляду рівняння:

1) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$; 2) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;

3) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$; 4) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

ТЕМА 5. *Аналітична геометрія у просторі.*

Завдання:

1. Розв'язок задач на розміщення площин у просторі;
2. Обчислення відстані від точки до площини;
3. Обчислення кута між площинами.

)

Задачі для розв'язку на практичному занятті:

№ 1. Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(1, -2,0)$ і паралельна векторам $\vec{a}$ (1, 2, 3), $\vec{b}$ (2, 0, 1)

$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, розкривши визначник третього порядку, маємо:

$2(x-1) + 5(y+2) - 4z = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 4z + 8 = 0$ - шукане рівняння площини.

№ 2. Показати розміщення площин у просторі. Площини задані рівняннями:

1) $5x+10y+4z-20=0$;
2) $3x-y+3z-9=0$;
3) $2x+3y-6=0$;
4) $x+3z+6=0$;
5) $z-3=0$; 6) $z=0$.

1). $5x+10y+4z=20$ => $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1$. Площина відтинає ва осях Ox, Oy і Oz відрізки довжиною 4, 2 і 5 відповідно (рис.5.1).

2). $3x-y+3z=9$ => $\frac{x}{-3}+\frac{y}{9}+\frac{z}{-3}=1$. Площина відтинає ва осях Ox, Oy і Oz відрізки довжиною -3, 9 і -3 відповідно (рис.5.2).

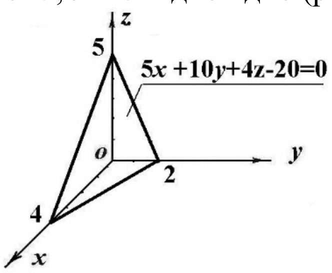


Рис. 5.1

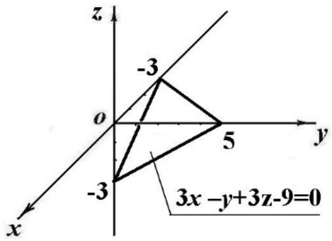


Рис. 5.2

3). $2x+3y=6$ => $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$. Площина відтинає на осях Ox і Oy відрізки довжиною 3 і 2 відповідно. На осі Oz площина відрізок не відтинає, так як паралельна осі Oz (рис. 5.3).

4). $x+3z=-6$ => $\frac{x}{-6}+\frac{z}{2}=1$. Площина відтинає на осях Ox і Oz відрізки, довжиною -6 і 2 і є паралельною до осі Oy (рис.5.4).

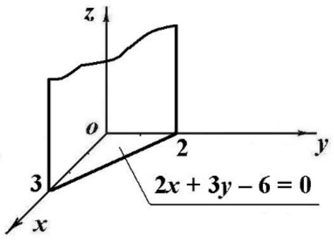


Рис. 5.3

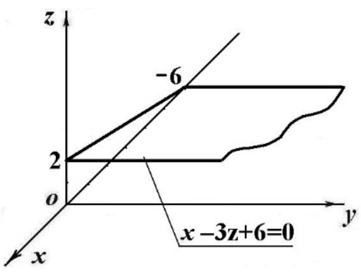


Рис. 5.4

5) $z-3=0$, $z=3$ ділимо на 3 => $\frac{z}{3}=1$ - площина відтинає на осі Oz відрізок довжиною 3 одиниці та не перетинає ні вісь Ox, ні вісь Oy, тобто є паралельною до площини xOy (рис.5.5).

6) $z=0$. Як і у попередньому випадку площина перетинає вісь Oz в точці «0», але не паралельна, а співпадає з площиною xOy (рис.5.6).

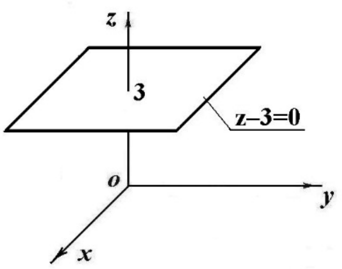


Рис.5.5

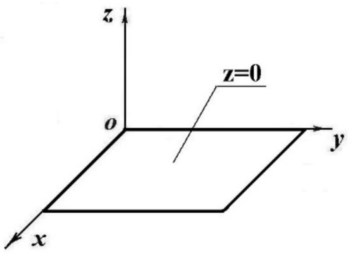


Рис.5.6

№ 3. Скласти рівняння прямої у просторі $xOyz$, якщо

1) пряма проходить через точку M_0(3, 0, -3) паралельно вектору $\bar{s}(4,-6,-1)$.
2) пряма проходить через дві точки M_1(-1, -2, -3) M_2 (0, 5, 7).

1) В канонічне рівняння прямої (5.11) підставляємо значення координат точки M_0 : $x_0=3$, $y_0=0$ і $z_0=-3$,а також значення координат напрямного вектора $\bar{s}(4,-6,-1)$: $m=4$, $n=-6$ і $p=-1$, маємо: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ => $\frac{x-3}{4}=\frac{y-0}{-6}=\frac{z-(-3)}{-1}$

Приведемо канонічне рівняння прямої до загального вигляду.

$$\begin{cases}\frac{x-3}{4}=\frac{y}{-6}\\ \frac{y}{-6}=\frac{z+3}{-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6(x-3)=4y\\ -y=-6(z+3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6x+4y+18=0\\ y-6z-18=0\end{cases}.$$

2) В рівняння прямої, що проходить через дві відомі точки (5.12) підставляємо значення координат точки $M_1: x_1=-1$, $y_1=-2$ і $z_1=-3$ та точки $M_2: x_2=0$, $y_2=5$ і $z_2=7$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow \frac{x-(-1)}{0-(-1)_1}=\frac{y-(-2)}{5-(-2)}=\frac{z-(-3)}{7-(-3)} \Rightarrow \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+3}{10}$$

Отримали канонічне рівняння прямої. Запишемо його у загальному виді.

$$\begin{cases}\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{7}\\ \frac{y+2}{7}=\frac{z+3}{10}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7(x+1)=y+2\\ 10(y+2)=7(z+3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7x-y+5=0\\ 10y-7z-1=0\end{cases}.$$

№ 4. Визначити напрямні косинуси прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{6}$.

Пряма задана канонічним рівнянням, з якого виписуємо координати напрямного вектора $\bar{s}(m,n,p)$: $m=3$, $n=2$, $p=6$ і підставляємо у формули (5.13).

$$\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\frac{3}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{3}{\sqrt{49}}=\frac{3}{7};$$

$$\cos\beta=\pm\frac{2}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\frac{2}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{2}{\sqrt{49}}=\frac{2}{7};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{6}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{6}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{3}{7} = \arccos 0{,}43 = 64{,}6^\circ;\ \beta = \arccos\frac{2}{7} = \arccos 0{,}29 = 73{,}4^\circ;$$

$$\gamma = \arccos\frac{6}{7} = \arccos 0{,}86 = 31^\circ.$$

Таким чином, пряма у просторі утворює кут $\alpha = 64{,}6^\circ$ з віссю Ox, кут $\beta = 73{,}4^\circ$ з віссю Oy і кут $\gamma = 31^\circ$ з віссю Oz.

№ 5. Визначити взаємне положення двох прямих у просторі.

1). $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2}$ і $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-12} = \frac{z-1}{-6}$;

2). $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z+2}{-4}$ і $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{2}$;

3). $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{2}$ і $\frac{x+1}{12} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}$.

1). Напрямні вектори $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ заданих прямих мають координати $\bar{s}_1(-1, 4, 2)$, $\bar{s}_2(3, -12, -6)$. Так як для цієї пари прямих виконується умова паралельності (5.14), то прямі паралельні:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{4}{-12} = \frac{2}{-6} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

2). Напрямні вектори $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ заданих прямих мають координати $\bar{s}_1(-2, 3, -4)$, $\bar{s}_2(5, 6, 2)$. Ці прямі перпендикулярні, так як для них виконується умова перпендикулярності (5.15):

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0 \Rightarrow -2\cdot5 + 3\cdot6 + (-4)\cdot2 = 0 \Rightarrow -10+18-8=0.$$

3). Напрямні вектори $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ прямих мають координати $\bar{s}_1(2, 1, 2)$, $\bar{s}_2(12, 3, 4)$. Визначаємо кут φ між прямими за формулою (5.16).

$$\cos\varphi = \pm\frac{2\cdot12 + 1\cdot3 + 2\cdot4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{144+9+16}} = \frac{35}{39} = 0{,}897 \Rightarrow \varphi = \arccos 0{,}897 = 26{,}2^\circ$$

Задачі для самостійного розв'язку.

№1. Показати розміщення площин у просторі. Площини задані рівняннями:

1) $14x + 4y - 7z - 28 = 0$; 2) $5x + 4y - 20 = 0$; 3) $y - 5 = 0$; 4) $x = 0$.

№2. Скласти рівняння прямої у просторі $xOyz$, якщо

а) пряма проходить через точку *M₀*(2, -1, -4) паралельно вектору $\bar{s}(1, -2, -1)$. Перетворити це рівняння до загального вигляду;

б) пряма проходить через дві точки $M_1(1, 4, -1)$ *і* $M_2(1, 0, 2)$.

У відповідь рівняння прямих записати в загальному вигляді.

№3. Визначити напрямні косинуси прямої

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{4}.$$

№4. Визначити взаємне положення двох прямих у просторі.

а) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+7}{2}$ і $\frac{x-2}{8} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$;

б) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{2}$;

$в)\ \frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{1}$

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ЗМІСТОВА ЧАСТИНА 2. ВСТУП ДО МТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

ТЕМА 6. *Функція однієї змінної.*

Завдання:

1. Обчислення границі функції;
2. Дослідження функції на неперервність в точці і на відрізку;
3. Визначення асимптот графіка функції;

Задачі для розв'язку на практичному занятті.

№ 1. Обчислити односторонні границі функції $y = f(x)$ в точці x_0.

а). $y=\frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{|x|} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{|x|} = +\infty$, - *границі зліва і справа рівні.*

б). $y = tgx$ $x_0 = \pi/2$. $\lim\limits_{x\to \pi/2-0} tgx = +\infty$; $\lim\limits_{x\to \pi/2+0} tgx = -\infty$,

№ 2. Обчислити границю функції в точці:

$$\lim_{x\to 1}(2\sqrt{x} + 3x^2 + lnx) = 2\lim_{x\to 1}\sqrt{x} + 3\lim_{x\to 1}x^2 + \lim_{x\to 1}lnx = 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 0 = 5$$

№ 3. Обчислити границі функцій.

1). $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$.

Підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для усунення даної невизначенності розкладемо чисельник і знаменник на співмножники і скоротимо дріб на (x+3), таке скорочення допустиме, так як співмножник (x+3) відмінний від нуля.

$$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)\cdot(x+3)}{(3x+1)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(4x-1)}{(3x+1)} = \frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1} = \frac{13}{8}.$$

2). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$

Вираз функції ірраціональний (містить радикал у чисельнику), підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для усунення невизначенності доцільно домножити чисельник і знаменник дробу на вираз спряжений з іраціональним.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x^2(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{0} = \infty.$$

3). $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)}{(\sqrt{2x+5}-3)}$

Безпосередня підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Для розкриття цієї невизначеності, множимо чисельник і знаменник дробу на добуток виразів спряжених до виразів чисельника і знаменника, що дасть змогу скоротити дріб на спільний співмножник (x -2), відмінний від нуля при $x \to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)}{(\sqrt{2x+5}-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{(3x-2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(\sqrt{3x-2}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(\sqrt{3x-2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 2}\frac{3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{3\cdot 6}{2\cdot 4} = \frac{9}{4}.$$

4). $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$

При $x \to \infty$, даний вираз має невизначеність типу [∞ - ∞]. Для усунення невизначеності помножимо і розділимо початковий вираз на $\sqrt{x^2+3x}+x$.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x.}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x.}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1.}=\frac{3}{2}.$$

5.) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x^2+4x}{3x^4-x^2+2x+5}$.

Маємо невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, що задана відношенням многочленів (або відношенням виразів, що містять радикали). Для усунення невизначеності ділимо чисельник і знаменние дробу на найвищу степінь x, в цих виразах.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-4x^2+4x}{3x^4-x^2+2x+5}==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}-4\frac{x^2}{x^4}+4\frac{x}{x^4}}{3\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+2\frac{x}{x^4}+5\frac{1}{x^4}}==\lim_{x\to\infty}\frac{1-4\frac{1}{x^2}+4\frac{1}{x^3}}{3-\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}+5\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{3}.$$

Іншим способом усунення такої невизначеності є використання наступного правила.

Якщо невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ задана відношенням многочленів, то:

1). якщо спечені многочленів чисельника і знаменника однакові, то в границі матимемо число, що дорівнює відношенню коефіцієнтів при найвищих степенях многочленів чисельника і знаменника;

2). якщо степінь многочлена чисельника нижче степені многочлена знаменника, то в границі матимемо 0;

3). якщо спепінь многочлена чисельника вище степені многочлена знаменника, то в границі матимемо ∞.

6). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}$

Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, і підграничний вираз містить тригонометричну функцію, в такому випадку використовуємо першу «чудову» границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{Sin2x}{2x}\cdot 2\cdot\frac{1}{Cos2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{Sin2x}{2x}\right)\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{Cos2x}=1\cdot 2\cdot 1=2$$

7). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2}\right)^x$

Маємо невизначеність типу $[1^\infty]$. Для розкриття цієї невизначеності використовуємо другу «чудову» границю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{2\frac{x}{2}}=e^2.$$

<u>№ 4.</u> Знайти точки розриву функції $y = f(x)$.

а) $y=\frac{x}{x^2-1}$

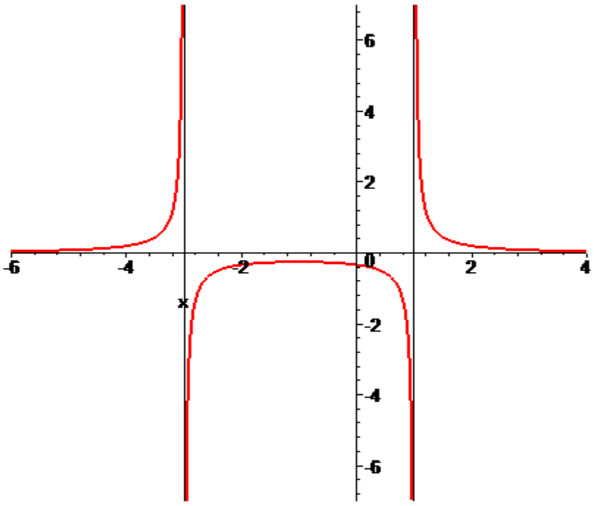
Функція $y=\frac{x}{x^2-1}$ визначена в усіх точках окрім тих, де знаменник перетворюється в нуль, тобто x=1,x= -1. Область визначення функції наступна: D: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

Знайдемо односторонні границі в точках розриву.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x^2-1}=-\infty$$

Оскільки в точках x=1, x=-1 функція має нескінченні односторонні границі, то аргументи x=1, x = -1 є точками розриву ІІ роду. Графік функції наведено на рисунку 6.1.



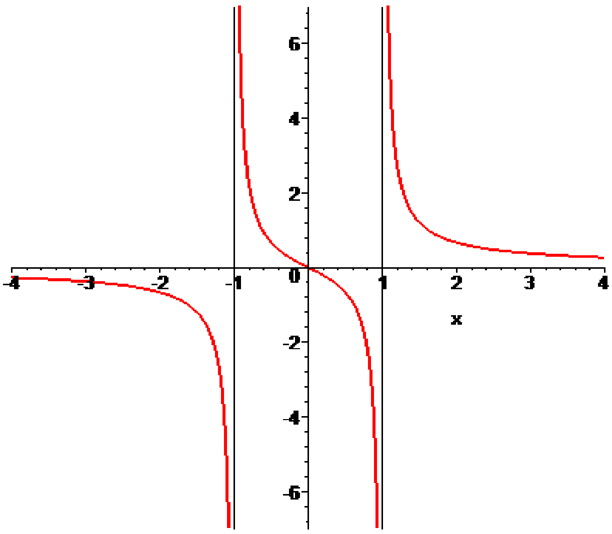


рис. 6.1.

б) $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$

Аналогічно попередньому прикладу знаходимо нулі знаменника:

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 16$; $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 4}{2} \leftrightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = -3$

Таким чином функція визначена на всій осі OX, за виключенням точок x=-3; x=1, які є точками розриву.

Обчислимо односторонні границі справа та зліва: $y = \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)}$.

$\lim\limits_{x\to 3+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{(x+3)(x-1)} = -\infty$;

Границі функції нескінченні, тому, за означенням, маємо точки розриву x = -3; x =1 другого роду. Графік функції наведено на рис. 6.2.

Рис. 6.2.

З графіків наведених функцій можна зробити висновок що *для деяких функцій відшукання точок розриву аналогічно знаходженню вертикальних асимптот.* Але деякі функції, що не мають вертикальних асимптот, мають розриви першого чи другого роду.

в) $y = 2\frac{|x+3|}{x+3}x + 6$

Задана функція неперервна на всій числовій осі окрім точки x = -3. Обчислимо односторонні границі в цій точці.

$$\lim_{x\to-3+0}\left(2\frac{(x+3)}{(x+3)}x + 6\right) = \lim_{x\to-3+0}(2x + 6) = 0;$$

$$\lim_{x\to-3-0}\left(2\frac{-(x+3)}{(x+3)}x + 6\right) = \lim_{x\to-3-0}(-2x + 6) = 12.$$

Отримані границі скінченні, але різні за значеннями. Отже точка x = -3 є *точкою неусувного розриву І роду*. Рис. 6.3.

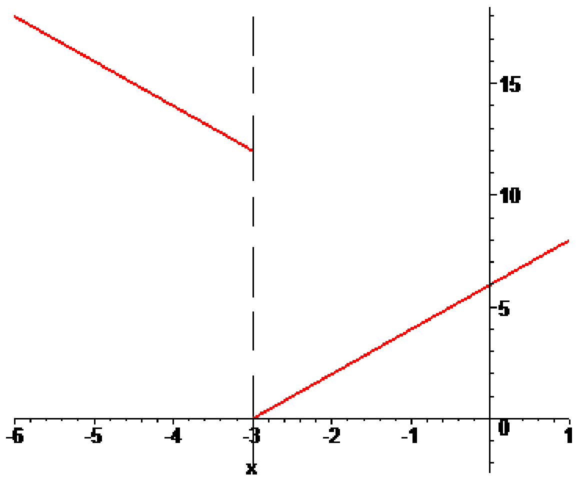


Рис. 6.3.

<u>№ 5.</u> Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. Обчислити стрибок функції в точці розриву. Побудувати графік функції.

а) $y = 2x - \frac{x-2}{|x-2|}$

Для заданої дробової функції з модулем у знаменнику точка x =2 є точкою розриву. Знайдемо границі, щоб визначити характер розриву.

$$\lim_{x\to2+0}\left(2x - \frac{(x-2)}{(x-2)}\right) = \lim_{x\to2+0}(2x - 1) = 3;$$

$$\lim_{x\to2-0}\left(2x - \frac{(x-2)}{-(x-2)}\right) = \lim_{x\to2-0}(2x + 1) = 5;$$

За означенням, точка x =2 є неусувною точкою розриву першого роду. Обчислимо стрибок функції при x =2.

$$\lim_{x\to2+0}y - \lim_{x\to2-0}y = 3 - 5 = -2;$$

Графік функції наведено на рис.6.4.

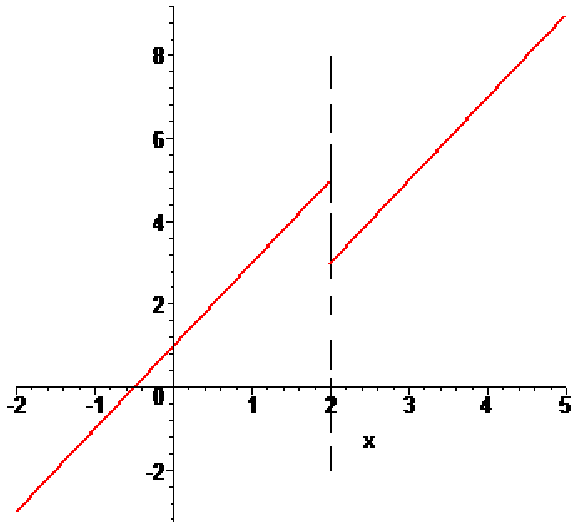


рис. 6.4.

б) $y = \begin{cases} 3\sqrt{x+2}, \ 0 \le x \le 2 \\ 12 - 3x, \ 2 \le x \le 5 \\ 7x - 6, \ 5 \le x \le \infty \end{cases}$

Задана функція *y = f(x)* – не елементарна і визначена для всіх невід'ємних значень аргументу. Точки, які розбивають функцію на інтервали можуть бути розривами. Для перевірки знайдемо односторонні границі для двох точок – спільних меж інтервалів, в яких функція змінює свій аналітичний вид.

1) $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2-0} y = \lim\limits_{x\to 2-0} 3\sqrt{x+2} = 3 \cdot 2 = 6;$

$$\lim_{x\to 2+0} y = \lim_{x\to 2+0} (12 - 3x) = 6;$$

$$y(2) = 3\sqrt{2+2} = 6;$$

Оскільки границі в точці $x = 2$ рівні значенню функції в цій точці, то функція – неперервна. Стрибка функції на межі інтервалів не існує.

2). Дослідимо на неперервність другу точку $x = 5$:

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 2-0} (12 - 3x) = 12 - 3 \cdot 5 = -3;$$

$$\lim_{x\to 5+0} y = \lim_{x\to 2-0} (7x - 6) = 7 \cdot 5 - 6 = 29.$$

За означенням функція в точці x =5 має неусувний розрив I роду.

Стрибок функції в точці розриву рівний 29-(-3)=31.

Для заданої функції побудовано графік, рис 6.5.

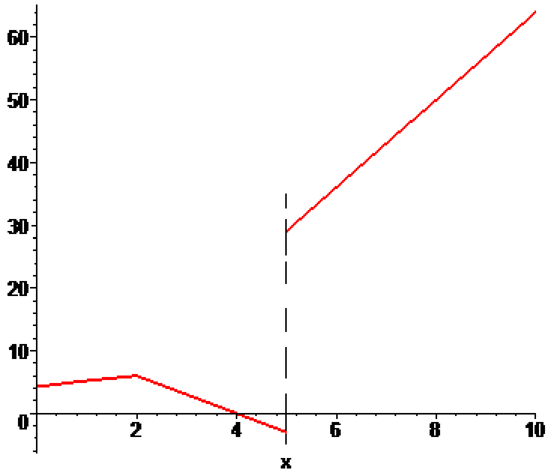


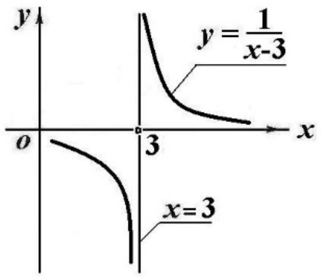
Рис. 6.5.

Задачі знаходження асимптот графіка функції y = f(x).

<u>№ 6.</u> Знайти асимптоти графіків функцій.

а). $y = \dfrac{1}{x-3}$.

Визначаємо, наявність горизонтальних асимптот, обчислюючи границю функції при $x \to \infty$.



$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$, отже функція *має горизонтальну асимптоту* $y = 0$.

Точка розриву кривої: $x = 3$, так як ($x-3$) = 0 при $x = 3$.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to 3$ зліва, справа.

$\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$.

Отже крива *має вертикальну асимптоту* $x = 3$.

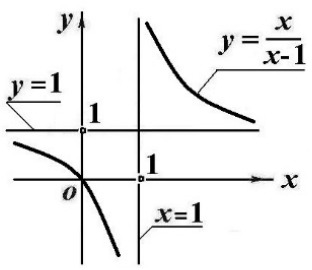
б). $y = \dfrac{x}{x-1}$.

Визначаємо наявність горизонтальних асимптот, обчислюючи границю функції при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 1 + 0 = 1$$

Отже, $y = 1$ - *горизонтальна асимптота* графіка функції.

Знаменник ($x-1$) функції перетворюється на нуль при $x = 1$.



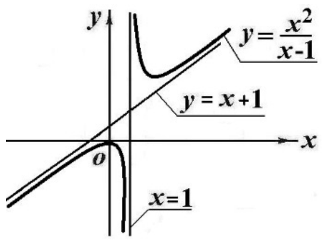
Досліджуємо поведінку функції при $x \to 1$, зліва і справа від точки розриву.

$\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$, отже крива *має вертикальну асимптоту* $x = 1$.

в). $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Крива функції не має горизонтальних асимптот: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty$. Якщо $x\to 1$, то $y\to\pm\infty$, тому пряма $x=1$ є *вертикальною асимптотою*.

Знаходимо похилу асимптоту $y=kx+b$:



$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1.$$

Графік функції має *похилу асимптоту* $y=x+1$.

<u>Задачі для самостійного розв'язку.</u>

№1. Обчислити границі функцій.

а). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; *б*). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ *в*). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}$ *г*). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

№2. Перевірити функції на неперервність, визначити характер точок розриву.

а). $\frac{1}{(x-1)(x-5)}$ б). $y=\frac{x^2-25}{x-5}$

№3. Які з даних функцій є неперервними в точці x=1? Якщо є порушення неперервності, встановити характер точок розриву

а). $y=\frac{x^2-1}{x-1}$; $y=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & якщо\ \ x\neq 1\\ 2 & якщо\ \ x=1\end{cases}$;

б). $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$; $y=\frac{1}{x-1}$;

№ 4. Функція у задана різними аналітичними виразами для різних областей визначення. Необхідно:

1). знайти точки розриву функції, якщо вони існують;

2). знайти односторонні границі і скачок функції в точках розриву;

3). зробити схематичне креслення.

а). $f(x)=\begin{cases}x-2 & при\quad x>-1\\ -2, & при\quad x=-2\\ -x-2, & при\quad x<-2\end{cases}$; *б*). $f(x)=\begin{cases}x^2 & при\quad x\geq 0\\ x^2-1, & при\quad x<0\end{cases}$

в). $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & при\quad x\leq 2\\ 6-2x, & при\quad x>2\end{cases}$ *г*). $f(x)=\begin{cases}9-x^2 & при\quad x\leq 1\\ 2x+3, & при\quad x>1\end{cases}$

№ 5. Знайдіть асимптоти графіків функцій:

а). $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; б). $y=\frac{2}{x+2}$; *в*). $y=\frac{5}{x^2-25}$; *г*). $y=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$.

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7-8

ТЕМА 7. *Диференційне числення функції однієї змінної*

Завдання:

1. Обчислення похідних і диференціалу функції;
2. Застосування похідної до наближених обчислень;
3. Дослідження функції і побудова графіку;
4. Визначення асимптот графіка функції;

Задачі для розв'язку на практичному занятті.

№ 1. Обчислити похідну першого порядку заданої елементарної функції однієї змінної x: $y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$

За допомогою формул дії над степенями ($\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ і $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$) перетворюємо функцію до вигляду зручного для диференціювання:

$y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2-\frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}}$, тоді похідна обчислюється за формулою 4.

№ 2.Обчислити похідну першого порядку складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$: $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

Застосовуємо формулу $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$$y' = (\sqrt{x-\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}} \cdot (x - \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}}.$$

№ 3. Знайти похідну $'$, якщо функція $y = f(x)$ задана рівнянням: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(y + x') = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2y' - (y + xy') = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y'(y^2 - x) + (x^2 - y) = 0 \leftrightarrow y' = \frac{y-x^2}{x-y^2}.$$

№ 4. Знайти похідну y'_x, функції заданої параметрично: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

$\frac{dy}{dt} = aCost;$ $\frac{dx}{dt} = -aSint,$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{Cost}{Sint} = ctgx.$

№ 5 Обчислити похідну функції6 $y = (x+1)^{\cos x}$.

1) Логарифмуємо задану функцію і використовуємо властивості логарифма для спрощення виразу.

$$\ln y = \ln (x+1)^{\cos x}; \quad \ln y = \cos x \cdot \ln(x+1) \cdot$$

2). Знаходимо похідну лівої і правої частини рівності:

$$(\ln y)' = (\cos x)' \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot (\ln(x+1))'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1}(x+1)'$$

3). Знаходимо виаз для $y_x^{/}$

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \cos x \cdot \frac{1}{x+1} \right),$$

$$y' = (x+1)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(x+1) + \frac{\cos x}{x+1} \right).$$

№ 6. Знайти диференціал функції $y = ln\sqrt{x}$.

$dy = y^{/} dx = (ln\sqrt{x})^{/} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{2x}$.

Задачі на застосування диференціалу функції однієї змінної до наближених обчислень.

Обчислення наближеного значення приросту функції

№ 7. Обчислити наближене значення приросту даної функцій y, якщо x - задане значення аргументу, якому надається приріст Δx.

$y = 3x^3 - 4$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}001$.

$\Delta y \approx dy$; $\Delta y \approx (3x^3 - 4)' \Delta x$; $\Delta y \approx 9x^2 \Delta x$; $\Delta y \approx 9 \cdot 2^2 \cdot 0{,}001$;

$\Delta y \approx 0{,}036$.

№ 8. На скільки збільшиться при нагріванні об'єм кулі радіуса R, якщо довжина радіуса збільшилась на величину ΔR?

Об'єм кулі обчислюється за формулою $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. Вважаючи приріст ΔR аргумента R малим, замінимо приріст об'єму кулі її диференціалом: $\Delta V \approx dV$.

$\Delta V \approx \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)' \Delta R$; $\Delta V \approx \frac{4}{3} \pi 3R^2 \Delta R$; Об'єм кулі збільшиться на величину:

$\Delta V \approx 4\pi R^2 \Delta R$.

Обчислення наближеного значення функції.

Формула для наближеного обчислення приросту функції:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

№ 9. Знайти наближене числове значення функції $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$ в точці з абсцисою $2{,}01$.

Припустимо $x + \Delta x = 2{,}01$, де $x = 2$ і $\Delta x = 0{,}01$, тоді $f(2 + 0{,}01) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0{,}01$, де $f(2) = 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 3 = 39$, $y' = f'(x) = 15x^2 - 2$, $f'(2) = 58$,

$f(2{,}01) = 39 + 58 \cdot 0{,}01 = 39{,}58$.

Обчислення наближеного значення степеня

Нехай аргумент x степеневої функції $f(x) = x^n$ набуває приросту Δx, причому Δx мале. Обчислимо наближене значення функції $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$ за формулою $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, де $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$, $f(x) = x^n$, $f'(x)\Delta x = nx^{n-1}\Delta x$.

Одержуємо формулу для обчислення наближеного значення степеня:

$$(x+\Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x.$$

№ 10. Знайти наближене значення $(4{,}003)^3$; $(9{,}993)^2$

$(4{,}003)^3 = (4 + 0{,}003)^3 \approx 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 0{,}003 = 64{,}144$

$(9{,}993)^2 = (10 - 0{,}007)^2 \approx 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot (-0{,}007) = 100 - 0{,}14 = 99{,}86$

Обчислення наближеного значення кореня

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[n]{x}$.Нехай аргумент x набуває малого приросту Δx Обчислимо наближене значення функції $f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x}$ за формулою:

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, де $f(x + \Delta x) = \sqrt[n]{x + \Delta x}$, $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$,

$f'(x)\Delta x = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x = \dfrac{1}{n} \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{x^1} \Delta x = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx} \Delta x$. Таким чином одержали формулу для обчислення наближеного значення кореня:

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} = \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \Delta x .$$

<u>№ 11</u>. Знайти наближене значення $\sqrt[3]{1{,}006}$, $\sqrt{24{,}96}$.

$$\sqrt[3]{1{,}006} = \sqrt[3]{1+0{,}006} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{\sqrt[3]{1}}{3\cdot 1}\cdot 0{,}006 = 1 + 0{,}002 = 1{,}002 .$$

$$\sqrt{24{,}96} = \sqrt{25-0{,}04} \approx \sqrt{25} + \frac{\sqrt{25}}{2\cdot 25}\cdot(-0{,}04) = 5 - \frac{5}{50}\cdot 0{,}04 = 5 - 0{,}004 = 4{,}996$$

<u>№ 12</u>. Обчислити похідну другого порядку заданої елементарної функції: $y = \left(x^{\frac{5}{4}} \right)$

$$y'' = \left(x^{\frac{5}{4}} \right)'' = \frac{5}{4}\left(x^{\frac{1}{4}} \right)' = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{5}{16} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{16\sqrt[4]{x^3}} .$$

<u>№ 13.</u> Обчислити похідну другого порядку складної функції $y = f(u)$,

де $u = \varphi(x) : y = (\sqrt{x-\sqrt{x}})$

$$y'' = (\sqrt{x-\sqrt{x}})'' = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x\sqrt{x}-x}} \right)' = \frac{(2\sqrt{x}-1)'(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - (4\sqrt{x\sqrt{x}-x})'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(4\sqrt{x\sqrt{x}-x}) - \frac{4}{2\sqrt{x\sqrt{x}-x}}(x\sqrt{x}-x)'(2\sqrt{x}-1)}{16x(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{x\sqrt{x}-x})\sqrt{x\sqrt{x}-x} - (x^{1+\frac{1}{2}}-x)'(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}-x}} = \frac{4(x\sqrt{x}-x) - (\frac{3}{2}\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}}{16x^2(\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-1}} .$$

<u>№ 14</u>. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. На відрізку [-1; 4].

1). Критичні точки: $\begin{cases} y' = x^2 - 4x + 3 \\ y' = 0 : \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x_1 = 3; \ x_2 = 1 \end{cases}$

значення функції в критичних точках: $y(1) = 2\frac{1}{3}$; $y(3) = 1$.

2). Значення функції на кінцях відрізка: $y(-1) = -4\frac{1}{3}$; $y(4) = 66\frac{1}{3}$.

3). Максимальне значення функції на відрізку [-1; 4] $y(4) = 66\frac{1}{3}$; мінімальне значення на відрізку [-1; 4] $y(-1) = -4\frac{1}{3}$.

<u>№ 15.</u> Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$y = \frac{x^2+2}{x}$$

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty;0) \bigcup (0;+\infty)$.
2. Парність, непарність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{(-x)} = \frac{x^2+2}{-x} = -\frac{x^2+2}{x} = -f(x)$$

3. Функція непарна, тому її графік симетричний відносно початку системи координат. Точок перетину з осями координат не існує.
4. В точці $x = 0$ функція має розрив. Односторонні границі зліва та справа від точки розриву:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2}{x}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+2}{x}=+\infty.$$

Вертикальна асимптота $x = 0$.

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Отже, похила асимптота $y = x$, при $x\to\pm\infty$.

Знайдемо горизонтальну асимптоту $y = b$:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{2}{x}\right)=\infty$$

Тобто, графік функції горизонтальної асимптот не має.

5. Знайдемо критичні точки першого роду. Для цього знайдемо похідну $f'(x)$ і розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+2)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}=0$$

$$x^2-2=0 \to x\neq 0; \quad x=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}4$$

Запишемо критичні точки та інтервали, на які вони поділяють область визначення функції в таблицю 7.1. (перший рядок). Визначимо знак $f'(x)$ в кожному інтервалі і запишемо в другий рядок таблиці. В третьому рядку таблиці зазначимо характер монотонності функції.

Таблиця 7.1

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
$f'(x)$	+	*0*	–	*не існує*	–	*0*	+
$f(x)$	*зростає* ↑	*max*	*спадає* ↓	*не існує*	*спадає* ↓	*min*	*зростає* ↑

Отже, екстремуми функції: $y_{\max}=f(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}\approx -2{,}8$; $y_{\min}=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}\approx 2{,}8$.

6. Знайдемо критичні точки другого роду. Для цього знайдемо другу похідну $f''(x)$ і розв'яжемо рівняння $f''(x)=0$:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)'=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2)^2}=\frac{2x^3-2x^3+4x}{x^4}=\frac{4x}{x^4}=\frac{4}{x^3}=0$$

$$x\neq 0$$

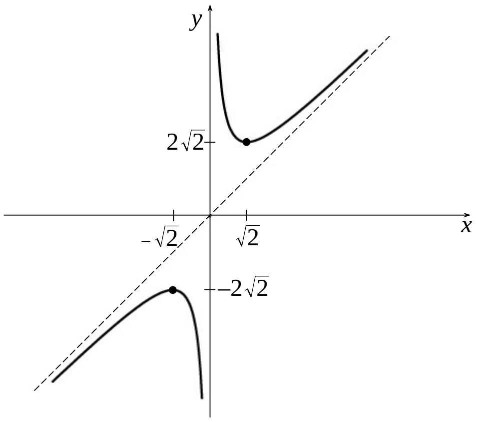
Маємо одну критичну точку другого роду $x = 0$, але ця точка не входить в область визначення. Таким чином, точок перегину графік функції не має.

Запишемо інтервали області визначення функції в таблицю 2 (в перший рядок). Визначимо знак $f''(x)$ в кожному інтервалі (і запишемо в другий рядок таблиці). В третьому рядку таблиці зазначимо характер опуклості графіка функції.

Таблиця 7.2.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	–	*не існує*	+
$f(x)$	*Опукла вгору* ∩	*не існує*	*Опукла вниз* ∪

7. Побудуємо в системі координат пунктирною лінією похилу асимптоту $y = x$ (асимптота $x = 0$ є віссю OY) і відмітимо точки $y_{\max} \approx -2{,}8$, $y_{\min} \approx 2{,}8$. Враховуючи асимптоти, інтервали монотонності та опуклості, через знайдені точки побудуємо графік функції.



Задачі для самостійного розв'язку.

№1. Знайти похідні функцій і обчислить їх значення при $x = x_0$.

а). $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$; $x_0 = 1$; *б*). $y = \dfrac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}$; $x_0 = \dfrac{1}{4}$;

в). $y = \sin x e^{\cos x}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; *г*). $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1+tgx}{1-tgx}}$; $x_0 = 0$.

№2. Тіло рухається прямолінійно по закону $s(t) = \dfrac{4t+3}{t+3}$, де s вимірюється в метрах, а t- в секундах. Знайти швидкість і прискорення тіла в момент $t = 6$.

№3. Знайти похідні від неявних функцій:

а). $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; *б).* $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$;

в). $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$; *г).* $x \sin y + y \sin x = 0$.

№ 4. Знайти похідні від функцій заданих параметрично:

а). $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$; *б).* $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t \\ y = e^{t}\cos t \end{cases}$;

№5. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^2 + 2x + 3$ в точці $x = 1$ при $\Delta x = 0{,}2$

№ 6. Обчислить приріст і диференціал функції $y = x^3 - x$ в точці $x = 2$ при

1) $\Delta x = 0{,}01$; 2). $\Delta x = 0{,}1$.

№7. Знайти абсолютну похибку $|\Delta y - dy|$ і відносну похибку $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, які допускаються при заміні приросту функції її диференціалом.

№8. Використовуючи поняття диференціала, обчислити:

а) $\arcsin 0{,}51$; *б)* $\cos 61^\circ$; *в)* $\sqrt[5]{33}$; *г)* $e^{1{,}03}$.

№9. Дослідити на екстремум функції:

а). $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; *б)* $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$; в) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; *г)* $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

№10. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

а). $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-2{,}2]$; б) $y = arctg\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0{,}1]$.

№11. Знайти точки перегину і інтервали випуклості функцій:

а). $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$; *б*). $y = xe^{2x} + 1$;

№12. Провести повне дослідження заданих функцій і побудувати їх графіки:

а). $y = \frac{1}{x} + 4x^2$; *б)* $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9-10

ТЕМА: 8. *Інтегральне числення функції однієї змінної.*

Завдання:

1. Обчислення табличних інтегалів функцій.
2. Методи інтегрування: заміна змінної, інтегрування частинами.
3. Інтегрування основних класів функцій.

Задачі для розв'язку на практичному у занятті

№. 1. $\int \frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$

$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$

№ 2.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}=\left|\begin{array}{l}x=t^6,\\ dx=6t^5dt;\\ t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)}=6\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\left(t-\operatorname{arctg}t\right)+C=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

№ 3. $\int\sin^5 x\cos xdx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{array}\right|=\int t^5dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{6}\sin^6 x+C.$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни. Вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом

Іноді доцільно виконати операцію піднесення підінтегральної функції під знак диференціала:

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot d\left(\varphi(x)\right)=F\left(\varphi(x)\right)+C.$$

Наприклад, коли φ(x) є лінійною функцією, тобто $\varphi(x)=ax+b,$, дістаємо: $\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{2}\int f\left(ax+b\right)\cdot d\left(ax+b\right)=\frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C.$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який постійний доданок (значення диференціала при цьому не зміниться): $d\varphi(x)=d\left(\varphi(x)+C\right)$.

№ 4. $\int\frac{\sin xdx}{1+3\cos x}=\int\frac{d\left(-\cos x\right)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d\left(3\cos x\right)}{1+3\cos x}=$

$=-\frac{1}{3}\int\frac{d\left(1+3\cos x\right)}{1+3\cos x}=-\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C.$

№ 5. $$\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{l}u=x, du=dx\\ dv=\sin xdx\Rightarrow\\ \Rightarrow\int dv=\int\sin xdx\Rightarrow\\ \Rightarrow v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int-\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$$

№ 6.

$$\int x^2 e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$$

<u>№ 7</u> $G = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u, \ \ du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| =$

$$= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = u, \ \ du = \cos x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x) - G.$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x(\cos x + \sin x) - G$, із якого знаходимо

$$G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C \ .$$

<u>№ 8.</u> Обчислити інтеграл: $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$

1). Виділяємо цілу частину дробу – підінтегральної функції:

$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx \quad = \int (x - \frac{6x}{x^3+8})dx$$

2). Розкладаємо знаменник правильного дробу на співмножники і записуємо дріб як суму двох дробів, визначаємо невідомі коефіцієнти:

$$\frac{1.6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 6x = A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A + 2C \ ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A+B \\ x^1 & 6 = -2A+2B+C \\ x^0 & 0 = 4A+2C \end{array} \right\} \\ x = -2 \Rightarrow -12 = 12A \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array} \right| = \int \left(x + \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-2x+4} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3} = \left| \begin{array}{l} x-1 = t \\ dx = dt \\ x = t+1 \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{t+3}{t^2+3}dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \int \frac{tdt}{t^2+3} - 3\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(t^2+3) -$$

$$- \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \ln|x+2| - \ln\sqrt{x^2-2x+4} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

<u>№ 9.</u> Обчислити інтегали що містять тригонометричні функції (універсальна тригонометрична ідстановка)

1) *Підінтегральна функція - непарна відносно* $\sin x$ *- підстановка* $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx =$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx=\begin{vmatrix}\cos x=t\\ \sin x dx=-dt\end{vmatrix}=\int\frac{1-t^2}{t^2}(-dt)=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

2). *Підінтегральна функція — непарна відносно* cos*x* - *раціоналізується за допомогою підстановки* sin *x*= *t*.

$$\int\cos^3 x\sin^2 x dx=\int\cos^3 x\sin^2 x\frac{\cos x}{\cos x}dx=$$

$$=\int\cos^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\cos x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x\cos x dx=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ dt=\cos x dx\end{vmatrix}=$$

$$=\int\left(1-t^2\right)t^2 dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

3) *Підінтегральна функція* $R(\sin x,\cos x)$ - *парна відносно* sin*x* і cos*x* разом, тобто $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$.

У цьому випадку використовують підстановку $\operatorname{tg} x=t$ або $\operatorname{ctg} x=t$.

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\begin{vmatrix}\operatorname{tg} x=t,\ \ x=\operatorname{arctg} t,\ \ dx=\dfrac{dt}{1+t^2};\\ \sin^2 x=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{t^2}{1+t^2};\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{1}{1+t^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C=\operatorname{tg} x-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-2\operatorname{ctg} x+C.$$

4). *Підінтегральна функція* $R(\operatorname{tg} x)$ *раціоналізується підстановкою* $\operatorname{tg} x=t$.

$$\int\operatorname{tg}^3 x dx=\begin{vmatrix}\operatorname{tg} x=t\\ x=\operatorname{arctg} t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int\frac{t^3 dt}{t^2+1}=\begin{vmatrix}\begin{array}{l|l} t^3 & t^2+1 \\ \hline & t \\ - & \\ \underline{t^3+t} & \\ -t & \end{array}\end{vmatrix}=$$

$$=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}+C.$$

<u>*Зауваження.*</u> В інтегралах $\int\sin^{2n} x\cdot\cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \ \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}.$$

<u>№ 10</u> Обчислити інтеграл використавши формули зниження степеню.

$$\int\sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

<u>*Зауваження.*</u> При інтегруванні інтегралів типу:

$\int\sin(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int\cos(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int\sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$ $a\neq b$, можна скористатися тригонометричними рівностями:

$$\sin(ax)\cdot\cos(bx)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)x+\ \ +\sin(a-b)x),$$

$$\cos(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx)=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x).$$

№ 11. Обчислити інтеграл використавши тригонометричні рівності.

$$\int\cos 2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin 3x)dx=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

№ 12. Обчислити інтеграли підінтегральний вираз яких містить іраціональності (радикали) .

1). $$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\left|\begin{array}{l}x+1=t^3\\ x=t^3-1\\ dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{(t^3-1)3t^2dt}{t^2}=3\int(t^3-1)dt=$$

$$=\frac{3}{4}t^4-3t+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{x+1}+C.$$

2). $$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x+1}{x-1}=t^2,\ x+1=t^2(x-1),\\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1};dx=\frac{-4tdt}{(t^2-1)^2}\end{array}\right|=\int\frac{(t^2-1)^2t(-4t)dt}{(t^2+1)^2(t^2-1)^2}=$$

$$=2\int\frac{t\cdot(-2t)dt}{(t^2+1)^2}=\left|\begin{array}{l}u=t,du=dt;\\ \frac{-2tdt}{(t^2+1)^2}=dv\Rightarrow v=\frac{1}{t^2+1}\end{array}\right|=\frac{2t}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{2t}{t^2+1}-2\operatorname{arctg}t+C=2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C\cdot$$

3) $$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\left|\begin{array}{l}x=t^{12},12=НСК(2,3,4)\\ dx=12t^{11}dt;t=\sqrt[12]{x}\end{array}\right|=\int\frac{t^6\cdot 12t^{11}dt}{t^8-t^3}=$$

$$=12\int\frac{t^{14}dt}{t^5-1}=12\int\frac{t^4(t^{10}-1+1)dt}{t^5-1}=12\int\left(t^4(t^5+1)+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C.$$

4). $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}=\left|\begin{array}{l}x=5\operatorname{tg}z,\quad z\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\quad z\neq 0,\\ dx=\frac{5dz}{\cos^2 z};\quad z=\operatorname{arctg}\frac{x}{5};\\ \sqrt{x^2+25}=5\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}=\frac{5}{\cos z}\end{array}\right|=\int\frac{\cos z\cdot 5dz}{5\cdot 25\operatorname{tg}^2 z\cdot\cos^2 z}=$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{\cos zdz}{\sin^2 z}=-\frac{1}{25\sin z}+C=-\frac{1}{25\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{5}}+C=\frac{\sqrt{x^2+25}}{25x}+C.$$

5)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t-x, \ a=1>0; \\ x+x+1 = t^2-2tx+x^2, \\ x=\frac{t^2-1}{2t+1}, \ dx=\frac{2(t^2+t+1)dt}{(2t+1)^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{(t^2+t+1)dt}{(x+t-x)(2t+1)^2} =$$

$$= \left| \frac{t^2+t-1}{t(2t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t+1} + \frac{C}{(2t+1)^2} \Rightarrow t^2+t+1 = A(2t+1)^2 + Bt(2t+1) + C\cdot t \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ C=-\frac{3}{2} \\ B=-\frac{3}{2} \end{array} \right| = 2\int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2} \right) dt = \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3} + \frac{3}{2(2t+1)} + C,$$

де $t = x+\sqrt{x^2+x+1}$.

Задачі для самостійного розв'язку.

Задача №1-15. Обчислити невизначені інтеграли:

№1. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$ №2 $\int \frac{x^3-3}{x^2+6x+7}dx$ №3. $\int \arcsin x dx$ №4. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$

№5. $\int e^{x^2+3} x dx$ №6. $\int \frac{x^3}{x^2-4}dx$; №7. $\int x \sin 2x\, dx$ №8. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$

№9. $\int \frac{\sqrt{arctg\ 2x\, dx}}{1+4x^2}$ №10. $\int x\cos 3x dx$ №11. $\int x^2 1n\, x dx$ №12. $\int \frac{\cos 3x\, dx}{4+\sin 3x}$

№13. $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)\, dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$ №14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$ №15. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

ТЕМА 9. *Визначений інтеграл.*

Завдання:

1. Обчислення визначених інтегралів за теоремою Ньютона-Лейбніця.
2. Методи інтегруванняв визначеному інтегралі: заміна змінної, інтегрування частинами.
3. Інтеграли зі змінною межею інтегрування, невласні інтеграли.
4. Застосування визначеного інтеграла для обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл обертання.

Задачі для розв'язку на практичному занятті.

№ 1. $$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x=t^2, \ dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

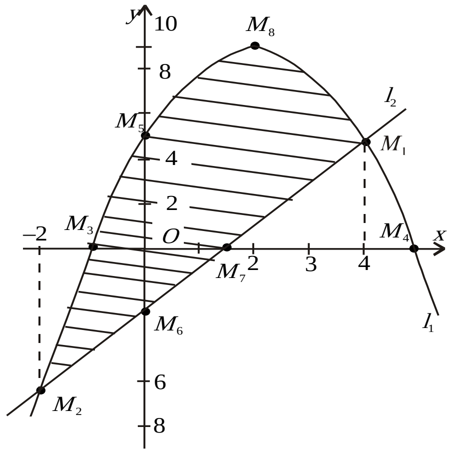
$$= 2\int_2^3 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2\left(3-\ln 4-(2-\ln 3)\right) = 2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

№ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

№ 3. Обчислити площу фігури обмеженої лініями: $y = -x^2 + 4x + 5$ і $y = 2x - 3$.



Побудуємо на координатній площині фігуру, обмежену параболою $y = -x^2 + 4x + 5$ (l_1) та прямою $y = 2x - 3$ (l_2). Знайдемо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 9.8).

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x - 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ \ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y - 9 = -(x-2)^2$.

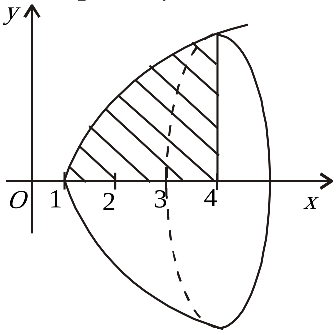
Площа S фігури $M_1M_8M_2$ обчислюється як інтеграл різниці функцій – кривих, що обмежують фігуру.:

$$S=\int_{-2}^{4}\left(-x^2+4x+5-(2x-3)\right)dx=\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+16+32-\left(\frac{8}{3}+4-16\right)=36.$$

<u>№ 4.</u> Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y^2=3x-3$, $x=1$, $x=4$.

У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями



За формулою (9.9) обчислюємо об'єм тіла:

$$V=\pi\int_1^4 y^2dx=\pi\int_1^4(3x-3)dx=\frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^4=\frac{27}{2}\pi.$$

<u>№ 5</u>. Знайти $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

Застосуємо формулу (9.11):

$\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}[\ln x]_1^b=\lim\limits_{b\to\infty}[\ln b-\ln 1]=\infty$. Таким чином, інтеграл розбіжний.

<u>№ 6.</u> Перевірити на збіжність невласний інтеграл $\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx$.

$\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}|_0^{+\infty}=0+1=1$. Таким чином, заданий невласний інтеграл збіжний і дорівнює 1.

<u>Задачі для самостійного розв'язку</u>.

№1 Обчислити визначені інтеграли.

1. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^3}$
2. $\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$
3. $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{Cos^2x}$
4. $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+4x^2}$
5. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$
6. $\int_1^5\frac{dx}{\sqrt{5+4x}}$
7. $\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{3x^3+1}}$
8. $\int_{-1}^4\frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$
9. $\int_0^{\sqrt5}x\sqrt{x^2+4}dx$
10. $\int_0^{\pi/2}x^2\,cos2x\,dx$

№ 2. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими кривими. Зробити креслення.

1. $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$
2. $y=\frac{5}{x}$, $y=6-x$
3. $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=4-x$
4. $y=x^2+2$, $y=4-x^2$
5. $y=-x^2+1$, $y=x-1$
6. $y=x^2-4x+4$, $y=x$
7. $y=\frac{1}{4}x^2$, $y^2=4x$
8. $y=\frac{6}{x}$, $y=7-x$
9. $y=3x^2+1$, $y=3x+7$
10. $y=2x-x^2$, $y=-x$

№ 3. Обчислити об'єм тіла , утвореного обертанням навколо осі OX фігури, що обмежена заданими лініями. Зробити креслення.

1. $y^2=x$; $y=x^2$
2. $xy=4$; x = 1; y =0
3. $y=Sin\,x$ *(одна напівхвиля)*; $y=0$
4. $y=x^2+1$; $y=3x-1$

5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

№ 4. Обчислити об'єм тіла , утвореного обертанням навколо осі OY фігури, що обмежена заданими лініями. Зробити креслення.

1. $y^2 = 4 - x$; $x = 0$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
3. $x + y - 2 = 0$; $x = 0$; $y = 0$
4. $x \cdot y = 2$; $x = 0$; $y = 1$; $y = 4$
5. $y = -x^2 + 4$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 3.$

ВИКЛАДАЧ: Дебела І.М - доцент кафедри Менеджменту та інформаційних технологій