ХЕРСОНСЬКИЙ АГРАРНО-ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

І СЕМЕСТР

ХЕРСОН 2020

РОЗРОБНИК: к.с.г.н., доцент Дебела І.М.

ЛЕКЦІЯ 1

ТЕМА: ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.

1.1. *Основні відомості про матриці*

Матрицею розмірності $m\times n$ називається прямокутна таблиця $m\times n$ чисел, що містить m рядків та n стовбців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці. Індексами позначають: i- номер рядка ($i = 1\div m$); j – номер стовпчика, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Матриця що складається з одного рядка (стовпчика) називається матрицею рядком (стовпцем), або вектором.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Дві матриці вважають рівними, якщо вони однакового розміру і елементи цих матриць попарно рівні між собою.

Матриця усі елементи якої нулі, називається нульовою, позначають *0*. Квадратною матрицею називають матрицю у якої однакова кількість рядків і стовбців ($m=n$).

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Число n називають порядком квадратної матриці. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці складають головну діагональ матриці, елементи a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} – побічну діагональ.

Діагональною називають квадратну матрицю, усі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулеві.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Одиничною називають діагональну матрицю, у якої усі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Позначають Е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця називається *верхньою трикутною*, якщо усі елементи матриці, що розташовані нижче головної діагоналі нулі і *нижньою трикутною*, якщо усі елементи матриці, що розташовані вище головної діагоналі рівні нулю.

1.2. *Лінійні операції над матрицями та їх властивості*

Лінійними операціями над матрицями називають операції додавання, віднімання матриць та множення матриці на число.

Сумою (різницею) двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, однакової розмірності $m\times n$, називається така матриця $C= (c_{ij})$ розмірності $m\times n$, кожен елемент якої є сумою (різницею) відповідних елементів матриць A і B, тобто: $c_{ij} =a_{ij}+ b_{ij}$ $(c_{ij} =a_{ij} - b_{ij})$.

Приклад 1.Знайти суму і різницю двох матриць А і В.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}; \quad D = A - B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число α називається матриця $B = (b_{ij})$, елементи якої визначають як добуток числа α на елементи матриці A, тобто $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. Записують у вигляді $B = \alpha A=A\alpha$.

Матриця (-1)A називається протилежною до матриці A і позначається $–A$.

Властивості лінійних операцій ад матрицями:

1. $A+B = B+A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $A+0 = A$
4. $A+(-A) = 0$
5. $1\cdot A = A$
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
7. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
8. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

1.3. *Добуток матриць, властивості операції множення матриць*

Арифметична операція множення дійсна лише для *узгоджених* матриць. Дві матриці A і B називаються *узгодженими*, якщо кількість стовбців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Нехай матриця $A = (a_{ij})$ має розмірність $m\times n$, а матриця $B = (b_{ij})$ розмірність $n\times k$, тоді добутком матриці A на матрицю B називається матриця $C= (c_{ij})$ розмірністю $m\times k$, кожен елемент якої є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на відповіднв елементи j-го стовбця матриці B. Тобто: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

Приклад 2. Знайти матрицю С = АВ.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}0\cdot 2+1\cdot 0 & 0\cdot 3+1\cdot 1\\ 2\cdot 2+3\cdot 0 & 2\cdot 3+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 9\end{pmatrix}$$

Зауваження: у загальному випадку операція множення матриць *не комутативна*, тобто $A\cdot B\neq B\cdot A$. Так за даними прикладу 2 маємо: $B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 11\\ 2 & 3\end{pmatrix}\neq A\cdot B$. Якщо $A\cdot B = B\cdot A$, то матриці A *і* B називають *комутативними*.

Властивості операції множення матриць:

1. $A\cdot E = E\cdot A = A$
2. $A\cdot 0 = 0\cdot A = 0$
3. $(A\cdot B)\, C = A(B\cdot C)$
4. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
5. $(A+B)\, C = A\cdot C + B\cdot C$
6. $\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$

1.4. *Піднесення матриці до степеню, транспонування матриць*

Операція піднесення матриці до степеню дійсна лише для квадратних матриць.

Цілим додатнім степенем A^n, де $n>1$, квадратної матриці A називається добуток n матриць, рівних A, тобто $A^n = A\cdot A\ldots A\ldots$

За означенням $A^0 = E$, $A^1 = A$, $A^n\cdot A^m = A^{n+m}$, $(A^n)^m = A^{nm}$

Приклад 3. Знайти A^2, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$$

Зауваження: $A^n\cdot=0$, не означає, що матриця $A=0$.

Матриця A^T називається *транспонованою до матриці A,* якщо у матриці A рядки замінити стовбцями, зберігши при цьому значення елементів.

Приклад 4. Транспонувати матрицю A.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 8 & 9 & 10\end{pmatrix};\qquad A^T=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\\ 4 & 7 & 10\end{pmatrix}$$

Властивості транспонованих матриць:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T+B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

1.5. *Визначники квадратних матриць, властивості визначників*

Кожній квадратній матриці $A = (a_{ij})$ порядку n з дійсними або комплексними елементами можна однозначно поставити у відповідність дійсне або комплексне число Δ, яке називається визначником матриці A:

$$\Delta = \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} ,$$

де a_{i1} –елементи першого стовбця матриці A, M_{i1} –визначник матриці (n-1)-го порядку, що отримується з A вилученням її i-го рядка і першого стовбця. M_{i1} - *н*азивається мінором елемента a_{i1} матриці A.

У загальному випадку *мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij} матриці A порядку n називається визначник матриці (n-1)-го порядку, одержаний з матриці A вилученням її i-го рядка і j – го стовбця. *Алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij} матриці A порядку n називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Тоді можна дати ще одне означення визначника матриці A: *визначником матриці A називається число, що обчислюється як сума добутків елементів будь-якого рядка або стовбця на їх алгебраїчні доповнення.*

Визначник матриці другого порядку визначається як різниця добутків елементів головної та побічної діоганалей:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Визначник матриці третього порядку визначається за правилом трикутника:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Визначник трикутної матриці (також і діагональної) дорівнює добутку елементів її головної діагоналі.

Властивості визначників:

1. при транспонування матриці її визначник не змінюється
2. якщо усі елементи деякого рядка (стовбця) матриці є нулями, то визначник такої матриці дорівнює нулю
3. при перестановці двох рядків (стовбців) матриці визначник змінює знак на протилежний
4. спільний множник усіх елементів рядка (стовбця) можна винести за знак визначника
5. визначник матриці, що містить два пропорційні рядки (стовбці) дорівнює нулеві
6. якщо i-й рядок (стовбець) матриці C є сумою відповідних i-х рядків (стовбців) матриць A і B, а усі інші рядки (стовбці) матриць C, A, B відповідно рівні між собою, то $\det C = \det A + \det B$
7. значення визначника не зміниться, якщо до елементів його одного рядка (стовбця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовбця), помножені на довільне число
8. визначник добутку матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць.

Приклад 5. Обчислити визначник матриці трьома способами: 1) за правилом трикутника; 2) розкладенням визначника на алгебраїчні доповнення; 3) використавши властивості визначників.

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot(-2)+(-2)\cdot3\cdot2+(-2)\cdot0\cdot1-1\cdot1\cdot2-(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)-3\cdot0\cdot3=-12$

2) $\Delta = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)+2\cdot(-2)+1\cdot(-2)=-12$

3) переставимо місцями перший і третій рядки, виносячи з третього рядка спільний множник:

$$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Послідовно множимо перший рядок на 2 і додаємо до другого рядка, потім на (-3) і додаємо до третього рядка:

$$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Другий рядок множимо на 2 і додаємо до третього:

$\Delta = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -2\cdot1\cdot1\cdot6=-12$, обчислили визначник трикутної матриці.

1.6. *Обернена матриця*

Оберненою матрицею до квадратної матриці A називається така матриця A^{-1}, для якої виконується рівність $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E$, де E – одинична матриця. Для знаходження оберненої матриці доцільно використовувати формулу:

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot(A_{ij})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, де $(A_{ij})^{\mathrm{T}}$ – трансформована матриця, елементами якої є алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ елементів a_{ij} матриці A; Δ – визначник матриці A.

Квадратна матриця називається не виродженою, або не особливою, якщо визначник матриці відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$). У протилежному випадку ($\Delta = 0$) матриця називається особливою, або виродженою і оберненої до неї матриці не існує. Тобто можна сформулювати наступну теорему:

Теорема (необхідна і достатня умова існування оберненої матриці).

Обернена матриця A^{-1} існує тоді і тільки тоді, якщо матриця A не вироджена.

Приклад 6. знайти матрицю обернену до даної матриці: $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

Знайдемо визначник матриці A:

$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-16\neq 0$ - матриця А на вироджена і до неї існує обернена A^{-1}.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів мтриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4 \quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1 \quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4 \quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4 \quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4$$

Отже обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1}=-\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -4 & 0\\ -1 & 7 & -4\\ 3 & -5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Властивості не вироджених матриць:

1. $(A^{-1})^{-1}=A$
2. $(A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}$
3. $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$
4. $\det(A^{-1}) == \dfrac{1}{\det A}$

1.7. *Ранг матриці. Елементарні перетворення матриці.*

Якщо в матриці A розмірності $m\times n$ викреслити будь-які рядки і стовбці, то можна виділити квадратні підматриці k–го порядку, де $k\leq min\,(m,n)$. Визначники таких підматриць називають *мінорами k–го порядку матриці А*. Наприклад, з матриці А розмірності 3×4 можна отримати підматриці першого, другого та третього порядку. *Рангом матриці називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці*. Ранг матриці позначається $rangA$, або $r(A)$.

Зауваження:

1.) ранг матриці A розмірності $m\times n$ завжди не більше значення мінімального з двох чисел m та n;

2.) $r(A)=0$ тоді і тільки тоді, якщо усі елементи матриці рівні нулеві;

3.) для квадратної матриці n-го порядку $r(A)=n$ тоді і лише тоді, коли матриця A невироджена.

Приклад 7. Визначити ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Мінор другого порядку

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, при обчисленні мінорів третього порядку виявляється, що рівними нулю будуть лише ті мінори 3-го порядку, що містять обчислений Δ, як мінор:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

У такому випадку обчислення усіх інших мінорів 3-го порядку не доцільно і ранг матриці дорівнює двом.

Елементарні перетворення матриці. Елементарними перетвореннями називають такі дії над матрицями:

1.) Відкидання нульового рядка (стовбця) матриці.
2.) Множення усіх елементів рядка (стовбці) матриці на число відмінне від нуля.
3.) Перестановка місцями рядків (стовбців) матриці.
4.) Додавання до елементів одного рядка (стовбця) відповідних елементів іншого рядка (стовбця), помножених на будь-яке число.
5.) Транспонування матриці.

Теорема: *Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.*

Властивості рангів матриці:

1.) $r(A+B) \leq r(A)+ r(B)$
2.) $r(A+B) \geq /r(A) - r(B)/$
3.) $r(AA^T) = r(A)$
4.) $r(AB) \leq min\{ r(A); r(B)\}$
5.) $r(AB) \geq r(A)+ r(B) - n$, *де n* – число стовбців матриці A або рядків матриці B
6.) $r(AB) = r(A)$, якщо В квадратна матриця і $detB \neq 0$.

Питання для самостійного контролю знань.

1. Означення матриці.
2. Які види матриць ви знаєте?
3. Які операції над матрицями називаються лінійними?
4. .Властивості лінійних операцій над матрицями.
5. Добуток матриць: які матриці називаються узгодженими, властивості добутку матриць, піднесення матриці до степеню.
6. Визначники квадратних матриць; означення визначника, його властивості, способи обчислення визначників.

7. Мінор і алгебраїчне доповнення: означення і застосування.
8. Обернена матриця: означення оберненої матриці, необхідна і достатня умова існування оберненої матриці.
9. Які дії над матрицями називаються елементарними перетвореннями?
10. Ранг матриці: означення рангу матриці, співвідношення для рангу матриць, теореми про ранг матриці.

ЛЕКЦІЯ 2

ТЕМА: СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

2.1. *Поняття системи лінійних рівнянь*

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ або лінійною системою називається система вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.1)$$

числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи лінійних рівнянь, b_i (i=1÷m)– вільними членами, або правою частиною системи.

Лінійна система називається *однорідною*, якщо всі вільні члени рівні нулеві, якщо серед вільних членів системи хоча б один відмінний від нуля, то лінійна система називається *неоднорідною*.

Розв’язком системи (2.1) називається впорядкована сукупність чисел (c_1, c_2, ..., c_n), підстановка яких замість відповідних x_j (j =1÷n) перетворює кожне рівняння у тотожність.

Однорідні системи завжди мають принаймні один розв’язок (0, 0, ..., 0), який називають *тривіальним* (нульовим) розв’язком системи. І тоді питання про розв’зок однорідної системи лінійних рівнянь зводиться до питання про існування нетривіального розв’язку.

У загальному випадку система (2.1) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв’язок і несумісною якщо система жодного розв’язку не має. Сумісна система, що має тільки один розв’язок називається *визначеною.* Якщо сумісна система має безліч розв’язків, вона називається *невизначеною*.

Дві системи вважаються *еквівалентними*, якщо множини їх розв’язків однакові (дві несумісні системи еквівалентні, бо жодна з них розв’язку не має).

Розв’язуючи ту чи іншу систему лінійних рівнянь, перш за все перевіряють її на сумісність.

Систему (2.1) можна зависати у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B, \qquad (2.2)$$

де матриця коефіцієнтів $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається основною матрицею системи, а матриці – стовбці $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ - складені з невідомих і вільних членів системи.

Матриця $(A/b)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ - називається розширеною матрицею системи.

Питання про сумісність системи m лінійних рівнянь з n невідомими розв’язує наступна теорема.

<u>*Теорема Кронекера-Капеллі*</u>*: система лінійних рівнянь сумісна тоді і лише тоді, коли ранг r(A) основної матриці системи дорівнює рангу r(A/b) розширеної матриці цієї системи.*

Характер множини розв’язків системи залежить лише від рангу основної матриці системи і від рангу розширеної матриці:

1.) якщо $r(A/b)\neq r(A)$, то неоднорідна система (2.2) не має розв’язків – несумісна;

2.) якщо $r(A/b)=r(A)=g$, то система (2.2) сумісна і:

при $g=n$ – має єдиний розв’язок (для однорідної системи - тривіальний розв’язок);

при $g<n$ має безліч розв’язків (для однорідної системи -має нетривіальний розв’язок).

2.2. Методи розв’язування систем лінійних рівнянь

2.2.1. Метод оберненої матриці.

Нехай число рівнянь системи (2.1) дорівнює числу невідомих, тобто $m=n$, тоді основна матриця системи буде квадратною. Припустимо, що визначник основної матриці A відмінний від нуля ($\Delta\neq 0$), тобто матриця A невироджена, тоді існує обернена матриця A^{-1}.

Запишемо систему (2.1) у матричному вигляді (2.2) і помножимо зліва обидві частини рівності (2.2) на обернену матрицю:

$A^{-1}(A\cdot X)=A^{-1}B$, використавши властивості невироджених матриць отримаємо:

$A^{-1}(A\cdot X)=(A^{-1}A)\cdot X=E\cdot X=X$, тобто*, розв’язком системи буде матриця-стовбець:*

$$X=A^{-1}B \tag{2.3}$$

<u>Приклад 9.</u> розв’язати систему методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$$

Запишемо матрицю коефіцієнтів системи $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ і знайдемо обернену матрицю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю-стовбець $X = A^{-1}B$:

$$X = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - шуканий розв'язок системи.

2.2.2. Метод Крамера.

Формули Крамера використовують для розв'язку системи (2.1) лише тоді, коли основна матриця системи є квадратною невиродженою матрицею.

<u>Теорема Крамера</u>: *нехай Δ – основний визначник системи лінійних рівнянь, а Δ_j ($j = 1 \div n$) визначник, який отриманий заміною j –го стовбця на стовбець вільних членів B. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система (2.1) має єдиний розв'язок, який визначається формулами Крамера:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ldots; \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{2.3}$$

<u>Зауваження:</u> якщо $\Delta = 0$, а серед визначників хоча б один відмінний від нуля, то неоднорідна система лінійних рівнянь несумісна. Для однорідної системи при $\Delta \neq 0$ існує лише тривіальне рішення, при $\Delta = 0$, то окрім тривіального, система має також і інші розв'язки.

<u>Приклад 10</u>. розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Визначник системи обчислили в <u>прикладі 9</u>: $\Delta = 9 \neq 0$ – система сумісна і визначена, тобто має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники Δ_j ($j = 1 \div 3$).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

За формулами (2.3) знайдемо значення невідомих:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1.$$

2.2.3. Метод Гаусса.

Метод Гаусса – метод послідовного виключення змінних,полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система лінійних рівнянь зводиться до рівносильної системи, розв'язати яку набагато простіше, ніж задану.

До елементарних перетворень системи лінійних рівнянь відносяться:

1.) множення рівняння системи на число, відмінне від нуля;
2.) додавання до одного рівняння системи іншого, помноженого на будь-яке число;
3.) перестановка місцями двох рівнянь системи.

Нехай маємо систему (2.1) *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Припускаючи, що в системі $a_{11} \neq 0$, застосовують елементарні перетворення послідовно виключають невідомі з усіх рівнянь (крім першого) таким чином, щоб у кожному наступному рівнянні, починаючи з другого, змінних було на одну менше ніж у попередньому. У результаті отримаємо систему еквівалентну початковій, що може мати одну із наступних форм:

1.) система трикутного виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

така система, як і початкова, має єдиний розв'язок, який знаходиться «з кінця»: значення .x_n – з останнього рівняння, x_{n-1} - з передостаннього і т.д.

2.) система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + ... + a_{kn}x_n = b_k \end{cases},$$

де $k<n$, (кількість рівнянь еквівалентної системи менше кількості невідомих). Така система має безліч розв'язків – система невизначена. Щоб отримати частинний розв'зок системи, обираємо *k* невідомих ($x_1, x_2, ..., x_k$), залишаємо їх на своїх місцях і називаємо базисними, а решту (*n*- *k*) змінних переносимо у праві частини рівнянь системи і називаємо вільними змінними. Таким чином отримуємо трикутну систему *k* рівнянь з *k* невідомими.

3.) система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_n = b_m \end{cases},$$

така система несумісна, оскільки не існує таких значень невідомих, що б задовольнили останнє рівняння.

Методом Гаусса можна розв'язати будь-яку систему m лінійних рівнянь з n невідомими, причому елементарні перетворення можна виконувати не над рівняннями системи, а над рядками розширеної матриці.

Приклад 11. розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю (A/b) системи:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Перший рядок залишаємо без змін, над другим і третім виконуємо елементарні перетворення: послідовно множимо перший рядок на (-2) і додаємо до другого, потім множимо на (-1) і додаємо до третього:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \to,$$

помінявши місцями другий і третій стовбці маємо трикутну матрицю: $\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$, повернемося до запису у вигляді системи, враховуючи, що з перестановкою стовбців матриці змінився порядок розміщення змінних у системі.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_2 + 3x_3 = 5 \\ -3x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - 2 \cdot (-2) + 1 = 2 \\ x_3 = \dfrac{5-2}{3} = 1 \\ x_2 = -\dfrac{6}{3} = -2 \end{cases}$$

Питання для самостійного контролю знань.

1. Означення системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
2. Методи розв'язку систем лінійних рівнянь.

3. В чому полягає метод оберненої матриці розв’язування системи лінійних рівнянь?

4. Запишіть формули Крамера.

5. В чому полягає метод Гаусса розв’язування системи лінійних рівнянь?

6. Яка системи лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?

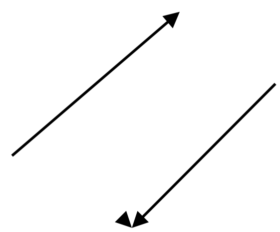
7. Теорема про існування та розв’язків системи лінійних рівнянь.

8. Теорема про сумісність системи *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

ТЕМА 3. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

3.1. *Вектори на площині та в просторі. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами.*

Під вектором розуміють відрізок у якому задано напрямок (направлений відрізок). Задати вектор означає вказати його довжину і напрямок. Таким чином, якщо *A* і *B* дві точки простору (площини), то вектор $\overrightarrow{AB}$, де *A* – початок вектора, *B* – кінець вектора, відрізняється від вектора $\overrightarrow{BA}$, напрямком (*B* – початок вектора, *A* – кінець вектора).



Вектори позначають літерами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і т.д. якщо треба підкреслити, що точка *A* – початок вектора, *B* – кінець вектора, то пишуть $\overrightarrow{AB}$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називають *довжиною*, або *модулем* вектора, позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, або $|\vec{a}|$

Вектор початок і кінець якого співпадають називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$, нульовий вектор не має напрямку і довжина його рівна нулеві.

Вектори називають *колінеарними*, якщо вони розміщені на одній прямій, або паралельних прямих.

Два вектори називають *рівними*, якщо вони мають однакову довжину та напрямок, пишуть $\vec{a} = \vec{b}$. Таким чином, не розрізняють вектори, що мають однакові довжини і напрямки, але розміщені в різних точках простору. Іншими словами, вектор можна перенести в будь яку точку простору, без зміни напрямку і довжини (паралельно самому собі). Такі вектори називають *вільними*.

Ортом вектора $\vec{a}$ називають вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям співпадає з напрямком даного вектора $\vec{a}$. Орт вектора $\vec{a}$ позначають $\vec{a}_0$ і дійсною є рівність:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0, \quad де \quad |\vec{a}_0| = 1.$$

Компланарними називають вектори, які належать одній площині.

Лінійними операціями над векторами є додавання векторів та множення вектора на дійсне число.

Добутком вектора $\vec{a}$ *на число a* називається вектор $\vec{b} = a \cdot \vec{a}$, що має довжину $|\vec{b}| = |a| \cdot |\vec{a}|$, нарям якого співпадає з напрямком вектора $\vec{a}$, якщо $a > 0$, і протилежний йому якщо $a < 0$.

Протилежним вектором ($-\vec{a}$) називається добуток вектора $\vec{a}$ на число (-1).

Сумою двох векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називаеится вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{b}$, при умові, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило трикутника). Або, за правилом паралелограма, вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ є діагональ паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, рис.3.1.

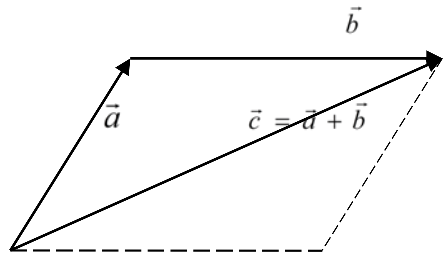


рис.3.1.

Сума векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ знаходиться послідовно: спочатку додаються вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, потім до їх результуючого вектора $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ додається наступний вектор $\vec{a}_3$ і т.д. Сумою декількох векторів є вектор, що з'єднує початок першого вектора і кінець останнього, при умові, що початок кожного наступного вектора збігається з кінцем попереднього (правило многокутника).

На рис.3.2. зображено суму трьох векторів – вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, що є діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, що не лежать на одній площині, або паралельних площинах (правило паралелепіпеда).

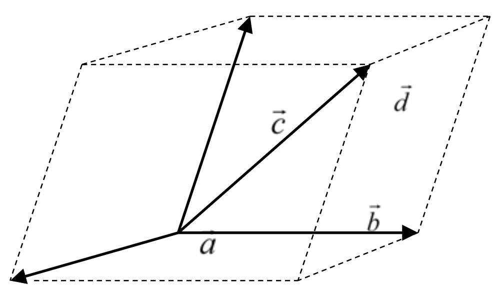


рис.3. 2.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ і вектора($-\vec{b}$) - протилежного до $\vec{b}$.

У паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, одна діагональ є сумою цих векторів, інша – різницею, рис. 3.3.

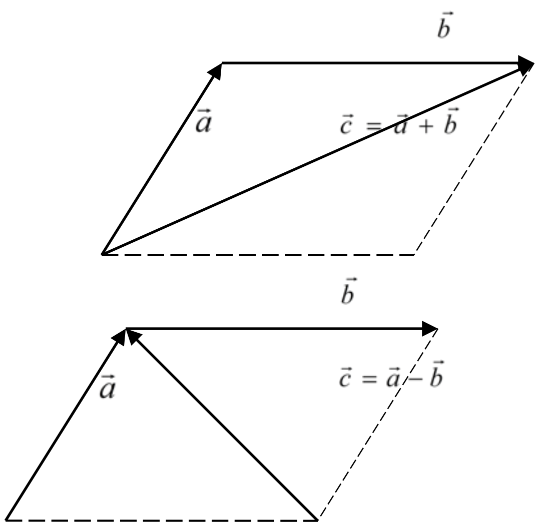


Рис.3.3.

Теорема (необхідна і достатня умова колінеарності векторів). Два ненульові вектори колінеарні тоді і лише тоді, коли $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ *де α - деяке дійсне число.*

3.2. *Проекція вектора на вісь. Координати вектора.*

Нехай задано два вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$. Під кутом *φ* між цими векторами розуміють кут, на який потрібно повернути один з векторів, щоб його напрям співпав з напрямком іншого вектора. Вважають, що $0 \le \varphi \le \pi$.

Нехай вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Проведемо через точки *A* і *B* перпендикулярні прямі до вектора $\vec{b}$ Позначимо точки перетину цих прямих - *A′* і *B′*, рис.3.4.

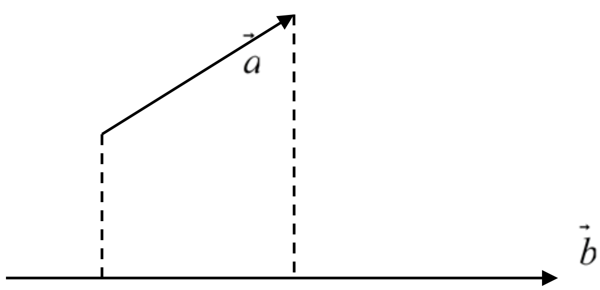


рис.3.4.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ *на напрям вектора* $\vec{b}$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$, помноженій на косинус кута *φ* між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *:*

$$\text{пр}_{\bar{b}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \text{Cos}\,\varphi$$

Нехай в просторі задана система координат *0XYZ* і довільний вектор $\vec{a}$ *,* рис 3.5.

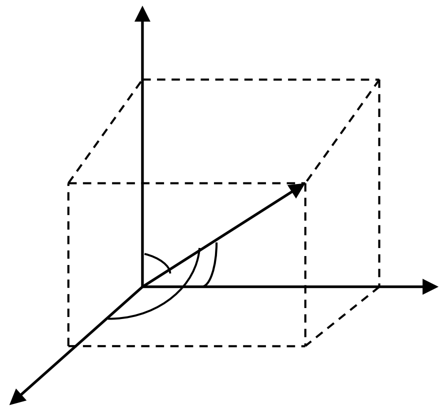


Рис. 3.5.

Розглянемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

Нехай $x = пр_{ox}\vec{a}$, $y = пр_{0y}\vec{a}$ і $z = пр_{oz}\vec{a}$, тоді проекції *x, y, z* вектора $\vec{a}$ на осі координат називаються його *координатами.* При цьому пишуть $\vec{a} = \vec{a}\ (x,y,z)$.

Будемо вважати, що вектор $\vec{a}$ - виходить з початку координат і не належить жодній координатній площині.

Проведемо через точку *A* площини, перпендикулярні осям. Разом з координатними площинами вони утворюють прямокутний паралелепіпед, діагоналлю якого є відрізок ОА. Оскільки, квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів, то:

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad тобто \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Позначимо через α, β, γ кути між вектором $\vec{a}$ та осями координат. Тоді *Cos*α, *Cos*β, *Cos*γ , називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$. Вони обчислюються за формулами:

$$Cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad Cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad Cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Піднісши до квадрату ліву і праву частину кожної рівності та додавши їх почленно будемо мати:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

3.3. *n - вимірні вектори та дії над ними*

n - вимірним вектором називається впорядкована сукупність *n* дійсних чисел, які записуються у вигляді $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Числа x_i =1,2..., *n* називаються компонентами вектора $\vec{x}$.

Вектор у якого всі компоненти дорівнюють нулю, називається нульовим вектором і позначається $\vec{0} = (0,0,\ldots,0)$.

Два *n* -вимірні вектори називаються рівними, якщо їх відповідні компоненти рівні.

Правило додавання n -вимірних векторів. Сумою двох *n* -вимірних векторів однакової розмірності називається вектор, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонент векторів-доданків.

<u>*Множення* n *-вимірного вектора на число*</u>. Добутком вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на дійсне число α називається вектор $\alpha\vec{a}$, компоненти якого дорівнюють добуткам числа a на відповідні компоненти вектора $\vec{a}$:

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

Множина n -вимірних векторів з дійсними компонентами, в якій визначені операції' додавання векторів та множення вектора на число називається *вектарним простором.* Будемо позначати цей простір E_n. Зауважимо, що елементи простору E_n можна розглядати не тільки як вектори, але і як елементи (об'єкти) довільної природи. В цьому випадку відповідна множина елементів називається *лінійним простором.*

3.4. *Розмірність та базис лінійного простору*

Нехай задано m векторів векторного простору E_n: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Задану множину векторів будемо називати *системою m векторів.*

Вектор $\vec{a}$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_m$, якщо для деяких дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ має місце рівність:

$$\vec{a} = a_1\vec{a}_1 + a_2\vec{a}_2 + \ldots + a_m\vec{a}_m$$

Лінійна комбінація всі коефіцієнти якої $a_1, a_2, \ldots a_m$ дорівнюють нулю, називають *тривіальною.* В протилежному випадку, лінійна комбінація називається *нетривіальною.*

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ векторного простору E_n називається *лінійно залежною,* якщо існують такі числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не всі рівні одночасно нулю, що виконується рівність:

$$a_1\vec{a}_1 + a_2\vec{a}_2 + \ldots + a_m\vec{a}_m = 0,$$

в протилежному випадку вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називаються *лінійно незалежними.*

<u>*Теорема.*</u> *Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійної комбінацією інших.*

<u>Приклад 12.</u> Показати, що два неколінеарні вектори на площині лінійно незалежні.

Нехай задано два ненульові неколінеарні вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Припустимо, що вони лінійно залежні. Це означає, що рівність $a_1\vec{a}_1 + a_2\vec{a}_2 = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}_1$ чи $\vec{a}_2$ або обидва одночасно не дорівнюють нулю. Припустимо, що $a_1 \neq 0$, тоді $\vec{a}_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\vec{a}_2$. А це означає, що вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні. Ми прийшли до суперечності, так як за умовою задачі вектори неколінеарні. Отже, вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ лінійно незалежні.

<u>Приклад 13.</u> З'ясувати, чи будуть вектори $\vec{a}_1 = (1,2,3,4)$, $\vec{a}_2 = (2,1,1,3)$ і $\vec{a}_3, = (2,-1,1,3)$ лінійно залежні?

Запишемо векторну рівність умови лінійної залежності векторів:

$a_1\vec{a}_1 + a_2\vec{a}_2 + a_3\vec{a}_3 = 0.$

Перепишемо її у вигляді:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ця рівність еквівалентна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до діагонального виду за допомогою елементарних перетворень

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \qquad \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \qquad\quad 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. А це означає, що рівність

$a_1 \vec{a}_1 + a_2 \vec{a}_2 + a_3 \vec{a}_3 = 0$ можлива тільки при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Отже, вектори лінійно незалежні.

Базисом лінійного простору E_n називається довільна система n лінійно незалежних векторів.

В прикладі 12 було встановлено фундаментальну властивість множини векторів площини, яку можна сформулювати таким чином: *будь-які два неколінеарні вектори площини утворюють базис у множині векторів цієї площини.*

Лінійний простір E_n називається n -вимірним, якщо в ньому існує система n лінійно незалежних векторів, а будь-які з (n +1) векторів є лінійно залежними. Число n називається розмірністю простору E_n. Іншими словами, *розмірність простору - це максимальне число лінійно незалежних векторів, що містяться в ньому.*

<u>*Теорема*</u> *(про розклад вектора за базисом). Будь-який вектор $\vec{a}$ лінійного простору E_n можна представити і причому єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базиса.*

Рівність: $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \ldots + \alpha_n \vec{e_n}$ - називається розкладом вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e_1}, \vec{e_2} \ldots \vec{e_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots + \alpha_n$ - координати вектора $\vec{a}$ у цьому базисі.

Система векторів з простору E_n утворює базис, якщо ці вектори лінійно незалежні і будь-який вектор з E_n є лінійною комбінацією векторів даної системи.

Приклад 14. В базисі $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, задано вектори $\vec{a}$ = (2,0,1), $\vec{b}$ = (1,-1,2), $\vec{c}$ = (3,1,1), $\vec{d}$ = (1,1,1). Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}$. в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис простору E_3, якщо вони лінійно незалежні.

Запишемо умову лінійної залежності векторів:

$$a_1 \vec{a} + a_2 \vec{b} + a_3 \vec{c} = 0, \text{ або}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \quad -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Оскільки, основний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то система має єдиний – тривіальний розв'язок $a_1 = a_2 = \alpha_3 = 0$, а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базис.

Позначимо координати вектора $\vec{d}$ = *(a_1, a_2, a_3)* в базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$*:*

$\vec{d} = a_1 \vec{a} + a_2 \vec{b} + a_3 \vec{c}$.

Ця векторна рівність рівносильна системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \quad -\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Оскільки основний визначник системи $\Delta = -2 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Знаходимо $a_1 = -3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$.

Таким чином, в базисі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ маємо $\vec{d}$ = (-3,1,2).

3.5. *Добутки векторів.*

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається *число*, позначене символом $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (або $\vec{a} \cdot \vec{b}$), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними, тобто

$$\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi, \qquad (3.1)$$

де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}} \right)$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

- *Алгебраїчні властивості скалярного добутку*

1. *Комутативність* множення: $\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b},\vec{a} \right\rangle$.

2. *Асоціативність* відносно множення на число: $\left\langle \alpha\vec{a},\vec{b} \right\rangle = \alpha\left\langle \vec{a},\vec{b} \right\rangle$.

3. *Дистрибутивність* відносно додавання векторів: $\left\langle \left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a},\vec{c} \right\rangle + \left\langle \vec{b},\vec{c} \right\rangle$.

- *Геометричні властивості скалярного добутку*

1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку, тобто *добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.*

2. *Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток додатний (від'ємний)* або якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, коли $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}} \right)$ – *гострий*, і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, коли $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}} \right)$ – *тупий.*

3. Добуток $\left\langle \vec{a}\vec{a} \right\rangle$ позначається через $\vec{a}^2$ і називається *скалярним квадратом*. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора, тобто

$$\left\langle \vec{a},\vec{a} \right\rangle = \left|\vec{a}\right|^2, \qquad (3.2)$$

звідки

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2}. \qquad (3.3)$$

Запис скалярного добутку через координати

<u>Теорема.</u> *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат, тобто*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (3.4)$$

Наслідки.:

1. *Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ є рівність $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.*

2. *Кут між векторами $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ визначається за формулою*

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (3.5)$$

3. *Проекція вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{Б}$ *визначається за формулою*

$$\text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (3.6)$$

4. *Довжина вектора* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *визначається за формулою*

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \qquad (3.7)$$

5. *Для координатних векторів справедливі рівності*

$$\vec{i}^{\,2} = 1;\ \vec{j}^{\,2} = 1;\ \vec{k}^{\,2} = 1;\ \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0. \qquad (3.8)$$

<u>Приклад. 15.</u> Дано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

Оскільки $\overrightarrow{A_1A_2} = (5;3;1)$ та $\overrightarrow{A_1A_4} = (1;4;-2)$, то косинус кута між векторами згідно формули (8.31) $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ має вигляд

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\hat{}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4} \rangle}{|\overrightarrow{A_1A_2}||\overrightarrow{A_1A_4}|} = \frac{5\cdot 1 + 3\cdot 4 + 1(-2)}{\sqrt{25+9+1}\sqrt{1+16+4}} = \frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}} = \frac{15}{7\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

тоді

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\hat{}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Величина кута між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і ,тому

$$\left(A_1A_2\,\hat{}\,A_1A_4\right) = \left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\hat{}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

<u>Приклад. 16.</u> Дано $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Визначити, за яких значень α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ перпендикулярні.

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку за першою геометричною властивістю. Звідси для α маємо співвідношення:

$$\langle (\vec{a} + \alpha\vec{b})(\vec{a} - \alpha\vec{b}) \rangle = 0.$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку, розпишемо ліву частину останньої рівності:

$$\langle (\vec{a} + \alpha\vec{b})(\vec{a} - \alpha\vec{b}) \rangle = \vec{a}^{\,2} - \alpha\langle \vec{a}\vec{b} \rangle + \alpha\langle \vec{b}\vec{a} \rangle - \alpha^2\vec{b}^{\,2} = |\vec{a}|^2 - \alpha\langle \vec{a}\vec{b} \rangle + \alpha\langle \vec{b}\vec{a} \rangle - \alpha^2|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - \alpha^2|\vec{b}|^2.$$

Оскільки $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, то $9-25\alpha^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=\pm\frac{3}{5}$.

<u>Приклад.17.</u> Знайти довжину вектора $\vec{a}=\vec{x}-2\vec{y}$, якщо $|\vec{x}|=1$, $|\vec{y}|=2$, кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Маємо $\langle\vec{a}\vec{a}\rangle=|\vec{a}|^2$. Звідси $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$. Тому

$$|\vec{a}|=|\vec{x}-2\vec{y}|=\sqrt{(\vec{x}-2\vec{y})^2}=\sqrt{\vec{x}^2-4\vec{x}\vec{y}+4\vec{y}^2}=\sqrt{|\vec{x}|^2-4|\vec{x}||\vec{y}|\cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{y}|^2}=\sqrt{1-4\cdot 2\frac{1}{2}+16}=\sqrt{13}.$$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ *називається вектор* $\vec{c}$, *що позначається символами* $\vec{c}=[\vec{a}\,\vec{b}]$ *або* $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ *і визначається такими трьома умовами:*

1) *довжина вектора* $\vec{c}$ *дорівнює* $\vec{c}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, *де* $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний до кожного з векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c}\neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

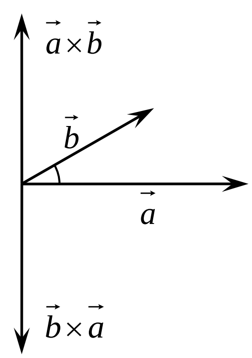


Рис. 6

- *Алгебраїчні властивості векторного добутку*

1. *Антикомутативність* множення:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right),$$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак. Це випливає з того, що вектори $\vec{a}\times\vec{b}$ і $\vec{b}\times\vec{a}$ мають однакові модулі, колінеарні і трійка векторів $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\right)$ і $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{b}\times\vec{a}\right)$ протилежної орієнтації

2. *Асоціативність відносно скалярного множника* λ:

$$\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right);\ \vec{a}\times\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

3. *Дистрибутивність відносно додавання векторів*:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\,.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного множення слід пам’ятати, що воно некомутативне: при переставлянні співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

- *Геометричні властивості векторного добутку*

1. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

2. Модуль $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.9)$$

3. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0,\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Приклад 17:Обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

$$\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)=$$
$$=-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\vec{a}\times\vec{b}=-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right);\ \left|-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{\pi}{2}=5\cdot3\cdot4\cdot1=60.$$

- *Вираз векторного добутку через координати*

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$

Покажемо, що векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (3.10)$$

Використовуючи теорему 8.1 про розклад визначника, маємо

$$\vec{a}\times\vec{b}==\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (3.11)$$

Приклад 18. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-1;0;2)$.

Площа трикутника *ABC* дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-2;2)$ і за формулою (3.10)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k},$$

то за формулою (3.9) площа $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}$.

*Мішаний добуток векторів***.** При множенні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, і векторний, результатом якого є вектор $\vec{a}\times\vec{b}$.

Множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна виконати різними способами. Зокрема, можна утворити такі добутки:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Перший з цих добутків відповідає множенню скаляра $\vec{a}\cdot\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і не розглядається. Те саме стосується добутків $(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}$ та $(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$.

Результатом другого добутку є вектор $\vec{d}$, який називається *подвійним векторним* або *векторно-векторним добутком* даних трьох векторів і розглядається в наступному пункті.

Останній з наведених добутків $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ – це скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$; тобто *число*, яке називають ***мішаним добутком*** векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Цей добуток має чіткий геометричний зміст і широко використовується в задачах.

Властивості мішаного добутку

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то він змінить знак, наприклад:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$.

2. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$.

3. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна поміняти місцями: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

4. Модуль мішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, віднесених до спільного початку:

$$S=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (3.12)$$

5. Якщо мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ додатний, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо від’ємний, то ліву.

6. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

Зауваження. Властивості 4-6 виражають геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів.

Вираз векторного добутку через координати

Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задано координатами $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$. Координати вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ визначаються за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}==\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Помноживши вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою отримаємо:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (3.13)$$

<u>Приклад. 18.</u> Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2;-1;0)$, $B(5;5;3)$, $C(3;2;-2)$ і $D(4;1;2)$.

Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD}, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. То за формулою (8.37) маємо $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}=(3;6;3)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(2;2;2)$.

За формулою (3.12) дістанемо:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=3.$$

Подвійним векторним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається вектор $\vec{d}$, що дорівнює векторному добутку вектора $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ на вектор $\vec{c}$, і позначається $\vec{d}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ або $\vec{d}=\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$.

Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ і вектора $\vec{c}$. Із перпендикулярності вектора $\vec{d}$ до векторного добутку $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ випливає, що $\vec{d}$ лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ також перпендикулярні до векторного добутку $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$.

<u>Теорема:</u> *Подвійний векторний добуток трьох векторів дорівнює різниці добутків середнього вектора на скалярний добуток мінус добуток того крайнього вектора, який міститься у внутрішніх дужках, на скалярний добуток інших векторів, тобто*

$$\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]=\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{a}\left\langle\vec{c}\vec{b}\right\rangle, \qquad (3.14)$$

у загальному випадку

$$\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]=-\left[\vec{c}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right], \qquad (3.15)$$

$$\textit{але}\ \left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]\neq\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right].$$

Зауваження. В інших позначеннях формули (3.14) та (3.15) мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}; \\ &\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}. \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Подвійний векторний добуток часто зустрічається у векторному численні, але певного геометричного змісту не має.

Питання для самостійного контролю знань.

1. Що називається проекцією вектора на вісь; кутом між вектором і віссю?

2. Запишіть властивості проекцій та спробуйте їх довести.
3. Напрямні косинуси: визначення та обчислення.
4. Які дії з векторами називаються лінійними? Запишіть формули, за якими в ДПСК вектори додаються, віднімаються та множаться на число.
5. За яких умов вектори вважаються рівними та колінеарними?
6. Як обраховуються координати точки, що ділить відрізок в заданому відношенні?
7. Дайте визначення скалярного добутку векторів. Які алгебраїчні та геометричні властивості він має? В чому полягає геометричний зміст скалярного добутка? Запишіть скалярний добуток через координати векторів, які множаться.
8. Дайте визначення векторного добутку векторів. Які алгебраїчні та геометричні властивості він має? Запишіть векторний добуток через координати векторів, які множаться.
9. Дайте визначення мішаного добутку векторів. Які властивості він має? В чому полягає геометричний зміст мішаного добутку? Запишіть мішаний добуток через координати векторів, які множаться.
10. Який добуток векторів називається подвійним векторним? За якою формулою він обчислюється?

ЛЕКЦІЯ 4

ТЕМА: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

4.1. *Лінії і-го порядку на площині та їхні рівняння*

Дослідження ліній на площині та у просторі базується на методі координат: *оскільки кожній точці площини відповідає пара чисел – її координати, а геометрична фігура являє собою множину точок, то фігурі відповідає певна множина пар чисел*. Це дає можливість звести вивчення властивостей фігури до вивчення властивостей відповідної множини пар чисел. Така відповідність встановлюється за допомогою аналітичної умови. *Аналітичною умовою*, що визначає геометричну фігуру в даній системі координат, називається рівняння, нерівність та їхні системи, яким задовольняють координати будь-якої точки цієї фігури і не задовольняють координати тих точок, що не належать даній фігурі.

Алгебраїчною лінією називається *множина точок*, координати яких задовольняють рівняння:

$$F(x, y) = 0 \tag{4.1}$$

в деякій системі координат, де $F(x, y)$ – многочлен, ступінь якого називається *порядком алгебраїчної лінії*, заданої рівнянням (4.1). Рівняння (4.1) називається *канонічним рівнянням лінії*.

Лінія, яка не є алгебраїчною, називається *трансцендентною*. Ми будемо вивчати лише алгебраїчні лінії першого та другого порядку.

Таким чином, лінію на площині можна задати геометрично як сукупність точок з певними геометричними властивостями і аналітично – за допомогою рівняння.

У зв’язку з цим виникають дві типові для аналітичної геометрії задачі:

скласти рівняння лінії, яка задана геометрично, для її розв’язання потрібно встановити геометричну властивість, яку задовольняють лише точки даної лінії, і записати цю властивість у вигляді рівняння, що пов’яже змінні координати точок даної лінії і ті відомі сталі величини, які геометрично визначають саме цю лінію.

встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично, в аналітичній геометрії ця задача розв’язується для алгебраїчних ліній першого та другого порядку.

<u>*Теорема 4.1*</u>. *Поняття алгебраїчної лінії та її порядок не змінюються при переході від однієї системи координат до іншої.*

Тобто, залежно від того, в якій системі координат розглядається алгебраїчна лінія, змінюється лише вигляд рівняння, яким ця лінія задається в даній системі координат.

4.1.2. *Параметричні рівняння лінії*

Нехай залежність між змінними x та y виражена через третю змінну t, тобто

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \tag{4.3}$$

Змінна t називається *параметром* і визначає положення точки $(x; y)$ на площині. Наприклад, якщо $x = 2t + 1, y = t^2$, то значенню параметра $t = 3$ відповідає на площині точка $(7; 9)$, тому що $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7, y = 3^2 = 9$.

- Якщо t змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб завдання лінії називається *параметричним*, а рівняння (4.3) – *параметричними рівняннями лінії l* Щоб від рівняння (4.3) перейти до канонічного рівняння (4.1), потрібно будь-яким способом з двох рівнянь (4.3) виключити параметр t (наприклад, з першого рівняння виразити x і результат підставити в друге рівняння). Але такий перехід не завжди доцільний і не завжди можливий, тому доводиться користуватися параметричними рівняннями (4.3).

4.1.3. *векторне рівняння лінії*

Лінію можна також задати *векторним рівнянням* виду:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{4.4}$$

де t – скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає цілком визначений вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ площини. Таким чином, якщо параметр t набуває певної множини деяких значень, то рівняння (3.4) задає деяку відповідну множину векторів. Якщо від точки *O* (рис.3.10) площини відкласти вектори $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, то геометричне місце точок, які збігаються з кінцями цих векторів (за умови, що всі вектори компланарні), визначить на площині деяку лінію l.

- *Векторному* рівнянню (4.4) в прямокутній системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння виду (4.3), тобто проекціями на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

- Векторне та параметричні рівняння лінії мають такий *механічний зміст: якщо точка рухається на площині, то вказані рівняння (4.3) та (4.4) є рівняннями руху точки, а лінія l – траєкторією точки, параметром t при цьому є час.*

4.2. *Пряма на площині та її рівняння.*

<u>*Теорема 4.2.*</u> *Множина алгебраїчних ліній першого порядку є множина прямих.*

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами:

-точкою і вектором, паралельним даній прямій;

- двома точками;

- точкою і вектором, перпендикулярним даній прямій, та ін.

Різним способам завдання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

4.2.1. *Різні види рівнянь прямої на площині*

Нехай пряма проходить через задану точку M_0 паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні. Точка M_0 і напрямний вектор $\vec{s}$, цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо рівняння такої прямої. Позначимо через *M* (рис. 4.9) довільну точку цієї прямої і розглянемо радіус-вектори $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та *M* і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який лежить на даній прямій.

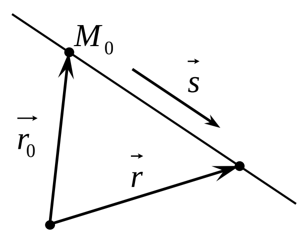


Рис. 4.9.

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$, де t – змінна, яка може набувати довільних дійсних значень і називається *параметром*, з останньої рівності отримуємо рівняння

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{s}, \qquad (4.5)$$

яке називається *векторне параметричне рівняння прямої*.

Зауваження. Векторне параметричне рівняння прямої має однаковий вигляд як на площині, так і у просторі.

Якщо точка M_0 і напрямний вектор $\vec{s}$, якими задається пряма l, мають такі координати: $M_0(x_0; y_0)$ і $\vec{s} = (m; n)$, то прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ і $\vec{r_0} + t\vec{s}$ за формулою (4.5), одержимо рівняння:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \qquad (4.6)$$

які називаються *параметричними рівняннями прямої*.

Якщо точка M_0 і напрямний вектор $\vec{s}$, якими задається пряма l, мають такі координати: $M_0(x_0; y_0)$ і $\vec{s} = (m; n)$, то прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ і $\vec{r_0} + t\vec{s}$ за формулою (4.5), одержимо рівняння:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \qquad (4.6)$$

які називаються *параметричними рівняннями прямої*.

Приклад. 22**.** Побудувати пряму, задану параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -2 + 5t. \end{cases}$$

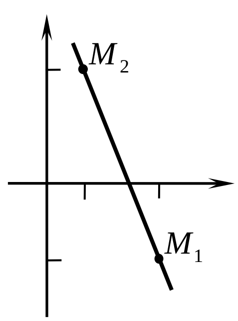


Рис.

Для побудови прямої достатньо знайти координати двох точок, які належать цій прямій. Поклавши $t_1 = 0$, знаходимо $M_1(3; -2)$, при $t_2 = 1$ знаходимо другу точку $M_2(1; 3)$. Побудувавши ці точки, проведемо через них шукану пряму (рис.4.10).

Виразимо в кожному з рівнянь системи (4.6) значення параметра t і, прирівнявши результати, отримаємо *канонічне рівняння прямої*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \qquad (4.7)$$

Приклад. 23**.** Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-5; 2)$ паралельно вектору, який сполучає точки $M_1(1; -1)$ та $M_2(3; 2)$.

За напрямний вектор шуканої прямої візьмемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; 3)$. Замінивши в рівнянні (3.7) x_0 і y_0 координатами точки M_0, а m, n – координатами вектора M_1M_2, отримаємо шукане рівняння

$$\frac{x + 5}{2} = \frac{y - 2}{3}.$$

Застосувавши основну властивість пропорції, одержимо такий *вигляд канонічного рівняння:*

$$\left(y - y_0\right)m = \left(x - x_0\right)n.$$

(4.8)

Зокрема, якщо пряма проходить через точку $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ паралельно осі *Ox*, то її напрямний вектор $\vec{s} = \left(m;\, 0\right)$, тому рівняння (4.8) набирає вигляду $\left(y - y_0\right)m = \left(x - x_0\right)\cdot 0$, звідки

$$y = y_0,$$

(4.8′)

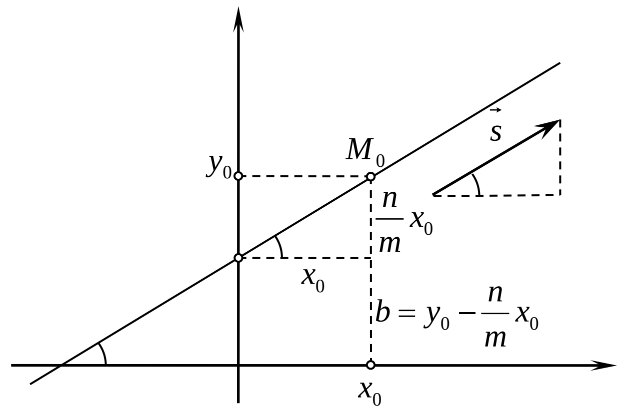


Рис. 4.11

а це і є рівняння прямої, паралельної осі абсцис. Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ паралельно осі *Oy*, то її рівнянням є

$$x = x_0 \qquad (4.8'')$$

<u>Приклад. 24</u> Дано трикутник з вершинами $A(-1;\, -2)$, $B(2;\, -2)$, $C(1;\, 3)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

За напрямний вектор шуканої прямої візьмемо вектор $\overrightarrow{AB} = (3;\, 0)$. Ордината напрямного вектора $n = 0$, тому рівняння шуканої прямої має вигляд (3.8′). Замінивши y_0 ординатою точки C, знайдемо $y = 3$.

Якщо пряма не перпендикулярна до осі *Ox*, то рівняння (3.7) можна записати так

$$y - y_0 = \frac{n}{m}\left(x - x_0\right) \text{ або } y = \frac{n}{m}x + \left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right).$$

Позначивши $\frac{n}{m} = k$, $y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b$, одержимо

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right) \qquad (4.9)$$

або

$$y = kx + b. \qquad (4.10)$$

Відношення $k = \frac{n}{m}$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої*, причому кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута, утвореного прямою з додатним напрямом осі абсцис, тобто $k = tg\alpha$, де α і є кут, утворений прямою з додатним напрямом осі *Ox* (рис. 4.11).

Величина $b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$ є ординатою точки перетину прямої з віссю ординат і називається *початковою ординатою прямої*.

Рівняння (4.9) називається *рівняння прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт*, а рівняння (4.10) – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*. Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння такої прямої є частинний випадок рівняння (4.10), тобто

$$y = kx. \qquad (4.11)$$

Часто потрібно обчислити кутовий коефіцієнт прямої за відомими координатами двох точок цієї прямої: $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$. Нехай $x_2 > x_1$, $y_2 \ge y_1$ і $0 \le \alpha < 90°$ (рис. 4.12). З прямокутного трикутника M_1NM_2 маємо $k = \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{NM_2}{M_1N} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Отже,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.12}$$

Аналогічно можна довести, що формула (4.12) має місце і коли $90° < \alpha < 180°$. При $x_1 = x_2$ пряма, що проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, паралельна осі *Oy*, тому її кутовий коефіцієнт не існує.

Нехай пряма l проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, тоді оберемо за напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$, який за формулою матиме координати $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Підставивши в рівняння (3.7) координати точки M_1, через яку проходить дана пряма, і напрямного вектора M_1M_2, який має пряма l, отримаємо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{4.13}$$

що носить назву *рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*.

Якщо $x_1 = x_2$, то пряма паралельна вісі *Oy* і має рівняння

$$x = x_1. \tag{4.13′}$$

Якщо $y_1 = y_2$, то пряма паралельна вісі *Ox* і має рівняння

$$y = y_1. \tag{4.13″}$$

Якщо пряма проходить через точки $A(a; 0)$ та $B(0; b)$, тобто відтинає на координатних осях відрізки a та b, то з рівняння (4.11) маємо $\dfrac{x - a}{0 - a} = \dfrac{y - 0}{b - 0}$, спростивши, одержимо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{4.14}$$

Ненульовий вектор $\vec{n} = (A; B)$, який є перпендикулярним до даної прямої l, називається *нормальним вектором* цієї прямої. З множини усіх нормальних векторів прямої l (а їх безліч, вони всі паралельні і, значить, мають пропорційні координати) виберемо один. Візьмемо на прямій l, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, довільну точку $M(x; y)$ і введемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ (рис. 4.16). Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежить на прямій l, то він перпендикулярний до нормального вектора, а отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

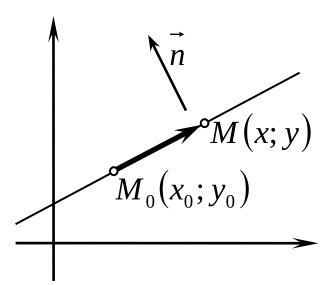


Рис. 4.16

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{4.15}$$

Рівняння (4.15) називається *рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора*.

4.2.2. *Загальне рівняння прямої та його дослідження Нормальне рівняння прямої.*

Розкриємо дужки в рівнянні (4.15) і утворений числовий доданок ($-Ax_1 - By_1$) позначимо буквою *C*, в результаті отримаємо рівняння

$$Ax + By + C = 0, \qquad (4.16)$$

яке називається *загальним рівнянням прямої*.

Всі одержані вище рівняння (4.5) – (4.8), (4.3), (4.10), (4.11), (4.13), (4.14), (4.15), кожне з яких зводиться до рівняння (4.16), прямої лінії є рівняннями першого порядку відносно змінних *x* і *y*, тобто є лінійними рівняннями. Отже, *рівняння будь-якої прямої, яка лежить на площині xOy, є лінійним рівнянням відносно змінних x і y. Правильним буде і обернене твердження: кожне лінійне рівняння виду (4.16) з двома змінними x і y визначає на площині в прямокутній системі координат пряму.*

Виходячи з позначень коефіцієнтів в загальному рівнянні прямої, можна отримати нові формули для знаходження кутового коефіцієнта та початкової ординати прямої, за умови, що $B \neq 0$. Отже,

$$k = -\frac{A}{B} \text{ і } b = -\frac{C}{B}. \qquad (4.17)$$

Окремі випадки розміщення прямої в системі координат xOy залежно від значень коефіцієнтів A, B, C:

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат *xOy* залежно від значень коефіцієнтів *A*, *B*, *C*.

1. Якщо $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, то рівняння (4.16) зводиться до рівняння прямої у відрізках на осях $\dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$, тобто пряма перетинає осі координат у точках з координатами $\left(-\dfrac{C}{A}; 0\right)$ і $\left(0; -\dfrac{C}{B}\right)$ (рис. 4.18, *а*).

2. Якщо *A*=0, то пряма *By*+*C*=0 паралельна осі *Ox* і проходить через точку $\left(0; -\dfrac{C}{B}\right)$, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = (0; B)$ прямої перпендикулярний до осі *Ox*, а координати даної точки задовольняють рівняння прямої (рис. 4.18, *б*).

3. Аналогічно попередньому, якщо *B*=0, то пряма *Ax*+*C*=0 паралельна осі *Oy* і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ (рис. 4.18, *в*).

4. Якщо *C*=0, то пряма *Ax*+*By*=0 проходить через початок координат, тому що координати точки $O(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої (рис. 4.18, *г*).

5. Якщо *A*=*C*=0, то згідно з попереднім рівняння *By*=0 або *y*=0 визначає вісь *Ox* (рис. 4.18, *д*).

6. Якщо *B*=*C*=0, то *Ax*=0 або *x*=0 визначає вісь *Oy* (рис. 4.18, *е*).

Якщо обидві частини рівняння (4.16) помножити на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, яке називається *нормуючим множником*, причому знак перед радикалом потрібно вибирати так, щоб виконувалась умова $\mu \cdot C < 0$, то одержимо ще один вид рівняння прямої

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0\,, \qquad (4.18)$$

де p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, а φ – кут, утворений цим перпендикуляром з додатнім напрямом осі *Ох*. Таке рівняння називається *нормальним рівнянням прямої*, і зводиться до інших видів рівнянь прямої.

4.2.3. Взаємне розташування прямих на площині

Варіантів взаємного розміщення двох прямих l_1 та l_2 на площині може бути лише три: або вони суміщаються, або паралельні, або перетинаються під різними кутами, зокрема, є перпендикулярними. Очевидно, що всі ці варіанти зводяться до відшукання кута між цими прямими або між їхніми напрямними чи нормальними векторами, тобто кута $\varphi = \left(\widehat{l_1, l_2}\right)$.

Складемо порівняльну таблицю, в якій для трьох видів рівнянь, якими задані прямі l_1 та l_2 записано формули обчислення кута між цими прямими та умови їхньої паралельності та перпендикулярності.

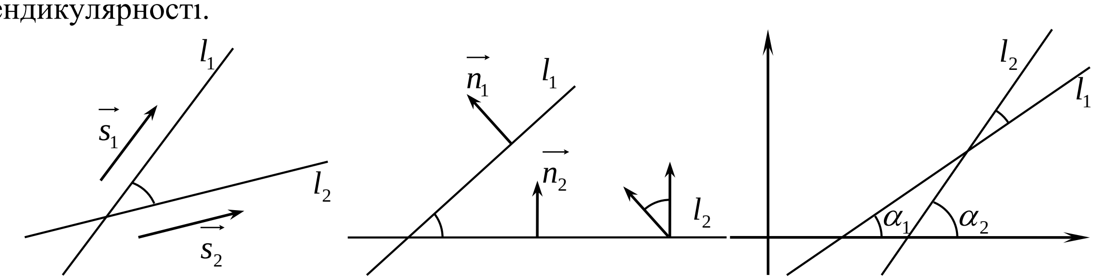


Рис 4.19 Рис.4.20 Рис. 4.21

Таблиця 4.1.

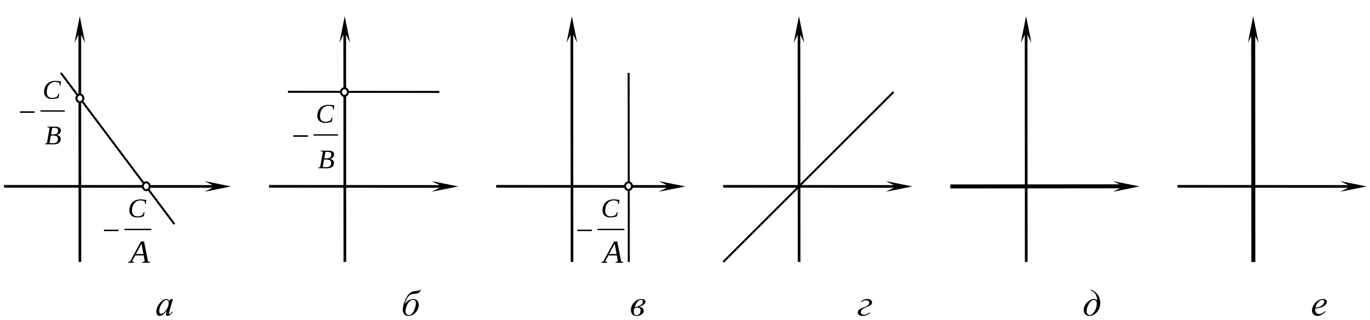


Рис. 4.18

Спосіб завдання прямих	Прямі задані канонічними рівняннями $l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$, $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$ (рис. 4.19)	Прямі задані загальними рівняннями $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ (рис. 4.20)	Прямі задані рівнянням з кутовим коефіцієнтом $l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$ (рис. 4.21)
Кут між прямими φ	Кут між напрямними векторами цих прямих, тобто $\varphi=\left(l_1,\hat{\ }l_2\right)=\left(\vec{s}_1,\hat{\ }\vec{s}_2\right)$	Кут між нормальними векторами цих прямих, тобто $\varphi=\left(l_1,\hat{\ }l_2\right)=\left(\vec{n}_1,\hat{\ }\vec{n}_2\right)$	Кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки пряму l_1, щоб вона збіглася з прямою l_2.
Тригонометрична функція кута	$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$ (3.13)	$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ (3.21)	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$ (3.22)
Умова паралельності прямих	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (3.23)	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ (3.24)	$k_1=k_2$ (3.25)
Умова перпендикулярності прямих	$m_1m_2+n_1n_2=0$ (3.26)	$A_1A_2+B_1B_2=0$ (3.27)	$k_2=-\frac{1}{k_1}$ (3.28)

4.2.4. *Відстань від точки до прямої на площині. Рівняння бісектрис кута між прямими*

Нехай задано пряму l загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ і точку $M_0(x_0;\,y_0)$.

Відстань d (рис. 4.23) точки M_0 від прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1;\,y_1)$ – довільна точка прямої l, на напрям нормального вектора прямої l $\vec{n}=(A;\,B)$. Отже, $d=\left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Оскільки, $M_1\in l$,

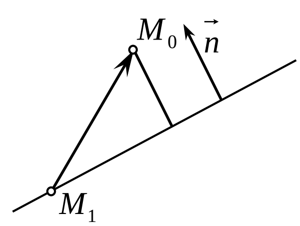


Рис.4.23.

то $Ax_1+By_1+C=0$, значить $-Ax_1-By_1=C$, тому відстань від точки до прямої знаходиться за такою формулою:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{4.20}$$

Відхиленням δ точки $M_0(x_0;\,y_0)$ від прямої l із загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ називається число δ:

$$\delta = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{4.21}$$

Крім того, $\delta = d$, якщо точки $M_0(x_0;\, y_0)$ і $O(0;\,0)$ лежать по різні сторони від прямої l, і

$\delta = -d$, якщо ці точки лежать по один бік від даної прямої.

Питання для самостійної перевірки знань.

1. В чому полягає сутність методу координат?
2. Що називається алгебраїчною лінією, її порядком?
3. Чи змінюється поняття, порядок та рівняння алгебраїчної лінії при переході від однієї афінної системи координат до іншої?
4. Які ви знаєте види рівнянь лінії на площині? Запишіть їх та наведіть Приклади.
5. Що являє собою алгебраїчна лінія першого порядку на площині?
6. Дайте визначення напрямному і нормальному вектору прямої. Скільки напрямних та нормальних векторів має пряма? Що можна сказати про координати таких векторів?
7. Виведіть такі рівняння прямої: параметричне; векторне; канонічне; з кутовим коефіцієнтом (різні варіанти); що проходить через дві точки; у відрізках на осях; загальне; нормальне.
8. Які існують варіанти взаємного розташування двох прямих на площині?
9. За яких умов прямі є паралельними чи перпендикулярними?
10. Як обчислюється відстань між точкою і прямою; між паралельними прямими?

ЛЕКЦІЯ 5

ТЕМА : АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ.

5.1. *Рівняння поверхні та площини у просторі*

Рівнянням поверхні у просторі $xOyz$ (Рис.5.1) називається рівняння виду

$$F(x, y, z,) = 0\,, \tag{5.1}$$

яке пов'язує змінні x, y і z так, що координати довільної точки даної поверхні задовольняють це рівняння і не задовольняють координати решти точок простору, що не лежать на цій поверхні.

Найпростішою формою рівняння (5.1) є випадок, коли x, y і z входять лінійно. Тоді це рівняння описує площину (Рис.5.2).

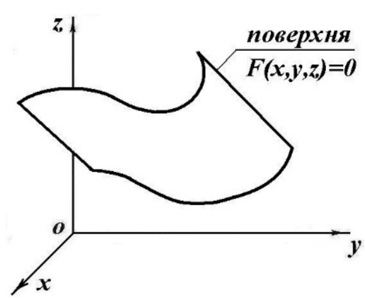


Рис 5.1

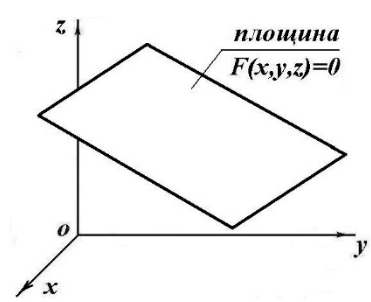


Рис 5.2

5.2. Р*івняння площини.*

5.2.1. *Рівняння площини що проходить через відому точку, перпендикулярно до заданого вектора.*

<u>*Означення*</u>: *вектор, що перпендикулярний до площини α, називається вектором нормалі цієї площини і позначається* $\vec{n}$.

Кожна площина має безліч векторів нормалі (усі вони колінеарні). Оберемо довільну точку на площині α $A(x_0, y_0, z_0)$ і вектор нормалі $\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3) цієї площини. Довільна точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і лише тоді, коли вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{AM}(x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0)$ перпендикулярні. Отже їх скалярний добуток рівний нулю $(\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0)$:

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0 \tag{5.2}$$

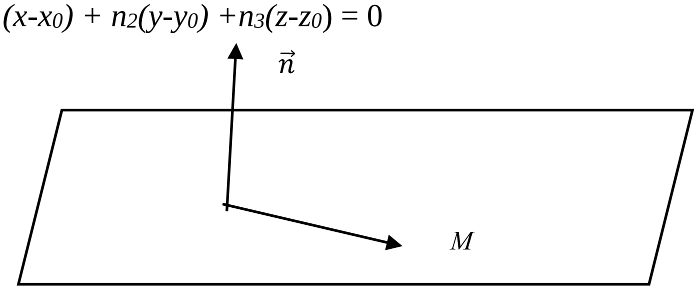


Рис. 5.3.

Маємо рівняння площини що проходить через точку перпендикулярно до заданого вектора.

5.2.2. *Рівняння площини, що проходить через задану точку, паралельно двом неколінеарним векторам.*

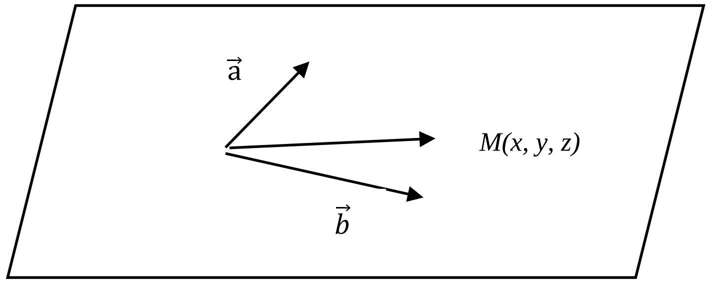


рис 5.4.

Нехай маємо точку $A(x_0, y_0, z_0)$ площини α і два неколінеарні вектори $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3), паралельні цій площині (рис.5.4).

Довільна точка $M(x, y, z)$ належить площині α тоді і лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{AM}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ компланарні (належать одній площині), тобто їх мішаний добуток рівний нулю. У координатній формі ця умова записується так:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.3)$$

<u>Приклад 5.1.</u> Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(1, -2, 0)$ і паралельна векторам $\vec{a}$ (1, 2, 3), $\vec{b}$ (2, 0, 1)

$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, розкривши визначник третього порядку, маємо:

$2(x-1) + 5(y+2) - 4z = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 4z + 8 = 0$ - шукане рівняння площини.

5.2.3. *Рівняння площини, що проходить через три точки, рівняння площини «у відрізках на осях».*

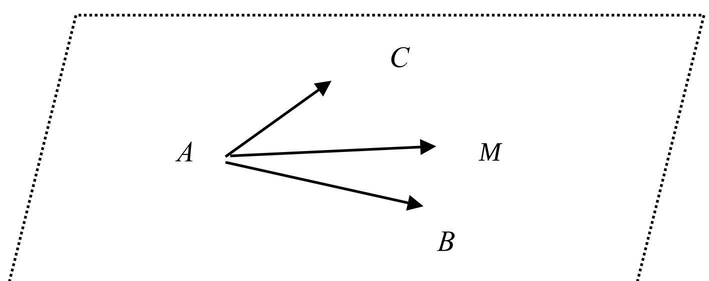


рис 5.5.

Розглянемо три точки $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_b, y_b, z_b)$, $C(x_c, y_c, z_c)$ площини α, що не лежать на одній прямій, тоді довільна точка $M(x, y, z)$ належить площині α тоді і лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{AM}(x-x_A; y-y_A; z-z_A)$, $\overrightarrow{AB}(x_b-x_a; y_b-y_a; z_b-z_a)$, $\overrightarrow{AC}(x_c-x_a; y_c-y_a; z_c-z_a)$ компланарні, тобто:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_b-x_a & y_b-y_a & z_b-z_a \\ x_c-x_a & y_c-x_a & z_b-z_a \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.4)$$

Приклад 5.2. Написати рівняння площини, що перетинає осі *OX, OY, OZ* в точках відповідно *A(a*, 0,0*)*, *B(0, b, 0)*, *C(0, 0, c)*, ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$).

За формулою (5.4):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_b-x_a & y_b-y_a & z_b-z_a \\ x_c-x_a & y_c-x_a & z_b-z_a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bcx + acy + abz = abc \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (5.5)$$

Рівняння (5.5) *називають рівнянням площини у відрізках на осях*.

5.2.4. *Загальне рівняння площини. Дослідження загального рівняння площини.*

Означення: загальним рівнянням площини називають рівняння виду

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \qquad (5.6)$$

де хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $(A^2 + B^2 + C^2) \neq 0$.

Коректність цього означення доводить теорема, яку приведемо без доведення:

Теорема : будь-яка площина задається рівнянням виду (5.6) *і, навпаки, будь-які рівняння виду* (5.6*) є рівнянням площини простору.*

Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ є вектором нормалі площини заданої рівнянням (5.6).

В залежності від наявності або відсутності певних змінних в загальному рівнянні площини, а також рівності або нерівності *D* нулю, площина буде певним чином розташувана у просторі.

Елементи дослідження загального рівняння площини:

- при відсутності в загальному рівнянні однієї певної змінної (при $D \neq 0$) площина буде паралельною осі, яка однойменна з відсутньою змінною;
- при $D = 0$ - площина проходить через початок координат;
- при відсутності в загальному рівнянні площини двох певних змінних (при $D \neq 0$) площина буде перпендикулярною осі, яка однойменна з наявною в рівнянні площини змінною;
- при відсутності в загальному рівнянні площини однієї певної змінної і $D = 0$ площина проходить через вісь, яка однойменна з відсутньою змінною;
- при відсутності в загальному рівнянні двох змінних і $D = 0$ площина буде співпадати з координатною площиною, яка перпендикулярна осі, однойменній з наявною в її рівнянні змінною.

Рівнянням в'язки площин називається рівняння виду:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (5.7)$$

Рівняння (5.7) описує сукупність площин, що перетинаються в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ але мають різну орієнтацію у просторі, в залежності від орієнтації нормального вектора $\vec{n}(A, B, C)$.

Рівнянням пучка площин називається рівняння виду:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (5.8)$$

Рівняння (5.8) визначає деяку площину, що проходить через пряму, по якій перетинаються дві площини, тобто через пряму, що визначається рівнянням:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$ *, якщо дані площини паралельні, то пучок площин перетворюється на сукупність паралельних площин.*

5.2.5.*Взаємне розміщення двох площин. Відстань від точки до площини*

Нехай дві площини задано загальним рівнянням (5.6):

$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Тоді можливі такі випадки розташування площин.

1). Якщо виконується умова $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, тобто, рівняння площин рівносильні, маємо дві площини що співпадають, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

2). Площини α_1 і α_2 паралельні тоді і лише тоді, коли вектори нормалей цих площин колінеарні (їх координати пропорційні): $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, але площини не співпадають.

3). Якщо вектори нормалей площин α_1 і α_2 неколінеарні, то площини перетинаються по прямій $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

<u>Означення:</u> кутом між площинами називають нетупий кут між векторами нормалей цих площин $\overrightarrow{n1}(A_1, B_1, C_1)$ і $\overrightarrow{n2}(A_2, B_2, C_2)$.

Кут між площинами визначається формулою (5.9):

$$\varphi = arcCos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{5.9}$$

4). Площини α_1 і α_2 перпендикулярні тоді і лише тоді коли виконується рівність:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{5.10}$$

<u>Означення:</u> відстанню від точки M_0 до площини α називають довжину перпендикуляра M_0H, опущеного з цієї точки на площину (рис.5.6.).

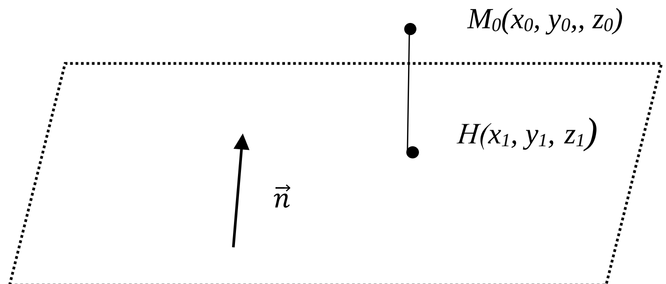
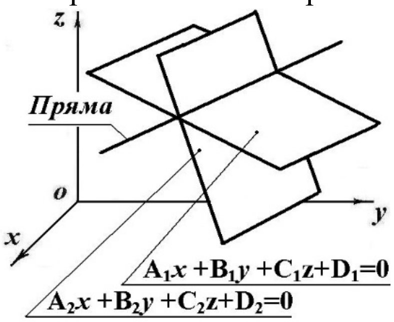


Рис. 5.6.

5.3. *Пряма у просторі*.

5.3.1. *Види рівнянь прямої у просторі*.

Будь-яка лінія у просторі може бути представлена як лінія перетину двох поверхонь. Найпростіша з них – пряма лінія, що є перетином двох площин (рис. 5.13).



Таким чином, *загальне рівняння прямої* записується як система рівнянь двох площин, які перетинаються у просторі:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D = 0 \end{cases}.$$

Рівняння прямої (рис.5.14), яка проходить через відому точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має відомий вектором напряму $\bar{s}(m, n, p)$

називають *канонічним рівнянням прямої* і записують:

Рис. 5.13

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (5.11)$$

Рівняння прямої яка проходить через дві дані точки (рис.5.14.) $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (5.12)$$

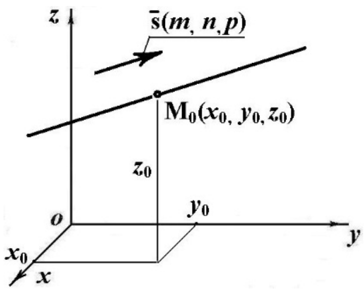


Рис. 5.14

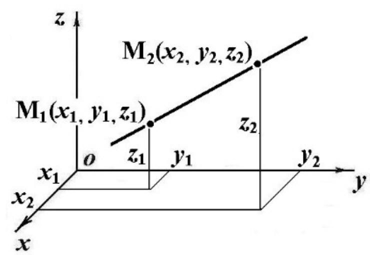
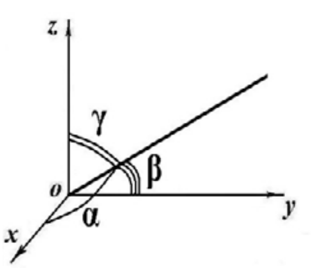


Рис.5.15

5.3.2. *Напрямні косинуси прямої у просторі.*

Нехай маємо деяку пряму, що утворює з осями Ox, Oy і Oz просторової системи координат $xOyz$ кути α, β і γ відповідно (рис.5.16).

Косинуси кутів α, β *і* γ *нахилу напрямного вектора* $\bar{s}(m, n, p)$ *прямої до осей координат називаються напрямними косинусами прямої у просторі* і визначають формулами:



$$\cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \qquad \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (5.13)$$

Рис5.16.

5.3.3. *Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Кут мж прямою і площиною.*

Прямі у просторі можуть бути паралельними (або співпадати), перпендикулярними, мимобіжними, або перетинатися під гострим кутом.

Умова паралельності двох прямих: дві прямі паралельні, якщо координати їх напрямних векторів $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ пропорційні.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (5.14)$$

Умова перпендикулярності двох прямих: дві прямі перпендикулярні, якщо сума добутків відповідних координат їх напрямних векторів $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ дорівнює нулю:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0\,. \qquad (5.15)$$

Гострий кут між двома прямими у просторі.

Якщо дві прямі у просторі перетинаються під кутом φ, то кут між їх напрямними векторами $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ теж дорівнює φ і визначається за допомогою виразу:

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^{\,2} + n_1^{\,2} + p_1^{\,2}} \cdot \sqrt{m_2^{\,2} + n_2^{\,2} + p_2^{\,2}}}\,. \qquad (5.16)$$

Означення. *Кутом між прямою l і площиною α називають кут β між прямою і проекцією цієї прямої на площину.*

Фактично, кутом між прямою і площиною є не тупий кут β =(90^0-φ) , де φ кут між вектором нормалі $\vec{n}(A, B, C)$ площини α і напрямним вектором $\bar{s}(m, n, p)$ прямої l:

$$\beta = 90^0 - \varphi = 90^0 - arcCos\frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (5.17)$$

Питання для самостійного контролю знань.

1. Що називається рівнянням поверхні у просторі $xOyz$?
2. Які види рівнянь площини у просторі Ви знаєте?
3. Запишіть загальне рівняння площини у просторі та рівняння площини у відрізках на осях.
4. Які види рівнянь прямої у просторі Ви знаєте? Що називається напрямним вектором прямої?
5. Запишіть загальне і канонічне рівняння прямої у просторі та рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки.
6. Що називають напрямними косинусами прямої?
7. Як визначити кути, які пряма утворює з осями Ox, Oy і Oz просторової системи координат $xOyz$?
8. Сформулюйте і запишіть умову паралельності і перпендикулярності двох прямих у просторі.
9. Який вираз застосовується для визначення гострого кута між двома прямими у просторі?
10. Як визначити кут за відомим значенням його косинуса.

ЛЕКЦІЯ 6

ТЕМА: ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

6.1. *Поняття фунції. Область визначення і область значень.*

<u>Означення</u>: залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y. Записують y = f(x), де x – незалежна змінна-аргумент функції, y – залежна змінна.

Областтю визначення функції - називають множину усіх можливих значень аргументу, позначають *D*.

Областтю значень функції називають множину всіх значень, яких може набувати функція для всіх значень аргументу з області визначення,означають E.

<u>Приклад 6.1.</u> Знайти область визначення і область значень функції:

а). $f(x) = \sqrt{x-1}$;

б). $y = Sin2x$;

в). $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$

а). D(f): $\boldsymbol{x-1 \geq 0} \leftrightarrow \mathbf{x} \in [\mathbf{1};\infty]$;

E(f): так як $f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0$ для усіх значень *x* із області визначення, то *E(f)* = $[0;+\infty]$.

б). *D(f)* = R, збігається з множиною дійсних чисел;

E(f) =$[-1;+1]$.

в). D(f) = (-∞, -2)U(3;+ ∞); *E(f)* =(0;+ ∞).

6.2 . *Границя функції. Односторонні границі. Правила обчислення границь.*

6.2.1. *Означення границі.*

Якщо задати деяке довільне додатнє число δ і для деякої точки x_0 утворити інтервал (x_0 - δ ; x_0 + δ), то такий інтервал називають δ - околом точки x_0, і позначають O (x_0). Якщо розглядати усі точки інтервалу (x_0 - δ ; x_0 + δ), крім точки x_0 , то δ -окіл називається проколотим δ-околом точки x_0 і позначають O(x_0).*

Нехай функція y = f(x) виначена в деякому околі O (x_0), або проколотому околі O(x_0) точки x_0.*

<u>Означення 1.</u> (за Гейне). Число A називається границею функції y = f(x) і точці x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $\{x_n\}, n \in N$, з O(x_0), що збігається до числа x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$, збігається до числа A.*

Записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$.

<u>Означення 2</u>. (За Коші). Число A називається границею функції y = f(x) в точці x_0, якщо для будь-якого числа ε>0, існує додатнє число δ таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta, x \neq x_{0,}$ *, для x∈ D(f)* , випливає нерівність $|f(x) - A|$< *ε. Записують так:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

<u>Означення 3.</u> Якщо функція y = f(x), в точці x_0 дорівнює нулю, то така функція називається нескінченно малою в точці x_0.

<u>Теорема.6.1.</u> Якщо функція y = f(x)в точці x_0 має границю, то така границя єдина.

Примітка: доведення цієї теореми грунтується на доведенні єдиності границі послідовності, див. [2, 7]

При рішенні математичних задач, досить часто, виникає потреба дослідити поведінку функції при нескінченно малому (великому) значенні аргументу, тоб то при x →±∞.

<u>*Означення 4.*</u> *Число A називається границею функції y = f(x) при x →+∞, якщо для будь-яких послідовностей* $\{x_n\}$ *таких, що* $\lim_{x\to\infty} x_n = +\infty$, *виконується рівність* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. *Записують так:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

Означеня границі функції при x → -∞ формулюється аналогічно.

<u>*Означення 5*</u>. *Якщо границя функції y = f(x), в точці* x_0 *не є скінченною величиною, то її називають нескінченною і записують так:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Наприклад: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = \infty$

<u>*Означення 6.*</u> *Якщо границя функції y = f(x) в точці* x_0 *(скінченній, або нескінченно віддаленій - x →∞) дорівнює ∞, то функцію називають нескінченно великою в точці* x_0 *, або на нескінченності . Якщо границія функції y = f(x) в точці* x_0 *рівна нулю, то функцію називають нескінченно малою в точці* x_0 *, або на нескінченності.*

Звязок між поняттями нескінченно мала і нескінченно велика функція можна показати на прикладі.

<u>Приклад 6.2.</u> Нехай маємо функцію *y = f(x),* яка при $x \to x_0$ є нескінченно малою, тобто $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, тоді функція z = $\frac{1}{f(x)}$, *при* $x_0 \neq x_0$ *і* $f(x) \neq 0$ є нескінченно великою при $x \to x_0$: $\lim_{x\to x_0} z(x) = \infty$,

6.2.2. *Односторонні границі функції.*

Якщо в означенні 1 (за Гейне) додати умову, що усі точки розміщені зліва від точки x_0, то отримаємо «границю зліва» якщо справа від точки x_0, то отримаємо «границю справа».

Границя справа, або правостороння границя: $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$;

Границя зліва, або лівостороння границя: $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$.

<u>*Означення 7*</u>. *Число A називається границею функції y = f(x) справа,(зліва) в точці* x_0, *якщо для будь-якого числа ε>0, існує додатнє число δ таке, що для усіх x з інтервалу* $(x_0; x_0 + \delta)$ $((x_0 - \delta; x_0))$ *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

<u>Приклад 6.3.</u> Обчислити односторонні границі функції *y = f(x)* в точці x_0.

а). $y = \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. $\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{|x|} = +\infty$; $\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{|x|} = +\infty$, *- границі зліва і справа рівні.*

б). $y = tgx$ $x_0 = \pi/2$. $\lim_{x\to \pi/2-0} tgx = +\infty$; $\lim_{x\to \pi/2+0} tgx = -\infty$,

Зв’язок між односторонніми границями і границею функції в точці доводить теорема 6.2.

<u>Теорема 6.2</u>. Нехай функція *y = f(x) визначена в деякому околі околі* $O^*(x_0)$ *точки* x_0. *Тоді, якщо функція y = f(x) у точці* x_0 *має границю, то в цій точці існує границя зліва, існує границя справа і односторонні границі рівні.*

6.2.3. *Правила обчислення границь.*

1. Границя постійної величини рівна самій постійній величині*:* $\lim C = C$, *де* $C = const$.

2. Границя суми кінечної кількості доданків дорівнює сумі границь цих доданків*:*

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_i(x) .$$

3. Границя добутку кінечної кількості співмножників дорівнює добутку границь співмножників:

$$\lim_{x\to x_0} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_i(x)$$

4. Границя частки дорівнює відношенню границі діленого до границі дільника, за умови, що границя дільника не дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{f(x)}}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

5. Якщо існують границі функцій $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ і ці границі обмежені, то має місце рівність:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} (f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

У найпростіших випадках обчислення границі зводиться до підстановки у вираз функції граничного значення аргументу.

<u>Приклад 6.4.</u> Обчислити границю функції в точці:

$$\lim_{x\to 1}(2\sqrt{x} + 3x^2 + lnx) = 2\lim_{x\to 1}\sqrt{x} + 3\lim_{x\to 1}x^2 + \lim_{x\to 1} lnx = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 = 5$$

У теорії границь (маргінальний аналіз) використовують так звані «чудові границі». Зазвичай розрізняють першу і другу «чудові границі».

Перша «чудова границя»: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Sinx}{x} = 1.$

Друга «чудова границя»: $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Друга «чудова границя» може бути використанна в іншій формі запису:

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

6.3. *Неперевність функції в точці, на множині, точки розриву.*

<u>*Означення 8.*</u> *Функція f(x) називається неперервною в точці* $x=x_0$, якщо:

1) *вона визначена в цій точці;*

2) *існує границя функції в цій точці*

$$\lim_{x\to x_0} f(x).$$

3) значення границі дорівнює значенню функції в точці x=a, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Якщо одна із умов порушується, то функція називається *розривною в точці* $x=x_0$, а сама точка $x=x_0$ *називається точкою розриву.*

Усі елементарні функції є неперервними на інтервалах визначеності.

<u>Означення 10</u>. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на інтервалі $(a; b)$, якщо вона неперевна в усіх точках інтервалу $(a; b)$.

<u>Означення 11</u>. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперевна в усіх точках інтервалу $(a; b)$ і в точці a неперервна справа, в точці b неперервна зліва.

<u>Властивості функцій неперевних на відрізку</u>.

1). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x = x_2$ така, що в ній задовольняється невівність $f(x_1) \geq f(x)$, де x - будь-яка інша точка відрізка $[a; b]$.

Значення функції в точці x_1 називають найбільшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

2). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x = x_2$ така, що в ній задовольняється невівність $f(x_2) \leq f(x)$, де x - будь-яка інша точка відрізка $[a; b]$.

Значення функції в точці x_2 називають найменшим значенням функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Таким чином, на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ досягає найменшого і найбільшого значення, хоча б один раз.

3). <u>Теорема Больцано – Коші</u>: *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a; b]$ і на кінцях відрізка набуває різних знаків, то між точками a і b існує принаймні одна точка $x = c$, в якій функція перетвориться на нуль: $f(c) = 0$, $a<c<b$.*

<u>Наслідок.</u> Якщо функція $y = f(x)$ неперевна на деякому інтервалі і на цьому інтервалі набуває найбільшого і найменшого значення, то на такому інтервалі вона набуває, принаймні один раз, усіх значень, що розміщуються між найменшим і найбільшим значеннями.

6.4.1. *Класифікація точок розриву*

<u>Означення 9.</u> Точка x_0 називається точкою розриву першого роду функції $y = f(x)$, якщо існують скінчені односторонні границі справа:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = const \; ; \tag{6.1}$$

та зліва :

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = const.$$

Якщо, крім того виконується хоча б одна із умов

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \end{cases} \tag{6.2}$$

то *функція в точці $x=x_0$ має неусувний розрив першого роду*.

Якщо границі функції зліва і справа рівні, але функція не існує, то маємо усувний розрив першого роду.

Точка x_0 називається точкою розриву другого роду функції $y= f(x)$, якщо границя справа $\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x)$, або зліва $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існуює або нескінченна.

Стрибком функції в точці розриву $x=x_0$ називається різниця її односторонніх границь:

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, *якщо вони різні.*

6.3.2. *Дослідження функції y = f(x) на неперервність.*

Правила дослідження функції на неперервність:

1) елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, але не може бути розривною на певному інтервалі.

2) елементарна функція може мати розрив в точці де вона не визначена за умови, що вона буде визначена хоча б із однієї сторони від цієї точки.

3) неелементарна функція може мати розриви як в точках, де вона невизначена, так і в тих, де вона визначена.

Наприклад, якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів, то на межі стику може бути розривною.

6.4. *Асимптоти графіка функції y = f(x).*

6.5.1. *Означення асимптот, види асимтот графіка функції y = f(x)*

Означення 10. Асимптотою кривої називається пряма, до якої необмежено наближається точка кривої, при необмеженому віддаленні її від початку координат.

Розрізняють *вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти.*

Графік функції $y = f(x)$ при $x \to a$ має *вертикальну асимптоту* (рис.6.6., *а* і *б*), якщо її границя при $x \to a$ дорівнює плюс або мінус нескінченність: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. У цьому випадку точка $x = a$ є точкою розриву другого роду. *Рівняння вертикальної асимптоти* має вигляд $x = a$.

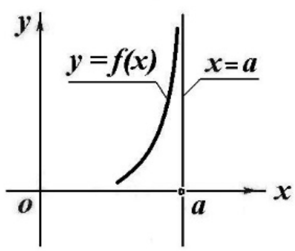


Рис. 6.6, *а*

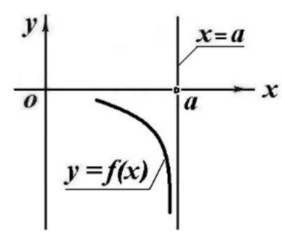


Рис. 6.6., *б*

Графік функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$ має *горизонтальні асимптоти* (рис.6.7., *а*), якщо існують кінцеві границі $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ та $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_1$. Якщо тільки одна з цих границь кінцева, то графік функції має одну горизонтальну асимптоту (рис.6.7., *б* і *в*).

Рис.6.7., *а*

Рис. 6.7., *б*

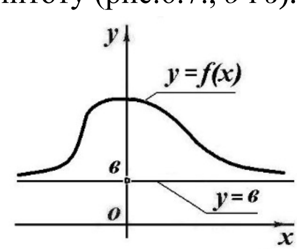


Рис. 6.7., *в*

Якщо границі $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ не обмежені, то графік функції не має горизонтальних асимптот. *Рівняння горизонтальної асимптоти* має вигляд $y = b$.

За означенням 10, асимптота є прямою лінією, тому *рівняння похилої асимптоти* можна записати як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис.6.8, *а* і *б*).

$$y = kx + b. \qquad (6.3)$$

Так як $y = f(x)$, то останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$f(x) = kx + b \;\rightarrow\; f(x) - kx - b = 0.$$

В цьому випадку буде справедливим рівняння $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$, де $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x} = 0$.таким чином одержали формули для визначення параметрів k і b похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx). \qquad (6.4)$$

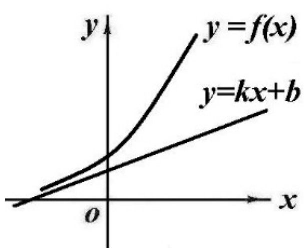


Рис. 6.8, *а*

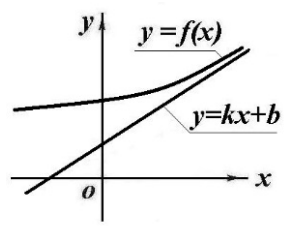


Рис. 6.8, *б*

Питання для самостійного контролю знань.

1. Сформулюйте означення поняття функції, що називають областтю визначення і областю значень функції? Які функції називають елементарними?
2. Сформулюйте означення границі функції, назвіть основні властивості границь.
3. Яка функція називається нескінченно великою, малою, який між ними зв'язок?
4. Дайте означення односторонніх границь функції в точці.
5. Яка функція називається неперервною в точці, на інтервалі? Приведіть означення точок розриву першого і другого роду.
6. Приведіть основні властивості неперервних на відрізку функцій.
7. Що називається асимптотою? Які види асимптот ви знаєте?
8. За яких умов графік функції $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту?
9. За яких умов графік функції $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту?
10. Який вигляд має рівняння похилої асимптоти? За якою формулою визначається параметри k і b?

ЛЕКЦІЯ 7, 8

ТЕМА: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

7.1. *Похідна функції однієї змінної.*

7.1.1. *Означення похідної.*

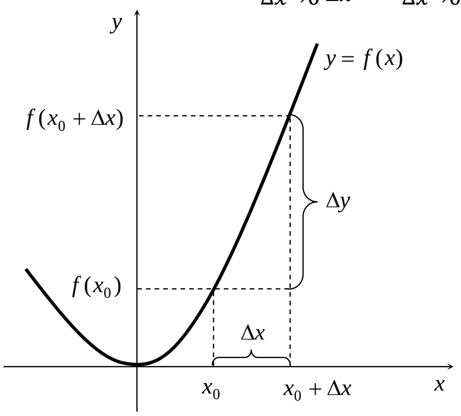
Нехай задано деяку функцю $y = f(x)$, на інтервалі (a, b). На цьому інтервалі візьмемо деяку точку $x = x_0$. Тоді значення функції в цій точці буде $f(x_0)$. Надамо аргументу приріст $\Delta x \neq 0$. Точка x_0. переходить у точку $x_0 + \Delta x$, що відповідає значенню функції $f(x_0 + \Delta x)$, рис.7.1.

Різницю $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$, називають *приростом функції*.

<u>*Означення*</u>*: границю відношення приросту функції до приросту аргументу (якщо така границя існує), за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називають похідною функціїї* $y = f(x)$ *в точці* x_0.

Позначають так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}.$$



Функцію, що має похідну в точці x_0, називають *диференційованою в точці* x_0.

Функцію, що має похідну в кожній точці інтервалу (a, b) (скінченного або нескінченного), називають *диференційованою на інтервалі* (a, b).

Операціяю знаходження похідної функції називають *диференціюванням* функції.

7.1.2. *Геометричний зміст похідної.*

Можна визначити відношення приросту функції до приросту аргументу як: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = tg\varphi$, де φ– кут нахилу січної M_0M_1, а при $\Delta x \to 0$, січна M_0M_1 прямує до дотичної M_0M_2 графіка функції $y = f(x)$, в точці M_0 (рис.7.2). Якщо α – кут нахилу дотичної M_0M_2, то

$$tg\alpha = tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Таким чином, *кутовий коефіцієнт* k *дотичної* до графіка функції $y = f(x)$. в точці x_0 є похідною цієї функції в точці x_0:

$$k = tg\alpha = f'(x_0)$$

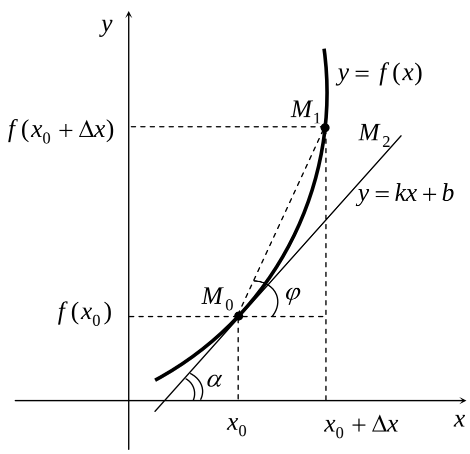


Рис. 7.2.

7.1.3. *Фізичний зміст похідної.*

Якщо тіло рухається за законом $S = S(t)$, де S – шлях, t – час, то середня швидкість руху від початкового моменту t часу до $t + \Delta t$, визначається за рівністтю:

$$\bar{v} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = S^{/}(t)$$

Тоді швидкість в момент часу t:

$$\overrightarrow{v(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dx} = S^{/}(t)$$

Таким чином, *швидкість руху точки в момент часу t є похідною пройденого шляху за часом.*

Відповідно прискорення руху точки в момент часу t є похідною швидкості руху за часом: $\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}^{/}(t).$

7.1.3. *Правила диференціювання . таблиця похідних елементарних функцій.*

Нехай маємо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційованя на інтервалі (a, b). Тоді для них виконуються правила :

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (7.1)$$

Доведення цих рівностей див. [2, ст 203]

Приведемо таблицю похідних основних елементарних функцій.

1. $(c)' = 0$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \cdot x'$
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(a^x)' = a^x \ln a$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

7.1.4. *Похідна складної функції.*

<u>*Означення*</u>*. Функція $y = f(u(x))$, називається складною*, змінна $u = u(x)$ – називається проміжною змінною.

Наприклад, складними функціями є $y = Cos^5 x$, $y = arctg\, x^3$, $y = 2^{Sin5x}$.

Похідна складної функції y = f(u(x)) за змінною x знаходиться за правилом:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (7.2)$$

Для знаходженя похідних $y'_u \cdot u'_x$ використовують таблицю похідних елементарних функцій.

Приклад 7.2. Обчислити похідну першого порядку складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$: $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

Застосовуємо формулу $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$$y' = (\sqrt{x - \sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot (x - \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x\sqrt{x} - x}}.$$

7.1.5. *Похідна неявно заданої функції.*

Означення. Функці y = f(x), називається заданою неявно, якщо змінні x та y пов'язані між собою рівнянням виду F(x, y) =0.

Наприклад: $x^2 + y^2 = 1$; $Cosy = Sin2x$.

Для знаходження похідної неявно заданої функції диференціюють ліву і праву частини рівняння і отриманий вираз розв'язують відносно y'_x.

Приклад 7.3. Знайти похідну $'$, якщо функція $y = f(x)$ задана рівнянням: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(y + x') = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2y' - (y + xy') = 0 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y'(y^2 - x) + (x^2 - y) = 0 \leftrightarrow y' = \frac{y - x^2}{x - y^2}.$$

7.1.6. *Похідна параметрично заданої функції.*

Означеня. Функція називається заданою параметрично, якщо залежна змінна і аргмент пов'язані між собою через деякий параметр t:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Похідна параметрично заданої функції заходить за формулою: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

Приклад 7.4. Знайти похідну y'_x, функції заданої параметрично: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

$\dfrac{dy}{dt} = aCost$; $\quad \dfrac{dx}{dt} = -aSint$, $\quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{Cost}{Sint} = ctgx$.

7.1.7. *Похідна степенево-показникової функції.*

Степенево – показникова функція має вигляд: *$y = u^v$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, тобто функції незалежної змінної x.*

Похідну степенево-паказникової функції можна визначити за формулою:

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v \cdot u'}{u}\right) \qquad (7.3),$$

або способом *логарифмічного диференціювання*.

Спосіб логарифмічного диференціювання включає в себе наступну послідовність дій:

1). початкову функцію логарифмують (натуральним логарифмом);

2). отриману функцію в неявному вигляді диференціюють;

3). знаходять вираз для y'_x.

Приклад 7.5. Обчислити похідну функції6 $y=(x+1)^{\cos x}$.

1) Логарифмуємо задану функцію і використовуємо властивості логарифма для спрощення виразу.

$$\ln y = \ln\,(x+1)^{\cos x}; \qquad \ln y = \cos x\cdot\ln(x+1)\cdot$$

2). Знаходимо похідну лівої і правої частини рівності:

$$(\ln y)' = (\cos x)'\cdot\ln(x+1)+\cos x\cdot(\ln(x+1))'\ \frac{1}{y}\cdot y' = -\sin x\cdot\ln(x+1)+\cos x\cdot\frac{1}{x+1}(x+1)'$$

2) Знаходимо виаз для y'_x

$$y' = y\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(x+1)+\cos x\cdot\frac{1}{x+1}\right),$$

$$y' = (x+1)^{\cos x}\cdot\left(-\sin x\cdot\ln(x+1)+\frac{\cos x}{x+1}\right)\cdot$$

7.2. *Диференціал функції.*

Нехай задано деяку функцю $y = f(x)$, диференційовану на відрізку $[a, b]$. Приріст Δy цієї функції дорівнює різниці значень цієї функції в точці $x+\Delta x$ і точці x: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Диференціалом функції y = f(x) називають величину:

$$dy = f'(x)\,\Delta x \qquad (7.4.)$$

При достатньо малих приростах аргумента ($\Delta x\to 0$) приріст функції наближено дорівнює її диференціалу: $\Delta y \approx dy$ і можна заисати $\Delta x \approx dx$ і формула (7.4) матиме вигляд:

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx, \qquad (7.5)$$

рівність $\Delta x = dx$ *можна вважати означенням диференціала незалежної змінної x.*

7.4. *Застосування похідної для дослідження функції та побудови графіка.*

7.4.1. *Основні означення і теореми дослідження графіку функції.*

Теорема.7.1. *Якщо функція y = f(x), диференційована на відрізку [a, b] і зростає на цьому відрізку, то її похідна $f'(x)$ для усіх x з проміжку (a, b) невід'ємна, тобто $f'(x)\geq 0$.*

Якщо функція y = f(x), неперервна на відрізку [a, b] і диференційована на проміжку (a, b), причому $f'(x) > 0$, для усіх $a < x < b$, то функція зростає на відрізку [a, b].

Аналогічною є теорема для спадної фнкції.

Теорема 7.2. *Якщо функція y = f(x), диференційована на відрізку [a, b] і спадає на цьому відрізку, то її похідна $f'(x)$ для усіх x з проміжку (a, b) від'ємна, тобто $f'(x)\leq 0$.*

Якщо функція y = f(x), неперервна на відрізку [a, b] і диференційована на проміжку (a, b), причому $f'(x) < 0$, для усіх $a < x < b$, то функція спадає на відрізку [a, b].

Означення 1. *Функція y = f(x) у точці x_0 має локальний максимум, якщо значення функції y = f(x) у точці x_0 перевищує її значеня в усіх інших точках деякого інтервалу, що містить точку x_0.*

Тобто, функція $y = f(x)$ має локальний максимум при $x = x_0$, якщо $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ для усіх Δx, досить малих за абсолютною величиною.

Означення 2. *Функція $y = f(x)$ має локальний мінімум при $x = x_0$, якщо $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ для усіх Δx, досить малих за абсолютною величиною.*

Максимум і мінімум функції називають *екстремумум функції*, точки в яких досягається екстремум називають *точками естремуму* функції.

Теорема. 7.3. (необхідна умова існування екстремуму функції).

Якщо функція $y = f(x)$, диференційована і має в точці $x = x_0$ екстремум, то в цій точці похідна функції перетворюється на нуль: $f'(x)=0$.

Означення 3. Точки в яких похідна функції перетворюється на нуль, або не існує наиваються критичними.

Теорема. 7.4. (достатня умова існування екстремуму функції).

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, який містить критичну точку x_0 і диференційована в усіх точках цього інтервалу (можливо, окрім точки x_0). Якщо при перебігу через точку x_0 похідна змінює знак « - » на «+», то в цій точці x_0 функція має мінімум, а якщо «+ » на «-», то в точці x_0 функція має максимум

Якщо при дослідженні функції постає питання щодо *найбільшого і найменшого* значення функції на відрізку, то необхідно виконати дії наступного алгоритму:

1). критичні точки і значення функції в них;

2). знайти значення функції на кінцях відрізка;

3). серед обчислених значень функції обрати найбільше і найменше, які й будуть, відповідно, найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку.

Приклад 7.14. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. На відрізку [-1; 4].

1). Критичні точки: $\begin{cases} y' = x^2 - 4x + 3 \\ y' = 0 : \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x_1 = 3; \ x_2 = 1 \end{cases}$

значення функції в критичних точках: $y(1) = 2\frac{1}{3}$; $y(3) = 1$.

2). Значення функції на кінцях відрізка: $y(-1) = -4\frac{1}{3}$; $y(4) = 66\frac{1}{3}$.

3). Максимальне значення функції на відрізку [-1; 4] $y(4) = 66\frac{1}{3}$; мінімальне значення на відрізку [-1; 4] $y(-1) = -4\frac{1}{3}$.

Означення 4. *Графік функції $y = f(x)$ має опуклість вгору на інтервалі (a, b), якщо усі точки графіка розміщені нижче будь-якої дотичної на цьому інтервалі. Криву називають опуклою вгору.*

Графік функції має опуклість вниз на інтервалі (a, b), якщо усі точки графіка розміщені вище будь-якої дотичної на цьому інтервалі. Криву називають опуклою вниз.

Означення 5. *Точку з області визначення функції, в якій змінюється характер опуклості називають точкою перегину .*

На рис. 7.3 зображено криву, що на інтервалі (a, b) опукла вгору, на інтервалі (b, c) опукла вниз. Точкою перегину є точка b.

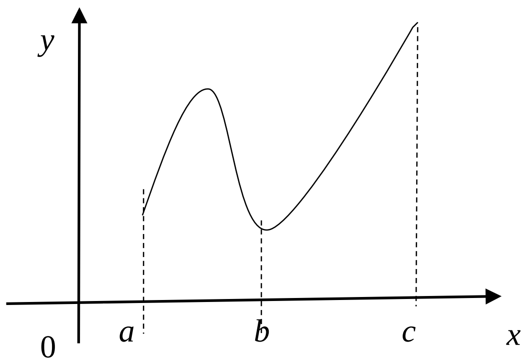


Рис. 7.3.

Теорема. 7.5. *Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) друга похідна функції f(x) від'ємна, тобто $f''(x) < 0$, то крива $y = f(x)$ на цьому інтервалі має опуклість вгору; якщо в усіх точках інтервалу (a, b) друга похідна функції f(x) додатня, тобто $f''(x) > 0$, то крива $y = f(x)$ на цьому інтервалі має опуклість вниз.*

Теорема 7.6. *Якщо для функції $y = f(x)$ в деякій точці $x = x_0$ виконується рівність $f(x_0)'' = 0$, або $f(x_0)''$ не існує і при перебігу через цю точку $x = x_0$ друга похідна змінює знак, то точка з абцисою $x = x_0$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$*

7.4.2. *Загальна схема дослідження функції і побудови графіка.*

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти точки розриву функції і асимптоти графіка функції.
5. Визначити інтервали монотонності функції і точки екстремуму.
6. Дослідити функцію на опуклість, визначити наявність точок перегину.
7. Побудувати в системі координат знайдені асимптоти та всі отримані при дослідженні точки. Потім, враховуючи інтервали монотонності, опуклості та угнутості, побудувати графік функції.

Інколи для більш детального зображення функції знаходять декілька довільних точок цієї функції і позначають їх на графіку.

Питання для самостійного контролю знань

1. Що називається похідною функції однієї змінної?
2. Які правила знаходження похідної ви знаєте?
3. Як обчислити похідну складної та параметрично заданої функції?
4. Що називається диференціалом функції однієї змінної?
5. Чому дорівнює диференціал аргумента цієї функції?
6. В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції?
7. За яких умов можна вважати, що приріст функції наближено дорівнює її диференціалу: $\Delta y \approx dy$?
8. Що називається приростом аргумента, приростом функції?
9. Запишіть формулу для обчислення наближеного значення степеня.
10. За якою формулою обчислити наближене значення кореня?

ЛЕКЦІЯ 9-10

ТЕМА: ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

8.1. *Первісна функції та невизначений інтеграл.*

Означення 1. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо на цьому проміжку виконується рівність $F'(x)=f(x)$ або $dF(x)=f(x)dx$.

Із означення слідує, що первісна $F(x)$ є диференційованою, а значить неперервною функцією на заданому проміжку, і її вигляд визначається проміжком, на якому вона розглядається.

Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тобто, $F'(x)=f(x)$, то функція $F(x)+C$, при будь-якій $C = const$, також буде первісною для $f(x)$, так як $[F(x)+C]' = F'(x)=f(x)$.

Означення 2. Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку.

Інтегрування є операцією оберненою до диференціювання.

Означення 3. Функція $F(x)+C$, що являє собою загальний вигляд всієї множини первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку, називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на заданому проміжку і позначається

$$\int f(x)dx = F(x)+C,\ \left(F'(x)=f(x)\right), \tag{8.1}$$

де $\int$ — знак невизначеного інтеграла;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

Теорема 8.1. *(Коші).* Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Зауваження: існують такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, що не можуть бути записані через елементарні функції, хоча існують у кожному із проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці функції називають «не інтегровними».

Наприклад: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \cos x^2 dx$.

8.2. *Властивості невизначеного інтеграла.*

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)=f(x)$.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $\int dF(x)=F(x)+C$.

3. Сталий множник, можна виносити з під знака інтеграла, тобто: $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,\quad k\neq 0$.

4. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто:

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx.$$

8.3. *Таблиця основних інтегралів.*

Кожна з нище приведених формул справедлива у будь-якому проміжку із області визначення відповідної підінтегральної функції.

1. $\int 0\cdot dx=C$
2. $\int dx=x+C$
3. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1$
1. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$
5. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$
6. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,a\neq1$
7. $\int\sin xdx=-\cos x+C$
8. $\int\cos xdx=\sin x+C$
9. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$
10. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$
11. $\int\operatorname{ctg}xdx=\ln|\sin x|+C$
12. $\int\operatorname{tg}xdx=-\ln|\cos x|+C$
13. $\int\dfrac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$
14. $\int\dfrac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$
15. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C$
16. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C=-\arccos\dfrac{x}{a}+C$
17. $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C=-\operatorname{arcctg}x+C$
18. $\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C=-\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+C$
19. $\int\dfrac{xdx}{x^2+a}=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right|+C$
20. $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C,a\neq0$
21. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$

8.4. *Основні методи інтегрування*

8.4.1. *Метод безпосереднього інтегрування.*

Метод безпосереднього інтегрувані базується на використанні табличних інтегралів, властивостей невизначених інтегралів і деяких елементарних перетворень, що приводять підінтегральний вираз до відомого табличного інтеграла, або функцій, інтергувати які простіше.

Приклад 8.1. $\int\dfrac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

Іноді доцільно виконати операцію піднесення підінтегральної функції під знак диференціала:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Наприклад, коли φ(x) є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b,$, дістаємо: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який постійний доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

$$d\varphi(x) = d(\varphi(x) + C).$$

Приклад 8.2. $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} =$ $= -\frac{1}{3}\int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right| + C.$

8.4.2. *Метод заміни змінної інтегрування (метод підстановки).*

Найчастіше при обчислені інтегралів використовують метод підстановки, який базується на використанні теореми 8.2. (див. [3]):

Теорема 8.2. Якщо $f(x)$ — неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (8.2)$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left|\varphi(x) = t\right| = \int f(t)dt. \quad (8.3)$$

На практиці роблять так. Припускають, що $x = \varphi(t)$, диференціюючи цю функцію, знаходять $dx = \varphi'(t)dt$ і підставляють в підінтегральний вираз. Після обчислення інтегралу, повертаються до початкової змінної x. Часто використовується і зворотня заміна змінної, тобто, підстановка $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)dx$.

Приклад 8.3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3\left(t^2+1\right)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Приклад 8.4. $\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни. Вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом

8.4.3. *Метод інтегрування частинами.*

Як і метод підстановки, метод інтегрування частинами, належить до основних методів інтегрування. Формула інтегрування частинами записується так:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du. \qquad (8.4)$$

де, $u = u(x)$ та $v = v(x)$ – функції від x, що мають неперервні похідні.

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується обирати за таким правилом: підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу u та dv, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$, при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може легко знайдений.

<u>Приклад 8.5.</u>

$$\int x \sin xdx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin xdx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin xdx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int -\cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Інколи при обчисленні інтеграла, доводиться виконувати інтегрування частинами кілька разів:

<u>Приклад 8.6.</u>

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$$

Використання формули інтегрування частинами передбачає, що в правій частині інтеграл $\int v du$ можна обчислити легше ніж заданий інтеграл. У інтегралах виду $\int P(x)a^{\alpha x}dx$, $\int P(x)Sin(mx)dx$, $\int P(x)Cos(mx)dx$ за u приймать многочлен $P(x)$. Для інтегралів виду $\int P(x)\ln(x)\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}(x)\,dx$, $\int P(x)\arcsin(x)\,dx$, доцільно за u приймати функції $\ln(x)$, $\mathrm{arctg}(x)$, $\arcsin(x)$.

У деяких випадках після інтегрування частинами інтеграла одержується рівняння, розв'язком якого є шуканий інтеграл.

<u>Приклад 8.7.</u>

$$G = \int e^x \cos xdx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u,\ \ du = -\sin xdx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = u,\ \ du = \cos xdx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos xdx = e^x(\cos x + \sin x) - G.$$

Отже, дістали рівняння $G = e^x(\cos x + \sin x) - G$, із якого знаходимо

$$G = \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C .$$

8.5. *Інтегрування окремих класів функцій*

8.5.1. *Інтегрування раціональних функцій.*

«Нагадування»: раціональним дробом називають відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, то дріб називається *неправильним*. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Найпростішими раціональними дробами називаються такі дроби чотирьох типів:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$; III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

де $k \geq 2,\ k \in N,\ D = p^2 - 4q < 0$, інтеграли від яких мають вигляд:

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$;

III. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$;

IV. $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k}$ — інтегрується за допомогою рекурентних формул.

Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$ можна подати у вигляді скінченної кількості найпростіших дробів, використовуючи такі правила:

1). Якщо $Q_m(x) = (x-a)^k \cdot g_{m-k}(x)$,

то: $$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-k}(x)};$$

2). Якщо $Q_m(x) = (x^2+px+q)^k \cdot g_{m-2k}(x)$,

то $$\frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^k \cdot g_{m-k}(x)} =$$

$$= \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

де A_i, B_i, $i = (\overline{1,k})$ - деякі коефіцієнти, а - $\frac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ та $\frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ - правильні раціональні дроби.

<u>Приклад 8.8</u>. Даний правильний раціональний дріб (n < 12) розкласти на суму простих дробів.

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x+2)^2x^3(x^2-x+2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{B_2}{(x+2)^2}+$$
$$+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_3}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2-x+2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Коефіцієнти A_1, B_1, B_2, ..., N_2 невідомі (невизначені коефіцієнти). Для їх знаходження треба праву частину рівності звести до найменшого спільного знаменника і знайдений чисельник прирівняти до чисельника заданого початкового дробу. Із тотожної рівності многочленів у чисельниках одержимо рівності коефіцієнтів при однакових степенях змінної x, що являють собою систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів A_1, B_1, B_2, ..., N_2. Описаний вище метод називають *методом невизначених коефіцієнтів*.

Алгоритм інтегрування раціональних функцій.

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то виділяють цілу частину дробу (за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу).

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та прості дроби.

<u>Приклад 8.9.</u> Обчислити інтеграл: $\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$

1). Виділяємо цілу частину дробу – підінтегральної функції:

$$\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx \quad =\int(x-\frac{6x}{x^3+8})dx$$

2). Розкладаємо знаменник правильного дробу на співмножники і записуємо дріб як суму двох дробів, визначаємо невідомі коефіцієнти:

$$1.\frac{6x}{x^3+8}=\frac{6x}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$
$$=\frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8}\Rightarrow 6x=A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x=x^2(A+B)+x(-2A+2B+C)+4A+2C;$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l|l}x^2 & 0=A+B\\ x^1 & 6=-2A+2B+C\\ x^0 & 0=4A+2C\end{array}\right\}\\ x=-2\Rightarrow -12=12A\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-1\\ B=1\\ C=2\end{array}\right|=\int\left(x+\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3}=\left|\begin{array}{l}x-1=t\\ dx=dt\\ x=t+1\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{t+3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{tdt}{t^2+3}-3\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(t^2+3)-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

8.5.2. *Інтегрування тригонометричних функцій.*

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R — раціональна функція відносно sin*x*, cos*x*, тобто над sin*x*, cos*x* виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня, наприклад:

$$R(\sin x, \cos x)=\frac{2\sin^2 x+\cos^3 x}{3\sin^4 x-4\sin x\cos^2 x}.$$

Існують такі підстановки, що приводять інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t)dt$.

1. *Універсальна тригонометрична підстановка* . $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \\ x=2\arg\operatorname{tg} t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$

$$\int R(sinx, cosx)dx=\left|\begin{matrix} sinx=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \\ cosx=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right|=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R^*(t)dt.$$

<u>Приклад 8.10</u> $\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{matrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, x=2\operatorname{arctg} t, \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \end{matrix}\right|=\int\frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)}=$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

<u>*Зауваження*</u>. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо sin*x*, cos*x* входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

2. *Підінтегральна функція - непарна відносно sinx - підстановка cosx =t.*

<u>Приклад 8.11.</u> $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^3 x\cdot\sin x}{\cos^2 x\cdot\sin x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx=$

$$=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx=\left|\begin{matrix}\cos x=t \\ \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=\int\frac{1-t^2}{t^2}(-dt)=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

3. *Підінтегральна функція — непарна відносно cosx - раціоналізується за допомогою підстановки sin x= t.*

<u>Приклад 12</u>. $\int\cos^3 x\sin^2 xdx=\int\cos^3 x\sin^2 x\frac{\cos x}{\cos x}dx=$

$$=\int \cos^2 x\cdot\sin^2 x\cdot\cos x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x\cos x dx=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ dt=\cos x dx\end{vmatrix}=$$

$$=\int\left(1-t^2\right)t^2dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C\,.$$

4. *Підінтегральна функція* $R(\sin x,\cos x)$ - *парна відносно* sin$x$ і cos$x$ разом, тобто $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$.

У цьому випадку використовують підстановку $\operatorname{tg} x=t$ або $\operatorname{ctg} x=t$ ..

<u>Приклад 8.12.</u> $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\begin{vmatrix}\operatorname{tg} x=t,\ \ x=\operatorname{arctg} t,\ \ dx=\dfrac{dt}{1+t^2};\\ \sin^2 x=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{t^2}{1+t^2};\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{1}{1+t^2}\end{vmatrix}=$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C=\operatorname{tg} x-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-2\operatorname{ctg} x+C\,.$$

5. *Підінтегральна функція* $R(\operatorname{tg} x)$ *раціоналізується підстановкою* $\operatorname{tg} x=t$.

<u>Приклад 8.13.</u> $\displaystyle\int\operatorname{tg}^3 x dx=\begin{vmatrix}\operatorname{tg} x=t\\ x=\operatorname{arctg} t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{vmatrix}=\int\frac{t^3dt}{t^2+1}=\begin{vmatrix}\begin{array}{r|l} t^3 & t^2+1\\ \cline{2-2} - & t\\ t^3+t & \\ \hline -t & \end{array}\end{vmatrix}=$

$$=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}+C\,.$$

<u>Зауваження.</u> В інтегралах $\int\sin^{2n} x\cdot\cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \ \sin x\,\cos x=\frac{\sin 2x}{2}\,.$$

<u>Приклад 8.14.</u>

$$\int\sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C\,.$$

<u>Зауваження.</u> При інтегруванні інтегралів типу:

$\int\sin(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int\cos(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int\sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$ $a\neq b$, можна скористатися тригонометричними рівностями:

$$\sin(ax)\cdot\cos(bx)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)x+\ \ +\sin(a-b)x)\ ,$$

$$\cos(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right).$$

<u>Приклад 8.15.</u>

$$\int\cos 2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin 3x)dx=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C\,.$$

8.5.3. *Інтегрування виразів що містять іраціональності.*

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів іраціональних функцій, при цьому $R(x;y)$ - означає раціональну залежність від змінних x та y.

1. $$\int R\left(x,\sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx=\left|\begin{matrix}ax+b=t^n\\ x=\dfrac{1}{a}\left(t^n-b\right)\\ dx=\dfrac{n}{a}t^{n-1}dt\end{matrix}\right|=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a}=\int R^*(t)dt.$$

<u>Приклад 8.16.</u> $$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\left|\begin{matrix}x+1=t^3\\ x=t^3-1\\ dx=3t^2dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(t^3-1\right)3t^2dt}{t^2}=3\int\left(t^3-1\right)dt=$$

$$=\frac{3}{4}t^4-3t+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{x+1}+C\,.$$

2. $$\int R\left(x,\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx=\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^n\right|=\int R^*(t)dt\ .$$

<u>Приклад 8.17.</u>

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{matrix}\dfrac{x+1}{x-1}=t^2,\ x+1=t^2(x-1),\\ x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1};dx=\dfrac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\left(t^2-1\right)^2t(-4t)dt}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2}=$$

$$=2\int\frac{t\cdot(-2t)dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\left|\begin{matrix}u=t,du=dt;\\ \dfrac{-2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=dv\Rightarrow v=\dfrac{1}{t^2+1}\end{matrix}\right|=\frac{2t}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{2t}{t^2+1}-2\,\mathrm{arctg}\,t+C=2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C\,.$$

3. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^s, \right.$

$\left. s = НСК(n_1, n_2 \ldots, n_k) \right| = \int R^*(t)dt$, де $НКС$ – найменше спільне кратне

<u>Приклад 8.18.</u> $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, 12 = НСК(2,3,4) \\ dx = 12t^{11}dt; t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} =$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1} = 12\int \frac{t^4(t^{10} - 1 + 1)dt}{t^5 - 1} = 12\int \left(t^4(t^5 + 1) + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left| t^5 - 1 \right| \right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5} \cdot \sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left| \sqrt[12]{x} - 1 \right| + C.$$

Підінтегральна функція $R_1(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ після виділення повного квадрата і заміни $x + \frac{b}{2a} = t$ раціоналізується тригонометричними підстановками; при цьому, залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта a можливі такі випадки:

$$4.\ \int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\sin z \\ \text{або} \\ t = k\cos z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} t = k\sin z, z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), z = \arcsin\frac{t}{k}, \\ dt = k\cos z dz; \sqrt{k^2 - t^2} = \sqrt{k^2 - k^2\sin^2 z} = \\ = k\sqrt{\cos^2 z} = k|\cos z| = k\cos z \end{array} \right| =$$

$$= \int R(k\sin z, k\cos z)k\cos z dz = \int R^*(\sin z, \cos z)dz.$$

$$5.\ \int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{k}{\sin z} \\ \text{або} \\ t = \dfrac{k}{\cos z} \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

$$6.\ \int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\,\mathrm{tg}\, z \\ \text{або} \\ t = k\,\mathrm{ctg}\, z \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)dz.$$

<u>Приклад 8.19.</u>

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}=\left|\begin{array}{l} x=5\mathrm{tg}z,\quad z\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\quad z\neq 0,\\ dx=\frac{5dz}{\cos^2 z};\quad z=\mathrm{arctg}\frac{x}{5};\\ \sqrt{x^2+25}=5\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 z}=\frac{5}{\cos z}\end{array}\right|=\int\frac{\cos z\cdot 5dz}{5\cdot 25\mathrm{tg}^2 z\cdot\cos^2 z}=$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{\cos z dz}{\sin^2 z}=-\frac{1}{25\sin z}+C=-\frac{1}{25\sin\mathrm{arctg}\frac{x}{5}}+C=\frac{\sqrt{x^2+25}}{25x}+C.$$

<u>*Зауваження.*</u> Інтеграли типу $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можуть бути проінтегровані за допомогою підстановок Ейлера:

I $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$, при $a>0$;

II., $\sqrt{ax^2+bc+c}=tx\pm\sqrt{c}$ при $c>0$;

III. $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$, при $b^2-4ac>0$,

де x_1, x_2 — корені тричлена ax^2+bx+c .

<u>Приклад 8.20.</u>

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+1}=t-x,\ a=1>0;\\ x+x+1=t^2-2tx+x^2,\\ x=\frac{t^2-1}{2t+1},\quad dx=\frac{2(t^2+t+1)dt}{(2t+1)^2}\end{array}\right|=2\int\frac{(t^2+t+1)dt}{(x+t-x)(2t+1)^2}=$$

$$=\left|\frac{t^2+t-1}{t(2t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{2t+1}+\frac{C}{(2t+1)^2}\Rightarrow t^2+t+1=A(2t+1)^2+Bt(2t+1)+C\cdot t\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ C=-\frac{3}{2}\\ B=-\frac{3}{2}\end{cases}\right|=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3}+\frac{3}{2(2t+1)}+C,$$

де $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

8.6.1. *Питання для самостійного контролю знань*

1. Що називається первісною функцією?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Перечисліть основні властивості невизначеного інтеграла.
4. У чому геометричний зміст невизначеного інтеграла?
5. Що розуміють під безпосереднім інтегруванням?
6. У чому суть метода підстановки?
7. Запишіть формулу інтегрування частинами.
8. Які основні прийоми інтегрування раціональних дробів, тригонометричних функцій, виразів що містять іраціональності?

ЛЕКЦІЯ 11

ТЕМА: ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

9.1. *Інтергальна сума і визначений інтеграл.*

Нехай функція $f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a, b]$ осі OX. Розіб'ємо цей відрізок на n частин, не обов'язково рівних, точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Отримаємо елементарні відрізки $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, де $i = 1, 2, 3, \ldots n$. На кожному відрізку візьмемо довільну точку ζ_i та обчислимо значення функції $f(\zeta_i)$ в кожній обраній точці.

Складемо суму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = f(\zeta_1)\Delta x_1 + f(\zeta_2)\Delta x_2 + f(\zeta_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\zeta_i)\Delta x_i + \ldots + f(\zeta_n)\Delta x_n, \quad (9.1)$$

Яка називається інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Для заданої функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ можна скласти нескінченну множину інтегральних сум, так як побудова інтегральної суми складається з довільного ділення заданого відрізка $[a, b]$ на елементарні відрізки і довільного вибору точок ζ_i на кожному елементарному відрізку.

Позначимо через $max\Delta x_i$ – довжину надовшого з елементарних відрізків.

<u>*Означення.*</u> *Границя інтегральної суми* (9.1) *за умови, що* $max\Delta x_i \to 0$ *(наближається до нуля), якщо ця границя існує і не залежить від способу розбиття відрізка* $[a, b]$ *на частини та від вибору точок* ζ_i*, називається визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ *в межах від* a *до* b *і позначається так:* $\int_a^b f(x)dx$.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \quad (9.2)$$

де $\int_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;

$f(x)$ — підінтегральна функція;

$f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз;

dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ -це число, яке залежить від типу функції $f(x)$ та відрізку $[a; b]$ і не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

<u>*Означення.*</u> *Функція, для якої на* $[a;b]$ *існує визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *називається інтегровною на цьому проміжку.*

9.2. *Властивості визначеного інтеграла.*

1. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a).$

2. Сталий множник можна виносити із під знака визначеного інтеграла, тобто $\int\limits_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int\limits_a^b f(x)dx.$

3. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a;b]$, то $\int\limits_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

4. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить знак на протилежний, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

5. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

6. Якщо $f(x)$ інтегровна в будь-якому із проміжків: $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

7. Якщо $f(x)\ge 0$ і інтегровна для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0.$

8. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровні та $f(x)\ge g(x)$ для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

8. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m\le f(x)\le M$ для $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ то

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

<u>Теорема 9.1</u>. (*теорема про середнє*).

Якщо функція f(x) — неперервна для усіх $x\in[a,\ b],\ \ b>a,$ *то знайдеться така точка з цього інтервалу* $x=c\in[a,\ b],$ *що:*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \qquad (9.3)$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник із сторонами $f(c), c\in[a,\ b]$ та b–a, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x)\ge 0$ та неперервна на проміжку $[a;\ b]$ (рис. 9.1).

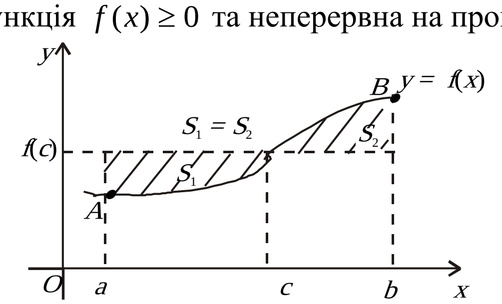


Рис. 9.1.

9.2. *Поняття визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування, формула Ньютона—Лейбніца.*

Розглянемо інтеграл $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dt$, який буде функцією від верхньої межі інтегрування.

Змінній *x* надамо приросту Δx, що зумовить приріст функції (рис. 9.2).

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

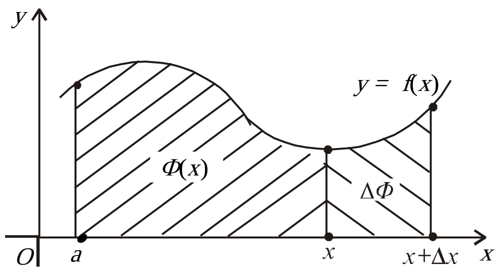


Рис.9.2

<u>Теорема 9.2.</u> *Якщо функція f(x) неперервна для будь-якого* $x\in[a;\,b]$, *то похідна від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування по цій межі дорівнює підінтегральній функції від верхньої межі інтегрування, тобто*

$$\Phi'_x(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x). \tag{9.4}$$

Наслідки:

1. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею від функції $f(x)$ є одна із первісних для $f(x)$.

2. Будь-яка неперервна функція на проміжку $[a;b]$ має на цьому проміжку первісну, яку, наприклад, завжди можна побудувати у вигляді визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею, тобто: $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt.$

<u>Приклад 9.1</u>. Знайти $\int\frac{\sin x}{x}dx,\, x\in[1;+\infty)$.

Функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ — неперервна на проміжку $[1;+\infty)$, тому можна записати

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_1^x\frac{\sin t}{t}dt+C,\forall x\in[1;+\infty).$$

<u>Теорема 9.3.</u> *(Ньютона—Лейбніца). Якщо функція* $f(x)$ *— неперервна для* $x\in[a;\,b]$, *то визначений інтеграл від функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;\,b]$ *дорівнює приросту первісної функції* $f(x)$ *на цьому проміжку, тобто:*

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a),\ \text{де}\ F'(x)=f(x). \tag{9.5}$$

Введемо позначення подвійної підстановки меж інтегрування $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$,

тоді зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x)+C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b \qquad (9.6)$$

<u>*Наслідок.*</u> *Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну із первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.*

<u>Приклад 9.2</u>. $\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx = \int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right) = \frac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Big|_0^{\ln 2} =$

$= \frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2}-1\right)^5-\left(e^0-1\right)^5\right) = \frac{1}{5}\left((2-1)^5-(1-1)^5\right) = \frac{1}{5}.$

9.3. *Методи інтегрування у визначеному інтегралі*

9.3.1. *Метод заміни змінної (підстановки) у визначеному інтегралі.*

Мета даного методу така ж як і при знаходженні невизначеного інтеграла методом підстановки, тобто, треба перетворити підінтегральний вираз так, щоб інтеграл прийняв вигляд відповідного табличного інтеграла.

Нехай функція *f(x)* неперервна на відрізку $[a, b]$ і нехай:

1) функція $x = \varphi(t)$ монотонна (зростаюча або спадна), неперерна і має неперервну похідну, коли t змінюється від α до β;

2) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Тоді справедлива *формула заміни змінної у визначеному інтегралі*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \qquad (9.7)$$

<u>*Зауваження.*</u> При обчислення визначених способом підстановки змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної, треба лише обчислити нові межі інтегруваня.

<u>Приклад 9.3.</u> $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left|\begin{array}{c} x=t^2,\quad dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}\end{array}\right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}dt =$

$= 2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_2^3 = 2\left(3-\ln 4-(2-\ln 3)\right) = 2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$

9.3.2. *Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.*

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервні і мають неперервні похідні на відрізку $[a, b]$ то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (9.8)$$

<u>Приклад 9.4</u>. Обчислити інтеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

9.3.3. *Інтегрування парних і непарних функцій на відрізку, симетричномому відносно початку координат.*

Якщо фунція *f(x) парна,* тобто *f(- x) = f(x),* то*:*

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Якщо функція *f(x) непарна*, тобто *f(- x) = - f(x),* то*:*

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Дані формули використовують для обчислення визначених інтегралів, площ плоских фігур і об'ємів тіл обертання.

9.4. *Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат.*

Будь-яка плоска фігура, обмежена неперервними кривими лініями, може бути розділена лініями, паралельними осям координат, на частини – криволінійні трапеції. І тоді обчислення площі плоскої фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче плоских фігур – криволінійних трапецій.

1. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис.9.3).

Функція $f(x)$ — неперервна, крім того $f(x) \geq 0$. Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \leq 0$ (рис. 9.4),

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|. \tag{9.9}$$

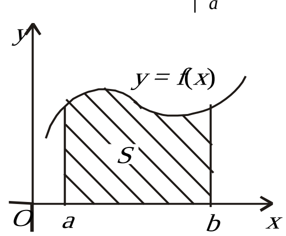


Рис. 9.3

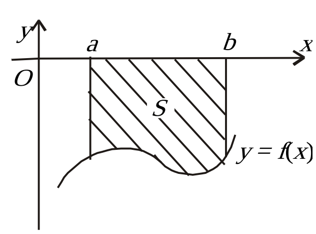


Рис. 9.4

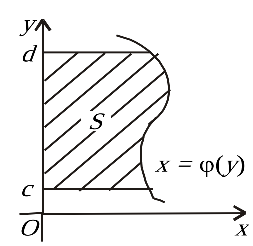


Рис. 9.5

2. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 9.5).

Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна і $\varphi(y) \geq 0$. Площа S такої фігури обчислюється так

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy, \qquad (9.10)$$

а якщо $\varphi(y) \le 0$ (рис. 9.6), то

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|. \qquad (9.11)$$

3. Фігура обмежена лініями *y*= *f(x)*, *y*= *g(x)*, *x*=*a* , *x*=*b*. Функції *f(x)* та *g(x)* - неперервні і *f(x)*≥*g(x)* при *x*є[a,b] (рис. 9.7). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b: $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (9.12)

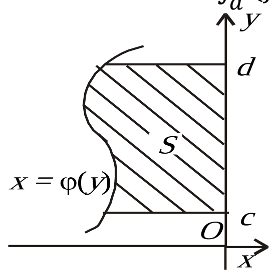


Рис. 9.6

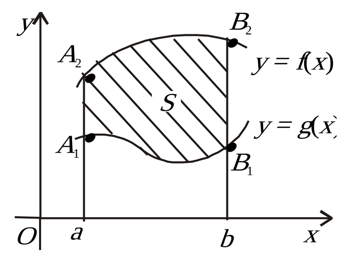


Рис. 9.7

<u>Приклад 9.5.</u> Обчислити площу фігури (рис.9.8), обмеженої лініями: $y = -x^2 + 4x + 5$ і $y = 2x - 3$.

Побудуємо на координатній площині фігуру, обмежену параболою $y = -x^2 + 4x + 5$ (l_1) та прямою y=2x - 3 (l_2). Знайдемо точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат, а також координати вершини параболи (рис. 9.8).

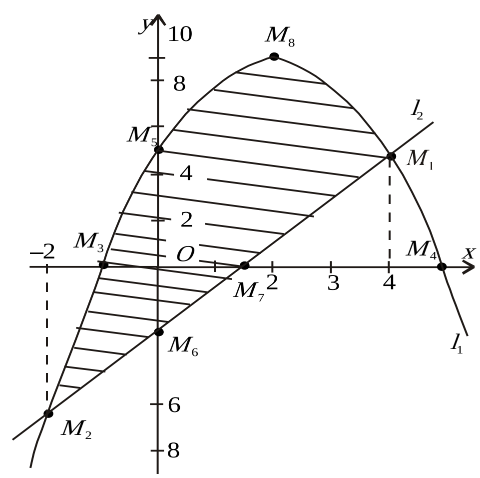


Рис. 9.8.

$$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x - 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(4;\ 5) \\ M_2(-2;\ -7). \end{array}\right.$$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(0;\ 5).$$

$$l_1 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_4(5;\ 0) \\ M_3(-1;\ 0). \end{array}\right.$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M_7(1{,}5;\ \ 0).$$

$$l_2 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow M_6(0;\ -3).$$

Точка $M_8(2;\ 9)$ — вершина параболи $y - 9 = -(x-2)^2$.

Площа S фігури $M_1M_8M_2$ обчислюється як інтеграл різниці функцій – кривих, що обмежують фігуру.:

$$S = \int_{-2}^{4} \left(-x^2 + 4x + 5 - (2x - 3)\right)dx = \int_{-2}^{4} (-x^2 + 2x + 8)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$= -\frac{64}{3} + 16 + 32 - \left(\frac{8}{3} + 4 - 16\right) = 36.$$

9.5. *Обчислення об'єму тіл обертання.*

Об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої неперерною кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю обцисс (рис 9.9), обчислюється за формулою

$$V_x = \int_a^b S(x)dx = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \qquad (9.13)$$

Об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі OY фігури, обмеженої неперерною кривою $x = \varphi(y)$, прямими $x = c$, $x = d$ та віссю ордина, обчислюється за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d \left(\varphi(y)\right)^2 dy \qquad (9.14)$$

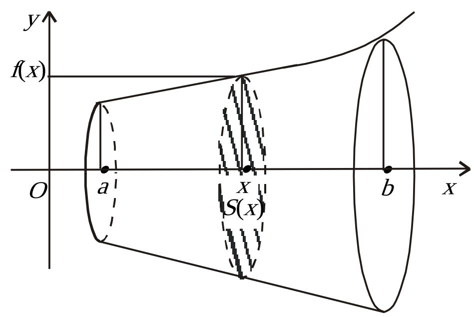


Рис. 9.9

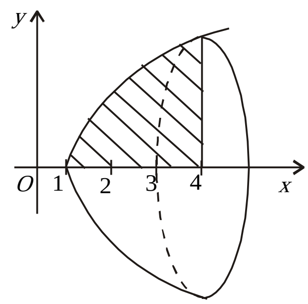


Рис. 9.10

<u>Приклад 9.6.</u> Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x - 3$, $x = 1$, $x = 4$.

У прямокутній системі координат будуємо фігуру, обмежену даними лініями (рис. 9.10).

За формулою (9.13) обчислюємо об’єм тіла:

$$V = \pi\int_1^4 y^2 dx = \pi\int_1^4 (3x-3)dx = \frac{3\pi}{2}(x-1)^2\Big|_1^4 = \frac{27}{2}\pi .$$

9.6. *Невласні інтеграли.*

При означенні визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ висувалися умови, що межі інтегрування a і b кінечні числа, а підінтегральна функція визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо порушується хоча б одна з цих умов, то *інтеграл називають невласним*.

Розглянемо інтеграли з нескінченними межами:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

При цьому ввааємо що функція $f(x)$ обмежена і неперервна на інтервалах $[a;\ \infty]$, $[-\infty, b]$, $[-\infty;+\infty]$, відповідно.

Обчислюють невласні інтеграли за допомогою граничного переходу:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (9.15)$$

Якщо границя в правій частині рівності кінечна, то інтеграл називають збіжним. У протилежному випадку – розбіжним.

Інтеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ визначається аналогічно:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx . \qquad (9.16)$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ обчислюють наступним чином:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx. \qquad (9.17)$$

Даний інтеграл називається збіжним, якщо кожний з інтегалів правої частини рівності збіжний, в протилежному випадку називається розбіжним.

<u>Примітка</u>. У теорії ймовірностей використовується інтергал Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

<u>Приклад 9.7</u>. Знайти $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$.

Застосуємо формулу (9.15):

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty}[\ln b - \ln 1] = \infty$. Таким чином, інтеграл розбіжний.

Якщо *F(x)* первісна для підінтегральної функції *f(x)*, то збіжність для невласного інтеграла можна встановити за узагальненою формулою Ньютона – Лейбніця:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (9.18)$$

якщо $\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$ існує, о інтеграл збіжний.

Приклад 9.8. Перевірити на збіжність невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx.$$

$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$. Таким чином, заданий невласний інтеграл збіжний і дорівнює 1.

9.7. *Наближене обчислення визначеного інтеграла.*

У деяких випадках *F(x)* первісна підінтегральної функції *f(x)* існує, але не виражається через елементарні функції, такі інтеграли називають «неінтегровними» (див. Розділ 8, п.8.1). Відповідні їм визначені інтеграли обчислюються наближено. Для цього існує декілька способів. Розлянемо дві формули - прямокутників і трапеції.

Для того щоб наближено обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, треба розбити відрізок інтегрування $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Довжина кожної такої частини дорівнює $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. Далі визначають значення підінтегральної функції $y = f(x)$ в точках ділення, тобто обчислюють $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$ і обчислюють $\int_a^b f(x)dx$ за однією з формул.

1.) За формулою прямокутників (9.19)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) \qquad (9.19)$$

Якщо $f^{/}(x)$ існує і обмежена на відрізку $[a, b]$, то похибка обчислень за формулою прямокутників становить $|\delta_n| \le \frac{M_1\,(b-a)^2}{2n}$, де $M_1 = max|f^{/}(x)|$ на відрізку $[a, b]$.

2.) За формулою трапецій (9.20)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right) \qquad (9.20).$$

Якщо $f''(x)$ існує і обмежена на відрізку $[a, b]$, то похибка обчислень за формулою прямокутників становить $|\delta_n| \le \frac{M_2\,(b-a)^3}{12n^2}$, де $M_2 = max|f''(x)|$ на відрізку $[a, b]$.

Приклад 9.9. Обчислити за формулою трапецій $\int_3^9\frac{dx}{x}$. Прийняти $n = 6$. Оцінити похибку обчислень.

Результат проміжних розрахунків приведемо в таблиці.

$$\frac{b-a}{n} = \frac{9-3}{6} = 1, \quad y = \frac{1}{x}$$

x_i	$x_0 = 3$	$x_1 = 4$	$x_2 = 5$	$x_3 = 6$	$x_4 = 7$	$x_5 = 8$	$x_6 = 9$
y_i	$y_0 = 1/3 =$ 0,3333	$y_1 = 1/4 =$ 0,2500	$y_2 = 1/5 =$ 0,2000	$y_3 = 1/6 =$ 0,1667	$y_4 = 1/7 =$ 0,1429	$y_5 = 1/8 =$ 0,1250	$y_6 = 1/9 =$ 0,1111

Підставимо отримані значення в формулу (9.20), маємо:

$$\int_3^9\frac{dx}{x} \approx 1\left[\frac{0{,}3333+0{,}1111}{2} + 0{,}2500 + 0{,}2000 + 0{,}1667 + 0{,}1429 + 0{,}1250\right] = 1{,}1068.$$

Оцінимо допущену похибку обчислень. Так як $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ монотонно спадає на [3, 9] то найбільше значення вона приймає при $x = 3$.

Тоді $M_2 = f''(3) = \frac{2}{27}$, $|\delta_n| \leq \frac{2\,(9-3)^3}{27 \cdot 12 \cdot 6^2} = 1/27 \approx 0{,}0037$.

9.8.1. *Питання для самостійного контролю знань*

11. Які задачі приводять до поняття визначеного інтеграла?
12. Що називається інтегральною сумою функції $y = f(x)$?
13. Що називається визначеним інтегралом і в чому його геометричний зміст?
14. Приведіть основні властивості визначеного інтегралу.
15. Запишіть формулу Ньютона – Лейбніця.
16. В чому полягає спосіб підстановки у визначеному інтегралі?
17. Запишіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
18. За допомогою яких формул можна наближено обчислити визначений інтеграл?
19. Запишіть формули для обчислення площ плоских фігур і об’єму тіл обертання.
20. Що називається невласним інтегралом?
21. Приведіть умови збіжності дл невласних інтегралів.
22. Приведіть формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла.