УДК 624.01

ПІДБІР ПОЗДОВЖНЬОЇ РОЗТЯГНУТОЇ АРМАТУРИ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ БАЛКИ З УРАХУВАННЯМ ДІЙСНОЇ РОБОТИ БЕТОНУ І АРМАТУРИ

SELECTION OF LONGITUDINAL TENSILE REINFORCEMENT OF REINFORCED CONCRETE BEAMS, TAKING INTO ACCOUNT THE ACTUAL WORK OF CONCRETE AND REINFORCEMENT

Янін О.Є., - к.т.н., доцент, ORCID ID 0000-0003-0230-8669, (Херсонський Державний Аграрний Університет, м. Херсон)

Yanin O.E., candidate of technical sciences, assistant professor, (Kherson State Agrarian University, Kherson)

У статті наведені результати теоретичних досліджень можливості підбору поздовжньої розтягнутої арматури залізобетонної балки без використання методу послідовних наближень. Запропоновано методику підбору за допомогою комп'ютерного середовища MathCAD.

The article presents the results of theoretical studies of the possibility of selecting a longitudinal tensioned reinforcement of a reinforced concrete beam without using the method of successive approximations. The method of selection with the help of the computer environment MathCAD is offered.
In connection with the adoption of new design standards for reinforced concrete structures [1], [2], there is a need to develop a methodology for calculating them, taking into account the actual work of concrete and reinforcement. This will allow more adequately reflect in the calculated models the actual processes of work under load, occurring in buildings and structures.
The method is based on the use of a system of equilibrium equations for an infinitely small element of a reinforced concrete beam.
Based on the maximum completeness of the stress diagram in the concrete of the compressed zone, it is possible to solve algebraically such a system of equations, and on this basis, find the desired value of the cross-sectional area of the longitudinal working tensioned reinforcement. Such a problem leads to solving a second-degree algebraic equation with respect to the unknown height of the compressed zone of concrete.
In the case when the possibility of any completeness of the stress diagram in the concrete of the compressed zone is assumed, the above-described method cannot be used, since the relative deformation in the extreme compressed concrete fiber will be unknown. Due to the fact that the calculated parameters are expressed through these deformations in the form of a fifth degree

polynomial [3], an algebraic solution of the system of equilibrium equations is almost impossible.
In this case, it becomes expedient to use the computer environment MathCAD, where using the operators Given and Find, one can solve systems of equations numerically.
The proposed approach can be used by design engineers in the calculation of reinforced concrete beams of buildings and structures.

Ключові слова. Залізобетон, балка, дійсна робота, бетон, арматура, стиснута зона, дволінійна діаграма, деформування, MathCAD.

Вступ. У зв'язку з прийняттям нових норм проектування залізобетонних конструкцій [1], [2], виникає необхідність у розробці методики їх розрахунку з урахуванням дійсної роботи бетону і арматури. Це дозволить більш адекватно відобразити у розрахункових моделях реальні процеси роботи під навантаженням, що відбуваються у будівлях і спорудах.

Аналіз останніх досліджень. Вирішенню задачі підбору арматури балок та дослідженню дійсної роботи бетону і арматури присвячені фундаментальні праці видатних вітчизняних вчених [3,4], які засновані зокрема на використанні методу послідовних наближень. Такий підхід дозволяє швидко отримати необхідний результат з достатнім ступенем точності.

Цей метод полягає у використанні рівнянь рівноваги для нескінченно малого елементу залізобетонної балки [3]. При використанні залежності $\boldsymbol{\sigma_c}$**-**$\boldsymbol{\varepsilon_c}$ у формі поліному п'ятого ступеню [2], для прямокутного поперечного перерізу рівняння мають вигляд (див. стор. 49-50[3]):

$$\beta \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z_{(1)}^2 + \sigma_s \cdot A_s \cdot (d - z_{(1)}) - M = 0\,, \tag{1}$$

$$\omega \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z_{(1)} = \sigma_s \cdot A_s\,, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{\beta}$ - коефіцієнт відносної несучої здатності нормального перерізу для рівняння моментів;

$\boldsymbol{\omega}$ - коефіцієнт повноти епюри напружень в стиснутому бетоні для рівняння проекцій;

$\boldsymbol{M}$ – заданий зовнішній згинальний момент;

$\boldsymbol{f_{cd}}$ - розрахункове значення міцності бетону на стиск;

$\boldsymbol{b}$ - ширина поперечного перерізу балки;

$\boldsymbol{z_{(1)}}$ - висота стиснутої зони бетону;

$\boldsymbol{d}$ - робоча висота поперечного перерізу балки;

$\boldsymbol{A_s}$ - площа поперечного перерізу поздовжньої робочої розтягнутої арматури;

$\boldsymbol{\sigma_s}$ - нормальні напруження в арматурі.

Постановка мети і задач досліджень. Мета і задачі роботи полягають у дослідженні можливості підбору поздовжньої розтягнутої арматури залізобетонної балки прямокутного поперечного перерізу без використання методу послідовних наближень, та у розробці відповідної методики розрахунку при різних ступенях повноти епюри напружень у бетоні стиснутої зони.

Методика досліджень. Виходячи з максимальної повноти епюри напружень у бетоні стиснутої зони при відповідних значеннях $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega_{max}}$ (згідно з таблицею Б.3 додатку Б [3]) і відносної деформації в крайній стиснутій фібрі бетону $\boldsymbol{\varepsilon_{c(1)}} = \boldsymbol{\varepsilon_{c(1)\omega max}}$, можна алгебраїчно розв'язати систему рівнянь (1) і (2) і на цій підставі знайти потрібне значення $\boldsymbol{A_s}$. Величина коефіцієнту $\boldsymbol{\beta}$ визначається згідно з таблицею Б.1 додатку Б [3] при $\boldsymbol{\varepsilon_{c(1)}} = \boldsymbol{\varepsilon_{c(1)\omega max}}$.

Після виразу $\boldsymbol{\sigma_s A_s}$ з рівняння (2) і підстановки в (1) отримаємо

$$\beta \cdot f_{cd} \cdot b \cdot z_{(1)}^2 + \omega_{\max} f_{cd} \cdot b \cdot z_{(1)} \cdot (d - z_{(1)}) = M \,. \tag{3}$$

Аналіз цього виразу показує, що він являє собою алгебраїчне рівняння другого ступеню відносно невідомої висоти стиснутої зони бетону $\boldsymbol{z_{(1)}}$ [3]. Для його рішення доцільно як і у традиційному підході ввести позначення

$$A_0 = \frac{M}{f_{cd} \cdot b \cdot d^2}\,;\ \xi = \frac{z_{(1)}}{d}\,. \tag{4}$$

Розділивши ліву і праву частини формули (3) на вираз $f_{cd} \cdot b \cdot d^2$, отримаємо

$$\beta \cdot \frac{z_{(1)}^2}{d^2} + \omega_{\max} \cdot \frac{z_{(1)}}{d} \cdot \frac{(d - z_{(1)})}{d} = \frac{M}{f_{cd} \cdot b \cdot d^2}\,; \tag{5}$$

$$\beta \cdot \xi^2 + \omega_{\max} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) = A_0\,; \tag{6}$$

$$\xi^2 \cdot (\omega_{\max} - \beta) - \xi \cdot \omega_{\max} + A_0 = 0\,. \tag{7}$$

Після розв'язання алгебраїчного рівняння другого ступеню (7) відносно невідомого $\boldsymbol{\xi}$, будемо мати

$$\xi_{1,2} = \frac{\omega_{\max} \pm \sqrt{\omega_{\max}^2 - 4 \cdot A_0 \cdot (\omega_{\max} - \beta)}}{2 \cdot (\omega_{\max} - \beta)}\,. \tag{8}$$

З двох корнів умовам задачі відповідає

$$\xi = \frac{\omega_{\max} - \sqrt{\omega_{\max}^2 - 4 \cdot A_0 \cdot (\omega_{\max} - \beta)}}{2 \cdot (\omega_{\max} - \beta)} < 1\,. \tag{9}$$

Тоді з формули (4) $z_{(1)} = \xi \cdot d$.

Відносна деформація у розтягнутій арматурі згідно з гіпотезою плоских перерізів (див.стор.42 [3])

$$\varepsilon_{s1} = \frac{\varepsilon_{c(1)\omega\max}}{z_{(1)}}(d - z_{(1)}) . \quad (10)$$

Згідно з п.3.2.1.10 [1] при підборі арматури балки, треба приймати дволінійну діаграму стану деформування арматури Прандтля. Тому, якщо ε_{s1} згідно з формулою (10) виявиться більше за $\varepsilon_{s0} = \frac{f_{yd}}{E_s}$, то це означає пластичну роботу арматури і треба приймати $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{s0}$.

Потрібне значення площі поперечного перерізу поздовжньої робочої розтягнутої арматури можна знайти з формули (2) при $\sigma_s = \varepsilon_{s1} \cdot E_s$:

$$A_s = \frac{\omega_{\max} f_{cd} \cdot b \cdot z_{(1)}}{\varepsilon_{s1} \cdot E_s} . \quad (11)$$

За допомогою сортаменту арматури згідно з отриманим значенням приймаються діаметр і кількість стержнів арматури [3].

Результати досліджень. З метою з’ясування можливості практичного використання такого методу, задача була розв’язана для залізобетонної балки прямокутного профілю при таких вихідних даних:

- клас міцності бетону С16/20;
- клас арматури А400С;
- проліт балки ***L***=6м;
- висота поперечного перерізу балки ***h***=0,4 м;
- ширина поперечного перерізу балки ***b***=0,2м;
- відстань від центру ваги арматури до крайнього розтягнутого волокна a_o = 0,03м;
- лінійне рівномірно-розподілене навантаження на балку ***q*** =15 $\times 10^{-3}$ МН/м для першої групи граничних станів;
- згинальний момент посередині прольоту балки від навантаження M_{Ed} =$qL^2/8$=0,0675 МН×м для першої групи граничних станів.

Отримані наступні результати:

$$A_0 = 0{,}214 ;\ \xi = 0{,}2991 ;\ \varepsilon_{s0} = 1{,}732 \cdot 10^{-3} ;$$

$$\varepsilon_{s1} = 1{,}732 \cdot 10^{-3} = \varepsilon_{s0} \ ;\ \ A_s = 5{,}7861 см^2 .$$

Для того, щоб впевнитись у правильності отриманої площі поперечного перерізу поздовжньої робочої розтягнутої арматури A_s, був зроблений розрахунок перевірки міцності нормального перерізу згідно традиційному підходу [5,6], який виходить зі спрощеної прямокутної епюри нормальних напружень в бетоні стиснутої зони згідно з п.3.1.6.2 [2]. Несуча здатність, виражена через згинальний момент при знайденому значенні A_s склала M_u =

0.0682256 МН×м > M_{Ed} = 0,0675 МН×м. Це означає, що міцність нормального перерізу забезпечена при відносно малому запасі.

У випадку, коли припускається можливість будь якої повноти епюри напружень у бетоні стиснутої зони при $\omega \leq \omega_{max}$, описана вище методика не може бути використана оскільки $\varepsilon_{c(1)}$ буде невідомим. У зв'язку з тим, що параметри β і ω виражаються через $\varepsilon_{c(1)}$ у вигляді поліному високого ступеню (див. формули (3.40) і (3.43) [3]), алгебраїчне розв'язання системи рівнянь рівноваги (1) і (2) практично неможливе. У цьому випадку доцільним стає використання комп'ютерного середовища MathCAD, де за допомогою операторів ***Given*** і ***Find*** можна розв'язувати системи рівнянь числовим методом. На рис.1 наведений фрагмент документу, розроблений у цьому середовищі для вказаних вище вихідних даних. Він містить чотири рівняння з чотирма невідомими A_s, $\varepsilon_{c(1)} = \varepsilon_{c1}$ $z_{(1)}$, $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_s$ з урахуванням обмежень на відносні деформації бетону і арматури. Заміна символіки пов'язана з деякими обмеженнями середовища MathCAD.

Запропонований алгоритм передбачає визначення $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_s$ за формулою (10) з урахуванням обмеження $\varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_{s0}$ (рис.1). При цьому, відносна деформація у розтягнутій арматурі ε_{s1} обчислюється при максимальній повноті епюри напружень у бетоні стиснутої зони для відносної деформації в крайній стиснутій фібрі бетону $\varepsilon_{c(1)} = \varepsilon_{c(1)\omega max}$. У випадку, коли $\varepsilon_{s1} = \dfrac{\varepsilon_{c(1)\omega\max}}{z_{(1)}}(d - z_{(1)}) > \varepsilon_{s0}$, $\varepsilon_{c(1)}$ визначається таким, що відповідає початку текучості в арматурі виходячи з гіпотези плоских перерізів і буде менше за $\varepsilon_{c(1)\omega max}$:

$$\varepsilon_{c(1)} = \frac{\varepsilon_{s0} \cdot z_{(1)}}{d - z_{(1)}}. \qquad (12)$$

Якщо $\varepsilon_{s1} = \dfrac{\varepsilon_{c(1)\omega\max}}{z_{(1)}}(d - z_{(1)}) < \varepsilon_{s0}$, треба приймати $\varepsilon_{c(1)} = \varepsilon_{c(1)\omega max}$.

У програмному фрагменті MathCAD (рис.1), описаний алгоритм реалізований у першому та другому елементах системи рівнянь, які підлягають розв'язанню. Третій та четвертий елементи відповідають рівнянням рівноваги для нескінченно малого елементу залізобетонної балки. Таким чином, чотири рівняння системи мають чотири невідомі величини і можуть бути розв'язані.

Given

$$\varepsilon_s = \begin{cases} \left[\dfrac{\varepsilon_{c1\omega max}}{z_1}\cdot(d - z_1)\right] & \text{if } \dfrac{\varepsilon_{c1\omega max}}{z_1}\cdot(d - z_1) \le \varepsilon_{s0} \\ \varepsilon_{s0} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{c1} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_{s0}\cdot z_1}{d - z_1} & \text{if } \dfrac{\varepsilon_{c1\omega max}}{z_1}\cdot(d - z_1) > \varepsilon_{s0} \\ \varepsilon_{c1\omega max} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M_{Ed} = \left[\frac{a_1}{3}\cdot\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}} + \frac{a_2}{4}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^2 + \frac{a_3}{5}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^3 + \frac{a_4}{6}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^4 + \frac{a_5}{7}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^5\right]\cdot f_{cd}\cdot b\cdot {z_1}^2 + \varepsilon_s\cdot E_s\cdot A_s\cdot(d - z_1)$$

$$\left[\frac{a_1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}} + \frac{a_2}{3}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^2 + \frac{a_3}{4}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^3 + \frac{a_4}{5}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^4 + \frac{a_5}{6}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{cL}}\right)^5\right]\cdot f_{cd}\cdot b\cdot z_1 = \varepsilon_s\cdot E_s\cdot A_s$$

$$\begin{pmatrix} A_{s\text{потр}1} \\ \varepsilon_s \\ z_1 \\ \varepsilon_{c1} \end{pmatrix} := \text{Find}(A_s, \varepsilon_s, z_1, \varepsilon_{c1}) \qquad A_{s\text{потр}1} = 5.9108316\times 10^{-4} \qquad \varepsilon_s = 1.732\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{s0} = 1.732\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{c1} = 1.141\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{c1\omega max} = 2.852\times 10^{-3} \qquad z_1 = 0.1469636 \qquad \xi := \frac{z_1}{d} \qquad \xi = 0.3971988$$

Рис.1. Визначення потрібної площі поперечного перерізу арматури $A_{s\text{потр}1}$, м^2 при використанні комп’ютерного середовища MathCAD і можливості неповної епюри напружень у бетоні стиснутої зони

Висновки: 1. Розглянутий метод алгебраїчного розв’язання системи рівнянь рівноваги для нескінченно малого елементу залізобетонної балки дає можливість отримати достовірний результат без використання методу послідовних наближень при максимальній повноті епюри напружень у бетоні стиснутої зони.

2. Отримана потрібна площа поперечного перерізу поздовжньої робочої розтягнутої арматури $A_{s\text{потр}1}$ = 5.9108см^2 коли припускається можливість

будь якої повноти епюри напружень у бетоні стиснутої зони, мало відрізняється від значення $A_s = 5{,}7861 см^2$, знайденого при алгебраїчному розв'язанні системи рівнянь рівноваги для нескінченно малого елементу залізобетонної балки. Відсоток розбіжності складає

$$(\mathbf{A_{sпотр1}} - \mathbf{A_s}) / \mathbf{A_s} = (5{,}9108 - 5{,}7861) \times 100 / 5{,}7861 = 2{,}2\%.$$

1. ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону/ Правила проектування / Мінрегіонбуд України. – Київ, 2011. – 118с.

DSTU B V.2.6-156:2010. Betonni ta zalizobetonni konstruktsiyi z vazhkoho betonu/ Pravyla proektuvannya / Minrehionbud Ukrayiny. – Kyyiv, 2011. – 118s.

2. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції / Основні положення / Міністерство регіонального розвитку та будівництва України. – Київ, 2011. – 71с.

DBN V.2.6-98:2009. Betonni ta zalizobetonni konstruktsiyi / Osnovni polozhennya / Ministerstvo rehional'noho rozvytku ta budivnytstva Ukrayiny. – Kyyiv, 2011. – 71s.

3. Є. М. Бабич, В. Є. Бабич. Розрахунок і конструювання залізобетонних балок: навчальний посібник / Є. М. Бабич, В. Є. Бабич. – друге видання перероблене і доповнене. – Рівне: НУВГП, 2017. – 191с.

YE. M. Babych, V. YE. Babych. Rozrakhunok i konstruyuvannya zalizobetonnykh balok: navchal'nyy posibnyk / YE. M. Babych, V. YE. Babych. – druhe vydannya pereroblene i dopovnene. – Rivne: NUVHP, 2017. – 191s.

4. Бабич В. Є. Напружено-деформований стан нерозрізних залізобетонних балок з урахуванням повної діаграми деформування бетону / В. Є. Бабич // Науковий вісник будівництва – Харків: ХТУБА, 1999. – Вип. 7. – с.101-107.

Babych V. YE. Napruzheno-deformovanyy stan nerozriznykh zalizobetonnykh balok z urakhuvannyam povnoyi diahramy deformuvannya betonu / V. YE. Babych // Naukovyy visnyk budivnytstva – Kharkiv: KHTUBA, 1999. – Vyp. 7. – s.101-107.

5. Руководство по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона (без предварительного напряжения).- М.: Стройиздат 1978.-320с.

Rukovodstvo po proektyrovanyyu betonnykh y zhelezobetonnykh konstruktsyy yz tyazheloho betona (bez predvarytel'noho napryazhenyya).- M.: Stroyyzdat 1978.-320s.

6. Вахненко П.Ф. Залізобетонні конструкції. – К.: Урожай, 1995. – 368 с.

Vakhnenko P.F. Zalizobetonni konstruktsiyi. – K.: Urozhay, 1995. – 368 s.