

УДК 624.073.4

Т. А. Емельянова

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ  
ОБОЛОЧКИ С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ  
ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ**

**Аннотация.** В работе рассматриваются вопросы определения критических сил и критической жесткости ребер трехслойной круговой оболочки с легким заполнителем, подкрепленной продольными ребрами жесткости. Получены графические зависимости между параметром жесткости и отношением линейных размеров оболочки, подкрепленной одним и тремя ребрами жесткости.

**Ключевые слова:** трёхслойная оболочка, устойчивость, заполнитель, ребро жесткости, жесткость, критическая сила.

T. A. Yemelyanova

**RESEARCH OF STABILITY OF A THREE-LAYER CIRCULAR SHELL  
WITH LIGHT AGGREGATE REINFORCED BY LONGITUDINAL RIBS  
OF RIGIDITY**

**Summary.** On the given article the question of definition critical forces and critical rib rigidity of a three-layer circular shell with a light aggregate are considered. The shell is reinforced by longitudinal ribs of rigidity. There have been obtained questions to determine critical forces and critical rigidity of ribs for the joint-leaned shell reinforced by longitudinal ribs of rigidity.

**Keywords:** three-layer shell, stability, aggregate, rigidity, critical forces.

Рассматривается трёхслойная круговая цилиндрическая оболочка с лёгким трансверсально-изотропным заполнителем, подкреплённая продольными рёбрами одинаковой жесткости и расположенными на одинаковых расстояниях друг от друга (рисунок 1). Для внешних несущих слоёв оболочки приняты гипотезы Кирхгофа-Лява, для заполнителя – линейный закон изменения тангенциальных перемещений по толщине. Поперечные деформации заполнителя не учитываются. Для ребер приняты гипотезы Бернулли и учитывается только изгиб ребер в вертикальной плоскости [1].

Дифференциальные уравнения устойчивости участка оболочки, заключённого между рёбрами, которые получены из вариационного уравнения [2], имеют вид

$$\nabla^4 \Phi + \frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \Phi - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \Phi \right) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^4 \Phi - \frac{1}{RD^*} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{2\Gamma_x}{D^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( 1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) \Phi = 0, \quad (2)$$

$$\Psi - \frac{1-\mu}{2G_3} Bh \nabla^2 \Psi = 0. \quad (3)$$

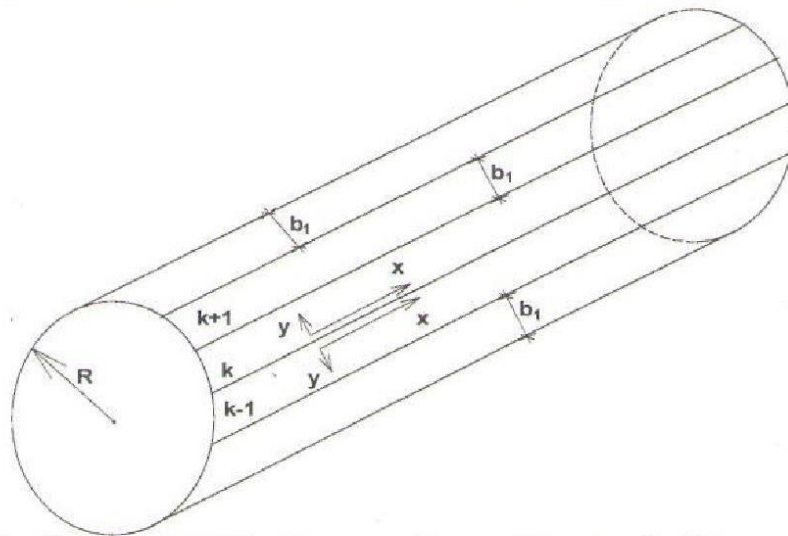


Рисунок 1 – Схема трёхслойной круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой продольными ребрами жёсткости

В уравнениях (1) – (3) использованы условные обозначения

$$B = \frac{E\delta}{1-\mu^2}, \bar{B} = 2(1-\mu^2)B, D^* = 2BH^2, H = h + 0,5\delta,$$

$\delta$  и  $2h$  – толщина внешних слоёв и заполнителя;  $G_3$  – модуль сдвига заполнителя;  $E$  и  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона внешних слоёв;  $u_1, v_1, u_2, v_2$  – тангенциальные перемещения срединных плоскостей верхнего и нижнего слоёв оболочки;  $w$  – прогиб оболочки.

И, наконец, систему уравнений (1) и (2) можно привести к одному разрешающему уравнению, если ввести в рассмотрение функцию  $F(x, y)$  и принять

$$\varphi = \nabla^4 F, \Phi = -\frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( 1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) F. \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (1), убеждаемся, что оно превращается в тождество. Подставляя выражение (4) в уравнение (2), получаем уравнение (5) для нахождения разрешающей функции  $F$ :

$$\nabla^4 \nabla^4 F + \frac{\bar{B}}{R^2 D^*} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( 1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) F + \frac{2\Gamma_x}{D^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( 1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) \nabla^4 F = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) ищем в виде

$$F = f_1(y) \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad (6)$$

где  $a$  – длина оболочки.

Подставляя выражение (6) в уравнение (5), получаем дифференциальное уравнение, которое определяет функцию  $f_1(y)$ :

$$\frac{n^8 \pi^8}{a^8} f(y) + \frac{n^4 \pi^4 \alpha^2}{R^4 a^6} (f(y)(a^2 + n^2 \pi^2 R^2 k_0) - a^2 R^2 k_0 f^2(y)) - \frac{n^2 \pi^2 m_1}{R^2 a^8} (n^4 \pi^4 (a^2 + n^2 \pi^2 R^2 k_0) f(y) + a^6 (f^{(4)}(y) - R^2 k_0 f^6(y))) + f^{(8)}(y) = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$f_1(y) = e^{\eta y}. \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (7) и вводя обозначения (10), приходим к характеристическому уравнению (9):

$$\eta^8 + \alpha_n^2 R^2 k_0 m_1 \eta^6 - \alpha_n^4 m_1 \eta^4 - \alpha_n^4 R^2 k_0 \alpha^2 \eta^2 + \alpha_n^4 ((\alpha_n^2 R^4 (\alpha_n^2 R^4 (1 - k_0 m_1) + k_0 \alpha^2) - m_1) + \alpha^2) = 0. \quad (9)$$

Вводя обозначения

$$\beta = \frac{\pi R}{\pi} \eta = R \eta, \alpha^2 = \frac{\bar{B} \pi^4 R^4}{R^2 D^* \pi^4} = \frac{(1 - \mu^2) R^2}{H^2}, m_1 = \frac{2 \Gamma_x \pi^2 R^2}{\pi^2 D^*} = \frac{2 \Gamma_x R^2}{D^*}, k_0 = \frac{\pi^2 B h}{G_3 \pi^2 R^2} = \frac{B h}{G_3 R^2}, \alpha_n = \frac{n \pi R}{a}, \quad (10)$$

и, предполагая, что корни  $\beta_i$  будут комплексными, функцию  $f_1(y)$  запишем в виде

$$F = \{ \cos(\gamma \varphi_1) C_1 \rho_1^y + \sin(\gamma \varphi_1) C_2 \rho_1^y + \cos(\gamma \varphi_1) C_3 \rho_1^y - \sin(\gamma \varphi_1) C_4 \rho_1^y + \cos(\gamma \varphi_2) C_5 \rho_2^y + \sin(\gamma \varphi_2) C_6 \rho_2^y + \cos(\gamma \varphi_2) C_7 \rho_2^y - \sin(\gamma \varphi_2) C_8 \rho_2^y \} \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right). \quad (11)$$

Здесь

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{r}{s}, \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{d}{c}, \rho_1 = \left| \sqrt{s^2 + r^2} \right|, \rho_2 = \left| \sqrt{c^2 + d^2} \right|,$$

где  $s$  и  $c$  – действительные, а  $r$  и  $d$  – комплексные корни характеристического уравнения (9).

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$\Psi = f_2(y) \cos \frac{n \pi}{a} x. \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в уравнение (3), получаем дифференциальное уравнение для определения функции  $f_2(y)$ . Решая это уравнение, получаем

$$f_2(y) = C_9 \cos(\beta y) + C_{10} \sin(\beta y). \quad (13)$$

Здесь

$$\beta = \frac{a^2}{n^2 \pi^2} - \frac{R^2 (\mu - 1) k_0}{2}.$$

Принимая для каждого участка свои оси координат, располагаем начало координат в начале каждого участка (это показано для  $k+1$  участка, который находится между  $k$ -ым и  $(k+1)$ -ым ребром) и обозначим  $f_1(y)$  в начале и в конце участка (при  $y = 0$  и  $y = b_1$ , где  $b_1$  – расстояние между ребрами) через  $\eta_k$  и  $\eta_{k+1}$ ,

значение  $f_1^{II}(y)$  через  $\mu_k$  и  $\mu_{k+1}$ , значение  $f_1^{IV}(y)$  через  $\zeta_k$  и  $\zeta_{k+1}$ , значение  $f_1^{VI}(y)$  через  $\xi_k$  и  $\xi_{k+1}$ , значение  $f_2'(y)$  через  $\varphi_k$  и  $\varphi_{k+1}$ .

Используя эти условия, выразим через них значения произвольных постоянных  $C_i$  решений (11) и (12), которые определяются из системы уравнений (14):

$$\begin{aligned} \eta_k &= C_1^k + C_3^k + C_5^k + C_7^k, \\ \mu_k &= (C_1^k + C_3^k)(p_5^2 - \varphi_1^2) + (C_5^k + C_7^k)(p_6^2 - \varphi_2^2) + 2(C_2^k - C_4^k)p_5\varphi_1 + \\ &\quad + 2(C_6^k - C_8^k)p_6\varphi_2, \\ \zeta_k &= (C_1^k + C_3^k)(p_5^4 - 6p_5^2\varphi_1^2 + \varphi_1^4) + (C_5^k + C_7^k)(p_6^4 - 6p_6^2\varphi_2^2 + \varphi_2^4) + \\ &\quad + (C_2^k - C_4^k)(4p_5^3\varphi_1 - 4p_5\varphi_1^3) + (C_6^k - C_8^k)(4p_6^3\varphi_2 - 4p_6\varphi_2^3), \\ \xi_k &= (C_1^k + C_3^k)(p_5^6 - 15p_5^4\varphi_1^2 + 15p_5^2\varphi_1^4 + \varphi_1^6) + (C_5^k + C_7^k)(p_6^6 - 15p_6^4\varphi_2^2 + \\ &\quad + 15p_6^2\varphi_2^4 + \varphi_2^6) + (C_2^k - C_4^k)(6p_5^5\varphi_2 - 20p_5^3\varphi_1^3 + 6p_5\varphi_1^5) + (C_6^k - \\ &\quad - C_8^k)(6p_6^5\varphi_2 - 20p_6^3\varphi_2^3 + 6p_6\varphi_2^5), \\ \varphi_k &= \beta C_{10}, \\ \eta_{k+1} &= ((C_1^{k+1} + C_3^{k+1})p_1 + (C_5^{k+1} + C_7^{k+1})p_2)\rho_1^{h_1} + \\ &\quad + ((C_5^{k+1} + C_7^{k+1})p_3 + (C_5^{k+1} + C_7^{k+1})p_4)\rho_2^{h_2}, \\ \mu_{k+1} &= (C_1^{k+1} + C_3^{k+1})\rho_1^{h_1}(p_1(p_5^2 - \varphi_1^2) - 2p_5p_2\varphi_1) + \\ &\quad + (C_5^{k+1} + C_7^{k+1})\rho_2^{h_2}(p_3(p_6^2 - \varphi_2^2) - 2p_6p_4\varphi_2) + \\ &\quad + (C_2^{k+1} - C_4^{k+1})\rho_1^{h_1}(p_2(p_5^2 - \varphi_1^2) + 2p_5p_1\varphi_1) + \\ &\quad + (C_6^{k+1} - C_8^{k+1})\rho_2^{h_2}(p_4(p_6^2 - \varphi_2^2) + 2p_6p_3\varphi_1), \\ \zeta_{k+1} &= (C_1^{k+1} + C_3^{k+1})\rho_1^{h_1}(p_1(p_5^4 - 6p_5^2\varphi_1^2 + \varphi_1^4) + 4p_2(\varphi_1^3p_5 - \varphi_1p_5^3)) + \\ &\quad + (C_5^{k+1} + C_7^{k+1})\rho_2^{h_2}(p_3(p_6^4 - 6p_6^2\varphi_2^2 + \varphi_2^4) + 4p_4(\varphi_2^3p_6 - \varphi_2p_6^3)) + \\ &\quad + (C_2^{k+1} - C_4^{k+1})\rho_1^{h_1}(p_2(p_5^4 - 6p_5^2\varphi_1^2 + \varphi_1^4) + 4p_1(\varphi_1p_5^3 - \varphi_1^3p_5)) + \\ &\quad + (C_6^{k+1} - C_8^{k+1})\rho_2^{h_2}(p_4(p_6^4 - 6p_6^2\varphi_2^2 + \varphi_2^4) + 4p_3(\varphi_2p_6^3 - \varphi_2^3p_6)), \\ \xi_{k+1} &= (C_1^{k+1} + C_3^{k+1})\rho_1^{h_1}(p_1(p_5^6 - 15p_5^4\varphi_1^2 + 15p_5^2\varphi_1^4 - \varphi_1^6) + p_2(20p_5^3\varphi_1^3 - 6p_5^5\varphi_1 - 6p_5\varphi_1^5)) + \\ &\quad + (C_5^{k+1} + C_7^{k+1})\rho_2^{h_2}(p_3(p_6^6 - 15p_6^4\varphi_2^2 + 15p_6^2\varphi_2^4 - \varphi_2^6) + p_4(20p_6^3\varphi_2^3 - 6p_6^5\varphi_2 - 6p_6\varphi_2^5)) + \\ &\quad + (C_2^{k+1} - C_4^{k+1})\rho_1^{h_1}(p_2(p_5^6 - 15p_5^4\varphi_1^2 + 15p_5^2\varphi_1^4 - \varphi_1^6) + p_1(-20p_5^3\varphi_1^3 + 6p_5^5\varphi_1 + 6p_5\varphi_1^5)) + \\ &\quad + (C_6^{k+1} - C_8^{k+1})\rho_2^{h_2}(p_4(p_6^6 - 15p_6^4\varphi_2^2 + 15p_6^2\varphi_2^4 - \varphi_2^6) + p_3(-20p_6^3\varphi_2^3 + 6p_6^5\varphi_2 + 6p_6\varphi_2^5)), \\ \varphi_{k+1} &= C_9\beta\sin(\beta b_1) + \varphi_k \cos(\beta b_1). \end{aligned} \quad (14)$$

В уравнениях (14) использованы условные обозначения

$$\cos b_1\varphi_1 = p_1, \quad \sin b_1\varphi_1 = p_2, \quad \sin b_1\varphi_2 = p_4, \quad \cos b_1\varphi_2 = p_3,$$

$$\log \rho_1 = p_5, \quad \log \rho_2 = p_6.$$

При рассмотрении  $(k-1)$ -го участка начало координат располагаем в конце и направляем ось  $y$  в противоположную сторону. Тогда на этом участке  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$  будут иметь тот же самый вид, что и выражения (6) и (13), а произвольные постоянные будут определяться из системы уравнений (14), если в ней заменить  $\eta_{k+1}$ ,  $\mu_{k+1}$ ,  $\zeta_{k+1}$ ,  $\xi_{k+1}$ ,  $\varphi_{k+1}$  на  $\eta_{k-1}$ ,  $\mu_{k-1}$ ,  $\zeta_{k-1}$ ,  $\xi_{k-1}$ ,  $\varphi_{k-1}$ .

Условия по линии  $k$ -го ребра с учетом различных направлений осей  $y$  для смежных участков, полученные из вариационного уравнения [2], запишем в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_{y=+0} &= \frac{B_p}{2B(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \mu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}\right)_{y=0}, \\ (V_\alpha)_{y=+0} &= (V_\alpha)_{y=0}, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{y=+0} &= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{y=0}, \\ \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=+0} &= \\ &= -\left[\frac{D_p}{D^*} \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2\right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{P_p}{D^*} \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right]_{y=0}, \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{y=0} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

С учётом выражений (4), подставляя в систему уравнений (15) решения (9) и (11), будем иметь систему уравнений, в которой произвольные постоянные  $C_i^{k+1}$  и  $C_i^{k-1}$  определяются по выражениям (14).

В задаче обозначено  $\delta_i = \frac{F_p}{2\delta b}$ ,  $\gamma = \frac{D_p}{D^* b}$ ,  $F_p$  – площадь ребра,  $D_p$  – изгибная жесткость ребра.

Неизвестные  $\eta_k, \mu_k, \zeta_k, \xi_k$  и  $\varphi_k$ , входящие в эту систему, должны удовлетворять условиям периодичности решения, которые имеют вид

$$\eta_k = \eta_{k+m}, \mu_k = \mu_{k+m}, \zeta_k = \zeta_{k+m}, \xi_k = \xi_{k+m}, \varphi_k = \varphi_{k+m}, \quad (16)$$

где  $m$  – количество ребер.

Решение последней системы уравнений ищем в виде

$$\begin{aligned} \eta_k &= A \sin \frac{2\pi s k}{m}, \mu_k = B \sin \frac{2\pi s k}{m}, \zeta_k = C \sin \frac{2\pi s k}{m}, \\ \xi_k &= M \sin \frac{2\pi s k}{m}, \varphi_k = E \sin \frac{2\pi s k}{m}, \end{aligned} \quad (17)$$

при этом должны удовлетворяться граничные условия (16).

Подставляя выражения (17) в последнюю систему уравнений и учитывая, что

$$\sin \frac{2\pi s(k+1)}{m} + \sin \frac{2\pi s(k-1)}{m} = 2 \sin \frac{2\pi s k}{m} \cos \frac{2\pi s}{m},$$

получим систему однородных уравнений относительно неизвестных  $A, B, C, M$  и  $E$ , которая не зависит от номера  $k$ .

Приравнявая к нулю определитель, составленный из коэффициентов при  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  и  $E$ , получаем уравнение устойчивости трёхслойной круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой регулярными продольными ребрами жесткости.

Разрешая это уравнение относительно параметра жесткости  $\gamma$ , получаем зависимость между  $\gamma$  и отношением длины оболочки  $a$  к её радиусу  $R$ . В качестве примера была рассмотрена оболочка, подкреплённая одним и тремя ребрами жесткости (рисунки 2 и 3). Задача была решена, также, и без учета краевого эффекта Рейснера, приняв  $\psi=0$ . В этом случае вместо уравнений (1), (2) и (3) будем иметь только два уравнения (1) и (2) (на рисунках эти зависимости показаны пунктирной линией).

$$k_0=0,1; 0,2; 0,3; m_t=1; \\ \alpha^2=5; m=1$$

$$k_0=0,1; 0,2; 0,3; m_t=3; \\ \alpha^2=5; m=1$$

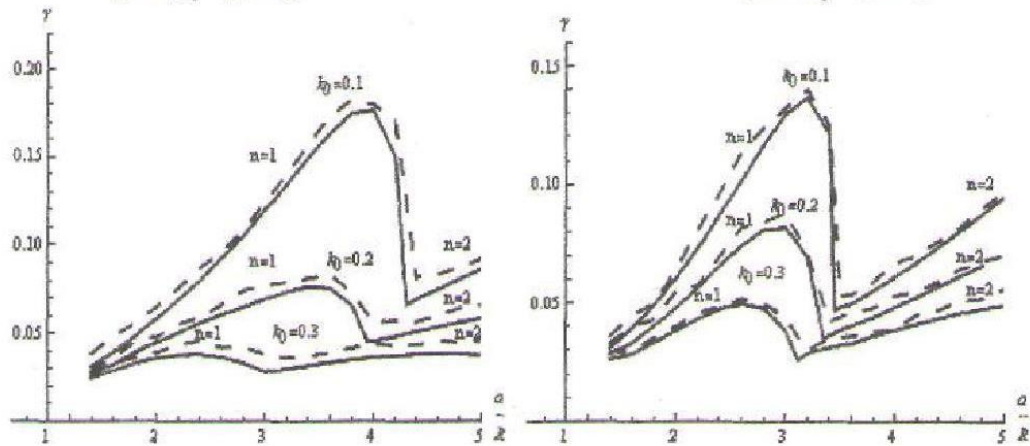


Рисунок 2 – Графики зависимости между  $\gamma$  и отношением линейных размеров оболочки  $\frac{a}{R}$ , подкреплённой одним ребром жесткости

$$k_0=0,1; 0,2; 0,3; m_t=1; \\ \alpha^2=5; m=3$$

$$k_0=0,1; 0,2; 0,3; m_t=2; \\ \alpha^2=5; m=3$$

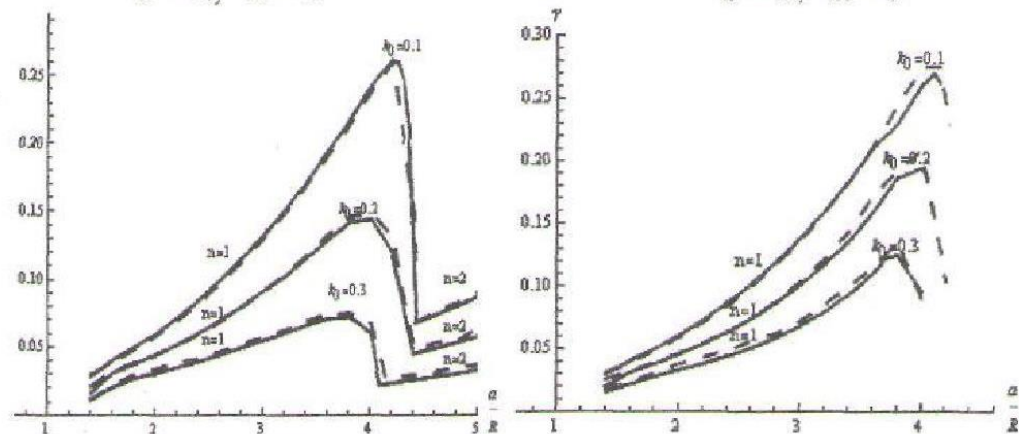


Рисунок 3 – Графики зависимости между  $\gamma$  и отношением линейных размеров оболочки  $\frac{a}{R}$ , подкреплённой тремя ребрами жесткости

Значение параметра критических сил  $m_t$  определяется решением трансцендентного уравнения устойчивости.

Если задать значение параметра критических сил  $m_t$ , то можно определить значение параметра жесткости  $\gamma$  (рисунки 2 и 3). А если  $\gamma$  известно, то изгибную жесткость ребра можно выразить, как  $D_p = \gamma D^* b$ .

#### Библиографический список

1. Александров, А. Я. Расчет трехслойных панелей [Текст] / А. Я. Александров, А. Э. Брюккер, Л. М. Куршин, А. П. Прусаков. — М. : Оборонгиз, 1960. — 271 с.

2. Кириченко, В. Л. Дифференциальные уравнения устойчивости трехслойной пологой оболочки с легким наполнителем, подкрепленной ребрами жесткости [Текст] / В. Л. Кириченко, Т. А. Емельянова // Вестн. Херсон. гос. техн. ун-та. — 1999. — № 3 (6). — С. 248-251.

#### References

1. Aleksandrov, A. Y. Design of a three-layer panels [Text] / A. Y. Aleksandrov, A. E. Brjukker, L. M. Kurshin, A. P. Prusakov. — M. : Oborongiz, 1960. — 271 p.

2. Kirichenko, V. L. Differential equations of stability of a three-layer slope shell with light aggregate reinforced by ribs of rigidity [Text] / V. L. Kirichenko, T. A. Yemelyanova // Bulletin of the Kherson State Technical University. — 1999. — N 3 (6). — P. 248-251.

Херсонский государственный аграрный университет

Ст. преподаватель кафедры физики и общеинженерных дисциплин Емельянова Татьяна Анатольевна

Украина, г. Херсон; e-mail: tanyua@rambler.ru

Kherson State Agricultural University

Senior Teacher of Dept. of Physics and Engineering Subject Yemelyanova Tatyana Anatolyevna

Ukraine, Kherson; e-mail: tanyua@rambler.ru