

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

ст. преп. Емельянова Т. А.,
д. т. н., проф. Сурьянинов Н. Г.,
к. т. н., ст. преп. Чучмай А. М.

Украина, Одесса, Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ARTICLE INFO

Received 11 April 2018
Accepted 03 May 2018
Published 12 May 2018

KEYWORDS

three-layer shell,
lightweight aggregate,
free vibrations,
stiffeners,
force function,
displacement function,
frequency equation,
parameter of the first
oscillation frequency

© 2018 The Authors.

ABSTRACT

The paper deals with the construction of a computational model and the development of an algorithm for investigating free oscillations of a three-layered shallow shell with a lightweight core supported by regular transverse stiffeners. The variational equation of transverse oscillations of a three-layer shell of a symmetrical structure reinforced by ribs is obtained, taking into account the action of longitudinal forces in the median planes of the outer layers and ribs. Kirchhoff-Love hypotheses are accepted for the outer bearing layers in the envelope, and for the filler, the linear law of tangential displacements in thickness is adopted. Transverse deformations of the aggregate were not taken into account. For the edges Bernoulli's hypotheses are accepted, and only the bending of the ribs in the vertical plane was taken into account. With the help of the limiting transition, conditions are obtained for the edge lines without considering the shear deformations in the edges. The values of the parameter of the first frequency of free oscillations of a three-layered shallow shell with a lightweight core supported by one and three transverse stiffeners are given.

Введение. Трехслойные оболочки, находят широкое применение во многих отраслях, в том числе, и в промышленном и гражданском строительстве. Такая оболочка состоит из двух внешних достаточно тонких слоев, изготовленных из прочного материала, между которыми помещен толстый слой материала с невысокой прочностью и малым объемным весом. Внешние слои называются несущими, внутренний слой — заполнителем.

Трехслойные конструкции отличаются по типу заполнителя, материалу несущих слоев, виду соединения. Легкими заполнителями могут служить пенопласт, сотовый заполнитель, гофры (одиночные или двойные), трубчатый заполнитель и т.п.

Использование трехслойной конструкции позволяет повысить прочностные и деформационные свойства оболочек, рационально использовать механические свойства материала.

Как известно [1], решение задачи о свободных колебаниях имеет фундаментальное значение, поскольку позволяет решить многие другие проблемы динамики. Особую роль играет информация о первой частоте свободных колебаний. Задача о колебаниях трехслойной оболочки без подкреплений ребрами рассматривалась многими авторами. Отметим работы [2–4], а также более поздние публикации [5–9]. Работ, посвященных колебаниям трехслойных оболочек, подкреплённых ребрами жесткости [10–12], крайне мало.

Целью данной работы является построение расчетной модели и разработка алгоритма исследования свободных колебаний трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем, которая подкреплена поперечными ребрами жесткости при шарнирном закреплении кромок.

Результаты исследования. Рассмотрим трехслойную пологую оболочку симметричного строения с легким заполнителем, подкреплённую поперечными ребрами одинаковой жесткости (рис. 1).

Вариационным путем, с использованием функционала-действия по Остроградскому–Гамильтону, получены дифференциальные уравнения [10] изгибных колебаний участка оболочки, расположенного между ребрами с учетом действия продольных сил в срединных плоскостях внешних слоев и ребрах:

$$\nabla^4 \Phi + \frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\phi - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \phi \right) = 0, \quad (1)$$

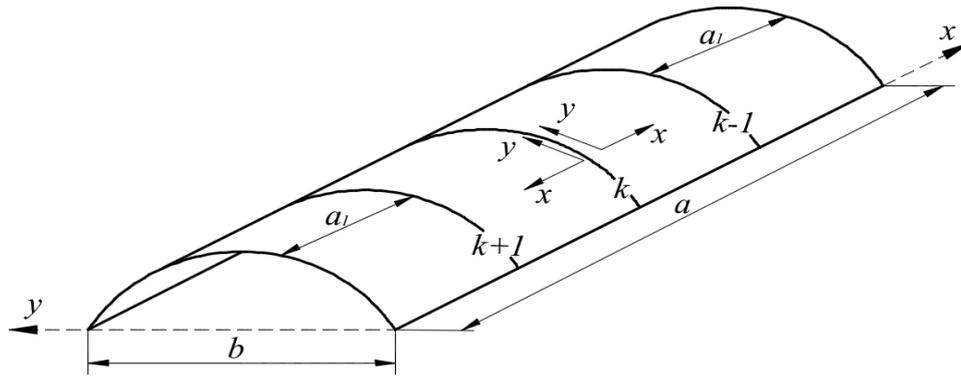


Рис. 1. Схема трехслойной полой оболочки, подкрепленной поперечными ребрами

$$\nabla^4 \phi - \frac{1}{BD^*} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - m_{oo} \omega^2 \left(\phi - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \phi \right) = 0, \tag{2}$$

$$\Psi - \frac{1-\mu}{2G_3} Bh \nabla^2 \Psi = 0, \tag{3}$$

где $B = \frac{E\delta}{1-\mu^2}$; $D = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)}$;

δ — толщина внешних слоев;

$2h$ — толщина внешних слоев и заполнителя;

G_3 — модуль сдвига заполнителя;

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона внешних слоев.

При выводе уравнений предполагалось, что заполнитель легкий, а ребра имеют одинаковую жесткость в одном направлении и расположены на одинаковых расстояниях. Для внешних несущих слоев оболочки принимались гипотезы Кирхгофа-Лява, а для заполнителя — линейный закон изменения тангенциальных перемещений по толщине. Поперечные деформации заполнителя не учитывались. Для ребер приняты гипотезы Бернулли, и учитывался только изгиб ребер в вертикальной плоскости.

Систему уравнений (1) и (2) можно решить, если ввести в рассмотрение функцию $F(x, y)$ [11] и принять

$$\phi = \nabla^4 F; \quad \Phi = -\frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) F. \tag{4}$$

Окончательно систему уравнений (1) и (2) можно привести к одному разрешающему уравнению:

$$\nabla^4 \nabla^4 F + \frac{\bar{B}}{R^2 D^*} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) F - \frac{\omega^2 m_{oo}}{D^*} \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) \nabla^4 F = 0. \tag{5}$$

Разрешающее уравнение (5) применим для построения расчетной модели и разработки алгоритма исследования свободных колебаний трехслойной полой оболочки, которая подкреплена поперечными ребрами жесткости.

Решение уравнений (3) и (4) для участка оболочки, замкнутого между ребрами, ищем в виде

$$F = f_1(x) \sin \frac{\pi}{b} y; \quad \Psi = f_2(x) \cos \frac{\pi}{b} y. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3) и (4), запишем решение уравнений в виде

$$F = \sin \frac{\pi y}{b} \left((\cos(x\phi_1)(C_1 + C_3) + \sin(x\phi_1)(C_2 - C_4)) \rho_1^x + (\cos(x\phi_2)(C_5 + C_7) + \sin(x\phi_2)(C_6 - C_8)) \rho_2^x \right); \tag{7}$$

$$\psi = (C_9 \cos(\beta x) + C_{10} \sin(\beta x)) \cos \frac{\pi y}{b}. \tag{8}$$

Здесь $tg\phi_1 = \frac{r}{s}$; $tg\phi_2 = \frac{d}{c}$; $\rho_1 = \left| \sqrt{s^2 + r^2} \right|$; $\rho_2 = \left| \sqrt{c^2 + d^2} \right|$; s, c — действительные, r, d — комплексные корни характеристического уравнения

$$\lambda^8 + k_0 \left(m_\omega - \frac{\pi^2 \alpha^2}{b^2} \right) \lambda^6 + \frac{\pi^2}{b^4} \left[\pi^2 (2 + \alpha^2) - b^2 m_\omega + k_0 (\pi^2 \alpha^2 - b^2 m_\omega) \right] \lambda^4 + \frac{\pi^4}{b^4} k_0 m_\omega \lambda^2 + \frac{\pi^6}{b^8} \left[\pi^2 - b^2 (1 + k_0) m_\omega \right] = 0, \tag{9}$$

где $k_0 = \frac{\pi^2 B h}{G_3 b^2}$; $\alpha^2 = \frac{\bar{B} b^4}{R^2 D^* \pi^4}$.

Считая, что на кромках оболочки имеются диафрагмы, граничные условия для случая свободного опирания запишем в форме:

при $x = 0, a$ $w = \frac{\partial u_\beta}{\partial x} = v_\beta = v_\alpha = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$; (10)

при $y = 0, b$ $w = \frac{\partial v_\beta}{\partial y} = u_\beta = u_\alpha = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$. (11)

Принимая для каждого участка свои оси координат, расположим их в начале участка и обозначим значения $f_1(x)$ в начале и в конце участка через η_k и η_{k+1} , значения f_1'' — через μ_k и μ_{k+1} , значения f_1^{IV} — через ζ_k и ζ_{k+1} , значения f_1^{VI} — через ξ_k и ξ_{k+1} , значения f_2'' — через ϕ_k и ϕ_{k+1} .

Используя эти условия, выражаем через них значения произвольных постоянных решений (7) и (8), которые определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \eta_k &= C_1^k + C_3^k + C_5^k + C_7^k; \\ \mu_k &= (C_1^k + C_3^k)(p_5^2 - \phi_1^2) + (C_5^k + C_7^k)(p_6^2 - \phi_2^2) + 2(C_2^k - C_4^k)p_5\phi_1 + 2(C_6^k - C_8^k)p_6\phi_2; \\ \zeta_k &= (C_1^k + C_3^k)(p_5^4 - 6p_5^2\phi_1^2 + \phi_1^4) + (C_5^k + C_7^k)(p_6^4 - 6p_6^2\phi_2^2) + \\ &\quad + (C_2^k - C_4^k)(4p_5^3\phi_1 - 4p_5\phi_1^3) + (C_6^k - C_8^k)(4p_6^3\phi_2 - 4p_6\phi_2^3); \\ \xi_k &= (C_1^k + C_3^k)(p_5^6 - 15p_5^4\phi_1^2 + 15p_5^2\phi_1^4 - \phi_1^6) + (C_5^k + C_7^k)(p_6^6 - 15p_6^4\phi_2^2 + 15p_6^2\phi_2^4 - \phi_2^6) + \\ &\quad + (C_2^k - C_4^k)(6p_5^5\phi_1 - 20p_5^3\phi_1^3 + 6p_5\phi_1^5) + (C_6^k - C_8^k)(6p_6^5\phi_2 - 20p_6^3\phi_2^3 + 6p_6\phi_2^5); \\ \phi_k &= -\beta^2 C_9; \\ \eta_{k+1} &= ((C_1^{k+1} + C_3^{k+1})p_1 + (C_2^{k+1} - C_4^{k+1})p_2)\rho_1^{a_1} + ((C_5^{k+1} + C_7^{k+1})p_3 + (C_6^{k+1} - C_8^{k+1})p_4)\rho_2^{a_1}; \\ \mu_{k+1} &= (C_1^{k+1} + C_3^{k+1})(\rho_1^{a_1}(p_1(p_5^2 - \phi_1^2) - 2p_2p_5\phi_1)) + (C_2^{k+1} - C_4^{k+1})(\rho_1^{a_1}(p_2(p_5^2 + \phi_1^2) + 2p_1p_5\phi_1)) + \\ &\quad + (C_5^{k+1} + C_7^{k+1})(\rho_2^{a_1}(p_3(p_6^2 - \phi_2^2) - 2p_4p_6\phi_2)) + (C_6^{k+1} - C_8^{k+1})(\rho_2^{a_1}(p_4(p_6^2 + \phi_2^2) + 2p_3p_6\phi_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_{k+1} &= (C_1^{k+1} + C_3^{k+1}) \left(\rho_1^{a_1} \left(p_1 (p_5^4 - 6p_5^2 \phi_1^2 + \phi_1^4) - 4p_2 p_5 \phi_1 (p_5^2 + \phi_1^2) \right) \right) + \\
 &+ (C_2^{k+1} - C_4^{k+1}) \left(\rho_1^{a_1} \left(p_2 (p_5^4 + 6p_5^2 \phi_1^2 + \phi_1^4) + 4p_1 p_5 \phi_1 (p_5^2 - \phi_1^2) \right) \right) + \\
 &+ (C_5^{k+1} + C_7^{k+1}) \left(\rho_2^{a_1} \left(p_3 (p_6^4 - 6p_6^2 \phi_2^2 + \phi_2^4) - 4p_4 p_6 \phi_2 (p_6^2 + \phi_2^2) \right) \right) + \\
 &+ (C_6^{k+1} + C_8^{k+1}) \left(\rho_2^{a_1} \left(p_4 (p_6^4 + 6p_6^2 \phi_2^2 + \phi_2^4) + 4p_3 p_6 \phi_2 (p_6^2 - \phi_2^2) \right) \right); \\
 \xi_{k+1} &= (C_1^{k+1} + C_3^{k+1}) \left(\rho_1^{a_1} \left(p_2 p_5 (p_5^5 - 6p_5^4 \phi_1 - 20p_5^2 \phi_1^3 - 6\phi_1^5) + p_2 (p_5^6 - 15p_5^4 \phi_1^2 + 15p_5^2 \phi_1^4 - \phi_1^6) \right) \right) + \\
 &+ (C_2^{k+1} - C_4^{k+1}) \left(\rho_1^{a_1} \phi_1 \left(p_1 \phi_1 (15p_5^4 + 15p_5^2 \phi_1^2 - \phi_1^4) + p_1 (6p_5^5 - 20p_5^3 \phi_1^2 + 6p_5 \phi_1^4) \right) \right) + \\
 &+ (C_5^{k+1} + C_7^{k+1}) \left(\rho_2^{a_1} \left(p_4 p_6 (p_6^5 - 6p_6^4 \phi_2 - 20p_6^2 \phi_2^3 - 6\phi_2^5) + p_4 (p_6^6 - 15p_6^4 \phi_2^2 + 15p_6^2 \phi_2^4 - \phi_2^6) \right) \right) + \\
 &+ (C_6^{k+1} + C_8^{k+1}) \left(\rho_2^{a_1} \phi_2 \left(p_3 \phi_2 (15p_6^4 + 15p_6^2 \phi_2^2 - \phi_2^4) + p_3 (6p_6^5 - 20p_6^3 \phi_2^2 + 6p_6 \phi_2^4) \right) \right); \\
 \phi^{k+1} &= \cos(\beta a_1) \phi^k - \beta^2 \sin(\beta a_1) C_{10}^{k+1} C_{10}^k.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

В уравнениях (12) обозначено:

$$\cos(a_1 \phi_1) = p_1; \quad \cos(a_1 \phi_2) = p_3; \quad \sin(a_1 \phi_1) = p_2; \quad \sin(a_1 \phi_2) = p_4; \quad \log \rho_1 = p_5; \quad \log \rho_2 = p_6.$$

При рассмотрении (k - 1)-го участка начало координат принимаем на его конце и направляем ось x в противоположную сторону. Тогда для него $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будут иметь такой же вид, как и на k-м участке, а произвольные постоянные (обозначим их через C_1^{k-1}) будут определяться из (12), если в них заменить $\eta_{k+1}, \mu_{k+1}, \zeta_{k+1}, \xi_{k+1}, \phi_{k+1}$ на $\eta_{k-1}, \mu_{k-1}, \zeta_{k-1}, \xi_{k-1}, \phi_{k-1}$.

Условия по линии k-го ребра с учетом разных направлений осей x для сопредельных участков, которые получены из вариационного уравнения [1], запишем в виде

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right)_{x=+0} + \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right)_{x=-0} = \\
 &= \frac{B_{pk}}{B} \left[\frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) - \mu \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) \right]_{x=0}; \\
 &\int \left[\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) - \mu \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) \right]_{x=+0} dx = \\
 &= - \int \left[\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) - \mu \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) \right]_{x=-0} dx; \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^4 F + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{x=+0} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^4 F + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{x=-0}; \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^6 F \right)_{x=+0} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^6 F \right)_{x=-0} = - \left\{ \frac{D_{pk}}{D^*} \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) \frac{\partial^4}{\partial y^4} \nabla^4 F + \right. \\
 &+ \left. \frac{B_{pk}}{B} \frac{\bar{B}}{D^* R^2} \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) - \mu \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) \right] - \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) \frac{P_p}{D^*} \nabla^4 F \right\}_{x=0}; \\
 &\left[-\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{Bh}{G_3} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^6 F \right]_{x=+0} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\text{Здесь } \gamma = \frac{D_{pk} \pi^4}{b^4 D^*}.$$

Подставляя в (13) решения уравнений (7) и (8), будем иметь систему уравнений, где значения произвольных постоянных C_i^{k-1} и C_i^{k+1} определяются выражениями (12).

Решение этой системы ищем в виде

$$\eta_k = A \sin \frac{k\pi}{m}; \mu_k = B \sin \frac{k\pi}{m}; \zeta_k = C \sin \frac{k\pi}{m}; \xi_k = M \sin \frac{k\pi}{m}; \phi_k = E \sin \frac{k\pi}{m}. \tag{14}$$

Неизвестные $\eta_k, \mu_k, \zeta_k, \xi_k, \phi_k$, которые входят в эту систему, должны удовлетворять условиям периодичности решений:

$$\eta_0 = \mu_0 = \zeta_0 = \xi_0 = \phi_0 = \eta_m = \mu_m = \zeta_m = \xi_m = \phi_m = 0. \tag{15}$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при А, В, С, М, Е, получим частотное уравнение для трехслойной полой оболочки, которая подкреплена регулярными поперечными ребрами жесткости, при шарнирном опирании кромок.

Параметр первой частоты свободных колебаний находим, решая трансцендентное частотное уравнение. В табл. 1–4 представлены значения параметра первой частоты свободных колебаний m_ω полой оболочки, которая подкреплена одним и тремя ребрами жесткости. Значение m_ω определялось как с учетом краевого эффекта Рейсснера (верхняя строчка таблицы), так и без учета (нижняя строчка таблицы). Если положить в частотном уравнении $k_0 = 0$, получим частотное уравнение для однослойной подкрепленной оболочки (с изгибной жесткостью $D^* = 2BH^2$).

Таблица 1. Значение параметра m_ω для оболочки, подкрепленной одним ребром жесткости

$\frac{a}{b}$	$\gamma = 1 \alpha' = 5$			$\gamma = 2 \alpha' = 5$			$\gamma = 3 \alpha' = 5$		
	k_0			k_0			k_0		
	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
1,0	7,591	6,969	6,434	7,591	6,969	6,434	7,591	6,969	6,434
	7,588	6,961	6,424	7,585	6,958	6,421	7,584	6,956	6,421
2,0	7,591	6,969	6,434	7,591	6,969	6,434	7,591	6,969	6,434
	7,578	6,953	6,411	7,576	6,947	6,410	7,575	6,947	6,409
3,0	7,591	6,969	6,434	7,591	6,969	6,434	7,591	6,969	6,434
	7,570	6,942	6,399	7,570	6,940	6,396	7,567	6,935	6,395

Таблица 2. Значение параметра m_ω для оболочки, подкрепленной одним ребром жесткости

$\frac{a}{b}$	$\gamma = 1 \alpha' = 10$			$\gamma = 2 \alpha' = 10$			$\gamma = 3 \alpha' = 10$		
	k_0			k_0			k_0		
	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
1,0	7,082	6,458	5,923	7,082	6,458	5,923	7,082	6,458	5,923
	7,047	6,418	5,881	7,042	6,413	5,876	7,037	6,408	5,878
2,0	7,082	6,458	5,923	7,082	6,458	5,923	7,082	6,458	5,923
	7,000	6,365	5,823	6,991	6,356	5,813	6,983	6,345	5,801
3,0	7,082	6,458	5,923	7,082	6,458	5,923	7,082	6,458	5,923
	6,965	6,330	5,775	6,965	6,324	5,775	6,955	6,320	5,770

Таблица 3. Значение параметра m_ω для оболочки, подкрепленной тремя ребрами жесткости

$\frac{a}{b}$	$\gamma = 1 \alpha' = 5$			$\gamma = 2 \alpha' = 5$			$\gamma = 3 \alpha' = 5$		
	k_0			k_0			k_0		
	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
1,0	7,594	6,969	6,433	7,594	6,969	6,433	7,594	6,969	6,433
	7,589	6,961	6,426	7,588	6,961	6,427	7,586	6,957	6,429
2,0	7,594	6,969	6,433	7,594	6,969	6,433	7,594	6,969	6,433
	7,581	6,972	6,418	7,582	6,951	6,417	7,577	6,951	6,410
3,0	7,594	6,969	6,433	7,594	6,969	6,433	7,594	6,969	6,433
	7,572	6,942	6,409	7,578	6,946	6,398	7,568	6,937	6,396

Таблица 4. Значение параметра m_ω для оболочки, подкрепленной тремя ребрами жесткости

$\frac{a}{b}$	$\gamma = 1 \alpha^2 = 10$			$\gamma = 2 \alpha^2 = 10$			$\gamma = 3 \alpha^2 = 10$		
	k_0			k_0			k_0		
	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
1,0	7,083	6,456	5,924	7,083	6,456	5,924	7,083	6,456	5,924
	7,062	6,439	5,897	7,087	6,433	5,886	7,077	6,442	5,910
2,0	7,083	6,456	5,924	7,083	6,456	5,924	7,083	6,456	5,924
	7,058	6,436	5,895	7,079	6,415	5,878	7,088	6,426	5,874
3,0	7,083	6,456	5,924	7,083	6,456	5,924	7,083	6,456	5,924
	7,043	6,419	5,874	7,064	6,412	5,863	7,057	6,402	5,849

Выводы. Как показали проведенные исследования, деформации сдвига в ребрах оказывают незначительное влияние на частоту свободных колебаний. При определении частот свободных колебаний краевой эффект Рейсснера также оказывает незначительное влияние при любых значениях параметра сдвига k_0 .

С увеличением числа ребер, частота свободных колебаний почти не изменяется, и дальнейшее увеличение числа ребер не приводит к увеличению частоты данной формы колебаний. Увеличение соотношения сторон оболочки также практически не изменяет частоты свободных колебаний.

С увеличением параметра сдвига k_0 , частоты свободных колебаний уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкості руху / М. В. Василенко, О. М. Алексейчук - К.: Вища шк., 2004. - 525 с.
2. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. - М.: Машиностроение - 1973. - 172 с.
3. Григолюк Э. И., Кассихин В. Н. Осесимметричные свободные колебания круговых трехслойных пластин // Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек: сборник научных трудов под ред. Э. И. Григолюка. - 1981. - С. 185 - 195.
4. Григолюк Э. И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин/ Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. - М.: Машиностроение, 1988. - 288 с.
5. Филиппов С. Б. Колебания тонкой трехслойной цилиндрической оболочки / С. Б. Филиппов, Н. В. Наумова, Д. Н. Иванов. - Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2007. - Вып. 2. - С. 150-156.
6. Старовойтов Э. И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Ю. М. Плещачевский. - Механика машин, механизмов и материалов. - М., 2013. - № 4 (25). Спецвыпуск. - С.70-73.
7. Соломонов Ю. С. Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов / Ю. С. Соломонов, В. П. Георгиевский, А. Я. Недбай, В. А. Андришин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 264 с.
8. Бабич Д. В. О частотном спектре колебаний неоднородных цилиндрических оболочек / Д. В. Бабич // Прикл. механика. - 1995. - Т. 31, № 10. - С. 67-72.
9. Латанская Л. А. Математическое моделирование динамики вынужденных колебаний конструктивно неоднородных трехслойных оболочек вращения / Л. А. Латанская, В. А. Каиров // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. - Дніпропетровськ: Ліра. - 2012. - Вип.19. - С. 205-211.
10. Емельянова Т. А. Дифференциальные уравнения свободных колебаний трехслойной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. Теоретическая и прикладная механика: сборник научных трудов. - Минск: УП «Технопринт», 2002. - С.169 - 181.
11. Емельянова Т. А. Розв'язуюче рівняння вільних коливань тришарової циліндричної оболонки, яка підкріплена ребрами жорсткості. «Вісник» Херсонського національного технічного університету. Херсон, 2016. - №2(57). - С.11 - 17
12. Кириченко В. Л., Емельянова Т. А. Вільні коливання тришарової пологої циліндричної панелі з легким заповнювачем, яка підкріплена прямолінійними ребрами жорсткості. Состояние современной строительной науки 2007: Сборник научных трудов V Международной научно - практической Интернет-конференции, Полтава, 2007. - Полтава: Полтавский ЦНТЭИ, 2007. - С.24 - 28.