МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДВНЗ «ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

Інструктивно - методичні матеріали до практичних робіт з навчальної дисципліни « Вища математика » для студентів 1 курсу спеціальностей 205 - «Лісове господарство» і 206 - «Садово-паркове господарство» факультету рибного господарства та природокористування (денна форма навчання).

Херсон – 2017

Автори

Г.М Кавун - старший викладач кафедри прикладної математики та економічної кібернетики

Рецензент *В.І.Кузьмич* - завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри прикладної математики та економічної кібернетики від 28 серпня 2017 року протокол № 1.

Тема заняття. Визначники другого та третього порядку та їх властивості
Мета роботи

Визначення. Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця $m \cdot n$ чисел, що містить m рядків і n стовпців

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Величини a_{ij}, з яких складена матриця, називаються *елементами матриці.* У записі a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}. Для короткого позначення матриці вживають заголовні латинські літери: A або $A_{m\times n}$.

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців $(m = n)$, називається *квадратною,* а число $m = n$ – її *порядком.*

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

У квадратній матриці елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ,* а елементи $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ – *побічну діагональ.*

Визначення. *Визначник* матриці – це число, яке ставиться у відповідність квадратній матриці (1). Найчастіше позначають так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

або $\det A$ (від латинського слова *determinant* – визначник, визначальний), інколи – $[A]$, Δ.

Зауваження. Визначник першого порядку – це сам елемент

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

Основні властивості визначників

1. Величина визначника не зміниться, якщо його *рядки (або стовпці)* поміняти ролями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановці двох *рядків (або стовпців)* визначник змінює знак на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Загальний множник елементів якого-небудь *рядка (або стовпця)* може бути винесений за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C\cdot a_{i1} & C\cdot a_{i2} & \dots & C\cdot a_{ij} & \dots & C\cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = C\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. Якщо всі елементи *деякого рядка (або стовпця)* дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Якщо елементи двох *рядків (або стовпців)* визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C\cdot a_{11} & C\cdot a_{12} & \dots & C\cdot a_{1j} & \dots & C\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Наслідок. Якщо визначник має *<u>два однакових рядка (або стовпця)</u>*, то він дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів *<u>одного рядка (або стовпця)</u>* додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне й те саме число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda\cdot a_{11} & a_{i2}+\lambda\cdot a_{12} & \dots & a_{ij}+\lambda\cdot a_{1j} & \dots & a_{in}+\lambda\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначення. *Мінором* M_{ij} для елемента a_{ij} визначника (2) n-го порядку називається визначник порядку $(n-1)$, отриманий із (2) викреслюванням i-того рядка та j-того стовпця.

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначення. *Алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij} визначника (2) називається мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$ і позначається

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 1. Визначник *n*-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \tag{3}$$

$$\left(\text{або } |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \right).$$

Звідси випливає наступний алгоритм обчислення визначників вищих порядків розкладанням за елементами *i*-го рядка (стовпця).

Загальний алгоритм обчислення визначника *n*-го порядку:

1. За формулою (3) отримуємо суму добутків елементів якогось рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення – визначники ($n-1$)-го порядку.
2. Визначники ($n-1$)-го порядку за теоремою 1 розкладаємо на визначники ($n-2$)-го порядку і т.д.
3. Процес продовжуємо до 1 порядку.

Зауваження 1. Найчастіше визначник розкладають по елементам першого рядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

При $n = 2, 3$ з формули (4) випливають наступні твердження.

1. *Визначником другого порядку* називається число, що обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (5)$$

Таким чином, щоб обчислити визначник другого порядку, треба з добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі:

2. *Визначником третього порядку* називається число, що обчислюється наступним чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Визначники другого порядку знаходимо за правилом (5). Згрупувавши окремо додатні та від'ємні добутки, отримаємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (7)$$

Формула (7) називається правилом Саррюса або *правилом трикутника*:

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити визначник третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно теореми 1 розкладемо цей визначник по елементам першого стовпця. Маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2A_{11} + 3A_{12} + (-4)A_{13} = 2 \cdot (1)^{1+1} \cdot M_{11} + 3 \cdot (1)^{1+2} \cdot M_{12} - 4 \cdot (1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(4 \cdot 2 - (-3) \cdot 5) - 3(5 \cdot 2 - (-3) \cdot 6) - 4(5 \cdot 5 - 4 \cdot 6) =$$

$$= 2(8 + 15) - 3(10 + 18) - 4(25 - 24) = 2 \cdot 23 - 3 \cdot 28 - 4 \cdot 1 = -42.$$

Відповідь: $\Delta = -42$.

Питання для перевірки знань

1. Що таке визначник?
2. Як визначається мінор для будь-якого елемента визначника *n*-го порядку?
3. Що називається алгебраїчним доповнення елемента?
4. Перелічити властивості визначників.
5. Як обчислити визначник *n*-го порядку?

Індивідуальні завдання

1.Обчислити визначники другого порядку:

$$1)\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} \quad 2)\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \quad 3)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} \quad 4)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$$

2.Обчислити визначники третього порядку за правилом трикутника:

. $$1)\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$. $$2)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

. $$3)\begin{vmatrix} -5 & 7 & 6 \\ -3 & -7 & -4 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$. $$4)\begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 \\ -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

. $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -7 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$ 0. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

1. $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$ 2. $$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$ 4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 0. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & -2 \end{vmatrix}$ 0. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$

Список рекомендованої літератури

1. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М: Наука, 1984. – 320 с.
2. Вища математика: Зб. задач: У 2ч. Ч.1./ За заг. ред. Овчинникова П.П. – К.: Техніка, 2003. – 279 с.
3. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. / Рудавський Ю.К. та ін. – Львів: Вид.-во „Бескид Біт”, 2002. – 256 с.
4. Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
5. Ким Г.Д., Шикин Е.В. Элементарные преобразования в линейной алгебре. – М: Наука, 1981. – 52 с.
6. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
7. Чарін В.С. Лінійна алгебра. – К. Техніка, 2005. – 416 с.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). – М: Наука, 1969. – 432 с.

Заняття 1

Тема. Функціональна залежність. Границі функції.

Мета. Навчити студентів розкривати різні види неозначеностей.

Студент повинен знати основні теореми про границі та використовувати їх при обчисленні границь.

Ці знання використовуються при побудові графіків функцій і розв’язуванні диференціальних рівнянь.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Функції, їх властивості. Область визначення та область значень функцій.
2. Границя числової послідовності та її властивості.
3. Границя функцій та її властивості.
4. Розкриття неозначеностей: $\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{\infty}{\infty}\right];[\infty-\infty]$.
5. Перша і друга чудові границі.

Теоретичні передумови до заняття.

Число **А** наз. <u>*границею функції*</u> $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого числа $\epsilon \succ 0$ можна вказати таке $\delta \succ 0$, що для будь-якого x, яке задовольняє нерівність $0 \prec |x-a| \prec \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| \prec \epsilon$.

Позначається $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ або $f(x) \to A, x \to a$.

Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$, то існує також і границя їх суми яка дорівнює сумі границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Теореми про границі.

Доказ. Нехай

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ тоді $\lim\limits_{x\to a}\left[\left(f(x)+g(x)\right) - (A+B)\right] = \lim\limits_{x\to a}\left[\left(f(x) - A\right) + \left(g(x) - B\right)\right] = 0$

Тому, $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = A + B = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$, то існує також і границя їх добутку, яка дорівнює добутку границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Доказ. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B,$ та $f(x) - A = \beta(x), x \to a$

$g(x) - B = \gamma(x), x \to a$,

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[\left(A + \beta(x)\right)\cdot\left(B + \gamma(x)\right)\right] = \lim_{x\to a} A\cdot B + \lim_{x\to a} A\cdot\gamma(x) + \lim_{x\to a} B\cdot\beta(x) +$$

$$+\lim_{x\to a}\beta(x)\cdot\gamma(x) = A\cdot B + 0 + 0 + 0 = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

Якщо існують границі функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ і границя функції $g(x)$ відмінна від 0, то існує також і границя відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, яка дорівнює відношенню границь функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Сталий множник можна винести за знак границі:

$$\lim_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right] = k\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\cdot x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\cdot(2x+1)}{(x-3)\cdot(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{7}{5}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$$

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2 + 7x - 2}{3 - 2x - 2x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{5x^2}{x^2} + \dfrac{7x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{2x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5 + \dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x} - 2} = \dfrac{5+0-0}{0-0-2} = -\dfrac{5}{2}$

Перша важлива границя:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1$$

Приклад 3. $\lim_{x\to 0} x\cdot ctg3x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos 3x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 3x=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

Друга важлива границя:

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\ \approx 2{,}17$, e - наз. Основою натурального логарифму.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Приклад4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}=(1)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+1)-1-1}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{3x+1}\cdot\frac{x+1}{2}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{3x+1}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

Варіанти індивідуальних завдань.

1. Знайти область визначення функцій.

$a)\,y=\dfrac{4+x}{3-x};\ б)\,y=\sqrt{4-x^2};\ в)\,y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x};\ г)\,y=\lg\dfrac{x}{3};\ д)\,y=\lg(3x-1)+2\lg(x+1).$

2. Визначити, яка із даних функцій парна чи непарна.

$a)\,y=\dfrac{x^2+1}{x^4+2};\ б)\,y=2\sin x;\ в)\,y=x^2+5x;\ г)\,y=x^2+\sqrt[3]{x}.$

3. Знайти границі функції:

1. а) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-7x+1}{5x-4x^2}$; б) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; в) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{4x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. а) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{14x^8-x^3+2x^2}{7x^6-1}$; б) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$; в) $\lim_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{8x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{x}$.

3. а) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+7x^2-2}{6x^3-4x^2+3}$; б) $\lim_{x\to -4}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$; в) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg2x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

4. а) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^3+3}{x+4x^3+x^2}$; б) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}$; в) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x}{ctg3x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{5x}\right)^{x}$

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. Що називається функцією від змінної х?
2. Що називається областю визначення і областю значень функції?
3. Яка функція називається складною?

4. Що називається границею змінної величини х?
5. Що називається границею функції?
6. Які функції називаються нескінченно малими і нескінченно великими?
7. Основні теореми про границі функції.
8. Як розкрити неозначеність $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$?
9. Перша і друга важливі границі.

Знайти границі функції:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^8-x^3+2x^2}{12x^6-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x^2-4x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{14}{3x}\right)^x$

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-2}{6x^3-4x^2+32}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-7x+2}{2x^2-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{2x}\right)^x$

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^8-x^3+2x^2}{2x^6-12}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^3-27}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^x$

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+8x-7}{6x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x$.

Заняття 2

Тема. Похідна функції. Екстремум.
Мета. Навчитись знаходити похідну функції використовуючи правила і теореми диференціювання; точки екстремуму; будувати графіки функції за схемою дослідження.

Студент повинен обчислювати похідну складної функції та будувати графіки функції за схемою.

Знаходження похідної функції використовується при розв’язуванні диференціальних рівнянь і при вивченні теорії ймовірностей.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Таблиці похідних основних елементарних функцій.
2. Похідна простої та складної функції.
3. Дослідження функції, побудова графіка.

Теоретичні передумови до заняття.

Похідною (або похідною першого порядку, першою похідною) функції $y = f(x)$, $x \in X$, в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля.

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Позначення похідної: $f'(x)$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Процес знаходження похідної називають диференціюванням.

Таблиця похідних основних елементарних функцій.

1. $C' = 0$
2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}, n \neq 0$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$
5. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, a > 0$, $\left(e^x\right)' = e^x, x \in R$
6. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x}\log_a e, a > 0, a \neq 1, x > 0$, $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, x > 0$
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$
8. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$
9. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$
10. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in z$
11. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
12. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, -1 < x < 1$
13. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
14. $\left(arcctg\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, x \in R$

Правила диференціювання:

1) Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$(cf)' = c(f)'$

2) Похідна суми (різниці) декількох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

3) Похідна добутку двох функцій дорівнює: $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

4) Похідна частки, за умови, що знаменник, не дорівнює нулю, дорівнює:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}, g \neq 0.$$

Похідна складної функції.

Нехай $y = f(u)$, де $u=\varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ – внутрішньою, або проміжним аргументом. Якщо $y = f(u)$ і $u=\varphi(x)$ – диференційовані функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x = f'u \cdot u'x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

Методичні рекомендації до виконання завдань

Продиференціювати подані функції:

Приклад 1.

$$y = 3x^2 + \ln x + 3 \quad y' = (3x^2)' + (\ln x)' + (3)' = 3(x^2)' + \frac{1}{x} + 0 = 3 \cdot 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$$

Приклад 2. $y = \sin x \cdot x^3$

$$y' = (\sin x)' \cdot x^3 + (x^3)' \cdot \sin x = \cos x \cdot x^3 + 3x^2 \cdot \sin x$$

Приклад 3. $y' = \dfrac{(x^2+3)}{(x^2-3)}$

$$y' = \frac{(x^2+3)' \cdot (x^2-3) - (x^2-3)' \cdot (x^2+3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x \cdot (x^2-3) - 2x \cdot (x^2+3)}{(x^2-3)^2} = \frac{2x^3 - 6x - 2x^3 - 6x}{(x^2-3)^2} = \frac{-12x}{(x^2-3)^2}$$

Приклад 4. Знайти похідну складної функції $y = tg2x$. Зовнішня функція $y = tg(u)$, внутрішня $a = 2x$.

$$y' = (tg(2x))' \cdot (2x)' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2.$$

Варіанти індивідуальних завдань.

I. Знайти у$'$ для заданої функції:

1. а) $y = 3x^4 - 8x^2 + 3x$; б) $y = e^{5x} \sin x + 5^x - 1$.

2. а) $y = x^2 \cdot e^x + 7^x + 5$; б) $y = \frac{\sin x}{x^4} + \arcsin 2x$.

3. а) $y = \frac{x^2 + 3}{e^x}$; б) $y = x^2 \cdot \sin 3x + 5e^{4x}$.

4. а) $y = 6x^3 - 17x + 1$; б) $y = \frac{\cos 5x}{x^2} + e^{3x}$.

5. а) $y = arctg3x + x^3 \cdot \cos x + 7$; б) $y = \frac{\sin x}{x^2} + e^{2x}$.

II. Дослідити на максимум і мінімум функції:

1.$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$

2.$y = x^3 - 3x + 3$

III. Дослідити функції та побудувати її графік:

1.$y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 32x + 1$

2.$y = x^3 - 9x^2 + 4$

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. Що називається похідною функції $y = f(x)$?
2. Який фізичний зміст похідної?
3. Який геометричний зміст похідної?
4. Напишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
5. Сформулюйте правила диференціювання функцій.
6. Чому дорівнює похідна складної функції?
7. Яка функція називається зростаючою (спадною) на інтервалі?

8. Яка точка називається точкою максимуму функції?
9. Яка точка називається точкою мінімуму функції?
10. Що називається екстремумом функції?

I. Знайти y' для заданої функції:

1. а) $y = x^2 \cdot \sin 3x + 5$; б) $y = \frac{e^x}{x^4} + arctgx$.

2. а) $y = arctg 4x + e^x \cdot x^3$; б) $y = \frac{\sin x}{x^2} + 3^x$.

3.а) $y = 3x^4 - 8x^2 + 7x$; б) $y = x^3 \cos 3x + e^{5x} - 7$.

4. а) $y = \frac{\sin x}{x^2} + 4^x$; б) $y = x^5 \cdot \cos 3x + e^x - 7$.

5.а) $y = 6x^2 - 8x + 3\ln x$; б) $y = x^2 \arcsin x + e^{3x} - 7$.

II. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1.$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

2.$y = \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + 17$

Заняття 3.

Тема. Невизначений та визначений інтеграли. Диференціальні рівняння.
Мета. Навчити знаходити невизначені та визначені інтеграли використовуючи правила і теореми інтегрування.

Студенти повинні уміти використовувати визначений інтеграл для обчислення площ та об’ємів, розв’язувати прості диференціальні рівняння.

Обчислення інтегралів широко використовується при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Таблиця основних інтегралів.
2. Обчислення невизначених інтегралів, використовуючи властивості, правила та основні теореми інтегрування.
3. Обчислення визначених інтегралів за допомогою формули Ньютона – Лейбніца.
4. Обчислення площ плоских фігур в прямокутній системі координат.

Теоретичні передумови до заняття.

Сукупність первісних для функції *f (x)* або для диференціала *f (x)dx* називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x)dx = F(x) + C$, якщо $d\,[F(x) + C] = f(x)dx$.

$\int$ - символ інтеграла;

f(x) - підінтегральна функція;

f (x) dx - підінтегральний вираз;

С - довільна стала невизначеного інтеграла;

Формули інтегрування основних елементарних функцій.

1. $\int du = u + c$

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \, (n \neq -1)$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + c$

4. $\int a^n du = \frac{a^n}{\ln a} + c$

5. $\int e^u du = e^u + c$

6. $\int \sin u du = -\cos u + c$

7. $\int \cos u du = \sin u + c$

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + c$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$

10. $\int \mathrm{tg} u du = -\mathrm{ctg} u + c$

11. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln|\sin u| + c$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin u + c$

13. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctgu + c$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + c$

16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + u}{a - u}\right| + c$

Для обчислення визначеного інтеграла від функції *f (x)* в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл F*(X)* використовують формулу Ньютона - Лейбніца, тобто визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної при верхній і нижній межах інтегрування.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння *F(x,y,y') = 0* або *y' = f (x,y)* називається така функція *y* = φ *(x,C)*, яка при довільному значенні параметра С є розв'язком цього рівняння. Рівняння *Ф(x,y,C)* = О, яке визначає загальний розв'язок як неявну функцію, називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1.

Знайти невизначені інтеграли:

$$\int \frac{dx}{36+x^2} = \int \frac{dx}{6^2+x^2} = \frac{1}{6} arctg \frac{x}{6} + c.$$

Приклад 2.

$$\int \left(\sin 5x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

Приклад 3.

$$\int \left(\sin 5x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \sin 5x dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + \arcsin x + c$$

Варіанти індивідуальних завдань.

I. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int (3x^2 - 6x + 9) dx$; 2. $\int \left(\frac{1}{x^2} + 6x - 3x^3 \right) dx$; 3. $\int \left(\frac{14}{x^3} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$ .4. $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \cos 3x \right) dx$.

5. $\int (\cos x + e^{3x} + 3) dx$ .6. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \sin 4x \right) dx$. .7. б) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + e^{3x} + 3 \right) dx$ .8. $\int \left(\frac{3}{x^2-4} + e^{5x} \right) dx$.

9. $\int \left(\frac{4}{9+x^2} + \sin 3x \right) dx$;

10. $\int \left(x\sqrt[3]{x} - \frac{8}{\sqrt[5]{x}} \right) dx$

11. $\int \left(x^2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

II. Знайти площу фігури, обмежену лініями:

1. $y = x^2 + 4x; y = x + 4$

2. $y = -x^2 + 9; y = 2x + 1$

III. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. $y = x^2 + 2x$ 2. $y' = 8x^3 + 5$. 3. $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$. 4. $y' = \sin 2x$ .5. $y \cdot y' = x^3$.

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. Що називається первісною для функції f(x)?
2. Що називається невизначеним інтегралом?
3. Властивості невизначеного інтеграла.
4. Формули інтегрування основних елементарних функцій.
5. Що називається визначеним інтегралом від функції?
6. Які властивості має визначений інтеграл?
7. Формула Ньютона-Лейбніца?

8. Яке рівняння називається диференціальним?

9. Що називається загальним і частинним розв'язком диференціального рівняння?

I. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int\left(3x^2-9x+7\right)dx$. 2. $\int(6x^2-8x^3+9)dx;$; 3. $\int\left(\frac{4}{x^6}+\frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$. 4. $\int\left(\frac{3}{x^2-9}+e^{3x}\right)dx$.

5. $\int\left(\frac{1}{x^2}+9x-4x^3\right)dx$; 6. $\int\left(\frac{4}{16+x^2}+\cos 3x\right)dx$; 7. $\int\left(\sin 2x+e^{2x}+3\right)dx$;

8. $\int\left(x\sqrt{x}+\frac{5}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx$; 9. $\int\left(x^3\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$.

II. Обчислити площу фігури обмежену лініями:

1. $y=2x-x^2, x+y=0$

2. $y=3x^2+1, y=3x+7$

3. $y'=tgx$.

III. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 2. $y'=\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$. 3. $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$. 4. $y'=3e^{3x}$.

Список рекомендованої літератури:

1. К.Г. Валєєв «Вища математика». Навчальне - методичний посібник. Київ 2002.

2. І.П.Васильченко «Вища математика». Підручник. Київ 2000.

3. Т.В.Ковальчук, В.Є.Мартиненко «Вища математика для економістів». Підручник. Київ2005.

4.В.А.Засуха, В.П.Лисенко «Прикладна математика». Підручник. Київ 005.

5. Н.С.Пискунов «Дифференциальное й интегральное исчисление». Москва 1972.

б.И.И.Лихолетов «Высшая математика». Минск 1976

7. В.А.Кудрявцев, В.П.Демидович «Краткий курс высшей математики».

Заняття 4

Тема. Елементи комбінаторики. Класичне та статистичне поняття ймовірності події та їх розв’язок.

Мета. Навчити обчислювати ймовірностей випадкових подій, використовуючи формули комбінаторики.

Студент повинен знати основні правила та формули комбінаторики, уміти безпосередньо обчислювати формули комбінаторики.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Основні формули комбінаторики: перестановки; розміщення та сполуки.
2. Види подій. Безпосереднє обчислення випадкових подій за означенням.

Теоретичні передумови до заняття.

Число перестановок із n елементів, яке позначається символом P_n, дорівнює:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Будемо також вважати, що $0! = 1$

Число розміщень із n елементів по m елементів, яке позначається символом A_n^m, знаходиться за формулою:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Число сполук із n елементів по m елементів, яке позначається символом C_n^m, дорівнює:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Із означень розміщень і сполук випливає, якщо із даних n елементів відібрати яких небудь m елементів, то отримана підмножина буде сполукою, якщо цю підмножину із m елементів впорядкувати. То отримаємо розміщення. Справедливі співвідношення:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

$$C_m^k + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1}$$

Біномом Ньютона називається формула виду $(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot a + C_n^2 x^{n-2} \cdot a^2 + C_n^3 x^{n-3} \cdot a^3 + \ldots + C_n^n a^n$

Ймовірність випадкової події A, згідно означення, знаходиться за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

де m – число елементарних наслідків, сприятливих подій A, n – число можливих елементарних наслідків.

<u>Відносною частотою події</u> A називають відношення числа іспитів, в яких подія A з'являється, до загального числа проведених іспитів:

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. Скількома способами можна розмістити на полиці 6 книжок?

Розв'язок. Одне розміщення книг на полиці буде відрізнятися від другого тільки порядком їх розміщення, тому шукане число способів дорівнює числу способів впорядкування множини, яка містить 6 елементів, тобто числу перестановок із 6 елементів.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Приклад 2.Скільки двозначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо числа у запису двохзначного числа не повторюються?
Розв'язок. За умовою із 6 цифр треба скласти числа, які складаються із двох цифр. Так як двозначні числа відрізняються не тільки складом, а і порядком цифр його запису, то їх число буде дорівнювати числу розміщень із 6 елементів по два елемента.

$$N = A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$$

Приклад 3. Бригадир повинен відправити на роботу бригаду із 5 робітників. Скільки бригад по 5 робітників в кожній можна скласти із 12 робітників?
Розв'язок. Із бригади в 12 робітників виділяється бригада із 5 робітників. В якому порядку будуть перераховані прізвища 5 робітників не має різниці, бригади вважають різними, якщо вони відрізняються хоча б однією людиною-множина із 5 робітників не являється впорядкованим, отже число способів скласти бригаду дорівнює число сполук із 12 елементів по 5 елементів.
Приклад 4. В коробці є 3 червоних, 4 зелених і 8 синіх кульок. Навмання послідовно дістають 3 кульки. Яка ймовірність того, що третя витягнута кулька буде зеленою, якщо перші 2 червоні?
Розв'язок. Після того як із коробки дістають 2 червоні кульки, в ній залишається 1 червона кулька, 4 зелених і 8 синіх кульок, всього 13 кульок. Отже, $m=4$; $n=13$ і $P(A)=\frac{4}{13}$.

Приклад 5. В партії із 50 бетонних плит 5 нестандартних. На машину грузять навмання 4 плити. Яка ймовірність того, що серед них 3 стандартні?
Розв'язок. Так як кожний набір із 4 плит відрізняється хоча б однією плитою, то число можливих наборів дорівнює $m = C_{45}^3 \cdot C_5^1$.
Нехай А- шукана подія, то:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{45}^3 \cdot C_5^1}{C_{50}^4} = \frac{1419}{4606} = 0.31.$$

Приклад 6. Кидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок буде рівно 7?

Розв'язок. Гральний кубик може впасти шістьма різними способами. Кожний із них комбінується з шістьма способами падання другого кубика. Отже, загальне число можливих елементарних наслідків дорівнює 6.6 = 36. Число наслідків, відповідно 1 і 6; 2 і 5; 3 і 4; 4 і 3; 5 і 2; 6 і 1 очок, тобто всього 6 наслідків.

Варіанти індивідуальних завдань.

1. Скількома способами можна скласти із 18 різних квітів букет так, щоб в нього входило 5 квіток?
2. Аудиторська фірма має 4 вакантних посади у своїх філіалах. Є 10 претендентів на ці посади. Скільки існує способів заповнювання цих посад?
3. Керуючий транспортною фірмою повинен скласти маршрути для своїх водіїв. Маємо шість покупців, куди повинен бути доставлений вантаж. Скільки можна скласти маршрутів почергового відвідування покупців?

4. Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не будуть повторюватись?
5. Скільки різних бригад для обслуговування гідротехнічного спорудження в складі 3-х чоловіків і 2-х жінок можна скласти із 18 робітників, серед яких 6 жінок?
6. Із 1000 видів продуктів, які доставлені у супермаркет, 400 доставлені фірмою A, 350-фірмою B і 250 - фірмою C. З метою перевірки якості продукції навмання вибирається один із продуктів. Яка ймовірність, що цей продукт вироблений: а) фірмою A ?; б) фірмою C?.
7. Дано карточки із буквами А, Т, М, Р, С, О. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих карточок утвориться слово «ТРОС».
В читальному залі є 6 підручників з теорії ймовірностей, з яких 3 в м'якому переплеті. Бібліотекар взяв 2 підручники. Знайти ймовірність того, що обидва підручники будуть в м'якому переплеті.
8. В ящику лежить 20 електричних лампочок, з яких 2 нестандартні. Знайти ймовірність того, що взяті одна за другою дві лампочки виявляться стандартними.
9. Серед 25 студентів групи, в якій 10 дівчат, розігрується 5 білетів. Визначити ймовірність того, що серед власників білетів виявиться дві дівчини.
10. В групі спортсменів: 20 бігунів, 15 велосипедистів, 10 лижників. Яка ймовірність того, що навмання викликаний спортсмен – бігун?

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. Що називається розміщенням із п елементів по т?
2. Сполучення та властивості сполучень.
3. Що називається перестановками?
4. Біном Ньютона.
5. Види подій.
6. Сформулювати класичне означення ймовірності?
7. Що називається статистичною ймовірністю?
8. Властивості ймовірностей.

1. При маркетинговому дослідженні просять зробити дегустацію 5 різних сортів чаю і назвати три кращі в порядку спадання. Скільки існує способів вибору трьох кращих сортів?

2. Абонент забув 2 останні цифри номера телефону, пам'ятаючи лише, що вони різні. Скільки максимально прийдеться абоненту набирати номер телефону, щоб додзвонитися?

3. Книга має 206 сторінок. Яка ймовірність відкриття сторінки, номер якої закінчується цифрою 5?

4. Із 6 карточок з буквами Р, Е, М, О, Н, Т. Вибирають навмання чотири. Яка ймовірність того, що взяті підряд 4 карточки складуть слово „МОРЕ”?

6. Серед 25 фірм, з яких 10 українських, а інші російські, розігрується 5 урядових контрактів. Вважається, що кожна фірма має рівні шанси на отримання контракту. Знайти ймовірність того, що контракт виграють дві українські фірми.

7. В конкурсі газети беруть участь 12 чоловіків і 8 жінок. Мається два призових місця. Знайти ймовірність того, що обидва місця займуть чоловіки.

8. Номер телефону складається з шести цифр. Яка ймовірність того, що цифри будуть різними?

9. Із 60 питань, які включаються в екзаменаційні білети студент підготував 50. яка ймовірність того, що на взятий навмання білет, складений із 2 – х питань, студент дає правильну відповідь?

10. В коробці є 5 кубиків, на яких написано по одній літері: А, И, К, Г, Н. Їх дістають послідовно. Яка ймовірність одержати слово «КНИГА»?

11. Із 200 робітників норму не виконує 15 чоловік. Знайти ймовірність того, що два випадково відібраних робітники не виконають норму.

Заняття 5

Тема. Безпосереднє обчислення ймовірностей. Класичне та статистичне поняття ймовірності події та їх розв'язок.

Мета. Навчити обчислювати ймовірностей випадкових подій, використовуючи формули комбінаторики.

Студент повинен знати основні правила та формули комбінаторики, уміти безпосередньо обчислювати ймовірність події використовуючи класичне та статистичне означення ймовірностей, формули комбінаторики та означення ймовірностей.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Основні формули комбінаторики: перестановки; розміщення та сполуки.
2. Види подій. Безпосереднє обчислення ймовірностей випадкових подій за означенням та використанням формул комбінаторики.

.

Приклади розв'язку типових задач

Задача1. В партії із 50 бетонних плит 5 нестандартних. На машину грузять навмання 4 плити. Яка ймовірність того, що серед них 3 стандартні?

Розв'язок. Так як кожний набір із 4 плит відрізняється хоча б однією плитою, то число можливих наборів дорівнює: $\mathbf{n} = C_{50}^{4}$. Кількість наборів із трьох стандартних і 1 нестандартної плити дорівнює $\mathbf{m} = \mathbf{C_{45}^{3}} \cdot \mathbf{C_{5}^{1}}$

Нехай А – шукана подія, то $\mathbf{P(A)} = \dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{C_{45}^{3}} \cdot \mathbf{C_{5}^{1}}}{\mathbf{C_{50}^{4}}} = \dfrac{\mathbf{1419}}{\mathbf{4606}} = \mathbf{0{,}31}$

Задача 3. Кидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок буде рівною семи?

Розв'язок. Гральний кубик може впасти шістьма різними способами. Кожний із них комбінується із способами падання другого кубика. Отже, загальне число можливих елементарних наслідків дорівнює 6·6 = 36. Кількість наслідків, сприятливих події А (сума очок рівна семи). Сім очок отримаємо, якщо на першому і на другому кубиках буде відповідно 1 і 6, 2 і 5, 3 і 4, 4 і 3, 5 і 2, 6 і 1 очок , тобто всього 6 наслідків, отже $\mathbf{P(A)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Вправи

1**.** На збірку поступило 3000 деталей з першого станка і 2000 з другого. Перший дає 0,2% браку, а другий – 0,3%. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь із нерозібраної продукції станків, буде бракованою**.**

2. Із 60 питань, які включаються в екзаменаційні білети, студент підготував 50. Яка ймовірність того, що на взятий навмання білет, складений із 2-х питань студент дає правильну відповідь?

3.Транспортна фірма повинна доставити вантаж 4 покупцям . Фірма має 11 автомобілів, з яких 5 – нові. Знайти ймовірність того, що весь вантаж буде перевезено новими автомобілями.

4. В партії із 20 деталей є 8 нестандартних. Для перевірки беруть навмання 5 деталей. Яка ймовірність того, що в цій вибірці 2 нестандартні деталі ?

5. Серед 25 студентів,з яких 15 дівчат, розігруються 4 білети, причому кожний може виграти тільки один білет. Яка ймовірність того, що серед чотирьох володарів білетів виявляться :а) чотири дівчини; б) чотири юнаки ;в) три юнаки і одна дівчина?

6. В конкурсі газети N бере участь 12 чоловіків та 8 жінок. Мається два призових місця. Визначити ймовірність подій:

а) А (обидва місця займуть жінки); б) В (чоловік і жінка); в) С (обидва місця займуть чоловіки).

7. Вісім різних книжок розставляють на одній полиці. Знайти ймовірність того, що дві визначені книги будуть поставлені поруч на полиці.

8. Яка ймовірність того, що навмання поставлена в даному крузі точка опиниться в площині вписаного в нього квадрата?

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Як формулюють основні принципи комбінаторики?

2. Які комбінації називають перестановками, розміщенням, сполученням? Як позначають та обчислюють кількість цих сполук?

3. Визначення геометричної ймовірності.

9. Кинуто гральну кістку. Знайти ймовірність того, що випаде парна кількість очок.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

10. Цифри 1,2,3,4,5 написані на 5 картках. Навмання послідовно беруть три картки і розмішують зліва на право. Чому дорівнює ймовірність того, що отримане таким чином тризначне число буде парним?

Відповідь: $\frac{2}{5}$.

11.Серед 25 фірм, з яких 10 українських, а інші російські, розігрується 5 урядових контрактів. Вважається, що кожна фірма має рівні шанси на отримання контракту. Знайти ймовірність того, що контракт виграють дві українські фірми.

Відповідь: 0,385 .

12. У групі із 12 економістів тільки 8 мають досвід роботи у запропонованій новій галузі. Для проекту треба відібрати 4 чоловіки. В припущені, що відбір претендентів ведеться навмання, визначити ймовірність того, що в команду з чотирьох чоловіків потраплять ті, що:

а) мають досвід роботи; б) не мають досвіду роботи; в) два чоловіки мають досвід роботи, два не мають досвіду роботи.

Відповідь: а) 0,014; б) 0,002; в) 0,3394.

13. У слюсаря 10 деталей, які мало відрізняються одна від одної. Із них 4 першого, по дві другого, третього та четвертого видів. Яка ймовірність того, що серед взятих одночасно шести деталей три деталі будуть першого виду, дві – другого виду і одна третього виду?

Відповідь: $\frac{4}{105}$.

14. З урни, в якій лежать 6 білих і 4 чорних кулі, навмання взяли 3 кулі. Яка ймовірність того, що серед взятих куль будуть дві білі?

Відповідь: 0,5.

15. В круг радіуса R вписаний рівносторонній трикутник. Яка ймовірність того, що навмання поставлена в даному крузі крапка,опиниться всередині трикутника?

Відповідь: $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Заняття 6

Тема. Застосування теорем додавання і добутку ймовірностей до розв'язку задач

Мета. Навчити обчислювати ймовірностей випадкових подій, використовуючи теореми додавання та множення ймовірностей .

Студент повинен знати основні види подій, теореми додавання та множення ймовірностей, уміти безпосередньо обчислювати ймовірність події використовуючи класичне та статистичне означення ймовірностей та терем додавання та множення ймовірностей.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Види подій.
2. Безпосереднє обчислення ймовірностей випадкових подій за означенням та використанням теорем додавання та множення ймовірностей.
3. Повна група подій. Протилежні події

Програмовий матеріал. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Повна група подій. Протилежні події. Теореми множення ймовірностей незалежних і залежних подій. Умовна ймовірність. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

Теорема. Ймовірність появи однієї із двох несумісних подій, без різниці якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + (B)}$$

Повною групою подій називається сукупність попарно несумісних єдиних можливих подій випробування.

Теорема. Сума ймовірностей подій A_1, A_2,....., A_n, які утворюють повну групу, подій дорівнює одиниці.

$$\mathbf{P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1}$$

Теорема. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці

$$\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох незалежних сумісних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох залежних сумісних подій дорівнює добутку ймовірності однієї із них на умовну ймовірність другої, яка обчислену за умовою, що перша подія вже наступила.

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)}$$

Для трьох подій:

$$\mathbf{P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)}$$

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи.

$$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A \cdot B)}$$

Для трьох подій:

$$\mathbf{P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(A{\cdot}B) – P(A{\cdot}C) – P(B{\cdot}C) + P(A{\cdot} B {\cdot}C)}$$

Приклади розв’язку типових задач

Задача 1. Стрілок стріляє по мішені, яка поділена на дві області. Ймовірність попадання в першу область дорівнює 0,45, в другу 0,35. Знайти ймовірність того, що стрілок при одному пострілі влучить або в першу, або в другу область.

Розв’язок. Подія А – стрілок влучив в першу область і подія В – стрілок влучив в другу область – несумісні (попадання в одну область виключає попадання в другу), тому використаємо теорему додавання для несумісних подій. Шукана ймовірність

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,80.$$

Задача 2. Прилад складається із двох вузлів. Ймовірність безвідмовно роботи за деякий період цих вузлів відповідно дорівнює 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу за вказаний період.

Розв’язок. Подія А – перший вузол працює безвідмовно , подія В – другий вузол працює безвідмовно за вказаний період. Прилад працює безвідмовно (шукана подія С) означає, що безвідмовно працюють обидва вузла, тобто $C = A \cdot B$. Так як події А і В незалежні, то шукана ймовірність обчислюється за теоремою множення незалежних подій

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

Задача 3. В коробці є 6 білих і 4 чорних кульки. Яка ймовірність того, що обидві кульки, які достають із коробки, будуть чорними?

Розв’язок. Подія А – перша кулька чорна, подія В – друга кулька чорна. Шукана подія С – обидві кульки чорні ; $C = A \cdot B$.

Для обчислення ймовірності суміщення подій використаємо теорему множення ймовірностей залежних подій $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$;

$$P(A) = \frac{4}{10},\ P_A(B) = \frac{3}{9},\ P(C) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

Задача 4. Коефіцієнти використання робочого часу двох комбайнів відповідно дорівнюють 0,8 і 0,6. Враховуючи, що зупинки в роботі кожного комбайну виникають випадково і незалежно одна від одної, знайти ймовірність:

а) сумісної роботи комбайнів; б) роботи тільки одного комбайну; в) простою обох комбайнів; г) роботи хоча б одного комбайну.

Розв'язок. Позначимо події:

A_1 – робота першого комбайну,A_2 – робота другого комбайну.

а) подія A(сумісна робота обох комбайнів) – це суміщення подій A_1 і A_2; $A = A_1 \cdot A_2$, так як A_1, A_2 – події незалежні, то $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$.

б) подія B (робота тільки одного комбайну) має місце тоді, коли перший комбайн працює, а другий не працює або навпаки $C = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$,

де $\overline{A}_1$ – простій першого комбайну, $\overline{A_2}$ – простій другого.

Використовуючи теореми додавання і множення, обчислимо

$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,44$.

в) подія C (простій обох комбайнів) - це суміщення подій $\overline{A_1}$ і $\overline{A_2}$

$P(C) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$.

г) ймовірність події Д (робота хоча б одного комбайну) знаходиться за формулою:

1 спосіб: $P(Д) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) – P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 + 0,6 – 0,6 \cdot 0,8 = 1,4 – 0,48 = 0,92$.

2 спосіб: $P(Д) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - 0,2 \cdot 0,4 = 1 - 0,08 = 0,92$.

3 спосіб : $Д = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2$

$P(Д) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,92$.

Вправи

1. Продано 1000 білетів лотереї. На один білет випадає виграш у 500 грн.,на 10 білетів - у 100 грн. на 50 білетів - у 20 грн.,, на 100 білетів - у 5 грн.,інші білети – невиграшні. Дехто купив один білет. Знайти ймовірність того, що він виграє не менше 20 грн.

2. Відомо, що в деякому регіоні N 40% компаній мають у штаті юриста (подія A) і 80% компаній мають у штаті бухгалтера (подія B). Вважається, що подія A і B незалежні. Знайти ймовірність того, що фірма має одночасно в штаті і юриста і бухгалтера.

3. В цеху працюють 7 чоловіків і 3 жінки. За табельними номерами навмання відібрали 3-х робітників. Знайти ймовірність того, що всі відібрані робітники будуть чоловіками.

4. В двох ящиках знаходяться кульки, які відрізняються тільки кольором, при чому в першому ящику 5 білих, 11 чорних, 8 червоних кульок, а в другому відповідно 10, 8 і 6. Із обох ящиків навмання дістають по одній кульці. Яка ймовірність того, що обидві кульки одного кольору?

5. На ділянці три бригади. Ймовірність виконання плану першою бригадою дорівнює 0,8, другою – 0,85, третьою – 0,7. Знайти ймовірність виконання плану:

а) ділянкою; б) тільки однією бригадою.

6. Фірма має можливість отримати два контракти. Ймовірність отримання першого контракту складає 0,9; а другого 0,8. Вважаючи ці події не залежними, визначити ймовірність того, що фірма отримає:

а) обидва контракти; б) жодного контракту; в) щонайменше один контракт; г) не більше одного контракту .

7. Коефіцієнти використання робочого часу у 3-х тракторів відповідно дорівнюють 0,8; 0,7; 0,6. Вважаючи, що зупинки в роботі кожного трактора виникають випадково і незалежно одна від однієї, визначити ймовірність:

а) сумісної роботи усіх трьох тракторів; б) сумісної роботи двох тракторів; в) роботи тільки одного трактора; г) роботи хоча б одного трактора.

8. Ймовірність того, що необхідна книга знаходиться у фондах першої бібліотеки – 0,8; другої – 0,9; третьої – 0,7. Знайти ймовірність того, що книга знаходиться у фондах хоча б двох бібліотек.

Запитання та завдання для самоперевірки

1.Як визначають та позначають суму, добуток випадкових подій, протилежну подію, повну групу подій?

2.Які події називаються сумісними, несумісними, рівно можливими?

3.Як формулюють і якими формулами записують теореми додавання ймовірностей сумісних та несумісних подій?

4.Які випадкові події називаються незалежними?

5.Як визначають та позначають умовну ймовірність?

6.Сформулювати теореми множення ймовірностей залежних і незалежних випадкових подій.

9. Серед 50 лотерейних білетів 4 виграшних. Яка ймовірність того, що серед взятих будь-яких двох білетів обидва виявляться виграшними ?

Відповідь: 0,005.

10. Ймовірність того, що виготовлена на першому станку деталь буде першосортна, дорівнює 0,7. При виготовлені такої деталі на другому станку ця ймовірність дорівнює 0,8. На першому станку виготовлені дві деталі, а на другому - три. Знайти ймовірність того, що всі деталі першосортні?

Відповідь: 0,25.

11. Для сигналізації про аварію установлені два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії запрацює перший сигналізатор дорівнює 0,95, другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії запрацює:

а) тільки один сигналізатор; б) хоча б один сигналізатор.

Відповідь: а) 0,14; б) 0,995.

12. Радист три рази викликає кореспондента. Ймовірність прийняття першого виклику рівна 0,2, для другого виклику 0,3, для третього виклику 0,4. Знайти ймовірність установлення зв’язку.

Відповідь: 0,664.

13. Три стрілка стріляють в мішень. Ймовірність влучення для першого стрілка рівна 0,7, для другого 0,8, для третього 0,85. Знайти ймовірність того, що влучать в ціль:

а) два стрілка; б) тільки один; в) хоча б два стрілка; г) не влучить не один.

Відповідь: а) 0,407; б) 0,108; в) 0,883; г) 0,009.

14. У слюсаря є 16 деталей виготовлених заводом № 1 і 4 деталі – заводом № 2. Навмання взято дві деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна із них буде виготовлена заводом № 1.

Відповідь: $\frac{92}{95}$.

15. Схожість насіння кукурудзи складає 80%. В кожне гніздо висівається по 2 зерна. Чому дорівнює ймовірність того, що в кожному гнізді проросте хоча б одне зерно?

Відповідь: 0,96.

Заняття 7

Тема. Формула повної ймовірності

Мета. Навчити обчислювати ймовірностей випадкових подій, використовуючи формул повної ймовірності.

Студент повинен знати коли застосовують формулу повної ймовірності та формули Байєса, уміти безпосередньо обчислювати ймовірність події використовуючи формулу повної ймовірності та формули Байєса?

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Визначення повної ймовірності події, ймовірність гіпотез.
2. Формули Байєса .

Програмовий матеріал. Визначення повної ймовірності події, ймовірність гіпотез. Формула Байєса .

Формула повної ймовірності. Ймовірність події А, яка може наступити лише за умовою появи одного із несумісних подій B_1, B_2,..., B_n, які утворюють повну групу, дорівнює сумі добутку ймовірностей кожного із усіх подій на відповідну умовну ймовірність події А:

$$\mathbf{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)}$$

Формула Байэса. Якщо подія А може наступити за умовою появи одного із несумісних подій B_i, $i = 1,2,\ldots,$ **n** (гіпотез), то умовна ймовірність любої гіпотези B_i, може бути обчислена за формулою

$$\mathbf{P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{Bi}(A)}{P(A)}}$$

Приклади розв'язку типових задач

Задача 1. Партія деталей виготовлена трьома робітниками, при чому перший виготовив 25 % продукції, другий робітник – 60% продукції, третій робітник – 15% продукції . Перший робітник допускає 5% браку, другий робітник – 2%, а третій робітник – 3%. Знайти ймовірність того , що випадково вибрана деталь буде бракованою .

Розв'язок. Нехай А – подія, при якій випадково відібрана деталь буде бракованою. Можливі наступні припущення (гіпотези):

B_1 – дану деталь виготовив перший робітник;

B_2 – дану деталь виготовив другий робітник;

B_3 – дану деталь виготовив третій робітник.

$P(B_1) = 0{,}25$; $P(B_2) = 0{,}60$; $P(B_3) = 0{,}15$.

Умовна ймовірність того, що випадково відібрана деталь буде бракованою за умовою, що вона відібрана:

а) із першого ящика $P_{B1}(A) = 0{,}05$;

б) із другого ящика $P_{B2}(A) = 0{,}02$;

в) із третього ящика $P_{B3}(A) = 0{,}03$.

Використаємо формулу повної ймовірності

$P(A) =P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+ P(B_2)\cdot P_{B2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B1}(A) = 0{,}25\cdot 0{,}05+ 0{,}60\cdot 0{,}02 +0{,}15\cdot 0{,}03 = 0{,}029$

Задача 2. В першій коробці знаходиться 20 радіоламп, із них 18 стандартних, в другій коробці - 10 ламп, із них 9 стандартних. Із другої коробки навмання взяли лампу і переклали в першу. Знайти ймовірність того, що лампа, яку дістали із першої коробки, буде стандартною.

Розв'язок. Позначимо через А подію – із першої коробки дістали стандартну лампу. Із другої коробки можна дістати або стандартну лампу (подія B_1), або нестандартну (подія B_2).

Ймовірність того, що із другої коробки дістали стандартну лампу, дорівнює $P(B_1) = \frac{9}{10}$. Ймовірність того, що із другої коробки дістали нестандартну лампу, дорівнює $P(B_2)=\frac{1}{10}$. Умовна ймовірність, що із першої коробки дістали стандартну лампу, за умови, що із другої коробки в першу переклали стандартну лампу, дорівнює $P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}$. Умовна ймовірність того, що із першої коробки дістали стандартну лампу, за умови, що із другої коробки в першу переклали нестандартну лампу, дорівнює $P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}$.

Шукана ймовірність того, що із першої коробки дістали стандартну лампу, по формулі повної ймовірності дорівнює

$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B2}(A) = \frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21} = \mathbf{0{,}9}.$

Задача 3. Два автомати виготовляють однакові деталі, які поступають на один конвеєр. Продуктивність праці першого автомата вдвічі більше продуктивності другого. Перший автомат виготовляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий - 84%. Навмання взята з конвеєра деталь відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.

Розв'язок. Подія А – деталь відмінної якості. Можна зробити два припущення (гіпотези):B_1 – деталь виконана першим автоматом, $P(B_1) = \frac{2}{3}$;

B_2 – другим автоматом, $P(B_2) = \frac{1}{3}$.

Так як перший автомат виготовляє вдвічі більше деталей, умовна ймовірність того, що деталь відмінної якості, якщо вона виготовлена першим автоматом, дорівнює $P_{B1}(A) = 0{,}6$.

Умовна ймовірність того, що деталь відмінної якості, якщо вона виготовлена другим автоматом, $P_{B2}(A) = 0{,}84$.

Ймовірність того, що навмання взята деталь буде відмінної якості, по формулі повної ймовірності, дорівнює:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

Шукана ймовірність того, що взяли навмання деталь відмінної якості яка виготовлена на першому автоматі, за формулою Байєса дорівнює:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}68} \approx 0{,}59$$

Вправи

1. В трьох кошиках знаходиться картопля. В першому – 10% пошкоджених бульб, в другому – 15%, в третьому – 10%. Навмання беруть одну бульбу. Яка ймовірність того, що вона пошкоджена?

2. В групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів, 4 бігуна. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму для лижника 0,95, для велосипедиста 0,85, для бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що спортсмен, якого визвали навмання, виконає норму.

3. Економічний університет провів обстеження працевлаштування своїх випускників. Ймовірність того, що людина, яка працює у сфері бізнесу, має прибуток вище К грн.; складає – 0,9; а поза сфери бізнесу (з тим же прибутком) – 0,3. 80% працюють в сфері бізнесу. Навмання вибраний випускник університету. Визначити ймовірність того, що: а) він отримає прибуток вище К грн.; б)з’ясувалось, що він отримує прибуток вище К грн.. Яка ймовірність, що він працює у сфері бізнесу.

4. В двох ящиках знаходяться деталі. В першому ящику міститься 12 деталей, із них 1 нестандартна, в другому – 10 деталей, із них 1 нестандартна. Із першого ящика навмання взяли деталь і переклали в другий. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута деталь із другого ящика буде нестандартною.

5. Робітник обслуговує 3 станка, на яких обробляються однотипні деталі. Ймовірність браку на першому станку дорівнює 0,02,для другого – 0,05, для третього – 0,04. Обробні деталі складаються в один ящик. Продуктивність першого станка в три рази більша ніж другого, а третього в три рази менша ніж другого. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракована.

6. В піраміді 10 гвинтівок, із яких 4 з оптичним прицілом. Ймовірність того, що стрілок влучить в мішень при пострілі із гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює – 0,95, для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює – 0,8. Стрілок влучив в мішень із навмання взятої гвинтівки. Що ймовірніше: стрілок вистрілив із гвинтівки з оптичним прицілом або без нього?

7. Для участі в студентських відбірних спортивних змаганнях визначили із першої групи курсу – 4, із другої – 6, із третьої групи – 5 студентів. Ймовірність того, що студент першої, другої і третьої групи попаде в збірну університету, відповідно рівні 0,9, 0,71 і 0,8. Навмання вибраний студент в результаті змагання попав в збірну. До якої із груп ймовірніше всього належав цей студент?

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які події складають повну групу подій?Як визначають та позначають повну групу подій?

2. Коли застосовують формулу повної ймовірності та формулу Байєса?

8. Лиття в болванках поступає із двох заготовчих цехів: 70% із першого і 30% із другого. При цьому матеріал першого цеху має 10% браку, а другого – 20%. Знайти ймовірність того, що взята навмання болванка без дефектів.

Відповідь: 0,13.

9. В господарстві є 6 гусеничних тракторів і 4 колісних. Ймовірність того, що за час виконання деякої роботи гусеничний трактор не вийде з ладу, рівна 0,95, а для колісного трактора – 0,8. Для виконання деякої роботи довільно вибирається трактор. Знайти ймовірність того, що до закінчення роботи трактор не вийде з ладу.

Відповідь: 0,89.

10. Для контролю продукції із трьох партій деталей взяли для іспиту одну деталь. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь являється бракована, якщо в одній партії 2/3 деталей браковані, а в двох других – бракованих деталей немає.

Відповідь: 0,22.

11. В першому ящику міститься 20 деталей, із них 15 стандартних. В другому – 30 деталей, із них 24 стандартні, в третьому – 10 деталей, із них 6 стандартних. Знайти ймовірність того, що навмання дістали стандартну деталь із навмання взятого ящика.

Відповідь: 0,72.

12. В двох ящиках міститься по 20 деталей, причому із них в першому ящику – 17, а в другому – 15 стандартних деталей. Із другого ящика навмання дістають одну деталь і кладуть в перший. Знайти ймовірність того, що після цього навмання дістали із першого ящика стандартну деталь?

Відповідь: 0,85.

13. Компанія по страхуванню автомобілів розподіляє водіїв на три класи: клас I (малий ризик), клас II (середній ризик), клас III (великий ризик). Відомо, що з усіх застрахованих водіїв 30% належить до класу I, 45%- до класу II та 25%- до класу III. Ймовірність того, що протягом 12 місяців водій I класу потрапить хоч би в одну дорожню транспортну пригоду (ДТП) складає 0,01, для водія II класу ця ймовірність дорівнює 0,03, а для водія класу III- 0,10. Визначити ймовірність подій:

а) протягом 12 місяців водій N потрапить в ДТП (подія A);

б) відомо що водій N потрапив в ДТП. Яка ймовірність того, що він водій класу I (подія B)?

Відповідь: а) 0,0415; б) 0,072.

Заняття 8

Тема. Формула Бернуллі. Біноміальний розподіл. Найімовірніше число настання події. Формула Пуассона

Мета. Навчити студентів : обчислювати ймовірностей випадкових подій, використовуючи формулу Бернуллі, будувати графік біноміального розподілу. знаходити найімовірніше число настання події. визначати ймовірність малоймовірної події за формулою Пуассона

Студент повинен знати означення повторних незалежних випробувань, уміти безпосередньо обчислювати ймовірність події використовуючи формулу Бернуллі і Пуассона.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Формула Бернуллі. Біноміальний розподіл.
2. Найімовірніше число настання події.
3. Формула Пуассона.

Програмовий матеріал. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Біноміальний розподіл ймовірностей. Формула найімовірнішого числа настання події. Теорема Пуассона.

Ймовірність того, що в **n** незалежних випробуваннях, в кожному із яких ймовірність появи події дорівнює р ($0 < p < 1$), подія наступить рівно **m** раз, дорівнює:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m g^{\,n-m} \text{ (формула Бернуллі).}$$

Якщо $p \le 0{,}1$ (тобто подія малоймовірна) і при цьому $np \le 10$, то ймовірність того, що подія з'явиться в **n** випробуваннях рівно **m** раз, обчислюється за формулою Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}, \; a = np, \; e \approx 2{,}71828\ldots$$

Біноміальний розподіл ймовірностей – це таблиця, яка складається з двох строчок. В першій розміщені значення часток, а в другій – відповідні їм ймовірності, обчислені за формулою Бернуллі.

Найімовірніше число настання події знаходиться за формулою:

$$np - g \le m_0 \le np + p,$$

де m_0 – цілий розв'язок подвійної нерівності.

Приклади розв’язку типових задач

Задача 1. Ймовірність того, що витрати електроенергії протягом доби не перевищують норми, дорівнює $p = 0{,}75$. Знайти ймовірність того, що в наступні шість діб витрати електроенергії протягом 4-х діб не перевищать норму.

Розв’язок. Ймовірність перевитрат електроенергії дорівнює:

$g = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

Шукана ймовірність за формулою Бернуллі дорівнює:

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot g^2 = C_6^2 \cdot p^4 \cdot g^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}30$$

Задача 2. Схожість насіння дорівнює 95%. Відбирається навмання 6 зерен. Яка ймовірність того, що вони дадуть не менше 5 сходів?

Розв’язок. Події “не менше 5 сходів” відповідає наступна комбінація подій: “рівно 5 сходів” або “рівно 6 сходів”. На основі теореми додавання несумісних подій шукана ймовірність:

$P_6(m \ge 5) = P_6(5) + P_6(6)$

Ймовірності $P_6(5)$ і $P_6(6)$ визначаються за формулою Бернуллі:

$P_6(5) = C_6^5 \cdot (0{,}95)^5 \cdot (0{,}05)^1 = 6 \cdot (0{,}95)^5 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}23$

$P_6(6) = C_6^6 \cdot (0{,}95)^6 \cdot (0{,}05)^0 = 1 \cdot (0{,}95)^6 \cdot 1 \approx 0{,}73$

Отже, $P_6(m \geq 5) = 0{,}23 + 0{,}73 = 0{,}96$

Задача 3. Пристрій складається із 1000 елементів, які працюють незалежно. Ймовірність відказу любого елемента протягом часу Т дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час Т відкажуть рівно три елемента.

Розв'язок. За умовою n = 1000, p = 0,002, m = 3. Так як n велике число, а ймовірність p – мале, то скористаємося формулою Пуассона

$a = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$

$$\mathbf{P_{1000}(3)} \approx \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = \frac{4}{3} \cdot 0{,}13534 = 0{,}18.$$

Вправи

1. Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 5 навмання взятих деталей 3 виявляться стандартними.

2. В цеху є 6 моторів. Для кожного мотора ймовірність того, що він включений, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що в даний момент часу:

а) включені 4 мотора; б) включені всі мотори; в) виключені всі мотори.

3. Ймовірність того, що телевізор потребує ремонту протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну із 6 телевізорів:

а) не більше одного потребують ремонту; б) хоча б один потребує ремонту.

4. Два рівносильних противники грають в шахи. Що ймовірніше:

а) виграти одну партію із двох чи дві партії із чотирьох?

б) виграти не менше двох партій із чотирьох або не менше трьох партій із п'яти? (Нічия до уваги не береться).

5. 6% рахунків торгових підприємств дають помилки. Аудитор перевіряє 100 навмання вибраних рахунків. Якщо не виявляється жодної помилки, то рахунки підприємства далі не перевіряються. Яка ймовірність того, що в 100 рахунках буде:

а) жодної помилки; б) не більше трьох помилок?

6. Проводиться 19 пострілів із гвинтівки. Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі, дорівнює 0,8. Знайти найімовірніше число влучення в ціль.

7. Батарея зробила 6 пострілів по об'єкту. Ймовірність попадання в об'єкт при одному пострілі дорівнює 0,3. Знайти:

а) найімовірніше число влучень; б) ймовірніше найімовірнішого числа влучень; в) ймовірність того, що об'єкт буде зруйнований, якщо для цього достатньо хоча б двох влучень.

8. Ймовірність виграшу по лотереї дорівнює 1/3. Скласти біноміальний розподіл ймовірностей виграшу і побудувати полігон розподілу ймовірностей для п'яти лотерей.

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Які випробування називаються повторними і незалежними?
2. Яка послідовність випробувань утворює схему Бернуллі?
3. Ймовірність якої події обчислюють формулою Бернуллі?
4. Що називається біноміальним розподілом ймовірностей?
5. За якою формулою обчислюють найімовірніше число настання події?

9. Нехай ймовірність того, що покупцю необхідне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що із 5 перших покупців взуття цього розміру буде необхідно:

а) трьом покупцям; б) по крайній мірі одному покупцю.

Відповідь: а) 0,0729; б) 0,99999.

10. Для нормальної роботи на лінії повинно бути не менше 8 автомашин, а їх на автобазі є 10. Ймовірність невиходу кожної автомашини на лінію дорівнює 0,1. Знайти ймовірність нормальної роботи автобази.

Відповідь: 0,9335.

11. Ймовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що серед 10 деталей опиниться не менше дев'яти стандартних деталей?

Відповідь: 0,74.

12. Ймовірність того, що при 3-х випробуваннях подія наступить не менше одного разу, дорівнює 0,992. Знайти ймовірність того, що в 5 випробуваннях ця подія наступить 3 рази.

Відповідь: 0,2048.

13. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробів в дорозі рівна 0,002. Знайти ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено менше трьох виробів.

Відповідь: $P_{500}(m < 3) = 0,9197$

14. Приклад складається із п’яти незалежно працюючих елементів. Ймовірність відказу елемента в момент включення прибору дорівнює 0,2. Знайти:

а) найімовірніше число елементів, які відказали під час роботи;

б) ймовірність найімовірнішого числа елементів, які відказали під час роботи.

в) ймовірність відказу приладу, якщо для цього достатньо, щоб відказали хоча б чотири елемента.

Відповідь: а) 1; б) 0,41; в)0,0067.

15. В партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрані 4 деталі. Скласти біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини х – числа нестандартних деталей серед 4 відібраних і побудувати многокутник отриманого розподілу.

Заняття 9

Тема. Повторні незалежні випробування. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.

Мета. Навчити знаходити ймовірність події при повторних незалежних випробуваннях за допомогою локальної та інтегральної теорем Лапласа.

Студент повинен знати, при яких умовах використовуються вище названі формули та теореми при обчисленні ймовірності події.

Уміння та навики з цієї теми в подальшому використовуються при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Локальна та інтегральна теорема Лапласа.
2. Ймовірність відхилення частоти від ймовірності події.

Теоретичні передумови до заняття.

Локальна теорема Лапласа. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному із яких ймовірність появи події дорівнює $p(0 \lhd p \lhd 1)$, подія наступить рівно m ~~раз~~ (послідовність ролі не відіграє) наближено дорівнює (тим точніше, чим більше n):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npg}}\varphi(x), \text{ де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2};$$

Таблиця значень функції ф(x) для додатніх значень x приведена у додатку 1; для від'ємних - користуються цією ж таблицею: $\varphi(-x)=\varphi(x)$ і $\varphi(x \geq 4) \approx 0$.

Інтегральна теорема Лапласа. Ймовірність того, що в п незалежних випробуваннях, в кожному із яких ймовірність появи події дорівнює $p(0<p<1)$, подія поступить не менше m_1 раза і не більше m_2 раз; наближено дорівнює:

$$Pn(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \phi(z_2) - \phi(z_1), \text{ де } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}dx;$$

$$z_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npg}};\ z_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npg}}.$$

Таблиця функції Лапласа для доданих значень $x(0 \leq x \leq 5)$ приведена у додатку 2; $\phi(x>5)=0.5$, а також $\phi(-x)=-\phi(x)$ Ймовірність того, що в п незалежних випробуваннях, в кожному із яких ймовірність появи події дорівнює $p(0<p<1)$, абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від ймовірності появи події в одному випробуванні не перевищить додатнього числа є, наближено дорівнює подвоєнній функції Лапласа при :

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pg}}. \quad P(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon) = 2\phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pg}}).$$

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. Імовірність появи події в кожному із незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія наступить 1500 разів в 2100 випробуваннях.

Розв'язок. За умовою $n=2100$, $m=1500$, $p=0.7$, $q=1-0.7=0.3$. Так як $n=2100$ достатньо велике число, то скористаємося локальною теоремою Лапласа. Знайдемо значення аргументу x:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npg}} = \frac{1500 - 2100 \cdot 0.7}{\sqrt{2100 \cdot 0.7 \cdot 0.3}} = \frac{30}{21} = 1.43;$$

$\varphi(1.43)=0.1435$. Шукана ймовірність:

$$P_{2100}(1500) = \frac{1}{\sqrt{2100 \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\varphi(1.43) = \frac{0,1434}{21} = 0,007.$$

Приклад 2. При встановленому технологічному процесі фабрика випускає в середньому 70% продукції першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії із 1000 виробів число виробів першого сорту не менше 652 і не більше 760 ?
Розв'язок. Число незалежних випробувань $n=1000$ і ймовірність появи події в окремому випробуванні $p=0.7$. Шукану ймовірність знайдемо за інтегральною теоремою Лапласа.

$m_1=652$ і $m_2=760$

$$z_1=\frac{652-100\cdot 0.7}{\sqrt{1000\cdot 0.7\cdot 0.3}}=-3.31;\ z_2=\frac{760-1000\cdot 0.7}{\sqrt{1000\cdot 0.7\cdot 0.3}}=4.14;$$

$$P_{1000}\,(652\le m\le 760)=\phi(4.14)-\phi(-3.31)=\phi(4.14)+\phi(3.31)=$$
$$=0.49997+0.49966=0.99963.$$

Варіанти індивідуальних завдань.

1. Фабрика випускає 80 % продукції першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що із 400 виробів 250 будуть першосортними?
2. Ймовірність народження хлопчика рівна 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених буде 50 хлопчиків.

Ймовірність появи події в кожному із 2100 незалежних випробуваннях дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія появиться:

а) не менше 1470 і не більше 1500 разів;
б) не більше 1469 раза.

3. Ймовірність зупинки станка протягом зміни дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед 1000 станків працює:

а) від 700 до 740 станків;
б) не менше 700 станків.

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. Яка величина називається випадковою?
2. Що називається випадковою дискретною величиною?
3. Поняття закону розподілу дискретної випадкової величини.
4. Перелічити числові характеристики дискретної випадкової величини. Дати їм означення.
5. Які основні властивості M(X) і D(X)?
6. Біноміальний закон розподілу ймовірностей випадкової величини?
7. За якої умови справедливий закон розподілу ймовірностей Пуассона?
8. Сформулювати Локальну та Інтегральну теореми Лапласа.

1. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробів в дорозі рівна 0,002. Знайти ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено 3 виробів.

2. Нехай ймовірність того, що покупцю необхідне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що із 5 перших покупців взуття цього розміру буде необхідно трьом покупцям.

3. Ймовірність народження хлопчика рівна 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених буде 50 хлопчиків.

4. Ймовірність того, щоб деталь нестандартна, дорівнює 0,15. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 520 деталей буде знаходитись 380 стандартних деталей.

5. Знайти ймовірність того, що серед 500 посаджених дерев виживуть:
а) 400 дерев; б) від 400 до 450 дерев, якщо ймовірність того що окреме дерево приживеться, дорівнює 0,8.

6. Ймовірність попадання в мішень стрілком при одному пострілі дорівнює 0,75.Обчислити ймовірність того, що при 100 пострілах стрілок влучить в мішень:

а) не менше 70 раз і не більше 80 раз; б) не менше 70 раз.

7. Гральну кістку кидають 600 разів. Яка ймовірність того, що число очок кратне трьом, випаде не менше 118 і не більше.

8. Імовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти: а) з ймовірністю 0,9545 межі числа стандартних деталей серед перевірених 900 деталей; б) ймовірність того, що частка стандартних деталей серед них знаходиться в межах від 0,8 до 0,11.

9. У результаті перевірки якості підготовленого до сівби насіння пшениці встановлено, що в середньому 90% дають добру схожість. Скільки потрібно посіяти насіння, щоб з ймовірністю 0,991 можна було сподіватись, що частка насіння, що зійшла, відрізнятиметься від ймовірності зійти кожній насінини не більше, ніж на 0,03?

10. Імовірність того, що дилер, який торгує цінними паперами, продасть їх, дорівнює 0,7. Скільки повинно бути цінних паперів, щоб можна було стверджувати з ймовірністю 0,996, що частка проданих серед цих паперів відрізнятиметься від 0,7 не більше, ніж на 0,04?

11. Страхова компанія має 10 000 клієнтів. Кожний клієнт вносить 500 грн. на можливість нещасного випадку. Ймовірність нещасного випадку дорівнює 0,0055; а страхова сума, яку потрібно виплатити постраждалому клієнту, складає 50 000 грн. Яка ймовірність чого, що: а) страхова компанія зазнає збитки; б) для виплати страхових сум потрібно більше половини всіх коштів, які поступили від клієнтів?

12 . Імовірність влучення у ціль кожним пострілом дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.

13. Імовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийдуть з ладу: а) не менше 20; б) менше 15; в) від 6 до 18 приладів.

14. В урні три кулі білі, чорна і червона. З урни виймають кулі по одній п'ять раз, причому, після кожного виймання кулю повертають в урну. Знайти ймовірність того, що чорну і білу кулю візьмуть не менше, ніж по два рази кожну.

15. В електропоїзд, що має шість вагонів, сідають дванадцять пасажирів, причому вибір вагону кожним пасажиром рівно можливий. Знайти ймовірність того, що: а) у кожний вагон ввійшли по два пасажири; б) в один вагон ніхто не ввійшов, у другий ввійшов один пасажир, у два вагони - по два пасажири і в останні два вагони ввійшли відповідно три та чотири.

16. Імовірність зупинки станка протягом зміни дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед 1000 станків працює: а) від 700 до 740 станків; б) не менше 700 станків.

60. Імовірність появи події в кожному із 2100 незалежних випробуваннях дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія появиться: а) не менше 1470 і не більше 1500 разів; б) не більше 1469 разів.

17. Імовірність виготовлення бракованої деталі для деякого виробу дорівнює – 0,015.Знайти ймовірність того, що доля (відносна частота) бракованих деталей серед 1000 виготовлених буде відрізнятись від ймовірності виготовлення бракованої деталі не більше, ніж на 0,005 в ту або другу сторону. Те ж для 500 штук. Порівняти і вказати, як впливає кількість на шукану ймовірність.

18. Імовірність того, що механізм регулювання дорівнює 0,4. Навмання вибираються 500 механізмів. Знайти величину найбільшого відхилення відносної частоти механізмів, які потребують регулювання, від ймовірності 0,4; яку можна гарантувати з ймовірністю 0,9973.

19. Скільки зерен кукурудзи треба посіяти що відносна частота зійшовши зерен з ймовірністю 0,99 відрізнялася від ймовірності проростання окремої зернини 0,02 по абсолютній величині менше, ніж на 0,01?

20. Імовірність попадання в мішень стрілком при одному пострілі дорівнює 0,75.Обчислити ймовірність того, що при 100 пострілах стрілок влучить в мішень: а) не менше 70 раз і не більше 80 раз;б) не менше 70 раз

Відповідь: а) 0,7498; б) 0,8749

21. Гральну кістку кидають 600 разів. Яка ймовірність того, що число очок кратне трьом, випаде не менше 218 і не більше 256 разів?

22. Скільки разів треба кинути монету, щоб із ймовірністю 0,6 треба було чекати, що відхилення відносної частоти від ймовірності появи герба буде по абсолютній величині не більше 0,01?Відповідь: n = 1764.

23. Імовірність появи події в кожному із 10000 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його ймовірності по абсолютній величині не більше як на 0,01.

Відповідь: 0,9786.

24. Імовірність появи події в кожному із 900 незалежних випробувань дорівнює 0,75. Знайти таке додатне число ε, щоб із ймовірністю 0,98 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від його ймовірності не перевищує ε. Відповідь*: ε= 0,033.*

Заняття 10

Тема. Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики.
Мета. Навчити обчислювати математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини.

Студент повинен знати означення дискретної випадкової величини, її числових характеристик.

Дана тема є основою для вивчення математичної статистики.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Означення дискретної випадкової величини.
2. Числові характеристики дискретної випадкової величини.

Теоретичні передумови до заняття.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності.

$M(x)=x_1p_1+x_2p_2+x_np_n$.

Математичне сподівання має такі властивості:

1. $M(C)=C$;
2. $M(CX)=CM(X)$;
3. $M(XY)=M(X)M(Y)$;
4. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

Дисперсією дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання :

$$D(X)=M(X-M(X))^2\,.$$

Теорема. Дисперсія дискретної випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X і квадратом її математичного сподівання.

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$ Властивості дисперсії:

1. $D(C)=04$;
2. $D(CX)=C^2D(X)$;
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;
4. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називають квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Математичне сподівання та дисперсія числа появи події в незалежних випробуваннях дорівнюють: M(X) - пр
$M(X)=np$
$D(X)=npg$

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. Найти математичне сподівання дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини, знаючи закон її розподілу.

X	3	5	2
P	0.1	0.6	0.3

Розв'язок.
$M(X)=3\cdot0.1+5\cdot0.6+2\cdot0.3=3.9$
Дисперсію знайдемо двома способами:
а) $D(X)=M(X-M(X))^2$.

$D(X)=(3-3.9)^2\cdot0.1+(5-3.9)^2\cdot0.6+(2-3.9)^2\cdot0.3=$
$=0.81\cdot0.1+1.21\cdot0.6+3.61\cdot0.3=1.89$

б) $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.
$D(X)=3^2\cdot0.1+5^2\cdot0.6+2^2\cdot0.3-(3.9)^2=9\cdot0.1+25\cdot0.6+$
$+4\cdot0.3-15.21=0.9+15+1.2-15.21=1.89$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1.89}=1.375.$$

Варіанти індивідуальних завдань.

1. Випадкова величина задана законом розподілу:

X	2	4	8	6
P	0.1	0.3	0.4	0.2

Знайти:
а)дисперсію (двома способами);
б)середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина задана законом розподілу

X	12	9	8	6
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Знайти: а) дисперсію (двома способами); б) середнє квадратичне відхилення.

3. Знайти математичне сподівання випадкової величини та дисперсію випадкової величини *Z*, якщо відомі математичні сподівання *X* і *У*: *M(X)* =2 і *M(У)* = 6; а) *Z* = 3*X*+4*У*; б) *Z* = 8у-7.

4. Незалежні випадкові величини X і $У$ мають наступні закони розподілу :

X	3	2	4
P	0,2	0,3	0,5

Y	1	2	3	5
P	0,4	0,2	0,3	0,1

Скласти закони розподілу випадкової величини а) $X+Y$; б) $XУ$. Перевірити властивості математичного сподівання та дисперсії цих випадкових величин.

5. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X, яка може приймати тільки два значення x_1, з ймовірністю p_1 і x_2 з ймовірністю p_2, причому $x_1 < x_2$, і $p_1 = 0{,}9$; M(X) = 4,1; D(X) = 0,09.

6. Цінні папери на біржі можуть з ймовірністю p=0,5 подорожчати на 10%. Спостереження ведеться три дні. Початкова вартість цінних паперів 5000 грн.. Треба:

а)побудувати розподіл випадкової величини X (вартість цінних паперів), вважаючи, що вона має біноміальний закон розподілу;

б) знайти середню сподівану вартість цінних паперів після 3 днів торгів;

в) підрахувати стандартне відхилення.

7. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – числа появи події в 100 незалежних випробуваннях в кожному із яких ймовірність появи події рівна 0,7.

8. Цінні папери на біржі можуть з ймовірністю p=0,5 подешевшати на 10%. Спостереження велося 2 дні. Початкова вартість цінних паперів 400 грн. Треба : а) побудувати розподіл випадкової величини X (вартість цінних паперів) вважаючи, що вона має біноміальний закон розподілу;

б) знайти середню сподівану вартість цінних паперів після двох днів торгів;

в) підрахувати стандартне відхилення.

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. Яка величина називається випадковою?

2. Що називається випадковою дискретною величиною?
3. Поняття закону розподілу дискретної випадкової величини.
4. Перелічити числові характеристики дискретної випадкової величини. Дати їм означення.
5. Які основні властивості M(X) і D(X)?

1. Знайти дисперсію (двома способами) і середнє квадратичне відхилення:

а)

X	0	1	2	3
p	0.2	0.3	0.4	0.1

б)

X	10	11	12	13
p	0,1	0,2	0.5	0.2

Заняття 11

Тема. Інтегральна та диференціальна функції розподілу випадкових величин .
Мета. Навчити знаходити інтегральна та диференціальна функції розподілу випадкових величин; ймовірність попадання випадкових величин в заданий інтервал , використовуючи інтегральну та диференціальну функції розподілу .

Студент повинен знати означення інтегральна та диференціальна функції розподілу випадкових величин та їх властивості.
Дана тема є основою для вивчення математичної статистики.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Означення інтегральна та диференціальна функції розподілу випадкових величин дискретної випадкової величини.
2. Числові характеристики інтегральна та диференціальна функції розподілу .
3. Імовірність попадання випадкових величин в заданий інтервал.

Теоретичні передумови до заняття. Згадаємо, що дискретна випадкова величина задається переліком усіх її можливих значень і їх ймовірностей. Такий спосіб завдання не являється загальним і його не можна використовувати для інших випадкових величин.

Розглянемо випадкову величину X можливі значення якої заповнюють повністю інтервал $(a;b)$. Чи можливо скласти перелік всіх можливих значень X ? Звичайно цього зробити не можна. Цей приклад вказує на доцільність дати загальний спосіб завдання любих типів випадкових величин.

Для завдання любого типу випадкової величини вводять інтегральну функцію розподілу.

Нехай x – дійсне число. Ймовірність події, суть якої в тому, що випадкова величина X приймає значення менше x, тобто ймовірність події $X \prec x$ позначимо через $F(x)$. Якщо x буде змінюватися, то буде змінюватися і $F(x)$.

Інтегральною функцією розподілу називають функцію $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, яке менше x, тобто $F(x) = P(X \prec x)$.

Геометрично цю рівність можна пояснити так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке зображується на числовій осі точкою, яка лежить лівіше точки x.

Для дискретної випадкової величини, яка приймає значення $x_1, x_2, \dots, x_n$, виберемо деяке значення x, при якому виконується подвійна нерівність $x_k < x \le x_{k+1}$. Тоді лівіше числа x на числовій осі будуть тільки ті значення випадкової величини, які мають індекс 1,2,3,…, k. Причому нерівність $x<X$ виконується, якщо величина X прийме значення x_i, де $i = 1,2,\dots, k$. Таким чином подія $X \prec x$ наступить , якщо наступить будь-яка з подій $X= x_1$,$X= x_2, \dots ,X= x_k$. Так як ці події несумісні, то по теоремі додавання ймовірностей маємо $F(X) =P(X= x_1)+P(X= x_2)+\dots P(X= x_k)=\sum_{xk < x} p_i$.

Якщо будемо збільшувати x, тобто переміщувати точку x вправо по осі. Очевидно, що при цьому ймовірність того, що випадкова величина X попаде лівіше x, не може зменшуватися. Тому функція $F(x)$ із зростанням x спадати не може. Необмежено переміщуючи точку x вправо, переконуємося , що $F(\infty)=1$, так як подія $X<\infty$ стає достовірною.

Якщо x переміщувати необмежено вліво по числовій осі, то попадання випадкової величини X лівіше x стає неможливою подією, тому $F(-\infty)=0$.

Властивості інтегральної функції

1. Значення інтегральної функції належить відрізку [0;1], отже $0 \le F(x) \le 1$.

Це твердження витікає з того, що ймовірність любої випадкової події є невід'ємне число, яке не перевищує 1.

2. $F(x)$ - не спадна функція, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 \succ x_1$.

Нехай $x_2 \succ x_1$. Подію $(X< x_2)$ можна подати у виді суми двох несумісних подій $(X< x_1)$ *та* $(x_1\le X< x_2)$, тобто $(X< x_2)=(X< x_1) \cup (x_1\le X< x_2)$. Тоді по формулі додавання ймовірностей несумісних подій маємо $P(X< x_2)=P(X< x_1)+P(x_1\le X< x_2)$, звідси за визначенням інтегральної функції , отримаємо $F(x_2)=F(x_1)+P(x_1 \le X \le x_2)$,

3. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;b)$ то:

а) $F(x)=0$ при $x \le a$; б) $F(x)=1$ при $x \succ b$

Графік функції $F(x)$ в загальному випадку є графіком неспадної функції, значення якої змінюються від 0 до 1, при чому в окремих точках функція може мати розриви.

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад. За даним законом розподілу знайти інтегральну функцію розподілу випадкової величини X. Обчислити її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

X	0	1	2	3	4
p	0,12	0,36	0,34	0,15	0,03

Розв'язок. $F(x) = P(x \le 0) = 0$; $F(1) = P(0 < x \le 1) = P(X = 0) = 0{,}12$;

$F(2) = P(< x\le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}12+ 0{,}36 = 0{,}48$;

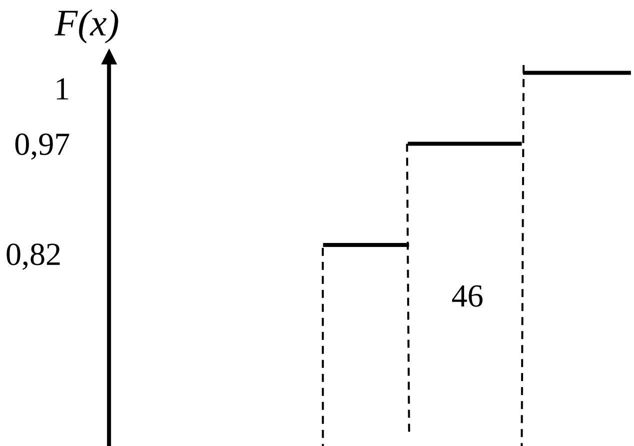
$F(3) = P(2<x \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(x=2) = 0{,}48 + 0{,}34= 0{,}82$;

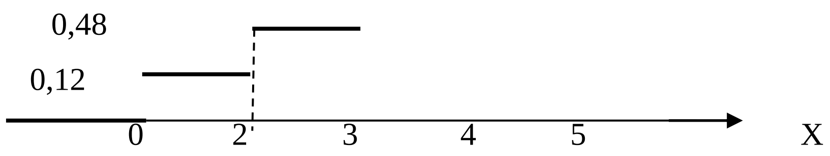
$F(4) = P(3< x \le 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(x=2) + P(X = 3) = 0{,}82+ 0{,}15 = =0{,}97$;

$F(\infty) = P(x >4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) =$

$= 0{,}97 + 0{,}03 =1$.Отже, $F(x) = \begin{cases} 0 \ , \text{при } x \le 0, \\ 0{,}12, \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0{,}48, \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}82, \text{ при } 2 < x \le 3 \\ 0{,}97, \text{ при} 3 < x \le 4, \\ 1, \text{при} x > 4. \end{cases}$

Графік функції розподілу наведено нижче





Знайдемо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

$M(x) = x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$ = 0·0,12 +1·0,36 + 2·0,34 +3·0,15 + 4·0,03 = 1,61.

$D(X) = M(X\text{-}M(X))^2$ = (0-1,61)^2 ·0,12 + (1-1,61)^2 ·0,36 + (2-1,61)^2 ·0,34+ (3-1,61)^2 ·0,15 + (4-1,61)^2 ·0,03 = 0,65.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}65} = 0{,}81.$

Диференціальною функцією розподілу $f(x)$ називають першу похідну від інтегральної функції $f(x) = F'(x)$. Функцію $f(x)$ також називають *щільністю(густиною)* розподілу ймовірностей.

Властивості диференціальної функції

1. Диференціальна функція невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$, так як похідна зростаючої функції.

2. Невласний інтеграл від диференціальної функції в межах $(-\infty;+\infty)$ дорівнює одиниці $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ тому, що подія $(-\infty \prec X \prec \infty)$ є достовірною.

3. $f(x) = 0$ при $x<a$ та $x \geq в$ тому, що є похідною функції *F(x).*

Отже, інтегральна функція являється первісною для диференціальної.

Зауважимо, що для опису розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини диференціальна функція не використовується.

Графік густини ймовірностей *f(x)* называюсь кривою розподілу .

Мал.8

Нагадаємо формули, які вказують на зв'язок між інтегральною та диференціальною функціями:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ \ i \ \ f(x) = F'(x).$$

Приклад. Густина випадкової величини X має вид

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le \pi/6,\\ 3\sin 3x, \text{при } \pi/6 < x \le \pi/3,\\ 0, \text{при } x > \pi/3.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язок. Використаємо формулу знаходження інтегральної функції розподілу по відомій диференціальній $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

1. $x \le \pi/6$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

2. $\pi/6 < x \le \pi/3$; $F(x) = \int_{-\infty}^{\Pi/6} 0dx + \int_{\Pi/6}^{x} 3\sin 3xdx = 3(-1/3)\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{x} = -\cos 3x + \cos\pi/2 = -\cos 3x$.

3. $x > \pi/3$; $F(x) = \int_{-\infty}^{\Pi/6} 0dx + \int_{\Pi/6}^{\Pi/3} 3\sin 3xdx + \int_{0/3}^{x} 0dx = -\cos 3x\Big|_{\Pi/6}^{\Pi/3} = -\cos\pi + \cos\pi/2 = 1$.

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad \text{при } x \le \pi/6,\\ -3\cos 3x, \text{при } \pi/6 < x \le \pi/3\\ 1, \text{ при } x > \pi/3.\end{cases}$$

Знаючи обидві функції розподілу: інтегральну та диференціальну, можна обчислити ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке належить заданому інтервалу.

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу $(a;b)$ дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі

$$P(a \prec X \prec b) = F(b) - F(a).$$

Приклад . Випадкова величина X задана функцією розподілу.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 0,\\ \dfrac{x}{2}, \text{при } 0 < x \le 2,\\ 1, \text{при } x \ge 2.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина x прийме значення, яке належить інтервалу (1/4;1).

Розв'язок. Шукана ймовірність рівна $P\ (a<X<b) = F(b) - F(a)$,

P $(1/4<X<1)$ = F(1) – F(1/4). Так як за умовою $F(x)= x/2$ на інтервалі (1/4;1), то F(1) – F(1/4) = 1/2 -1/8 = 3/8

Отже, P $(1/4<X<1)$ = 3/8.

8. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

9. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1, \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти густину розподілу та побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій.

10.Задана диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини x

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ sinx, \text{при } 0 < x \le \pi/2, \\ 0, \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$; побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

11. Випадкова величина X задана інтегральною функцією:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ (x-1)^2, & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Побудувати її графік і знайти ймовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу: а) (1,1; 1,8); б) (1,2; 2,5).

12. Задана густина розподілу перервної випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{2}{9}x, \text{при } 0 < x \le 3, \\ 0, \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що X прийме значення, яке належить інтервалу:а) (1;3); б) (2;7).

13. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}5x-1, & \text{при } 2<x\le 4,\\ 1, & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування х прийме значення:

а) менше 0,2; б) менше 3; в) не менше 3; г) не менше п'яти.

14. Густина розподілу неперервної випадкової величини X в інтервалі $(0; \pi/3)$ рівна $f(x) = 3/2\sin 3x$, зовні усього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, в трьох незалежних випробуваннях X прийме рівно 2 рази значення, яке належить інтервалу $(\pi/6; \pi/4)$.

15. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу.

X	2	6	10
P	0,5	0,4	0,1

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

16. Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 1,\\ 0{,}5(x-1), & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Знайти густину розподілу. Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу.

17. Випадкова величина X задана диференціальною функцією

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \frac{1}{2}\sin x, & \text{при } 0<x\le \pi,\\ 0, & \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

18. Задана інтегральна функція розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}5x-1, & \text{при } 2<x\le 4,\\ 1, & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що X прийме значення яке належить інтервалу:а) (3;4); б) (4;7).Відповідь: а) 0,5; б) 0.

19. Задана густина розподілу перервної випадкової величини X

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 1, \\ x - \frac{1}{2}, \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0, \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що X прийме значення, яке належить інтервалу:

а) (1,4;1,8); б) (1,2;5); Відповідь: а) 0,44; б) 0,88.

20. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}, & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробувань X прийме значення:

а) менше –2; б) менше 1; в) не менше 1; г) не менше 5.

Відповідь: а) 0; б) 2/3; в) 1/3; г) 0.

21. Випадкова величина задана диференціальною функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \frac{1}{2} \sin x, & \text{при } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях X прийме рівно три рази значення, яке належить інтервалу ($\pi/6$; $\pi/2$).Відповідь: $P_5(3) = 0{,}2$

22. Імовірність влучення у мішень одним пострілом дорівнює 0,7. Проведено 4 постріли. Дискретна випадкова величина X – число влучень у мішень. Знайти: а) закон розподілу X; б) функцію розподілу X; в) ймовірність подій $X < 2$; $X \le 3$; $1 < X \le 3$; г) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

23. Два стрільці виконують по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучення у мішень першим стрільцем дорівнює 0,5; другим – 0,4. Дискретна випадкова величина X – число влучень у мішень: а) знайти закон розподілу і функцію розподілу величини X; б) побудувати багатокутник розподілу; в) знайти ймовірність події $X \ge 1$; г) обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини X.

24. У коробці є сім олівців, з яких 4 червоні. З коробки навмання беруть 3 олівці: а) знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини *X*, що дорівнює числу червоних олівців, взятих з коробки; б) побудувати багатокутник розподілу *X*; в) знайти ймовірність події $0 < x \le 2$; г) обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини *X*.

25. З двадцяти п'яти контрольних робіт, серед яких п'ять мають оцінку «відмінно», навмання беруть 3 роботи. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини *X*, що дорівнює числу оцінених на «відмінно» робіт серед вибраних. Чому дорівнює ймовірність події $X > 0$? Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини *X*.

26. Робітник обслуговує 4 незалежно працюючі агрегати. Ймовірність того, що протягом однієї години агрегат не потребує уваги робітника, дорівнює: для першого 0,7; для другого – 0,75; для третього – 0,8; для четвертого – 0,9. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини *X,* що дорівнює числу агрегатів, які не потребують уваги робітника.

27. Неперервну випадкову величину задано густиною розподілу *f(x).* Знайти функцію розподілу *F(x)*, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{для} \quad x < -\frac{\pi}{2}, \\ 0{,}5\ \cos x & \text{для} \quad -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{для} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

28. Неперервну випадкову величину задано густиною розподілу *f(x).* Знайти функцію розподілу *F(x),* математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } x \le 0, \\ e^{x} & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

29. Задано функцію $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } x \le 0\,, \\ Ce^{-x} & \text{для } x > 0. \end{cases}$

Для якого значення величина *C* ця функція буде густиною розподілу деякої неперервної випадкової величини *X.* Знайти її функцію розподілу, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

30. Задано функцію розподілу випадкової величини *X*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & для \quad x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, & для \ -1 \le x < 1, \\ 0, & для \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Знайти густину розподілу *f (x)*,математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї величини.

31. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & для \quad x < 1, \\ \frac{1}{7}(x^3-1), & для \ 1 \le x < 2, \\ 1, & для \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Знайти густину розподілу ,математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї величини.

32. Задано густину розподілу випадкової величини *X*

$$f(x)=\begin{cases} 0, & для \quad x < 0, \\ \cos x, & для \ 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & для \quad x \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величини *X*, її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї величини.

33. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини *X*

$$F(x)=\begin{cases} 0 & для \quad x < 0, \\ \sin 2x & для \ 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & для \quad x \ge \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти густину розподілу величини *X*, її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї величини.

34. Задано густину розподілу випадкової величини *X*

$$f(x)=\begin{cases} 0, & для \ x < 0 \ \ і \ x > 1, \\ 4x^3, & для \ 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *X*, її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини.

35.Задана густина розподілу випадкової величини. Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, асиметрію та ексцес.

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{для} \quad x<0, \\ 1,5\,x-0,75 \quad \text{для}\ 0\le x<2, \\ 0 \quad \text{для} \quad x\ge 2. \end{cases}$$

36. Знайти моду та медіану випадкової величини з густиною розподілу ймовірностей $f(x)=3x^2$ при $x \in [0;1]$.

37. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Знайти початкові та центральні моменти цієї величини до четвертого порядку включно, коефіцієнт асиметрії та ексцес розподілу.

38.Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків випадкової величини з густиною ймовірностей $f(x)=0,5x$ на інтервалі (0;2), зовні цього інтервалу $f(x)=0.$

39. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	2	4	6	8
p	0,4	0,3	0,2	0,1.

Знайти початкові та центральні моменти цієї величини до четвертого порядку включно, коефіцієнт асиметрії та ексцес розподілу.

40. Знайти початкові та центральні моменти випадкової величини, яка розподілена з густиною ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{для}\ x\le 1, \\ \frac{9}{x^{10}} \quad \text{для}\ x>1. \end{cases}$$

Тема. Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики.

Мета. Навчити обчислювати математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної та неперервної випадкової величини, ймовірність попадання випадкових величин в заданий інтервал.

Студент повинен знати означення дискретної випадкової величини, її числових характеристик.
Дана тема є основою для вивчення математичної статистики.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

2. Означення дискретної випадкової величини.
3. Числові характеристики дискретної випадкової величини.

Теоретичні передумови до заняття.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають

Заняття 12

Тема. Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини. Рівномірний та нормальний розподіл

Програмовий матеріал. Означення математичного сподівання, дисперсії та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини.

Закон рівномірного розподілу ймовірностей. Нормальний розподіл, його параметри. Ймовірність попадання в заданий інтервал нормальної випадкової величини. Обчислення ймовірності заданого відхилення. Правило трьох сигм.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини Х, можливі значення якої належать відрізку (a,b), називають означений інтеграл М(х) = $\int_a^в xf(x)dx$.

Якщо можливі значення Х належать всій дійсній осі, то

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсією неперервної випадкової величини Х називають математичне сподівання квадрата її відхилення.

$$D(X) = \int_a^в (x-M(x))^2 f(x)dx.$$

Якщо можливі значення належать всій дійсній осі, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-M(x)\right)^2 f(x)dx$$

Дисперсію можна обчислювати за формулою

$$D(X) = \int_a^в x^2 f(x)dx - (\int_a^в x \ \ f(x)dx)^2 \ .$$

Середнім квадратичним відхиленням неперервної випадкової величини Х називають квадратний корінь із дисперсії.

σ (x) = $\sqrt{D(x)}$

Тема. Неперервні випадкові величини та їх чис
лові характеристики.

Мета. Навчити обчислювати математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини, ймовірність попадання випадкових величин в заданий інтервал.

Студент повинен знати означення дискретної випадкової величини, її числових характеристик.

Дана тема є основою для вивчення математичної статистики.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Означення дискретної випадкової величини.
2. Числові характеристики дискретної випадкової величини.

Теоретичні передумови до заняття.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають

Заняття 13

Тема. Регресійний та кореляційний аналіз.

Мета. Навчити студентів розв’язувати основні задачі теорії кореляції.

Студент повинен знати види залежностей, уміти знаходити коефіцієнт кореляції, вибіркове рівняння лінії регресії.

Дана тема є основою для вивчення дисциплін рибогосподарського напрямку.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Знаходження вибіркового рівняння прямої лінії регресії за даними спостережень при згрупованих даних.
2. Обчислення вибіркового коефіцієнта кореляції при даних спостереженнях записаних у вигляді кореляційної таблиці із рівновіддаленими варіантами.

Теоретичні передумови до заняття.

1. Статистичною називають залежність, при якій зміна однієї із величин призводить до зміни розподілу іншої.

2. Якщо при зміні однієї із величин змінюється середнє значення другої, то статистичну залежність називають кореляційною.

3. Нехай вивчається зв’язок між випадковими величинами Y та X. Нехай кожному значенню X відповідає декілька значень Y: y_1, y_2,…, y_k. Середнє арифметичне цих чисел є число $\overline{y_x} = \frac{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_k}{k}$, яке називають умовним середнім, що відповідає значенню X=x.

4. Кореляційною залежністю Y від X називають функціональну залежність умовної середньої $\overline{y_x}$ від x: $\overline{y_x} = f(x)$. Це рівняння називають рівнянням регресії Y на X; функцію f(x) називають регресією Y на X, а її графік – лінією регресії Y на X. Аналогічно означаються умовна середня $\overline{x_y}$ та кореляційна залежність X від Y: $\overline{x_y} = ky + m$.

5. Математична статистика розв'язує дві основні задачі теорії кореляції: а) встановити форму кореляційного зв'язку, тобто вид функції регресії (лінійна, квадратична, показникова і т.д.). Якщо при цьому функції (лінії) регресії Y на X і X на Y – прямі, то кореляцію називають лінійною. б) оцінити тісноту (силу) зв'язку, яка оцінюється за величиною розсіювання значень навколо умовної середньої. Чим більша розсіюваність, тим слабша залежність.

6. Рівняння регресії Y на X при лінійному кореляційному зв'язку можна записати у вигляді $\overline{y_x} = ax + b$. Кутовий коефіцієнт a називають вибірковим коефіцієнтом регресії і позначають через ρ_{yx}. Коефіцієнти a та b за допомогою методу найменших квадратів знаходять із системи: $\begin{cases} b\sum x_i + a\sum x_i^2 = \sum x_i y_i, \\ nb + a\sum x_i = \sum y_i. \end{cases}$

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії Y на X за даними $n = 5$ спостережень:

Розв'язок. Для підрахунку коефіцієнтів системи складемо розрахункову таблицю:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i = 15$	$\sum y_i = 8{,}15$	$\sum x^2{}_i = 57{,}50$	$\sum x_i y_i = 26{,}975$

Із системи отримаємо значення a та b: $a = \dfrac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x^2)}$, $\mathrm{b} = \dfrac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x^2)}$.

Підставивши значення сум із таблиці, отримаємо:

$$a = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} \approx 0{,}202, \quad \mathrm{b} = \frac{57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{62{,}5} \approx 1{,}024.$$

Тому шукане рівняння регресії Y на X має вид: $\overline{y_x} = 0{,}202x + 1{,}024$.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії (Y на X) прийнято записувати ще в іншій формі: $\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_в \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$, де $\overline{y_x}$ - умовна середня, $\overline{x}$ та $\overline{y}$ – вибіркова середня ознак X та Y, σx та σy – вибіркове середнє квадратичне відхилення, $\rho_в$ – вибірковий коефіцієнт кореляції, який обчислюється за формулою: $\rho_в = \dfrac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$.

Приклад 2. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці:

Y	X					
	20	25	30	35	40	n_y
16	4	6				10
26		8	10			18
36			32	3	9	44
46			4	12	6	22
				1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n=100

Розв'язок. 1. Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах, вибравши за "хибні" нулі C_1=30 та C_2=36.

v	u					
	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	4	6				10
-1		8	10			18
0			32	3	9	44
1			4	12	6	22
2				1	5	6
n_u	4	14	46	16	20	n=100

Знайдемо $\overline{u}$ та $\overline{v}$: $\overline{u}=(\Sigma n_u \cdot u)/ n=(4\cdot(-2)+14\cdot(-1)+46\cdot 0+16\cdot 1+20\cdot 2)/100=0,34$;

$\overline{v}=(\Sigma n_v \cdot v)/ n)=(10\cdot(-2)+18\cdot(-1)+44\cdot 0+22\cdot 1+6\cdot 2)/100=-0,04$.

Знайдемо допоміжні величини $\overline{u}^2=(0.34)^2$

та $\overline{v}^2=(-0.04)^2$; $\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{1.26 - 0.34^2} \approx 10{,}7$; $\sigma_v = \sqrt{1.04 - 0.04^2} \approx 1.02$

Обчислимо: $\sum n_{uv} \cdot uv = 4 \cdot (-2) \cdot (-2) + 6 \cdot (-2) \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) \cdot (-1) + 10 \cdot (-1) \cdot 0 +$
$+ 32 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 9 \cdot 0 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 2 = 82.$

Знайдемо шуканий вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$\rho_в = \frac{\sum n_{uv} \cdot uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{82 - 100 \cdot 0.34 \cdot (-0.04)}{100 \cdot 1.07 \cdot 1.02} = 0.76.$$

Знайдемо кроки h_1 та h_2 (різниці між двома сусідніми варіантами): $h_1=25-20=5$; $h_2=26-16=10$.

Знайдемо $\overline{x}$ та $\overline{y}$, враховуючи, що $C_1=30$, $C_2=36$:

$x= \overline{u} \cdot h_1+C_1=0{,}34 \cdot 5+30=31{,}70$; $\overline{y}= \overline{v} \cdot h_2+C_2=(-0{,}04) \cdot 10+36=35{,}60$.

Обчислимо $\sigma_x=h_1 \cdot \sigma_u=5 \cdot 1.07=5.35$; $\sigma_y=h_1 \cdot \sigma_v=10 \cdot 1{,}02=10{,}2$.

Тоді шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X буде:

$y_x-35{,}60=0{,}76 \cdot \frac{10{,}2}{5{,}35} \cdot (x - 31{,}70)$, або $\overline{y}_x=1{,}45x-10{,}36$.

Варіанти індивідуальних завдань.

I. За вибірковими даними пари випадкових величин (X,Y) знайти вибірковий коефіцієнт кореляції і написати вибіркове рівняння прямої лінії регресії.

1.

x_i	10	20	30	40	50	60
y_i	60	45	35	20	10	0

2.

x_i	92	90	77	83	81	75
y_i	90	81	75	86	87	84

3.

x_i	52	31	44	18	10	20
y_i	51	34	40	19	18	14

II. Знайти вибіркове рівняння прямої $\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ регресії Y на X за даною кореляційною таблицею.

1.

y	x						n_y
	10	15	20	25	30	35	
45	2	4	-	-	-	-	6
55	-	3	5	-	-	-	8
65	-	-	5	35	5	-	45
75	-	-	2	8	17	-	27
85	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	n=100

2.

y	x						n_y
	10	15	20	25	30	35	
40	2	4	-	-	-	-	6
50	-	3	7	-	-	-	10
60	-	-	5	30	10	-	45
70	-	-	7	10	8	-	25
80	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n=100

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

Контрольні питання:

1. Яка залежність *Y* від *X* називається кореляційною?
2. Яке рівняння називається рівнянням регресії У на Х?
3. Що називається вибірковим коефіцієнтом регресії?
4. В чому полягає суть методу найменших квадратів?

I. За вибірковими даними пари випадкових величин (X,Y) знайти вибірковий коефіцієнт кореляції і написати вибіркове рівняння прямої лінії регресії.

1.

x_i	1	2	4	8	9	10
y_i	12	10	9	6	4	3

2.

x_i	61	70	80	91	10	12
y_i	45	51	71	78	82	104

II. Знайти вибіркове рівняння прямої $\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$ регресії Y на X за даною кореляційною таблицею.

Y	*X*						n_y
	15	20	25	30	35	40	
15	4	1	-	-	-	-	5
25	-	6	4	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	9	7	-	17
55	-	-	-	4	3	7	14

n_x	4	7	7	63	12	7	n=100

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
100	1	5	-	-	-	-	6
120	-	5	3	-	-	-	8
130	-	-	3	40	12	-	55
140	-	-	2	10	5	-	17
150	-	-	-	3	4	7	14
n_x	1	10	8	"53	21	7	N=100

Список літератури:

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1986.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. Пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высш.шк.,1986.
3. Венецкий И.Г., Венецкая В.Й. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. - М.: Статистика, 1974.
4. Венцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задача по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1972.
7. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.: Высш. шк., 1971.
8. Зайченко Ю.Л. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975.
9. Захаров Б.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.Л. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1983.
10. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Статистика, 1979.
11. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк. 1973.
12. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. - М.: Высш. шк., 1975.
13. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968.
14. Н.Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. - М.: Наука, 1970.
15. Солодовников А.С. Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1983.

Заняття 8

Тема. Рівномірний та нормальний розподіл ймовірностей.

Мета. Навчити знаходити параметри рівноважного розподілу ймовірностей. Обчислювати ймовірність попадання в заданий інтервал нормальної випадкової величини та ймовірність заданого відхилення.

Студент повинен знати види розподілів ймовірностей та їх параметри, відмінність між ними. Вміти обчислювати ймовірність попадання випадкових величин в заданий інтервал.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Закон рівномірного розподілу ймовірностей.
2. Нормальний закон. Обчислення ймовірності заданого відхилення.
3. Правило трьох сигм.
4. Ексцес та асиметрія.

Теоретичні рекомендації до заняття.

Розподіл ймовірностей називають рівномірним, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення випадкової величини, густина розподілу має постійне значення.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при} \quad a<x\le b \\ 0, & \text{при} \quad x>b \end{cases}$$

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, який описується диференціальною функцією.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами а і σ, де $M(x)=a$. Ймовірність попадання в заданий інтервал (α,β) нормальної випадкової величини рівна:

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi\frac{\alpha-a}{\sigma}$$

Ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X по абсолютній величині менше заданого додатного числа σ, рівна:

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Правило трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення от математичного сподівання не перевищує потрійного середнього квадратичного відхилення.

$$P(|X-a|<3\delta)=2\Phi(3)=0.9973.$$

Методичні рекомендації до розв'язування задач.

Приклад 1. Відоме математичне сподівання $a=2$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=5$ нормально розподіленої випадкової величини X.

Знайти ймовірність попадання цієї величини в інтервал **(4;9)**

Розв'язок.

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$$

$$P(4<x<9)=\Phi(\frac{9-2}{5})-\Phi(\frac{4-2}{5})=\Phi(1.4)-\Phi(0.4)=$$

$$=0.4192-0.1554=0.2638.$$

Приклад 2. Задані математичне сподівання $a=7$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=3$ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що абсолютна величина $|x-a|$ буде менше 3.

Розв'язок.

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Варіанти індивідуальних завдань.

1. Рівномірно розподілена величина X задана на інтервалі (-4; 4). Побудувати функцію густини розподілу
2. Задані математичне сподівання $a=12$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma=8$ нормально розподіленої випадкової величини X.
Знайти:
а) ймовірність того що X прийме значення, яке належить інтервалу (8; 17);
б) абсолютне відхилення $|x-a|$ буде менше δ; $\delta=6$.
3. Маса яблука, вага якого 150г, є нормально розподіленою випадковою величиною із середнім квадратичним відхиленням 20г. Знайти ймовірність того, що вага навмання взятого яблука заклечається в межах від 130г до 180г.
4. Середня вага зерна дорівнює 0,22. середнє квадратичне відхилення дорівнює 0,05г. Знайти ймовірність того, що вага взятого навмання зерна буде знаходитись в межах від 0,16г до 0,28г. Вага зерна розподілена нормально.
5. Середній діаметр стовбурів дерев на деякій ділянці дорівнює 30 см, середнє квадратичне відхилення - 5 см. Враховуючи, що діаметр стовбура - величина випадкова розподілена нормально, визначити ймовірність того, що:
а) діаметр стовбура навмання відібраного дерева попаде в інтервал від 25 до 37см;
б) діаметр стовбура дерева не менше 25см;
в) діаметр стовбура дерева не перевищить 36см;

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1.Який розподіл ймовірностей випадкової величини називається рівномірним?
2.Який розподіл ймовірностей випадкової величини називається нормальним?
3.Диференціальна та інтегральна функції загального та нормованого законів розподілу.
4.Чому дорівнює ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал?
5.Обчислення ймовірності заданого відхилення.
6.Сформулювати правило трьох сигм. Показати графічно.

1. Задані математичне сподівання $a=11$ і середнє квадратичне відхилення $a=5$ нормально розподіленої випадкової величини x.
Знайти ймовірність того, що:
а) X прийме значення, яке належить інтервалу (8; 17)
б) абсолютне відхилення $|x-a|$ буде менше δ, $\delta=6$.
2. Вставку середня вага однієї рибини 2кг із середнім квадратичним відхиленням 0,5. знайти ймовірність того, що випадково виловлена рибина має вагу від 1,8кг до 2,3кг, якщо вагу рибини розподілено за нормальним законом.
3. Випадкові відхилення розміру деталі від номіналу розподілені нормально. Математичне сподівання розміру деталі дорівнює 200мм, середнє квадратичне відхилення дорівнює 0,25мм. Стандартними вважаються деталі, розмір яких знаходиться в межах від 199,5 до 200,5мм. Знайти процент стандартних деталей.
4. Середня кількість пакетів молока, які продає відділ молочного магазину, складає 250 літрових пакетів. Кількість проданих пакетів розподілена за нормальним законом із стандартним відхиленням 25. визначити ймовірність, що буде продано: а)не менше 275 пакетів; б)від 230 до 275 пакетів.
5. Вага упаковок розфасованого цукру розподілена за нормальним законом із середнім 10кг і стандартним відхиленням 0,05кг. Яка ймовірність того, що навмання взята упаковка важить більше 10,1кг.

Список літератури:

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1986.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. Пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высш.шк.,1986.
3. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. - М.: Статистика, 1974.
4. Венцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио,1972.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задача по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1972.
7. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.: Высш. шк., 1971.
8. Зайченко Ю.Л. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975.
9. Захаров Б.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.Л. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1983.
10. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Статистика, 1979.
11. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк. 1973.
12. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. - М.: Высш. шк., 1975.
13. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968.
14. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. - М.: Наука, 1970.
15. Солодовников А.С. Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1983.

Заняття 10

Тема. Початкова обробка вибірки. Початкові оцінки параметрів розподілу.
Мета. Навчити знаходити числові характеристики статистичного розподілу вибірки та виконувати графічне зображення.

Студент повинен знати означення генеральної і вибіркової сукупності. Вміти обчислювати вибіркову середню дисперсію і середнє квадратичне відхилення, графічно зображати розподіл вибірки.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Статистичний розподіл вибірки. Полігон і гістограма.
2. Точкові оцінки параметрів розподілу. Метод хибного нуля.
3. Мода і медіана.

Теоретичні передумови до заняття.

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів, із яких проводиться вибірка. Вибірковою сукупністю (вибіркою) називають сукупність випадково відібраних об'єктів.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот.

Емпіричною функцією розподілу називають функцію F*(x), яка визначає для кожного значення x відносну частоту події X<x.

$F^*(x)=\frac{n_x}{n}$, де n_x число варіант менших x; n – об'єм вибірки.

Властивості емпіричної функції F*(x).

1. $0\le F^*(x)\le 1$;
2. F*(x) – неспадна функція;
3. Якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x)=0$ при $x\le x_1$; якщо x_r найбільша варіанта, то $F^*(x)=1$, при $x>x_r$.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_1n_1); (x_2n_2); …; (x_rn_r).

Гістограмою частот називають ступінчату фігуру, яка складається із прямокутників, основи яких є частинні інтервали довжиною h, а висоти рівні відношенню $\frac{n_i}{h}$ (щільність частоти).

Генеральною середньою $\overline{X_г}$ називають середнє арифметичне значень ознаки генеральної сукупності. Незсунена оцінка генеральної середньої є вибіркова середня.

Вибіркову середню знаходять за формулою

$$\overline{X_в} = \frac{\Sigma n_i * x_i}{n},$$

x_i -варіанта,

n_i – частота,

n - об'єм вибірки.

Якщо варіанти x_i- великі числа, то для спрощення обчислень математичного сподівання і дисперсії можна ввести умовні варіанти – U_i,

$U_i = \frac{x_i - c}{h}$,де c-const; (несправжній нуль).

<u>Групову дисперсію</u> обчислюють за формулою:

$$D_{гр.} = \frac{\Sigma n_i \left(x_i - \overline{x_j}\right)^2}{N_j};$$

$N_j = \Sigma n_i$ - об'єм групи,

$\overline{x_j}$ - групова середня.

<u>Внутрішньогрупову дисперсію</u> знаходять за формулою:

$$D_{внгр.} = \frac{N_1 D_{1гр.} + N_2 D_{2гр.}}{n};$$

<u>Міжгрупова дисперсія</u> дорівнює:

$$D_{міжгр.} = \frac{\Sigma N_j \left(\overline{x_j} - x_i\right)^2}{n},$$ де

$\bar{x}$ - загальна середня,

<u>Загальну дисперсію</u> обчислюють за формулою:

$$D_{заг.} = \frac{\Sigma n_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}.$$

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. Задано розподіл частот вибірки об'єму 20:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написати розподіл відносних частот.

Розв'язання. Знайдемо відносні частоти для чого розділимо частоти на об'єм вибірки:

$W_i = \frac{n_i}{n}$ $W_1 = \frac{3}{20} = 0.15$ $W_2 = \frac{10}{20} = 0.5$ $W_3 = \frac{7}{20} = 0.35$

Напишемо розподіл відносних частот:

x_i	2	6	12
W_i	0.15	0.5	0.35

0,15+0,5+0,35=1

Приклад 2. Знайти емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

x_i	1	6	6
n_i	10	15	25

Розв'язання. n=10+15+25=50

Найменша варіанта рівна одиниці, тому $F^*(x)=0$ при $x\leq 1$.

Значення x<4, $x_1=1$ спостерігалось 10 разів, отже $F^*(x)=\frac{10}{50}=0{,}2$ при $1<x\leq 4$

Значення x<6: $x_1=1$ і $x_2=4$, спостерігались 10+15=25 разів; отже $F^*(x)=\frac{25}{50}=0{,}5$ при $4<x\leq 6$.

Так як x=6 – найбільша варіанта, то $F^*(x)=6$ при x>6.

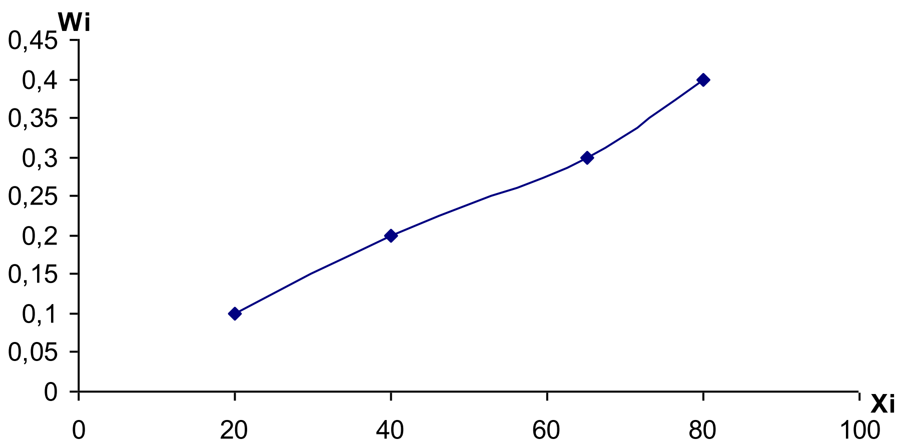
Напишемо емпіричну функцію:

$$F^*(x)\ \begin{cases} 0 & x\leq 1 \\ 0.2 & 1\leq x\leq 4 \\ 0.5 & 4\leq x\leq 6 \\ 1 & x\geq 6 \end{cases}$$

Приклад 3. Побудувати полігон відносних частот за даним розподілом вибірки:

x_i	20	40	65	80
W_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Розв'язання. Відкладемо на осі абсцис варіанти x_i а на осі ординат – відповідні відносні частоти W_i. Знайдемо точки (x_i, W_i) відрізками прямих, отримаємо полігон відносних частот.



Приклад 4. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки об'єму n=10:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Розв'язання. Варіанти – великі числа, тому перейдемо до умовних варіант $U_i=\frac{x_i-c}{h}$,

$U_i = \dfrac{x_i - 1270}{10}$, 1270 – несправжній нуль.

Отримаємо розподіл умовних варіант:

u_i	-2	0	1
n_i	2	5	3

$$\overline{U_в} = \frac{-2*2+0*5+1*3}{10} = \frac{-4+3}{10} = \frac{-1}{10}$$

$$\overline{X_в} = c + h*\overline{u_в} = 1270+10*\left(-\frac{1}{10}\right)=1270-1=1269$$

Приклад 5. Знайти виправлену вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму n=50:

x_i	18	19	20	21
n_i	5	10	20	15

Розв'язання. Виправлена вибіркова дисперсія дорівнює:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} * D_в$$

$$D_в = \frac{18*5+19*20+20*20+21*15}{50} = \frac{90+380+400+315}{50} = 23{,}7$$

$$S^2 = \frac{50}{49} * 23{,}7 = 24{,}2$$

Варіанти індивідуальних завдань.

1. Вибірка задана у вигляді розподілу частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Знайти розподіл відносних частот (частостей).

2. Знайти емпіричну функцію розподілу:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

3. Побудувати полігон частот за даним розподілом вибірки:

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

4. Побудувати полігон відносних частот за данимм розподілом вибірки.

x_i	2	4	5	7	10
W_i	0.15	0.2	0.1	0.1	0.45

5. Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки.

Номер інтервалу	Частковий інтервал X_i-X_{i+1}	Сума частот варіант інтервалу n_1
1	2-7	5
2	7-12	10
3	12-17	25
4	17-22	6
5	22-27	4

1. Із генеральної сукупності взято вибірку об'єму n=50. За даним розподілом вибірки знайти незміщену оцінку генеральної середньої:

Варіанта	x_i	2	5	7	10
Частота	n_i	16	12	8	14

12.2. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки об'єму n=10:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

12.3. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму n=10:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

12.4. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об'єму n=50:

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

12.6. Знайти вибіркову та виправлену дисперсії варіаційного ряду, складеного за даними вибірки:

Варіанта	x_i	2	5	7	10
Частота	n_i	16	12	8	14

Контрольні запитання та завдання для самопідготовки.

1. Яка оцінка генеральної сукупності називається точковою?
2. Які види точкових оцінок вивчає статистика? Дайте їх означення.
3. Що називається вибірковою та генеральною середньою?
4. Дати означення вибіркової та генеральної дисперсії.
5. Яка оцінка для дисперсії має властивість спроможності і незсуненості?

1. Вибірка задана у вигляді частот. Знайти розподіл відносних частот:

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

2. Знайти емпіричну функцію розподілу:

а)
x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	2

3. Побудувати полігон частот за даним розподілом вибірки:

а)
x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

4. Побудувати полігон частот за даним розподілом вибірки:

а)
x_i	10	50	65	80
W_i	0.1	0.2	0.3	0.4

5. Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки.

А)

Номер інтервалу	Частковий інтервал X_i-X_{i+1}	Сума частот варіант інтервалу n_1
1	1-5	10
2	5-9	20
3	9-13	50
4	13-17	12
5	17-21	8

6. З генеральної сукупності взято вибірку об'єму n=60.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Знайти незміщену оцінку генеральної сукупності.

7. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки об'єму n=20:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

8. Знайти вибіркову дисперсію по даному розподілу вибірки об'єму n=100:

x_i	340	360	370	380
n_i	20	50	18	12

9. Знайти виправлену вибіркову дисперсію вибірки об'єму n=10:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Список літератури:

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1986.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высш.шк.,1986.
3. Венецкий И.Г., Венецкая В.Й. Основные математико-статистические понятия и

формулы в экономическом анализе. - М.: Статистика, 1974.
4. Венцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задача по теории вероятностей и
математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк.,
1972.
7. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.:
Высш. шк., 1971.
8. Зайченко Ю.Л. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975.
9. Захаров Б.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.Л. Теория вероятностей. -М.: Наука,
1983.
10. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Статистика,
1979.
11. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк. 1973.
12. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. - М.: Высш. шк.,
1975. 13. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968.
14. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. - М.: Наука, 1970.
15. Солодовников А.С. Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1983.

Завдання 11

Тема. Інтервальні оцінки параметрів розподілу.

Мета. Навчити знаходити надійні інтервали для оцінювання математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення нормального розподілу.

Студент повинен знати, що таке довірча ймовірність, надійний інтервал, уміти оцінювати істинне значення вимірювальної величини.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Знаходження надійного інтервалу для невідомого значення, а при відомому σ і при невідомому σ.

2. Обчислення надійного інтервалу для оцінки σ.

3.

Теоретичні передумови до заняття.

Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки α за статистичною характеристикою α^+ називають ймовірність γ, яка задовольняє відношенню:

$$P(|\alpha-\alpha^+|)<\delta=\lambda\ ;$$

Довірчим називають інтервал від α^+ - δ до α^+ + δ, який покриває невідомий параметр α із заданою надійністю γ.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання *при відомому*

σ можна знайти за формулою:

$$P(\overline{x}-t\frac{\delta}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\frac{\delta}{\sqrt{n}})=2\Phi(t)=\gamma\ ;$$

де δ - точність оцінки; δ=$t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

якщо σ - *невідома величина*, то цей інтервал має вигляд:

$$P(\overline{x}-t\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\gamma\frac{S}{\sqrt{n}})=\gamma\ ;$$

Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення δ має вид:

$$S(1-g)<\sigma<S(1+g) \qquad \text{(при } g<1)$$

і $$0<\sigma<S(1+g) \qquad \text{(при } g>1).$$

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. Випадкова величина X має нормальний розподіл з невідомим середнім квадратичним відхиленням σ =3. Знайти довірчий інтервал для

оцінки невідомого математичного сподівання α за вибірковою середньою $\overline{x} = 4{,}1$; якщо об'єм вибірки n=96 і надійність γ = 0,95.
Розв'язок. Знайдемо t. Із відношення 2Φ(t)=0,095. Φ(t)=0,475. Із таблиці 2 знаходимо t=1,96.

Знайдемо точність оцінки $\delta = \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1{,}96 * 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$

Довірчий інтервал такий:

4,1 – 0,98 < $\overline{a}$ < 4,1+0,98 3,12 < $\overline{a}$ <5,08

P(3,12 < $\overline{a}$ <5,08) = 0,95

Приклад 2. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,975; точність оцінки математичного сподівання а генеральної сукупності за вибірковою серед…. рівна δ=0,3; якщо відомо, що σ =1,2 нормально розподіленої генеральної сукупності.
Розв'язок. Точність оцінки можна знайти ха формулою:

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \qquad n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

γ = 0,975 Φ(t) = 0,975/2 = 0,4875. По таблиці (додаток2) знайдемо t =2,24
n=81

Приклад 3. Із генеральної сукупності дістати вибірку об'єму n=10:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання а нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за вибіркової середньою за допомогою довірчого інтервалу.
Розв'язок.

$$\overline{x_B} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n} = 2; \qquad S = \sqrt{S^2} = 2{,}4;$$

Знайдемо t_γ, користуючись таблицею (додаток 3), γ = 0,95 , n=10, t_γ = 2,26.
Довірчий інтервал :

$$\overline{x_B} - t\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + t\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$$

0,3 < a < 3,7

Варіанти індивідуальних завдань.

1. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,95 невідомого математичного очікування а нормального розподіленої ознаки генеральної сукупності. Якщо генеральне середнє квадратичне відхилення σ = 5, вибіркова середня $\overline{x_b} = 14$ і об'єм вибірки n = 25.

2. Оцінити з надійністю 0,95 математичне очікування а нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу.
a)

x_i	1	6	11	16	21
n_i	5	4	2	6	7

б)

x_i	10	12	14	16	18
n_i	6	2	3	5	4

3. Знайти мінімальний об'єм вібірки, при якійз надійністю 0,925 точність оцінки математичного очікування а генеральної сукупності за вибірковою середньою рівна $\delta = 0{,}2$, якщо відоме середнє квадратичне відхилення $\delta = 1{,}5$ нормально розподіленої генеральної сукупності.

4. За даними вівибірки об'єму n = 16, знайдему "випадкове" середнє квадратичне відхилення S=1 нормально розподіленої кількості ознаки. Знайти довірчий інтервал, який покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю 0,95.

5. Виконано 12 вимірів одним приладом деякої фізичної величини. Відомо S=0,6. Знайти точність приладу з надійністю 0,99. Результати вимірів розподілені нормально.

6. На телефонній станції обстежувалася тривалість телефонної розмови. Була зроблена вибірка із 100 телефонних розмов. З'ясувалося, що середня тривалість розмови складає 3 хвилини. Враховуючи, що середня тривалість телефонної розмови розподілена нормально з стандартним відхиленням 0,6 хв.; знайдіть 99% довірчий інтервал для тривалості телефонної розмови.

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. Що називається надійним інтервалом і надійною ймовірністю (надійністю)?
2. Як будується інтервал надійності для математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом?
3. Чим відрізняється точкова та інтервальна оцінки?

1. Дано середнє квадратичне відхилення, вибіркова середня і об'єм вибірки нормально розподіленої величини. Знайти довірчій інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання із заданою надійністю.

$\sigma=2$ $\qquad$ n=10 $\qquad$ $\gamma=0{,}95$ $\qquad$ $\overline{x}_b=5{,}4$

2. Із інтегральної сукупності дістали вибірку $\begin{matrix} x_i 1-2-5-8-9 \\ n_i 3-4-6-4-3 \end{matrix}$ Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання а нормально розділеної ознаки генеральної сукупності за допомогою довірчого інтегралу.

3. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,95 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки за вибіркової середньою = 0,2, якщо середнє квадратичне відхилення дорівнює 2.

4. Виконано 10 вимірів одним приладом (без систематичної помилки) деякої фізичної величини, при чому “виправлення” середнє квадратичне відхилення S випадкових помилок вимірів виявилось рівним 0,8. Знайти точність приладу з надійністю 0,95. Припускається, що результати вимірів розподілені нормально.

5. Прийом на роботу у фірму проводиться на конкурсній основі. Претендент оцінюється по 100-бальній системі. Вибірка із 150 чоловік показала, що середній бал конкурсанта складає 70. Відомо, що стандартне відхилення генеральної сукупності складає 10. З надійністю γ=0,99 збудувати довірчий інтервал для невідомого середнього значення кількості набраних балів.

6. У вибірці з 25 зернин пшениці середня вага зернини склала $\bar{x} = 0{,}152$ при S=0.03 г. Вважаючи вагу зерна нормально розподіленою випадковою величиною встановити: а) інтервал надійності для середньої ваги зернини з гарантією γ = 0,99; б) який буде інтервал надійності коли об’єм усієї вибірки вважати n = 50?

Список літератури:

10. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1986.
11. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высш.шк.,1986.
12. Венецкий И.Г., Венецкая В.Й. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. - М.: Статистика, 1974.
13. Венцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио, 1972.
14. Гмурман В.Е. Руководство к решению задача по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
15. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1972.
16. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.: Высш. шк., 1971.
17. Зайченко Ю.Л. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975.
18. Захаров Б.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.Л. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1983.

10.Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Статистика, 1979.
11.Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк. 1973.
12.Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. - М.: Высш. шк., 1975.
13.Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968.
14.Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. - М.: Наука, 1970.
15.Солодовников А.С. Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1983.

Заняття 12

Тема. Перевірка статистичних гіпотез.

Мета. Навчити студентів перевіряти статистичні гіпотези за результатами розподілу вибірки.

Студент повинен знати види гіпотез та уміти перевіряти гіпотези на основі даних спостережень.

Уміння та навички з цієї теми в подальшому використовують при вивченні дисциплін рибогосподарського напрямку.

Структура заняття.

1. Перевірка гіпотези про рівність генеральних дисперсій. Критерій Фішера.

2. Перевірка гіпотези про рівність генеральних середніх. Китерій Стюдента.

4. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Критерій Пірсона.

Теоретичні передумови до заняття.

Статистичною називають гіпотезу про вид невідомого розподілу або про параметри відомого розподілу.

Перевірка нульової гіпотези (H_0) здійснюється в такій послідовності:

1. Вибирають рівень значимості;
2. Визначають критичну область, яка відповідає цьому рівню значимості;
3. Обчислюють спостережуване (фактичне, емпіричне, експериментальне) значення статистичної характеристики;
4. При попаданні цього значення у критичну область нульова гіпотеза відхиляється, при попаданні в область допустимих значень гіпотеза не відхиляється.

Нульовою (H_0) називають висунуту гіпотезу, яку потрібно перевірити. Гіпотезу, протилежну нульовій, називають конкуруючою (альтернативною H_1).

Помилка першого роду – полягає в тому, що нульова гіпотеза приймається в той час, як є вірною гіпотеза H_1. Помилка другого роду полягає в прийнятті гіпотези, коли вона невірна.

В якості критерію перевірки нульової гіпотези про рівність генеральних дисперсій, приймають відношення більшої виправленої дисперсії до меншої, тобто випадкову величину

$F_{сп} = \frac{S_б^2}{S_м^2}$

Перший випадок H_1: $D(x) > D(y)$

Критичну точку $F_{кр.}$ (α, k_1, k_2) знаходять по таблиці критичних точок розподілу Фішера – Снедекора (додаток 7), де $k_1 = n_1 - 1$ і $k_2 = n_2 - 1$ – ступені вільності, n_1 – об'єм вибірки, по якій обчислена більша виправлена дисперсія; n_2 – об'єм вибірки, по якій обчислена менша виправлена дисперсія.

Другий випадок: H_1: $D(x) \neq D(y)$

Критичну точку $F_{кр.}$ ($\frac{\alpha}{2}$, k_1, k_2) знаходять по таблиці (додаток 7), за рівнем значимості $\frac{\alpha}{2}$ ступеням вільності k_1, k_2. Якщо $F_{сп} < F_{кр.}$ - немає підстав відхилити нульову гіпотезу. Якщо $F_{сп} > F_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляємо.

Методичні рекомендації до виконання завдань.

Приклад 1. За двома незалежними вибірками об'ємів $n_1 = 12$ і $n_2 = 15$, які дістали з нормальних генеральних сукупностей X і У знайдені $S^2_x = 11{,}41$ і $S^2_y = 6{,}52$. При рівні значимості 0,05, перевірити нульову гіпотезу H_o: Д(х) = Д(у) про рівність генеральних дисперсій, при конкуруючій гіпотезі: H_i : Д(х) > Д(у).

Розв'язок. Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої

$$Fcn = \frac{S^2x}{S^2m} = \frac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$$

Критична область правостороння (**Д(х) > Д(у)**). По таблиці (додаток 7) α=0,05 і значенням k_1=12-1=11, і k_2 = 15-1=14, кр. (0,05; 11; 14)=2,57.

Так як Fcn< Fкр немає підстав відхилити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій.

Приклад 2. За двома незалежними малими вибірками обємі в n = 5 і m = 6, які дістали із нормальних генеральних сукупностей X і У, знайдені вибіркові середні, $\bar{x}$=3,3, $\bar{y}$=2,48. При рівні значимості 0,05; перевірити нульову гіпотезу Но: М(х)=М(у), при конкуруючій гіпотезі H_1:М(х)≠М(у). Відомо, що $S^2_x = 0{,}25$ і $S^2_y = 0{,}108$.

Розв'язок. Так як вибіркові дисперсії різні, перевіримо нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, користуючись критерієм Фішера – Снедекора. Но: D(x)=D(y).

$$F_{сп} = \frac{0{,}25}{0{,}108} = 2{,}31$$

H_1: D(x)>D(y), так як S^2_x значно більша від S^2_y.

По таблиці (додаток7) при α = 0,05 k_1=5-1=4, і k_2 = 6-1=5, знаходимо Fкр. (0,05; 4; 5)=5,19.

Так як $F_{сп} < F_{кр}$ приймаємо нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій.

Тепер порівняємо середні. Обчислимо спостерігаюче значення критерія Стюдента:

$$T_{сп.} = \bar{x} - \bar{y} * \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

$T_{сп} = 5{,}97$

За умовою критична область – двостороння. За рівнем значимості 0,05 і числу ступенів вільності k =5+6-2=9, знаходимо із таблиці (додаток 6) критичну точку

$t_{двост.кр.}(0{,}05;\ 9) = 2{,}26$

$T_{сп} > t_{двост.кр.}$ – нульову гіпотезу, про рівність генеральних середніх відхиляємо. Іншими словами: вибіркові середні відрізняються значно.

Приклад 3. Використовуючи Критерій Пірсона, при рівні значимості 0,05; перевірити чи згоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності X з емпіричним розподілом вибірки об'єму n = 200:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	30	13

Розв'язок. Знайдемо $\overline{X}_в=12{,}63$ $\sigma_в=4{,}695$. Обчислимо теоретичні частоти

$$n^1{}_i = \frac{n \cdot h}{\sigma b} \cdot \varphi(U_i) = 85.2 \cdot \varphi(U_i)$$

Отримаємо

n_i	15	26	25	30	26	21	24	30	13
$n_i^/$	9,1	16,5	25,3	32	33,9	29,8	22	13,5	7,0

Знайдемо

$$X^2_{сп.} = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i$$

$X^2_{сп.}=22{,}2$

Із таблиці (додаток 5) знаходимо $X^2_{кр}(0{,}05,\ 6)=1{,}635$

$K = s-3 = 9-3 = 6$

Отже $X^2_{сп} > X^2_{кр}$ гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності відхилено.

Варіанти індивідуальних завдань.

1. За двома незалежними вибірками з об'ємами $n_1 = 11$ і $n_2 = 14$, які дістали із нормальних генеральних сукупностей x і y, знайдені виправлені вибіркові дисперсії $S^2_x = 0{,}76$ і $S^2_y = 0{,}38$. При рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(x) = D(y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(x) > D(y)$.

2. Двома приладами виміряні 5 деталей. Отримані наступні результати (в мм):
x_1=4 x_2=5 x_3=6 x_4=7 x_5=8
y_1=5 y_2=5 y_3=8 y_4=4 y_5=6
При рівні значимості α = 0,01 перевірити нульову гіпотезу дисперсії S^2_x = 0,84 і S^2_y = 0,4. Потрібно при рівні значимості α = 0,05 перевірити нульову гіпотезу H_0: D(x) = D(y) про рівність генеральних дисперсій, при конкуруючій гіпотезі H_1: D(x) > D(y).

3. За двома незалежними вибірками з об'ємами n_1 = 14 і n_2 = 10, які дістали із нормальних генеральних сукупностей x і y, знайдені виправлені вибіркові дисперсії S^2_x = 0,84 і S^2_y = 2,52. При рівні значимості α = 0,1 перевірити нульову гіпотезу H_0: D(x) = D(y) про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі H_1: D(x) $\neq$ D(y).

4. За двома незалежними малими вибірками об'ємами n_1 = 12 і n_2 = 18, які дістали із нормальних генеральних сукупностей x і y, знайдені вибіркові середні $\overline{y}$=29,2 і $\overline{x}$=31,2 і виправлені H_0: D(x) = D(y) при конкуруючій гіпотезі H_1: D(x) $\neq$ D(y).

5. Двома методами проведені вибірки. Одної і тої величини Отримані результати:
а) в першому випадку x_1=9,6 x_2=10 x_3=9,8 x_4=10,2 x_5=10,6;
б) в другому випадку y_1=10,4 y_2=9,7 y_3=10 y_4=10,3;
Чи можна рахувати, що обидва методи забезпечують однакову точність вимірів, якщо прийняти рівень значимості α = 0,1? Припускається, що результати вимірів розподілені нормально і вибірки незалежні.

6. При рівні значимості α = 0,05 необхідно перевірити нульову гіпотезу H_0: M(x) = M(y) про рівність генеральних середніх нормальних сукупностей X і У при конкуруючій гіпотезі H_1: M(x) > M(y) за малими незалежними вибірками з об'ємами n = 10 і m = 16 .Отримані наступні результати:

x_i	12,3	12,5	12,8	13,0	13,5
n_i	1	2	4	2	1

y_i	12,2	12,3	13,0
n_i	6	8	2

7. Використовуючи критерій Пірсона при рівні значимості α = 0,05 перевірити чи згоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з емпіричним розподілом вибірки об'єму n = 200

x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

Контрольні питання та завдання для самопідготовки.

1. В чому полягає задача статистичної перевірки?
2. Сформулюйте основний принцип перевірки гіпотез.
3. Як використовується F-критерій Фішера при порівнянні двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей?
4. В чому полягає ідея застосування критеріїв згоди при розв'язуванні задач при узгодженні теоретичного та емпіричного розподілів?
5. Який критерій використовують при перевірці двох середніх нормальних генеральних сукупностей?

1. Використовуючи критерій Пірсона при рівні значимості $\alpha = 0{,}01$ встановити випадково чи значимо розходження між емпіричними частотами n_i і теоретичними частотами $n_i^{/}$ які обчислені, виходячи з гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності X:

n_i 8 16 40 32 36 18 10

n_i 6 18 36 76 39 18 7

2. За двома незалежними вибірками об'ємом n = 9 і m = 16, які дістали із нормальних генеральних сукупностей знайдені виправлені вибіркові дисперсії $S^2_x = 34{,}02$ і $S^2_y = 12{,}15$. При рівні значимості $\alpha = 0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу H_0: D(x) = D(y) про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі H_1: D(x) > D(y).

3. Для порівняння точності двох верстатів – автоматів взяли дві вибірки з об'ємами n = 10 і m = 8. В результаті вимірів контролюючого розміру відібраних деталей отримані наступні результати:

x_i 1,08 1,10 1,12 1,14 1,15 1,25 1,36 1,38 1,40 1,42

y_i 1,11 1,12 1,18 1,22 1,33 1,35 1,36 1,38

Чи можливо рахувати, що верстати мають однакову точність ($\alpha = 0{,}1$)

H_0: D(x) = D(y), $\alpha = 0{,}1$ і H_1: D(x) $\neq$ D(y).

4. За двома незалежними вибірками об'ємом n = 5 і m = 6, які дістали із нормальних сукупностей X і У, знайдені вибіркові середні $\overline{y} = 15{,}9$ і $\overline{x} = 14{,}1$ Відомо, що $S^2_x = 14{,}76$ і $S^2_y = 4{,}96$. При рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: M(x) = M(y) при конкуруючій гіпотезі H_1: M(x) $\neq$ M(y).

Відповідь: $T_{сп.} = 0{,}088$ $t_{пр.кр.}$ (0,05, 9) = 2,26

Приймаємо нульову гіпотезу.

5.Використовуючи критерій Персона, при рівні значущості $\alpha=0{,}05$ встановити випадкове чи значене розходження між емпіричними частотами n_i і теоретичними частотами, які обчисленні, виходячи із гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності:

n_i 5 10 20 8 7

n_i 6 14 18 7 5

n_i	6	8	13	15	20	16	10	75
n_i	5	9	14	16	18	16	9	67

73

Список літератури:

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1986.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. Пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Высш.шк.,1986.
3. Венецкий И.Г., Венецкая В.Й. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. - М.: Статистика, 1974.
4. Венцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио,1972.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задача по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1972.
7. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.: Высш. шк., 1971.
8. Зайченко Ю.Л. Исследование операций. - Киев: Вища школа, 1975.
9. Захаров Б.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.Л. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1983.
10. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Статистика, 1979.
11. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк. 1973.
12. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. - М.: Высш. шк., 1975.
13. Пугачев В.С. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1968.
14. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. - М.: Наука, 1970.
15. Солодовников А.С. Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1983.