МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДВНЗ «ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладної математики

та економічної кібернетики

Інструктивно-методичні матеріали

до проведення самостійної роботи з дисципліни « Вища математика»

спеціальності 201 - «Агрономія»

для студентів І курсу

агрономічного факультету

Херсон – 2017

Автор *Г.М Кавун* - старший викладач кафедри прикладної математики та економічної кібернетики

Рецензент *В.І.Кузьмич* - завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Розглянуто та затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економічної кібернетики від 21 вересня 2016 року протокол № 2.

Вступ

Програма з вищої математики для студентів агрономічного факультету передбачає вивчення ряду питань з вищої математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, що є необхідним для оволодіння спеціальними дисциплінами. Студенти повинні ознайомитись і засвоїти основні розділи вищої математики: функції, границі, похідна та інтеграл, що забезпечить достатній рівень вивчення інших розділів програм, в яких подаються поняття теорії ймовірностей та основи математичної статистики, законів розподілення випадкових величин та статистичних оцінок їх параметрів, перевірки статистичних гіпотез, кореляційного та регресивного аналізу. Досконале вивчення цих тем можливе тільки в сукупності із розв’язанням задач, опис питань з теорії полегшить підготовку теоретичного матеріалу для засвоєння тем.

Самостійна робота студентів

Основними формами самостійної роботи над лекційним матеріалом є розгляд теми за підручником або іншою навчально-методичною літературою, консультації у викладачів з окремих питань, застосування засвоєного матеріалу до розв’язання відповідних задач.

Самостійна робота студента передбачає регулярну працю над теоретичними питаннями теми наступного практичного заняття, виконання письмових домашніх завдань по розв’язку задач, підготовку до поточних письмових (коротких на 10-15 хв.) самостійних робіт та до двохгодинних контрольних робіт (2 рази в семестрі) з окремих розділів, своєчасне виконання розрахунково-графічної семестрової роботи; свідоме повторення матеріалу семестрової програми під час підготовки до екзамену. Важливе значення надається опрацюванню тем програми, виділених для самостійного вивчення студентами.

Для засвоєння тем програми, які розглядаються на лекціях і практичних заняттях планується для самостійної роботи (тобто для опрацювання цих тем) в межах 40% - 60% годин від відповідних годин аудиторних занять.

Тематичний план самостійної роботи
з дисципліни «Прикладна математика»

№ модуля	№ *п/п*	Тема заняття	Кількість годин
1.	1.	Границі . Обчислення границь.	2
	2.	Похідна функції, яка задана в параметричному та в неявному виді.	4
	3.	Дослідження функції. Побудова графіка	4
	4.	Обчислення площ фігур за допомогою визначеного інтеграла.	2
	5.	Обчислення об’ємів тіл	2

		обертання за допомогою визначеного інтеграла.	
2.	1.	Формули комбінаторики. Біном Ньютона.	4
	2.	Означення інтегральної та диференціальної функції розподілу, їх властивості.	4
	3.	Обчислення теоретичних частот варіюючи ознак за допомогою нормального закону розподілу.	4
	4.	Обчислення ймовірності даного відхилення. Правило трьох сигм.	4
3.	1.	Статистичні помилки вибіркових показників	4
	2.	Крапкові та інтервальні оцінки параметрів розподілу	4
	3.	Перевірка статистичних гіпотез.	6
	4.	Нелінійна кореляція. Кореляційне відношення та його властивості.	4
	5.	Застосування методів найменших квадратів при обчисленні параметрів рівняння криволінійної параболічної залежності за дослідними даними.	4
	6.	Коефіцієнти множинної та часткової кореляції та їх властивості.	4
	7.	Визначення параметрів рівнянь часткових та повних лінійних залежностей від двох змінних методами найменших квадратів та коефіцієнтів регресії.	4
Всього			64

Для перевірки виконання самостійної роботи студентами, викладач постійно перевіряє конспекти з теоретичним матеріалом. Під час виконання модульних робіт включаються в перевірку як теоретичні, так і практичні завдання.

Методичні розробки для виконання завдань

Тема. Обчислення границь

Мета: навчити обчислювати границі функцій, використовуючи правила і теореми про границі

Завдання для самостійної роботи:

1. нескінченно мала і нескінченно велика функції в точці X_0;
2. ліва і права границі функції в точці X_0;
3. неперервність функції в точці;
4. точки розриву I та II роду.

Теоретична частина.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X. Припустимо, що точка $x_0 (x_0 \in X$ або $x_0 \notin X)$ - гранична точка множини X, тобто така, в довільному колі якої є точки даної множини, відмінні від x_0.

Число b називається *границею функції* f в точці x_0 і записується $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, якщо $\forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \succ 0 \quad \forall x \in X, \quad 0 \prec |x - x_0| \prec \delta : |f(x) - \delta| \prec \varepsilon.$

У випадку, коли $x_0 = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists \Delta \succ 0 \quad \forall x \in X, \quad |x| \succ \Delta : |f(x) - b| \prec \varepsilon.$

Функція f називається *нескінченно малою* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Нескінченно малі функції мають ті ж самі властивості, що й нескінченно малі послідовності.

Функція f називається *нескінченно великою* в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall E \succ 0 \quad \exists \delta \succ 0 \quad \forall x \in X, \quad 0 \prec |x - x_0| \prec \delta : |f(x)| \succ E.$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b, \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c,$ то

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c; \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c; \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0. \qquad (3)$$

<u>Приклад 1.</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 - 4}$.

Оскільки $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 6x - 16) = 0$ і $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0,$ то маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для її розкриття перетворимо дану функцію, скоротивши чисельник і знаменник на $(x - 2)$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 8)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 8}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x + 8)}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 2)} = \frac{2 + 8}{2 + 2} = \frac{5}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Помноживши і розділивши на вираз спряжений до $\sqrt{x+1}-2$, тобто на $\sqrt{x+1}+2$ дістанемо

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=6\cdot 4=24.$$

Важливу роль при обчисленні границь відіграють такі **чудові границі**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y}=e; \qquad (5)$$

Крім того, часто використовуються також такі формули:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a\succ 0,\quad a\neq 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1; \qquad (6)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\quad a\succ 0,\quad a\neq 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \quad (7)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\Re.$$

Приклад 3. обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{x}$.

Маємо невизначеність типу 1^{∞}, яку розкриватимемо, використовуючи (5):

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}-1)^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7})^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}}=e^8$$

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Оскільки $\arcsin x\approx x$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

Число b називається **правою (лівою) границею функції** f **в точці** x_0, якщо $\forall\varepsilon\succ 0\quad \exists\delta\succ 0\quad \forall x\in X,\quad x_0\prec x\prec x_0+\delta\quad (x_0-\delta\prec x\prec\prec x_0):\left|f(x)-b\right|\prec\varepsilon$.

Позначають: праву границю символом $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ або $f(x_0+0)$, а ліву границю символом $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ або $f(x_0-0)$. Для існування границі функції f у точці x_0 необхідно й достатньо, щоб $f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

Функція $y = f(x)$ з областю визначення X називається **неперервною в точці** x_0, якщо виконуються такі умови:

1) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0, тобто $x_0 \in X$;
2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо умова 1-а умова виконується, то умова 2 і 3 еквівалентні такому:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0,$$

де $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приріст функції f у точці x_0, що відповідає приростові аргументу $\Delta x = x - x_0$.

Якщо в точці x_0 не виконується принаймні одна з умов 1 – 3, то x_0 називається точкою розриву функції f. При цьому розрізняють такі випадки:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, але функція не визначена в точці x_0 або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. У цьому випадку x_0 називається точкою **усувного** розриву функції.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не існує. Якщо при цьому існують обидві однобічні границі $f(x_0 + 0)$ і $f(x_0 - 0)$ (очевидно, не рівні між собою), то x_0 називається точкою **1-го роду**.

3. У решті випадків x_0 називається точкою розриву **2-го роду**.

Практична частина.

1. Використовуючи означення границі функції, довести, що:

1) $\lim\limits_{x \to 4} (6 - 5x) = -14$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x - 3}{2x + 1} = 2$.

2. Обчислити границі: 1) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x - 4} + 1 \right)$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$; 5) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$; 6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$;

7) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x + a} - \sqrt{x})$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$; 9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2} - x \right) tg x$;

11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$; 12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \sin x}{\dfrac{1}{\cos x} - 1}$; 13) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x - 4}{3x + 2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$; 14) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2} \right)^x$.

3. Дослідити функції на неперервність і визначити характер точок розриву:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\left(2x^2 + 3\right), & -\infty \prec x \le 1, \\ 6 - 5x, & 1 \prec x \prec 3, \\ x - 3, & 3 \le x \prec \infty \end{cases}$$

Контрольні питання:

1. Що називається границею функції?
2. Яка функція називається нескінченно малою і нескінченно великою?
3. Яка функція називається неперервною в точці?
4. За яких умов точка розриву буде точкою розриву I роду (II роду)?

Тема: Похідна функції заданої в параметричному виді. Похідна неявної функції.

Мета: Навчити знаходити похідні функцій заданих в параметричному виді та похідні неявних функцій.

Завдання для самостійної роботи:

1. Яка функція називається неявною?
2. Знаходження похідної неявної функції.
3. Який вигляд має функція, задана параметрично?
4. Обчислення похідної функції, задана параметрично.

Теоретична частина.

Нехай на деякому проміжку X визначена функція $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x \in X$ і надамо аргументу довільний приріст $\Delta x \neq 0$ такий, щоб точка $x_0 + \Delta x \in X$. Функція набуде при цьому приросту $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною (або похідною першого порядку, першою похідною) функції $y = f(x)$, $x \in X$, в точці x_0 називається границя

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Числа

$$f'-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{і} \quad f'+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

називаються відповідно *лівою і правою похідними* функції $y = f(x)$ $x \in X$ в точці x_0. Для існування похідної $f'(x_0)$ функції f в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб її ліва і права похідні в цій точці існували і збігалися, тобто $f'-(x_0) = f'+(x_0)$.

Похідна функції f, розглядувана на множині тих точок, де вона існує, сама є функцією. Процес знаходження похідної називають *диференціюванням*. Якщо функція має похідну у деякій точці, то її називають *диференційованою* у цій точці.

Наведемо *таблицю похідних* основних елементарних функцій.

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \succ 0;$

2) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a \succ 0; \quad \left(e^x\right)' = e^x, \quad x \in \Re;$

3) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e, \quad a \succ 0, \quad a \neq 1, \quad x \succ 0; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \succ 0;$

4) $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \Re;$

5) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \Re;$

6) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z;$

7) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi, \quad n \in Z;$

8) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \prec x \prec 1;$

9) $(arctgx)' = -(arcctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \Re.$

Правила диференціювання функцій.

а) Нехай C - стала і f, g - диференційовані функції. Тоді:

1) $(C)' = 0;$ 2) $(f \pm g)' = f' \pm g';$ 3) $(Cf)' = Cf';$ 4) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g';$

5) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g + g' \cdot f}{g^2}, \quad g \neq 0.$

б) Нехай функція $x = \varphi(t), \ t \in T,$ має похідну в точці t_0, а функція $y = f(x)$, $x \in X$, має похідну в точці $x_0 = \varphi(t_0)$. Тоді складена функція $y = f(\varphi(t)), \ t \in T$, в точці t_0 має похідну, рівну $\left(f(\varphi(t_0))\right)' = f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0).$

в) Якщо функція $y = f(x), \ x \in X$, має в точці x_0 похідну $f'(x_0) \neq 0$, то обернена функція $x = f^{-1}(y), \ y \in Y$, якщо вона існує, також має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, причому $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

г) Якщо на деякому проміжку диференційована функція $y = y(x), \ x \in X$, задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то її похідну y' можна знайти з рівняння $\dfrac{d}{dx}F(x, y) = 0$, де F розглядається як складена функція змінної x.

Приклад 1. Використовуючи означення похідної, обчислити похідну функції $f(x) = \sin 2x, \quad x \in \Re$.

Згідно з (1)

$$(\sin 2x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin 2(x + \Delta x) - \sin 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos(2x + \Delta x) = 2 \cdot \cos 2x$$

Приклад 2. Знайти похідні функцій: а) $y = \dfrac{2^x \cos x}{\ln x}$; б) $y = tg\sqrt{1+x}$.

Користуючись правилами обчислення похідних добутку й частки, а також формулами диференціювання функцій, маємо:

а) $y' = \dfrac{\left(2^x \cos x\right)' \ln x - 2^x \cos x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \dfrac{\left(2^x \ln 2 \cdot \cos x - 2^x \sin x\right)\ln x - 2^x \cos x \cdot \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} =$

$= \dfrac{2^x}{x \ln^2 x}\left(\ln 2 \cdot \cos x \cdot x \cdot \ln x - \sin x \cdot \ln x - \cos x\right)$

б) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 \sqrt{1+x}} \cdot \left(\sqrt{1+x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 \sqrt{1+x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot (x+1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x} \cdot \cos^2 \sqrt{1+x}}$

Часто при обчисленні похідних від деяких функцій зручно спочатку про логарифмувати дану функцію, а потім диференціювати одержану рівність.

Приклад 3. Знайти похідну степенево-показникової функції $y = \left(x^2+1\right)^{4x}$.

Оскільки $y \succ 0$, то $\ln y = \ln\left(x^2+1\right)^{4x}$, $\ln y = 4x \ln\left(x^2+1\right)$.

Про диференціюємо дану рівність, враховуючи те, що y є функцією від x:

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = 4\ln\left(x^2+1\right) + 4x \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x, \quad y' = y\left(4\ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{8x^2}{x^2+1}\right).$

Підставивши у даний вираз $y = \left(x^2+1\right)^{4x}$, одержимо

$y' = \left(x^2+1\right)^{4x}\left(4\ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{8x^2}{x^2+1}\right).$

Приклад 4. Знайти похідну y' диференційованої функції $y = y(x)$, заданої неявно рівнянням $xy + \sin y = 0$.

Шукану похідну знаходимо з рівняння $\dfrac{d}{dx}(xy + \sin y) = 0$, звідси $y + xy' + \cos y \cdot y' = 0$ і, отже, $y' = \dfrac{-y}{x + \cos y}$.

Практична частина.

1. За допомогою основних правил диференціювання та таблиці похідних обчислити похідні функцій:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; 2) $y = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$; 3) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$; 4) $y = x^2 \cos x$;

5) $y = \dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$; 6) $S = \dfrac{t}{2} - \dfrac{2}{t}$; 7) $y = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; 8) $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$; 9) $y = -arctgx - \dfrac{1}{x}$;

10) $y = \dfrac{2\ln x}{e^x + e^{-x}}$.

2. Знайти похідні складених функцій:

1) $y = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$; 2) $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$; 3) $y = ctg^3 \dfrac{x}{3}$; 4) $y = \dfrac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$;

5) $y=\ln(1+\cos x)$;   6) $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;   7) $y=\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$;   8) $y=a^{\sin x}$;

9) $y=e^{\frac{x}{a}}\cos\frac{x}{a}$;   10) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x+1}}}$; 11) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$;   12) $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$;

13) $y=\ln\cos\left(arctg\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$.

3. Знайти похідні функцій, заданих неявно:
1) $y^3+x^3-3axy=0$; 2) $\sin(xy)+\cos(xy)=tg(x+y)$;   3) $x^y=y^x$.

Контрольні питання:

1. Що називається похідною функції?
2. Сформулювати правила диференціювання функції.
3. Яка похідна називається лівою і правою похідною функції в точці x_0?

Тема: Дослідження функції та побудова графіків.

Мета: Навчити будувати графіки функцій використовуючи схему дослідження.

Завдання для самостійної роботи:

1. При яких умовах функція буде зростаючою або складною?
2. Необхідні та достатні умови екстремуму.
3. Знаходження точок перегину. Інтервали опуклості і вгнутості функції.

Теоретична частина.

Функція $y=f(x),\ x\in X$, називається зростаючою (спадною) на інтервалі $(a,b)\subset X$, якщо з нерівності $x_1\prec x_2$, де $\{x_1,x_2\}\subset(a,b)$ випливає нерівність $f(x_1)\prec f(x_2)$ $(f(x_1)\succ f(x_2))$.

Функція $y=f(x),\ x\in X$, називається неспадною (не зростаючою) на інтервалі $(a,b)\subset X$, якщо з нерівності $x_1\prec x_2$, де $\{x_1,x_2\}\subset(a,b)$ випливає нерівність $f(x_1)\le f(x_2)$ $(f(x_1)\ge f(x_2))$.

Якщо функція f диференційована на інтервалі (a,b) і $f'(x)\succ 0$ $(f'(x)\ge 0)$ при всіх $x\in(a,b)$, то функція f зростає (не спадає) на (a,b); якщо ж $f'(x)\prec 0$ $(f'(x)\le 0)$ при всіх $x\in(a,b)$, то f спадає (не зростає) на цьому інтервалі. Зазначимо, що якщо $f'(x)=0,\ x\in(a,b)$, то на цьому інтервалі функції є сталою. Тому в простих випадках область визначення функції можна розбити на скінченне число проміжків монотонності. Кожний з інтервалів монотонності обмежений критичними точками – точками, в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує. Точки x, у яких $f'(x)=0$, називають *стаціонарними*.

Якщо існує такий окіл точки x_0, що для всякої точки $x \neq x_0$ цього околу виконується нерівність $f(x) \succ f(x_0)$ $(f(x) \prec f(x_0))$, то точка x_0 називається *точкою локального мінімуму(максимуму)* функції $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ - мінімумом (максимумом) цієї функції. Точки мінімуму та максимуму називаються її *точками екстремуму.*

Необхідні умови екстремуму. Нехай точка x_0 є точкою екстремуму функції f, тоді і цій точці або $f'(x_0) = 0$, або $f'(x_0)$ не існує. Екстремуми функції слід шукати серед критичних точок.

Достатні умови екстремуми неперервної функції. Нехай функція $y = f(x),\ \ x \in X$, диференційована в деякому околі точки $x_0 \in X$, можливо, окрім самої точки, в якій вона неперервна. Тоді точка x_0 буде точкою максимуму, якщо існує окіл точки x_0, в якому $f'(x) \succ 0$ при $x \prec x_0$ і $f'(x) \prec 0$ при $x \succ x_0$. Якщо ж $f'(x) \prec 0$ при $x \prec x_0$ і $f'(x) \succ 0$ при $x \succ x_0$, то точка x_0 буде точкою локального мінімуму.

Якщо функція f має в точці x_0 першу і другу похідну, причому $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму при $f''(x_0) \prec 0$ і точкою мінімуму при $f''(x_0) \succ 0$. Якщо ж $f''(x_0) = 0$, то треба проводити додаткові дослідження.

Графік диференційованої функції $y = f(x),\ \ x \in X$, називається опуклим вниз (вгору) на інтервалі (a,b), якщо він розміщений вище (нижче) будь-якої дотичної до нього в довільній його точці.

Якщо функція f двічі неперервно диференційована на (a,b) і $f''(x) \succ 0$ $(f''(x) \prec 0)$, то її графік є опуклим вниз (вгору) на цьому інтервалі. В простих випадках область визначення функції f можна розбити на скінченне число інтервалів з сталим напрямком опуклості. Кожний з цих інтервалів обмежений точками, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує. Точка $(x_0, f(x_0))$, в якій напрямок опуклості графіка функції змінюється на протилежний, називається **точкою перегину**.

Необхідною умовою існування точки перегину x_0функції f є рівність $f''(x_0) = 0$ або те, що $f''(x_0)$ не існує. Якщо ж функція f є диференційованою в точці x_0 і має другу похідну в деякому її околі, можливо, окрім самої точки x_0, і при переході через неї друга похідна змінює знак, то в точці $(x_0, f(x_0))$ графік функції має перегин.

Перед побудовою графіка функції слід вияснити, чи має функція вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти. Якщо для деякої точки розриву a функції f

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$$

то пряму $x = a$ називають **вертикальною** асимптотою графіка функції f.

Для того щоб пряма $y = kx + b$ була асимптотою графіка функції f при $x \to \infty$ (при $x \to -\infty$), необхідно і достатньо щоб

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k\right);$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b\right).$$

Якщо $k = 0$, то маємо горизонтальну асимптоту, а при $k \neq 0$ - похилу.

Для побудови графіка функції $y = f(x),\ x \in X$, з неперервною другою похідно (скрізь в області визначення функції, можливо, крім скінченного числа точок) спочатку з'ясовують деякі особливості функції: симетрію, періодичність, сталість знаку, нулі, точки перетину з осями, точки розриву і т.п. Потім, використовуючи першу і другу похідні, знаходять точки екстремуму і перегину, інтервали монотонності й опуклості, а також асимптоти.

Приклад. Дослідити функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ та побудувати її графік.

Функція визначена і неперервна на всій числовій осі, парна і додатна. Це означає, що її графік симетричний відносно осі Oy і лежить вище осі Ox. Оскільки $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = 0,$ $\quad b = \lim\limits_{x\leftarrow\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, то пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою. Обчислимо першу похідну $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) = -xf(x)$. Звідси одержуємо, що $f'(x) = 0$, коли $x = 0$, бо $f(x) \succ 0,\ x \in \Re$. Якщо $x \prec 0$, то $f'(x) \succ 0$, а якщо $x \succ 0$, то $f'(x) \prec 0$. Отже, в точці $x = 0$ функція має максимум $f_{\max} = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 \approx 0{,}4$.

Для відшукання проміжків опуклості функції знайдемо другу похідну $f''(x) = f(x) \cdot x^2 - f(x) = f(x)(x^2 - 1)$. У точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ друга похідна дорівнює нулю. На інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(1;\infty)$ друга похідна $f''(x) \succ 0$, тобто графік опуклий вниз, а на інтервалі $\left(-1;\ 1\right)$ $f''(x) \prec 0$, тобто графік опуклий вгору. Звідси випливає, що в точках $(-1; f(-1))$ і $(1; f(1))$ графік функції має перегин.

Практична частина.

1. Знайти інтервали монотонності функцій:

1) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$; 2) $f(x) = x - e^x$; 3) $f(x) = 2x^2 - \ln x$;

4) $f(x) = x^2 - 2\cos x,\quad x \in [0;2\pi]$.

2. Знайти екстремуми функцій:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$; 2) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$; 3) $f(x) = x - \ln(1 + x)$; 4) $f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{4}{5}}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x)=x^4-2x^2+5$ на $\left[-2;\ 2\right]$; 2) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$ на $\left[-1;\ 2\right]$;

3) $f(x)=\dfrac{1-x-x^2}{1+x-x^2}$ на $\left[0;\ 1\right]$.

4. Знайти найбільші та найменші значення функцій:

1) $f(x)=x+\sqrt{x},\quad x\in\left[0;\ 4\right]$; 2) $f(x)=e^{2x}-e^{-2x},\quad x\in\left[-2;\ 1\right]$;

3) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in\Re$.

5. Знайти ділянки опуклості графіка кривої:
1) $f(x)=x^5+5x-6$; 2) $f(x)=xe^x$.
6. Знайти точки перегину кривої:
1) $y=(x-5)^{\frac{5}{3}}+2$; 2) $y=(x-4)^5+4x+4$.
7. Провести дослідження та побудувати графіки функцій:
1) $y^2=x^3$; 2) $y^2=(x+3)^2$; 3) $y=\dfrac{e\cdot\ln x}{x}$; 4) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; 5) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;

6) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.

Контрольні питання:

1. Яка функція називається зростаючою (спадною)?
2. Які точки називаються точками екстремуму?
3. За яких умов існують точки екстремуму?
4. Яка точка називається точкою перегину?
5. Яка пряма називається вертикальною асимптотою?
6. За якими формулами обчислюють значення k та b у рівнянні невертикальної асимптоти $y=kx+b$?

Тема: Застосування визначеного інтеграла.
Мета: Навчити застосовувати визначений інтеграл при обчисленні площ, об’ємів та довжини дуги кривої.
Завдання для самостійної роботи:

1. Знаходження площ плоских фігур, обмежених графіками функцій.
2. Обчислення об’ємів тіл обертання.
3. Обчислення довжини дуги кривої.

Теоретична частина.

<u>Площа плоскої фігури.</u> Площа фігури, обмеженої графіком неперервної функції $y=f(x)\ \ (f(x)\geq 0),\quad x\in[a;b]$, двома прямими $x=a$ і $x=b$ і віссю Ox (площа криволінійної трапеції), обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Площа фігури, обмеженої графіками неперервних функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a;b]$, і двома прямими $x = a$, $x = b$, визначається за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (2)$$

<u>Довжина дуги кривої.</u> Якщо гладка крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, то довжина l її дуги дорівнює:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

де a і b - абсциси кінців дуги.

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

<u>Об'єм тіла.</u> Якщо площа S перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$, то об'єм тіла обчислюється за формулою:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Якщо ми маємо тіло обертання, то S знаходиться достатньо просто. Так, якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі Ox, то $S(x) = \pi f^2(x)$, $x \in [a;b]$, і

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Практична частина.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

4) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$; 5) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $y = 0$.

2. Знайти довжину дуги кривої: 1) $y^2 = x^3$, що відтинається прямою $x = \dfrac{4}{3}$;

1) $y = \ln(\sin x)$, $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$.

3. Обчислити об'єми тіл, утворених при обертанні навколо відповідних осей фігур, обмежених кривими:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm b$ навколо осі Oy;

2) $y^2 = x^3, \quad 0 \le x \le \pi$ навколо осі Ox;

3) $y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad y = 0$ навколо осі Ox;

4) $y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right), \quad x \ge 1$ навколо осі Ox;

5) $y = xe^{-\frac{x}{2}}, \quad x \succ 0$ навколо її асимптоти.

Контрольні питання:

1. Як обчислити площу плоскої фігури за допомогою визначеного інтеграла?
2. За якою формулою знаходять довжину дуги кривої?
3. Як обчислити об'єм тіла обертання, утвореного обертанням фігур навколо осі Ox?

Тема: Обчислення теоретичних частот нормального розподілу.

Мета: Вивчити, як розраховуються теоретичні частоти, для чого вони потрібні та на що вказують.

Завдання для самостійної роботи:

1. Вивчити як визначається наближене значення ймовірності неперервної випадкової величини та який вона має зв'язок із густиною ймовірності.
2. Вивчити що називається нормальною кривою та її властивості.
3. Вивчити що таке перша функція нормованого відхилення та її властивості.
4. Вивчити як визначаються теоретичні частоти.

Теоретична частина.

Крім математичної статистики, у наукових, технічних і виробничих дослідах, в тому числі аграрних, широко використовується теорія ймовірностей, за якою оцінюється поява випадкових подій А. До таких належать виробничі показники, результати дослідів тощо. Розрізняють класичні та статистичний типи ймовірностей подій, перший з яких є відношення числа m наслідків, що сприяють події А, до загальної їх кількості n $\left(P(A) = \frac{m}{n}\right)$, другий – відношення дослідів m, в яких з'являється подія А, до їх загальної кількості n $\left(P_n(A) = \frac{m}{n}\right)$. При збільшенні n P_n прямує до P, тобто $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} P_n(A)$. Таким чином, класична ймовірність є теоретичною, а статистична – експериментальною величиною.

При збільшенні об'єму вибірки або кількості дослідів відносні частоти $v_i = \frac{f_i}{n}$ наближається до значень ймовірностей p_i, тобто:

$$p_i = \frac{f_i}{n}. \qquad (1)$$

Для неперервної випадкової величини (ознаки) x, ймовірність $p(x)$ знайти це значення в інтервалі від x до $x+\Delta x$ виражається формулою Муавра, Гаусса, Лапласа.

$$p_i = y_i \cdot \Delta x, \qquad (2)$$

де:

$$y_i = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\left(x_i - \bar{x}\right)}{2 \cdot \sigma^2}} \qquad (3)$$

- густина (щільність) ймовірності.

Введемо першу функцію нормованого відхилення:

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{t_i^2}{2}}, \qquad (4)$$

де:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}. \qquad (5)$$

Після підстановки $\Delta x = \lambda$ і вираз (1) в формулу (2) отримаємо:

$$\tilde{f}_i = \frac{\lambda \cdot n}{\sigma} \cdot F_i. \qquad (6)$$

Тут $\tilde{f}_i$ - теоретичні частоти.

Практична частина.

1. Випадкова величина задана густиною розподілу $f(x) = 2\cos 2x$ в інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$; зовні всього інтервалу $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання і дисперсію.

2. Задані математичне сподівання $a = 12$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 8$ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти:

1) ймовірність того що X прийме значення, яке належить інтервалу (8; 17);

2) абсолютне відхилення $|x - a|$ буде менше δ; $\delta = 6$.

3. Випадкова величина підлягає нормальному закону з математичним сподіванням $a = 0$. Ймовірність попадання цієї величини в інтервал (-3; 3) рівна 0,5.

Знайти середнє квадратичне відхилення σ і записати вираз функції густини ймовірності $f(x)$.

4. Середній діаметр стовбурів дерев на деякій ділянці дорівнює 30 см, середнє квадратичне відхилення – 5 см. Враховуючи, що діаметр стовбура – величина випадкова розподілена нормально, визначити ймовірність того, що:

1) діаметр стовбура навмання відібраного дерева попаде в інтервал ві 25 до 37 см;

2) діаметр стовбура дерева не менше 25 см;

3) діаметр стовбура дерева не перевищить 36 см;

4) визначити величину, яку не перевищить діаметр стовбура відібраного дерева з ймовірністю 0,95.

Контрольні питання:

1. Чому дорівнює ймовірність попадання будь-якого значення неперервної випадкової величини, що знаходиться в інтервалі від x до $x+\Delta x$?

2. Як визначається щільність ймовірності?

3. Що таке нормальна крива? Які вона має параметри розподілу?

4. Які властивості має нормальна крива?

5. Що таке перша функція нормованого відхилення? За якою формулою визначається?

6. Як визначити теоретичні частоти, знаючи лише середнє арифметичне, середнє квадратичне відхилення та об'єм вибірки?

Тема: Визначення ймовірності попадання значення ознаки у заданий інтервал.

Мета: Вивчити, як визначається ймовірність попадання значення ознаки у заданий інтервал.

Завдання для самостійної роботи:

1. Як обчислюється ймовірність попадання значення ознаки в заданий інтервал?

2. Вивчити, що таке друга функція нормованого відхилення та як вона пов'язана з першою функцією нормованого відхилення?

3. Розглянути, які властивості має друга функція нормованого відхилення?

4. Ознайомитися з геометричною суттю результату визначення ймовірності попадання ознаки в заданий інтервал?

5. Розглянути, в чому полягає суть правила «3-х сигм»?

Теоретична частина.

У наукових, технічних та виробничих дослідах часто необхідно знайти ймовірність попадання значення ознаки x в заданий інтервал $[\alpha,\beta]$, яка обчислюється за формулою:

$$P=\phi\left(\frac{\beta-\bar{x}}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha-\bar{x}}{\sigma}\right). \qquad (1)$$

Функція $\phi(x)$ називається другою функцією Лапласа, що визначається за формулою:

$$\phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (2)$$

Для функції $\phi(x)$ складено таблиці або її розраховують на комп'ютері.

Поклавши $\alpha=x-\delta,\ \beta=\bar{x}+\delta$ і врахувавши, що $\phi(x)$ є непарною функцією, тобто $\phi(-x)=-\phi(x)$, обчислимо ймовірність появи такого значення ознаки, що відрізняються від $\bar{x}$ не більше, ніж на δ:

$$P\left(\bar{x}-\delta\prec\tilde{x}\prec\bar{x}+\delta\right)=\phi\left(\frac{\bar{x}+\delta-\bar{x}}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\bar{x}-\delta-\bar{x}}{\sigma}\right)=\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)+\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\cdot\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (3)$$

Підставивши в цю формулу $\delta=\sigma,\ 2\sigma,\ 3\sigma$, отримаємо відповідно $P_1=2\Phi(1)=68{,}3\%,\ \ P_2=2\Phi(2)=95{,}5\%,\ \ P_3=2\Phi(3)=99{,}8\%$.

Таким чином, в інтервал $\delta = 3\sigma$ навколо $\bar{x}$ попадають значення ознаки $\bar{x}$ майже всіх тварин, у тому числі водні біоресурси. Цей результат відомий як «правило трьох сигм», з якого отримаємо:

$$x_{\min} = \bar{x} - 3\sigma,$$
$$x_{\max} = \bar{x} + 3\sigma. \qquad (4)$$

Віднявши друге рівняння від першого, отримаємо формулу середньоквадратичного відхилення:

$$\sigma = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{6} \qquad (5)$$

а взявши їх суму, отримаємо середнє арифметичне:

$$\bar{x} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}. \qquad (6)$$

Практична частина.

1. Випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0 \\ \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2} \quad при \quad 0 \prec x \le 2\Pi \\ 0 \quad при \quad x \succ 2\Pi \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію.

2. Задані математичне сподівання *a=11* і середнє квадратичне відхилення *a=5* нормально розподіленої випадкової величини X.

Знайти ймовірність того, що:

1) X прийме значення, яке належить інтервалу (8; 17)

2) абсолютне відхилення $|x-a|$ буде менше δ, $\delta = 9$.

3. Випадкова величина підлягає нормальному закону з математичним сподіванням *a=0*.

Ймовірність попадання цієї випадкової величини в інтервал (-1; 1) рівна 0,5.

Знайти середнє квадратичне відхилення і записати функцію густини ймовірності $f(x)$.

4. Середня сума, яку витрачає відвідувач універсаму розподілена за нормальним законом і середнім значенням 56 грн. і стандартним відхиленням 12 грн. Навмання вибирається відвідувач магазину. Яка ймовірність, що він витратив менше 30 грн.? Скільки людей із 1000 відвідувачів витратять суму менше 30 грн.?

5. Час, який співробітники витрачають на дорогу до роботи, розподілений за нормальним законом із середнім значенням 40 хвилин і стандартним відхиленням 6 хвилин. Яка ймовірність, що навмання вибраний співробітник витрачає на дорогу більше 50 хвилин? Яка очікувана кількість із 250 співробітників витрачає на дорогу більше 50 хвилин?

Контрольні питання:

1. Як визначається ймовірність попадання значення ознаки у заданий інтервал?

2. Що таке друга функція нормованого відхилення, який вона має зв'язок з першою функцією нормованого відхилення?

3. Властивості другої функції нормованого відхилення?

4. Яка геометрична суть результату визначення ймовірності попадання значення ознаки у заданий інтервал?

5. У чому суть правила «трьох сигм»?

6. Вивести формулу середньоквадратичного відхилення σ з правила «трьох сигм».

Тема: Точкові оцінки та стандартні (середні) похибки.

Мета: Вивчити, як визначаються точкові оцінки, стандартні (середні) похибки і показники точності, як їх потрібно записувати у кожному випадку при розв'язування різних задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Якого роду похибки можуть мати місце при проведенні експериментальних робіт та обробці статистичних даних?

2. Що таке випадкові похибки?

3. Що таке систематичні похибки?

4. Що таке статистичні похибки?

5. Визначення стандартних (середніх) похибок.

6. Визначення показників точності.

7. Як записуються вибіркові характеристики, що супроводжуються середніми похибками?

Теоретична частина.

Перехід від досліджень (обстежень) всієї генеральної сукупності до вибіркової зменшує матеріальні та часові затрати, але обумовлює появу статистичних похибок.

Вибіркові значення ознаки є точковими наближеними оцінками параметрів генеральної сукупності. Відхилення вибіркового показника від його генерального характеризується середнім квадратичним відхиленням, яке називається стандартною або середньою похибкою точкової оцінки генерального параметру.

Похибки середньої арифметичної величини $\sigma_{\bar{x}}$, середнього квадратичного відхилення σ_σ і коефіцієнту варіації σ_v визначаються за формулами:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} \qquad (2)$$

$$\sigma_v = \frac{V}{\sqrt{2n}} \qquad (3)$$

де σ - вибіркове квадратичне (стандартне) відхилення ознаки, n - об'єм вибірки або кількість дослідів (експериментів).

З формул (1), (2), (3) випливає що значення похибок зменшується із зменшенням варіації ознаки (чисельник) і зі збільшенням об’єму вибірки.

Запис вибіркових варіаційних показників задається з точністю до статистичних похибок у вигляді:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \qquad (4)$$

$$\sigma \pm \sigma_{\sigma} \qquad (5)$$

$$V \pm \sigma_{v} \qquad (6)$$

Відносні значення похибок (точності) $E_{\bar{x}}$, E_{σ}, E_{v} обчислюється за формулами:

$$E_{\bar{x}} = \pm \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \qquad (7)$$

$$E_{\sigma} = \pm \frac{\sigma_{\sigma}}{\sigma} \qquad (8)$$

$$E_{v} = \pm \frac{\sigma_{v}}{V} \qquad (9)$$

Підставивши (2) і (3) в (8) і (9) відповідно отримаємо $E_{\sigma} = E_{v} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, тобто точність σ і V однакові.

Практична частина.

1. Із генеральної сукупності взято вибірку об’єму n = 50. За даним розподілом вибірки знайти незміщену оцінку генеральної середньої:

Варіа	x_i	2	5	7	10
Часто	n_i	16	12	8	14

2. Знайти вибіркову середню за даним розподілом вибірки об’єму n = 10:

x_i	1350	1370	1380	1400
n_i	2	5	3	10

3. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об’єму n = 10:

x_i	18,6	19,2	19,4	19,6
n_i	2	5	3	5

4. Знайти вибіркову дисперсію за даним розподілом вибірки об’єму n = 50

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

5. Знайти внутрішньогрупову, між групову і загальну дисперсії сукупності, яка складається з трьох груп:

перша група

x_i	1	2	8
n_i	30	15	5

друга група

x_i	1	6
n_i	10	15

третя група

x_i	3	8
n_i	20	5

6. Знайти вибіркову та виправлену дисперсії варіаційного ряду, складеного за даними вибірки:

Варіанта	x_i	3560	2360	368	415
Частота	n_i	16	12	8	14

Контрольні питання:

1. Якого роду похибки можуть мати місце при проведенні експериментальних робіт та обробці статистичних даних?
2. Що таке випадкові похибки?
3. Що таке систематичні похибки?
4. Що таке статистичні похибки?
5. Як визначаються стандартні (середні)похибки?
6. Як визначаються показники точності?
7. Як прийнято записувати вибіркові характеристики, що супроводжуються середніми похибками?
8. Точності яких показників однакові?

Тема: Інтервальні оцінки. Надійний (довірчий) інтервал та надійність оцінки.

Мета: Вивчити, як визначаються інтервальні оцінки, як знайти (довірчий) інтервал, знаючи надійність оцінки та об’єм вибірки; як знайти об’єм вибірки, якщо відомий надійний інтервал та надійність оцінки.

Завдання для самостійної роботи:

1. Яка різниця між інтервальними та точковими оцінками?
2. Що таке надійний (довірчий) інтервал та як називається відповідна йому ймовірність?
3. Що таке рівень значимості, яким він може бути?

4. Що таке точність оцінки, як вона пов'язана з надійним (довірчим) інтервалом?

Теоретична частина.

Крім точкових, використовують інтервальні оцінки, за центр інтервалу яких приймають середнє значення $\bar{x}$ ознаки x. Розглянемо інтервальну оцінку середньої арифметичної $\tilde{x}$ генеральної сукупності за середнім значенням $\overline{X}$ вибіркової сукупності.

У формулу $P = \phi\left(\frac{\beta - \bar{x}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - \bar{x}}{\sigma}\right)$ підставимо $x = \tilde{x}$, маємо:

$$P\left(\bar{x} - \delta \prec \tilde{x} \prec \bar{x} + \delta\right) = \gamma, \qquad (1)$$

тобто ймовірність γ попадання $\tilde{x}$ у інтервал $\left[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta\right]$, який називають надійним (довірчим), а γ - надійною (довірчою) ймовірність або надійністю оцінки ознаки $\tilde{x}$. На практиці використовують три рівні надійності: γ=0,95; 0,99; 0,999 залежно від степеня важливості досліджень. Величина $\alpha = 1 - \gamma$ називається рівнем значимості (похибкою): $\alpha_1 = 1 - \gamma_1 = 0{,}05;\ \alpha_2 = 1 - \gamma_2 = 0{,}01;\ \alpha_3 = 1 - \gamma_3 = 0{,}001$ або

$\alpha_1 = 5\%;\ \alpha_2 = 1\%;\ \alpha_3 = 0{,}1\%$.

Замінивши в формулі $P = \phi\left(\frac{\beta - \bar{x}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - \bar{x}}{\sigma}\right)$ x на $\tilde{x}$ і σ на $\sigma_{\bar{x}}$, отримаємо:

$$\gamma = P\left(\bar{x} - \delta \prec \tilde{x} \prec \bar{x} + \delta\right) = 2\varphi\left(\frac{\delta}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 2\varphi\left(\frac{\sigma\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\varphi(t), \qquad (2)$$

де:

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (3)$$

Звідки:

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (4)$$

Підставимо (4) в (2):

$$P\left(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \prec \tilde{x} \prec \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\varphi(t) = \gamma. \qquad (5)$$

Розглянемо три типи задач:

1. Визначити надійний інтервал δ за об'ємом вибірки n, надійність оцінки γ і σ.

З формули (5) знаходять:

$$\varphi(t) = \frac{\gamma}{2}, \qquad (6)$$

а за таблицями визначають*t*.

За формулою (4) визначають δ.

2. Визначити надійність оцінки γ за об'ємом n вибірки, довжину інтервалу δ та σ.

За формулою (3) обчислимо *t*, а за таблицями або розрахунками на комп'ютері визначимо $\varphi(t)$, а далі $\gamma = 2 \cdot \varphi(t)$, тобто надійність γ.

3. Визначити об'єм вибірки n за надійністю γ, з інтервалом δ та σ.

Значення *t* визначають аналогічно задачі (1).

З формули (3) визначимо n:

$$n = \left(\frac{t \cdot \sigma}{\delta} \right)^2. \qquad (7)$$

Ця формула справедлива при $n \succ 30$, при $n \le 30$ використовують формулу:

$$n = \frac{1}{\left(\frac{\delta}{t \cdot \sigma} \right)^2 + \frac{1}{N}}, \qquad (8)$$

N – об'єм генеральної сукупності.

Для $n \prec 30 t$ залежить не тільки від γ згідно $\gamma = 2 \cdot \varphi(t)$, але і від об'єму n вибірки, тобто $t = f(\gamma, n)$. Для цієї функції математик Ст'юдент склав відповідну таблицю, в якій за значенням ступеня свободи $m = n - 1$ знаходять значення *t*, яке підставляється у вираз (1).

Аналогічно, визначають інтервал δ для середнього квадратичного відхилення і коефіцієнта варіації:

$$\delta_\sigma = \frac{\sigma \cdot t}{\sqrt{2n}}, \qquad (9)$$

$$\delta_V = \frac{V \cdot t}{\sqrt{2n}}. \qquad (10)$$

Практична частина.

1. Дано середнє квадратичне відхилення, вибіркова середня і об'єм вибірки нормально розподіленої величини. Знайти надійний інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання із заданою надійністю, якщо $\sigma = 2, \;\; n = 10, \;\; \gamma = 0.95, \;\; \overline{x}_b = 5.4$.

2. Із генеральної сукупності дістали вибірку

x_i	1	2	5	8	9
n_i	3	4	6	4	3

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання а нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за допомогою надійного інтегралу.

3. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,95 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої ознаки за вибіркової середньою рівна 0,2, якщо середнє відхилення дорівнює 2.

4. Виконано 10 вимірів одним приладом (без систематичної помилки) деякої фізичної величини, при чому «виправлене» середнє квадратичне відхилення *s* випадкових помилок вимірів виявилось рівним 0,8. Знайти точність приладу з надійністю 0,95. Припускається, що результати вимірів розподілені нормально.

5. Прийом на роботу у фірму проводиться на конкурсній основі. Претендент оцінюється по 100-бальній системі. Вибірка із 150 чоловік показала, що середній бал конкурсанта складає 70. Відомо, що стандартне відхилення генеральної сукупності складає 10. З надійністю $\gamma = 0{,}99$ збудувати надійний інтервал для невідомого середнього значення кількості набраних балів.

6. У вибірці з 25 зернин пшениці середня вага зернини склала $\bar{x} = 0{,}152$ при $s = 0{,}03$ г. Вважаючи вагу зерна нормально розподіленою випадковою величиною встановити: а) інтервал надійності для середньої ваги зернини з гарантією $\gamma = 0{,}99$; б) який буде інтервал надійності коли об’єм усієї вибірки вважати $n = 50$?

Контрольні питання:

1. Яка різниця між інтервальними та точковими оцінками?
2. Що таке надійний інтервал, як називається відповідна йому ймовірність?
3. Що таке рівень значимості, яким він може бути?
4. Що таке точність оцінки, як вона пов’язана з надійним (довірчим) інтервалом?
5. Як визначити точність оцінки, якщо відомі об’єм вибірки та надійність оцінки?
6. Як визначити надійність оцінки, якщо відомі точність оцінки та об’єм вибірки?
7. Як визначити об’єм вибірки, щоб задана точність була гарантована із заданою надійністю, якщо об’єм генеральної сукупності невідомий?
8. Як визначити об’єм вибірки, щоб задана точність була гарантована із Зініною надійністю при відомому об’ємі генеральної сукупності?
9. У яких випадках для визначення t потрібно користуватись таблицями Ст’юдента?

Тема: Нульова гіпотеза (H_0). Перевірка H_0 за допомогою критерія Пірсона.

Мета: Вивчити як перевірити нульову гіпотезу, використовуючи критерій Пірсона.

Завдання для самостійної роботи:

1. розглянути, яка різниця у використанні критерію Пірсона та критеріїв Ст’юдента і Фішера.
2. Вивчити, як розраховується фактичне значення критерія.
3. Розібратися, які величини входять до формули фактичного значення критерія.
4. Розглянути, які обмеження має даний метод.

Теоретична частина.

Критерій Пірсона застосовується при перевірці гіпотез стосовно законів розподілу. Цим критерієм з’ясовується узгодженість дослідних з теоретичними розподілами, наприклад, нормальним, і являє собою ступінь розбіжності між ними відносно частот:

$$x_{\phi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(f_i - \tilde{f}_i\right)^2}{\tilde{f}_i},$$

де f_i і $\tilde{f}_i$ - дослідні та теоретичні частоти ознаки x, сума ведеться за класами варіаційних рядів.

Значення x_{ϕ}^2 порівнюють з табличними x_{st}^2 при відповідному рівні значимості α і ступеня свободи $m = k - 3$.

Якщо $x_{\phi}^2 \prec x_{st}^2$, то розподіл є нормальним, а при $x_{\phi}^2 \succ x_{st}^2$ H_0-гіпотеза не підтверджується.

Критерій Пірсона використовують при $n \succ 50$ і $f_k \geq 5$, у протилежному випадку сусідні класи об'єднують.

Практична частина.

1. Використовуючи критерій Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити чи згоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з емпіричним розподілом вибірки об'єму $m = 100$

x_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	10
n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2

2. Використовуючи критерій Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ встановити випадково и значимо розходження між емпіричними частотами n_i і теоретичними частотами n_i' які обчислені, виходячи з гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності X:

n_i	8	16	40	32	36	18	10
n_i'	6	18	36	76	39	18	7

3. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ встановити випадкове чи значне розходження між емпіричними частотами n_i і теоретичними частотами, які обчисленні, виходячи із гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності х:

а)

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

б)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	75
n_i'	5	9	14	16	18	16	9	67

Контрольні питання:

1. Для чого використовується критерій узгодження Пірсона?
2. Як розраховується фактичне значення критерію X^2?

3. Чому до формули фактичного значення критерію X^2 входять лише частоти?

4. Які обмеження має даний метод та як їх уникнути?

Тема: Застосування методу найменших квадратів для обчислення параметрів лінійної залежності $Y = ax + b$

Мета: Опанувати навиками обчислення параметрів лінійної залежності методом найменших квадратів та співставлення із статистичним (дисперсійним) аналізом.

Завдання для самостійної роботи:

1. Рівняння лінійної залежності.

2. Обчислення точок перетину прямої лінійної залежності з осями ординат (y) та абсцис (x).

3. Зростаюча та спадаюча лінійні залежності.

4. Знаки коефіцієнтів a і b при зростаючій та спадаючій лінійних залежностях.

5. Суть методу найменших квадратів.

6. Застосування методу найменших квадратів для моделювання лінійних залежностей між двома ознаками.

Теоретична частина.

Для визначення параметрів a і b лінійної залежності:

$$Y = ax + b \qquad (1)$$

досліджують вираз D:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - Y_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - a \cdot x_i - b)^2}{n}, \qquad (2)$$

де Y_i і y_i - теоретичні (обчислені за формулою(1)) і дослідні значення. Вираз (2) являє собою дисперсію відхилень дослідних значень у відносно теоретичних значень Y. Коефіцієнти a і b потрібно підібрати таким чином, щоб вираз D (2) мав мінімальне значення. З математики відомо, що для цього потрібно прирівняти до нуля частинні похідні:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0. \qquad (3)$$

Знайшовши похідні, одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими a і b:

$$\begin{cases} b + a \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_1}{n} \\ b \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n} + a \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} \end{cases} \qquad (4)$$

або

$$\begin{cases} b + a\overline{x} = \overline{y} \\ b\overline{x} + a\overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases} \qquad (5)$$

де:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}. \qquad (6)$$

Система рівнянь (5) називається нормальною і у підручниках записується у вигляді:

$$\begin{cases} b \cdot n + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (7)$$

яка виводиться з умови мінімуму виразу:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Y_i\right)^2 \qquad (8)$$

або множення системи (4) на n.

Використання системи нормальних рівнянь у вигляді (5) має наочний зміст, оскільки вона виражається через відповідні характеристики варіаційних рядів, а саме: середні арифметичні $\overline{x}, \ \overline{y}, \ \overline{x^2}, \ \overline{xy}$.

Практична частина.

1. Дано кореляційну таблицю. Знайти:

а) r_B; б) вибіркові рівняння прямих регресії; в) η_{yx} і η_{xy}.

y \ X	5	10	15	20	n_y	x_y
10	2	-	-	-	2	5
20	5	4	1	-	10	8
30	3	8	6	3	20	12,25
40	-	3	6	6	15	16
50	-	-	2	1	3	16,67
n_x	10	15	15	10	n=50	
y_x	21	29,33	36	38		

2.Знайти вибіркове рівняння прямих ліній регресії y на x і y і x на y за даними таблиці:

y	x							
	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	n=50

Контрольні питання:

1. Що таке лінійна залежність і якою формулою вона визначається?
2. Що означає коефіцієнт a і b лінійної залежності?
3. Які знаки мають a і b для зростаючої та спадаючої залежностей?
4. У чому полягає суть метода найменших квадратів?
5. З яких умов підбирають a і b методом найменших квадратів?
6. Вивести систему рівнянь відносно параметрів a і b лінії регресії.

Тема: Застосування методу найменших квадратів для обчислення параметрів криволінійної (параболічної) залежності $Y = ax^2 + bx + c$**.**

Мета: Навчитися застосовувати метод найменших квадратів для моделювання криволінійної залежності ознаки від іншої ознаки x.

Завдання для самостійної роботи:

1. Рівняння криволінійної параболічної залежності.
2. Суть методу найменших квадратів.
3. Знаходження координат перетину параболи з вісями x і y.
4. Знаходження значення x при якому y набуває екстремум.
5. Умови максимуму та мінімуму.
6. Застосування методу найменших квадратів при обчисленні коефіцієнтів параболи.

Теоретична частина.

Для визначення параметрів $a,\ b,\ c$ криволінійної (параболічної) залежності:

$$Y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

проведемо дослідження виразу:

$$D = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 / n = \sum_{i=1}^{n} \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c - y_i\right)^2 / n\,, \qquad (2)$$

де Y_i, y_i - теоретичні (обчислені за формулою 1) та дослідні значення. Метод найменших квадратів полягає у тому, що треба підібрати такі значення $a,\ b,\ c$, при яких вираз (2) приймає мінімальне значення. Ці значення знаходять з умов рівності нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial c} = 0\,. \qquad (3)$$

Обчислюючи похідні, отримаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими $a,\ b,\ c$:

$$\begin{cases} \overline{x^2} \cdot a + \overline{x} \cdot b + c = \overline{y} \\ \overline{x^3} \cdot a + \overline{x^2} \cdot b + \overline{x} \cdot c = \overline{x \cdot y} \\ \overline{x^4} \cdot a + \overline{x^3} \cdot b + \overline{x^2} \cdot c = \overline{x^2 \cdot y} \end{cases} \qquad (4)$$

де середні арифметичні значення виражаються формулами:

$$\overline{x^m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^m}{n}, \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ 4; \qquad (5)$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \qquad (6)$$

$$\overline{x^2 \cdot y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i}{n}. \qquad (7)$$

У загальному випадку криволінійної залежності між Y і x виду многочлена m-го порядку:

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m \qquad (8)$$

з умови мінімуму дисперсії відхилення теоретичних Y значень від дослідних y:

$$D = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 / n, \qquad (9)$$

що задовольняється при рівності нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial D}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

отримаємо систему нормальних рівнянь відносно коефіцієнтів a_j многочлена:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \overline{x} + a_2 \overline{x^2} + \ldots + a_m \overline{x^m} = \overline{y} \\ a_0 \overline{x} + a_1 \overline{x^2} + a_2 \overline{x^3} + \ldots + a_m \overline{x^{m+1}} = \overline{x \cdot y} \\ a_0 \overline{x^2} + a_1 \overline{x^3} + a_2 \overline{x^4} + \ldots + a_m \overline{x^{m+1}} = \overline{x^2 \cdot y} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_0 \overline{x^m} + a_1 \overline{x^{m+1}} + a_2 \overline{x^{m+2}} + \ldots + a_m \overline{x^{2m}} = \overline{x^m \cdot y} \end{cases} \qquad (10)$$

Розв’язки системи (10) визначаються за Крамером:

$$a_j = \frac{\Delta j}{\Delta}, \quad \left(j = 0,\ 1,\ 2, \ldots, m \right) \qquad (11)$$

де Δ - визначник системи, побудований із стовпців коефіцієнтів при невідомих a_j, а визначник Δ отримуються заміною у Δ відповідного стовпця стовпцем вільних членів.

Визначники Δ і Δ_j більше третього порядку обчислюється їх розкладанням на суми доповнень за стовпцями чи стрічками.

Практична частина.

x_i	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	11	11

y_i	9	8	9	10	9	10	11	10	12	13	11	13	14	13	16	13	12	11	9	8

1.

2.

x_i	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	11	11	12	12
y_i	10	9	10	11	10	11	12	11	13	14	12	14	15	14	11	14	13	12	10	9

3.

x_i	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9
y_i	7	6	7	8	7	8	9	8	10	11	9	11	12	11	14	11	10	9	7	6

Контрольні питання:

1. Яким чином визначають тип залежності (лінійний, криволінійний) між ознаками?
2. Як записується рівняння криволінійної параболічної залежності?
3. Яким чином знаходять координати перетину з вісями X ,Y?
4. З якої умови знаходять екстремуми (максимум, мінімум) параболічної залежності?
5. При яких умовах параболічна залежність має максимум або мінімум?
6. Який вигляд має метод найменших квадратів для параболічної залежності?
7. Як розв'язувати методом детермінантів (визначників) систему лінійних рівнянь з трьома або більше невідомими?
8. Вивести систему нормальних рівнянь у еквівалентній формі.

Тема: Застосування методу найменших квадратів для моделювання лінійної залежності ознаки від двох інших.

Мета: Навчити студентів складати моделі дослідної лінійної залежності ознаки від двох інших ознак.

Завдання для самостійної роботи:

1. Лінійні функції багатьох аргументів, наприклад, двох.
2. Загальний вигляд множинної лінійної залежності від двох аргументів.
3. Загальний вигляд частинних лінійних залежностей від двох аргументів.
4. Визначення параметрів рівняння множинної лінійної регресії від двох аргументів методом найменших квадратів.
5. Визначення параметрів рівняння частинної лінійної регресії від двох аргументів методом найменших квадратів.

Теоретична частина.

Рівняння лінійної регресії від двох аргументів має загальний вигляд:

$$Y = ax + bz + c, \qquad (1)$$

де $a,\ b,\ c$ - постійні, які необхідно визначити за допомогою методу найменших квадратів. Згідно цього методу, коефіцієнти $a,\ b,\ c$ підбирають таким чином, щоб вираз:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a \cdot x_i - b \cdot z_i + c - y_i)^2}{n} \qquad (2)$$

приймав найменше значення.

З математики відомо, що значення $a,\ b,\ c$ при яких вираз (2) приймає мінімальне значення, знаходять з умов:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial D}{\partial c} = 0. \qquad (5)$$

Беручи частинні похідні, отримаємо:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(a \cdot x_i + b \cdot z_i + c - y_i) \cdot x_i}{n} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(a \cdot x_i + b \cdot z_i + c - y_i) \cdot z_i}{n} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial D}{\partial c} = 2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(a \cdot x_i + b \cdot z_i + c - y_i)}{n} = 0 \qquad (8)$$

Таким чином, отримаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими відносно коефіцієнтів $a,\ b,\ c$:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + b \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} + c \cdot \frac{n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \\ a \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} + b \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot x_i}{n} + c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{n} \\ a \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot z_i}{n} + b \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{n} + c \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot z_i}{n} \end{cases} \qquad (9)$$

або:

$$\begin{cases} a\bar{x} + b\bar{z} + c = \bar{y} \\ a\overline{x^2} + b\overline{x \cdot z} + c\bar{x} = \overline{xy} \\ a\overline{xz} + b\overline{z^2} + c\bar{z} = \overline{yz} \end{cases} \qquad (10)$$

Система нормальних рівнянь у вигляді (9) і (10) більш змістовна, оскільки вона виражається через характеристики варіаційних рядів: середні величини $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \overline{x^2}, \overline{z^2}$ і $c_{yz} = \overline{yz}$,

де:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n},$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}, \quad \overline{xz} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i z_i}{n}, \quad \overline{yz} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{n}. \qquad (11)$$

Методом визначників розв'язки системи (10) обчислюються за формулами:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta}, \quad a = \frac{\Delta c}{\Delta},$$

де:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{z} & 1 \\ \overline{x^2} & \overline{xz} & \bar{x} \\ \overline{xz} & \overline{z^2} & \bar{z} \end{vmatrix} = \bar{x} \cdot \overline{xz} \cdot \bar{z} + \overline{x^2}\,\overline{z^2} + \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \overline{xz} - \overline{xz}^2 - \bar{x}^2\,\overline{z^2} - \bar{z}^2\,\overline{x^2}, \qquad (12)$$

де стовпці будуються із коефіцієнтів при $a,\ b,\ c$, а лінії показують порядок перемноження відповідно зі знаком + і -.

Визначники $\Delta_a,\ \Delta_b,\ \Delta_c$ отримуються заміною вільними членами першого, другого і третього стовпців відповідно.

Отже:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \bar{y} & \bar{z} & 1 \\ \overline{xy} & \overline{xz} & \bar{x} \\ \overline{yz} & \overline{z^2} & \bar{z} \end{vmatrix} = \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \overline{xz} + \overline{z^2}\,\overline{xy} + \bar{x} \cdot \bar{z}\,\overline{yz} - \overline{xz} \cdot \overline{yz} - \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \overline{z^2} - \bar{z}^2\,\overline{xy}, \qquad (13)$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \overline{x^2} & \overline{xy} & \bar{x} \\ \overline{xz} & \overline{yz} & \bar{z} \end{vmatrix} = \bar{x} \cdot \bar{z} \cdot \overline{xy} + \overline{x^2}\,\overline{yz} + \bar{x} \cdot \bar{y}\,\overline{xz} - \overline{xz} \cdot \overline{xy} - \bar{x}^2 \cdot \overline{yz} - \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \overline{x^2}, \qquad (14)$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{z} & \bar{y} \\ \overline{x^2} & \overline{xz} & \overline{xy} \\ \overline{xz} & \overline{z^2} & \overline{yz} \end{vmatrix} = \bar{x} \cdot \overline{xz} \cdot \overline{yz} + \bar{y}\,\overline{x^2}\,\overline{z^2} + \bar{z}\,\overline{xy} \cdot \overline{xz} - \bar{y} \cdot \overline{xz}^2 - \bar{x}\,\overline{z^2}\,\overline{xy} - \bar{z}\,\overline{x^2}\,\overline{yz}. \qquad (15)$$

У загальному випадку множинної лінійної залежності Y від багатьох змінних x_j (j=1,2,…,m), якому відповідає многофакторна модель:

$$Y(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{j=1}^{m} a_j, x_j, + a_0 , \qquad (16)$$

з умови мінімуму дисперсії відхилення теоретичних Y_i і дослідних y_i значень:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2}{n}, \qquad (17)$$

що задовольняється при рівності нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial D}{\partial a_i} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m, \qquad (18)$$

отримаємо систему нормальних рівнянь відносно коефіцієнтів a_j лінійних множинних залежностей:

$$\begin{cases} a_0 + b_1 \overline{x_1} + b_2 \overline{x_2} + ... + b_m \overline{x_m} = \overline{y} \\ a_0 \overline{x_1} + b_1 \overline{x_1^2} + b_3 \overline{x_1 x_2} + ... + b_m \overline{x_1 x_m} = \overline{x_1 y} \\ a_0 \overline{x_2} + b_1 \overline{x_1 x_2} + b_3 \overline{x_2^2} + ... + b_m \overline{x_2 x_m} = \overline{x_2 y} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_0 \overline{x_m} + b_2 \overline{x_1 x_m} + b_3 \overline{x_2 x_m} + ... + b_m \overline{x_m^2} = \overline{x_m y} \end{cases} \qquad (19)$$

Розв’язки системи (8) визначаються за Крамером:

$$a_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (j=0, 1, 2, \ldots, m), \qquad (20)$$

де Δ - визначник системи, стовпці якого є коефіцієнти при a_j, а визначники Δ_j отримуються заміною у Δ відповідного стовпця стовпцем вільних членів. Визначники Δ і Δ_j більше третього порядку обчислюються їх розкладанням на суми доповнень за стовпцями чи рядками.

Практична частина:

1.

x_i	220	220	200	200	180	180	180	160	140	120
z_i	200	180	170	140	160	150	140	130	120	110
y_i	650	620	560	500	500	470	460	410	350	280

2.

x_i	210	210	190	190	170	170	170	150	130	110
z_i	190	170	160	130	150	140	130	120	110	100
y_i	640	610	550	490	490	460	450	400	340	270

3.

x_i	190	190	170	170	150	150	150	130	110	90

z_i	170	150	140	110	130	120	110	110	90	80
y_i	620	590	530	470	470	440	430	380	320	250

Контрольні питання:

1. Що таке функція множинної лінійної регресії?
2. Який вигляд має множинна лінійна функція двох аргументів?
3. Який вигляд мають частинні лінійні функції двох аргументів (при постійному значенні одного з них)?
4. У чому полягає суть методу найменших квадратів для моделювання множинної регресії?
5. У чому полягає суть методу найменших квадратів для моделювання частинної лінійної регресії?
6. Як визначаються розв'язки системи трьох рівнянь з трьома невідомими методом детермінантів (визначників)?
7. Вивести еквівалентні форми системи для коефіцієнтів рівнянь множинної і частинної ліній регресії.

Список використаної літератури

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. – М., 1981, 1985.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник. – М., 1982, 1987.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х т. – М.: Высш. шк., 1999.
4. Зайцев А. И. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1991.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1978.
6. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высш. шк., 1971.
7. Кривуца В. Г., Довгий С. О., Олешко Т. І. Теорія ймовірностей. – К., 1997.
8. Мармоза А. Т. Практикум по математической статистике. – К.: Высш. шк., 1990.
9. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высш. шк., 1986.
10. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. - М.: Статистика, 1974.
11. Гмурман В.Е. Руководство к решению задача по теории вероятностей й математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979.
12. Гмурман В.Е. Теория вероятностей й математическая статистика. - М.: Высш. шк., 1972.
13. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.: Высш. шк., 1971.
14. Захаров Б.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.Л. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1983.