

Міністерство освіти і науки України
Херсонський державний аграрно-економічний університет

Г. О. Димова

**МЕТОДИ І МОДЕЛІ УПОРЯДКУВАННЯ
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ ІНФОРМАЦІЇ
ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ПРОГНОЗУВАННЯ
СТАНУ БЕЗПЕРЕРВНИХ ПРОЦЕСІВ**

Монографія

Херсон, 2020

УДК 681.518:62-50

*Рекомендовано до друку
Вченою Радою Херсонського державного
аграрно-економічного університету
(протокол № 7 від 27.02.2020)*

Рецензенти:

- Марасанов В.В.** д.т.н., професор, професор кафедри автоматизації, робототехніки та мехатроніки Херсонського національного технічного університету;
- Шевченко І.В.** д.т.н., професор, професор кафедри автоматизації та інформаційних систем Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.

Димова, Г.О.

- К Методи і моделі упорядкування експериментальної інформації для ідентифікації і прогнозування стану безперервних процесів: монографія. Херсон: Книжкове видавництво ПП Вишемирський В. С., 2020. 174 с.

ISBN 978-617-7783-62-5

В монографії розглядається проблема підвищення ефективності функціонування безперервного виробництва і створення інформаційної технології обробки експериментальних даних для ідентифікації та прогнозування поведінки об'єктів управління. Призначена для здобувачів вищої освіти другого та третього рівнів і наукових працівників технічного напрямку.

ЗМІСТ

Вступ	6
Глава 1 АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СИСТЕМ	8
1.1 Передумови розв'язання задачі ідентифікації систем	8
1.2 Проблема ідентифікації систем в умовах невизначеності	11
1.3 Інформаційний простір об'єкта та структура експериментальних даних в системах ідентифікації	13
1.4 Представлення випадкових процесів	18
1.5 Гаусові процеси	21
1.6 Генерування випадкових процесів динамічними системами ...	22
1.7 Постановка задачі	34
Висновки до глави 1	36
Глава 2 МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	37
2.1 Представлення випадкових процесів в змінних стану	37
2.2 Визначення коваріаційної функції випадкового процесу за його описом в змінних стану	39
2.3 Вдосконалення метода факторизації коваріаційних функцій ..	41
Висновки до глави 2	60
Глава 3 ДОСЛІДЖЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	61
3.1 Проекційні методи оцінки станів динамічної системи	61
3.2 Дослідження на чутливість власних значень матриць моделей динамічних систем в просторі станів	66

3.3 Дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем	76
Висновки до глави 3	83
Глава 4 ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОПЕРАТОРА МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА	84
4.1 Стохастичний підхід до аналізу структури динамічного об'єкту	85
4.2 Ідентифікація моделі багатомірної динамічної системи	90
4.3 Обґрунтування побудови моделі «вхід – простір станів – вихід»	93
4.4 Знаходження моделі динамічної системи	99
4.5 Метод моделювання оператора динамічної системи	106
Висновки до глави 4	110
Глава 5 ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ БЕЗПЕРЕРВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	113
5.1 Структура інформаційної технології	113
5.2 Характеристика безперервного технологічного процесу сушіння технічного вуглецю	116
5.3 Реалізація інформаційної технології ідентифікації і прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів	120
5.3.1 Реалізація метода знаходження оператора моделі динамічної системи	120
5.3.2 Реалізація метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем	124
5.4 Тестування програмного додатку	128

Висновки до глави 5	130
ВИСНОВКИ	132
ЛІТЕРАТУРА	134
ДОДАТОК А ТЕХНОЛОГІЧНА УСТАНОВКА БЕЗПЕРЕРВНОГО ВИРОБНИЦТВА	148
ДОДАТОК Б РЕЗУЛЬТАТИ ФІКСАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ БЕЗПЕРЕРВНОГО ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ	149
ДОДАТОК В ЛІСТІНГИ ЕЛЕМЕНТІВ КОМП'ЮТЕРНОЇ ПРОГРАМИ TRINITY-FACTOR	155
В.1 Лістинг скрипта метода знаходження оператора моделі динамічної системи	155
В.2 Лістинг скрипта метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем	158
ДОДАТОК Г РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ	166
Г.1 Результати обчислень метода знаходження оператора моделі динамічної системи	166
Г.2 Результати обчислень метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем	168
ДОДАТОК Д ЕКРАННІ ФОРМИ ПРОГРАМНОГО ДОДАТКУ TRINITY-FACTOR	172

ВСТУП

Інформаційні технології відіграють важливу роль у підвищенні ефективності функціонування безперервних технологічних процесів. Розвиток технологій визначення наявності корисного сигналу досяг рівня, що дозволяє значно підвищити ефективність систем управління складними технологічними об'єктами за рахунок обробки експериментальних даних вихідного сигналу для ідентифікації та прогнозування поведінки об'єкта управління. Виходячи з цього важливим питанням є створення інформаційних технологій розв'язання обернених задач для безперервних технологічних процесів, тобто визначення стану динамічних систем.

Рішення задач ідентифікації і прогнозування протікання безперервних технологічних процесів розглядалося для процесу виробництва технічного вуглецю, який є одним з типових процесів нафтохімічного виробництва. Процес отримання технічного вуглецю пов'язаний з необхідністю суворого дотримання технологічних умов, що забезпечують його отримання зі стандартизованими параметрами. Технологічний процес сушіння технічного вуглецю є кінцевим етапом його виробництва. Одним з основних технологічних параметрів процесу являється температурний режим роботи установки сушіння. В теперішній час контроль температури гранульованого вуглецю в сушці здійснюється оператором тільки в одній зоні в патрубку виходу техвуглецево-газової суміші, покладаючись на його досвід.

Проблеми відновлення інформації для динамічних систем розглянуті в багатьох роботах та представляються трьома задачами:

- 1) задача ідентифікації, коли на підставі відомих сигналів на вході і виході системи робиться висновок про склад системи і її характеристики;
- 2) задача управління, коли відомі характеристики системи і вхідного сигналу та визначається закон зміни сигналу на виході системи або такий вхідний сигнал, який на виході призводить систему в заданий стан;

3) задача вимірювання, коли відомий вихідний сигнал і характеристики системи, визначаються характеристики вхідного сигналу.

Для безперервного технологічного процесу сушіння немає інформації про вхідний сигнал та характеристики процесу, а відомі експериментальні дані вихідного сигналу, таким чином існує проблема визначення характеристик системи та опису динаміки вхідного процесу. Тому необхідно розробити інформаційну технологію ідентифікації і прогнозування протікання безперервного процесу на протязі всього процесу сушіння технічного вуглецю.

Теоретичною базою для розв'язання поставлених задач стали роботи вітчизняних та зарубіжних вчених: Г.Л. Ван Тріса, Б.Л. Хо, Р.Е. Калмана, Я.К. Віллемса, Х. Акайке, П. Форре, Д. Гропа, К.Й. Острема, Б. Боліна, Т.Ч. Купманса, Е.Д. Хеннана, А. Сейджа, Дж. Мелса, Я.З. Ципкіна, Л.І. Гудзенко, І.І. Перельмана, В.В. Марасанова. Проблеми управління безперервними процесами розглядалися в роботах Красовського О.А., Юсупова Р.М., Карабутова М.М.

Монографія написана за результатами, викладеними у кандидатській дисертації, яка висвітлює основні проблеми в галузі обробки експериментальних даних для ідентифікації та прогнозування стану безперервних процесів і перспективні шляхи їх розв'язку.

Глава 1

АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СИСТЕМ

У першій главі позначені основні проблеми ідентифікації і прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів. Велику роль відіграють інформаційні аспекти, основані на аналізі даних з метою отримання відомостей про процеси, що вивчаються. Тому методи інформаційного аналізу даних є складовою частиною системи ідентифікації.

1.1 Передумови розв'язання задачі ідентифікації систем

Ранні роботи, які були зроблені в області ідентифікації систем, що зв'язані з часовими рядами, і ґрунтувались на роботах К.Ф. Гаусса «*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*» (1809) та Р.Е. Фішера «*On an Absolute Criterion for Fitting Frequency Curves*» (1912) отримали назву статистичне оцінювання.

Більша частина процедур ідентифікації ґрунтувалась на спостереженні реакцій керованих об'єктів за наявністю деяких управляючих впливів і в залежності від того, який вид інформації про об'єкт використовувався, методи ідентифікації розділялися на частотні та часові. Р.Е. Калман представив опис керованої системи у вигляді простору станів, що дозволило працювати з багатомірними системами.

Методи ідентифікації систем для задач управління були розроблені і описані в роботі Б.Л. Хо та Р.Е. Калмана «*Effective construction of linear state-variable models from input-output functions*» [6] – метод підпростору, оснований на використанні проєкцій в евклідовому просторі, а також в

роботі К.Й. Острема та Т. Боліна «Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records» [2] – метод помилки передбачення, оснований на мінімізації критерія, що залежить від параметрів моделі. Робота Б.Л. Хо та Р.Е. Калмана [6] присвячена пошуку моделі об'єкта, що вивчається, в просторі станів, який має найменший порядок вектора станів, на основі інформації про імпульсну перехідну характеристику. Ця задача при наявності реалізацій випадкового процесу, де формується марківська модель, описана в роботах П. Форпе «Realisations markoviennes de processus stationnaires» [5] та Х. Акайке «Stochastic theory of minimal realization» [1], що і стало основою метода підпросторів. Праця [2] К.Й. Острема та Т. Боліна представила метод максимальної правдоподібності, розроблений фахівцями з часових рядів Т.Ч. Купмансом в роботі «Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics» [7] і Е.Д. Хеннаном в роботі «Анализ временных рядов» [138] для оцінювання параметрів моделей у вигляді різницевого рівнянь. Ці моделі, що відомі як авторегресійне ковзне середнє та авторегресійне ковзне середнє зі входом, утворили основу для метода помилки передбачення. Джордж Е.П. Бокс та Г.М. Дженкінс опублікували роботу «Анализ временных рядов, прогноз и управление» [22], де описали використання методів ідентифікації з моменту початку збору інформації про об'єкт до отримання та перевірки моделі.

При розв'язанні задачі ідентифікації вважається відомими структура системи та клас моделей, до якого вона відноситься. Апріорна інформація про систему достатньо широка. Така постановка задачі ідентифікації найбільш відповідає реальним умовам проектування і їй присвячена робота А. Сейджа та Дж. Мелса «Идентификация систем управления» [119].

На відміну від роботи [119] Д. Гропом в роботі «Методы идентификации систем» [41] був розглянутий більш широкий клас різних методів ідентифікації та представлений матеріал про чутливість характеристик систем до помилок ідентифікації.

Всі розглянуті роботи відносяться до трьох відомих задач теорії сигналів: задач ідентифікації, коли на підставі відомих сигналів на вході і виході системи робиться висновок про склад системи та її характеристики; задач управління, коли відомі характеристики системи і вхідного сигналу та визначається закон зміни сигналу на виході системи або такий вхідний сигнал, який на виході призводить систему в заданий стан; задач вимірювання, коли відомий вихідний сигнал і характеристики системи, та визначаються характеристики вхідного сигналу.

Методи, які розглядаються в монографії Г.Л. Ван Тріса «Теория обнаружения, оценок и модуляции» [24, 25], застосовні до послідовної ідентифікації параметрів. В роботі розглянутий взаємозв'язок між формами представлення випадкових процесів в змінних стану та за допомогою коваріаційної функції.

В роботі Яна К. Віллемса «От временного ряда к линейной системе» [31] запроваджено основу для вивчення динамічних систем. Підхід системи «вхід-стан-вихід» відрізняється від звичайної структури «вхід-вихід» тим, що визначення робляться, не розрізняючи апріорі між причинами (входами) та ефектами (результатами). Отже, структура «вхід-стан-вихід» виступає як особливий тип системного представлення. Стверджується, що ця структура набагато краще підходить для забезпечення задовільної концептуальної основи для моделювання фізичних систем як мови теорії математичних систем. З цієї точки зору вводяться різні якісні системні властивості (такі як лінійність, часова інваріантність, тощо). Наведено результати щодо просторового представлення таких систем. Ці ідеї і стали основою розробки інформаційної технології для застосування в безперервному виробництві.

1.2 Проблема ідентифікації систем в умовах невизначеності

Під управлінням розуміють організаційну діяльність, яка здійснює функції управління будь-якою роботою, спрямованою на досягнення визначених цілей [73]. Процес управління складається з аналізу процесу прийняття рішень про найбільш доцільні дії у відповідних ситуаціях. Людина, що здійснює управління, приймає рішення, оцінюючи навколишню обстановку за допомогою інформації, отриманої від своїх органів почуттів, вимірювальних приладів, інших осіб та технічних приладів. У багатьох випадках цієї інформації виявляється недостатньо для однозначної оцінки обстановки. Тоді використовується досвід, знання, пам'ять, інтуїція. Чудовою властивістю людини є здатність приймати рішення в умовах значної невизначеності щодо навколишнього оточення з отриманням належної інформації.

Для того, щоб управляти, розроблені математичні методи, що дозволяють аналізувати існуючі види інформації, відсіювати непотрібну інформацію і виділяти найбільш істотну її частину, слід використовувати необхідну інформацію для оцінки ситуації, що склалася, і виробляти рекомендації, що забезпечують найбільш ефективно виконання цілей управління ситуацією. Вибір моделі при розв'язанні задач управління та вивченні безперервних процесів обумовлений як умовами реалізації, так і вимогами адекватності. В умовах невизначеності на перший план виходять алгоритми і методи інформаційного аналізу даних різної структури, причому інформаційний аналіз є складовою частиною системи ідентифікації.

Для розв'язання проблеми управління в умовах невизначеності використовуються методи теорії адаптивних систем, які дозволяють [33, 80]: забезпечити високу точність управління при суттєвій зміні динамічних властивостей об'єкта; здійснювати оптимізацію режимів роботи об'єкта в

умовах зміни його характеристик; підвищити надійність системи; уніфікувати окремі підсистеми управління і їх блоки; скоротити терміни розробки і доведення системи. Адаптивні методи використовуються для розв'язку задач, в яких відсутня інформація про характер і умови функціонування об'єкта, а також у випадку неможливості або недостатньо повної формалізації апріорних даних.

В загальному випадку процес синтезу адаптивної системи можна розбити на декілька етапів [63, 64, 92, 134]. Спочатку формується мета управління і виказуються вимоги до структури математичної моделі об'єкту. Для цього використовується апріорна і/або експериментальна інформація. В більш загальному випадку синтез системи зв'язаний з розв'язком задачі структурної ідентифікації. На другому етапі визначається структура керуючого пристрою. Далі здійснюється вибір алгоритму адаптації параметрів регулятора. На заключному етапі проводиться обґрунтування прийнятого алгоритму.

Ідентифікація об'єкта зводиться до визначення структури і параметрів моделі за спостережуваними даними (входу та виходу об'єкта) та наявної апріорної інформації. Всі існуючі підходи до ідентифікації розбиті на дві групи – статистичні та множинно-функціональні (детерміновані). Указані класи розрізняються урахуванням природи збурень (перешкод), що діють на систему, і отриманими оцінками. Для статистичного підходу висувалися вимоги до структури моделі об'єкта, а відносно всіх невизначених факторів і перешкод передбачалось, що вони носять випадковий характер [22, 41, 43, 72, 107, 113, 119, 139, 144]. Незважаючи на велику різноманітність алгоритмів і методів ідентифікації не існує процедур регулярного синтезу структури моделі [106, 135, 137], що пояснюється складністю та різноманітністю об'єктів управління, поганою вивченістю процесів, які перебігають в об'єкті.

1.3 Інформаційний простір об'єкта та структура експериментальних даних в системах ідентифікації

Безліч динамічних процесів в об'єктах управління можна описати за допомогою диференціального рівняння з одним входом u і виходом y

$$a_0 y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \dots + a_m y = b_0 u^{(k)} + b_1 u^{(k-1)} + \dots + b_k u + \xi. \quad (1.1)$$

де ξ – випадкове збурення;

a, b – вагові коефіцієнти диференціального рівняння.

Від рівняння (1.1) можна перейти до кінцево-різницевого представлення. Вважаючи $t = n\Delta t$, де $n = 0, 1, \dots$, Δt – інтервал знімання даних, та вводячи оператор z зсуву назад $zy(n) = y(n-1)$, отримаємо

$$D_y(z)y(n) = D_u(z)u(n) + \xi(n), \quad (1.2)$$

$$\text{де } D_y(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m, \quad D_u(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_k.$$

Якщо $\xi(t)$ випадкова послідовність, то (1.2) представляє собою рівняння авторегресії – змінного середнього, а при $D_u(z)=1$ – модель змінного середнього. У загальному випадку рівняння авторегресії – змінного середнього з динамічною специфікацією для $\xi(t)$ в просторі $\{U, Y\}$ має вигляд

$$Y(t) = F(A, Y(\tau_1), U(\tau_2), \xi(\tau_3), \tau_i \in [t_{\tau_i}, t], i = \overline{1,3}), \quad (1.3)$$

де $t_{\tau_i} \geq t_0$.

З (1.3) видно, що динамічні властивості об'єкта можуть визначатися як його внутрішньою структурою, так і динамічними властивостями входу $U(t)$ та перешкоди $\xi(t)$.

Рівняння (1.1)-(1.2) можна записати в матричній формі (в формі простору станів). Для лінійного стаціонарного об'єкта рівняння в просторі станів має вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U} + \boldsymbol{\zeta},\end{aligned}\tag{1.4}$$

де $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^m$ – вектор стану;

$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ – матриця стану;

$\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ – вектор входу;

$\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$ – вектор виходу;

$\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m \times k}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{n \times k}$;

$\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{R}^n$ – неспостережуваний вектор помилок вимірювання;

$\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^m$ – вектор перешкод.

Перше рівняння в (1.4) називають рівнянням стану, а друге – рівнянням вимірювання (спостереження). В задачах ідентифікації матриця \mathbf{D} зазвичай дорівнюється нулю.

Будь-який об'єкт може бути охарактеризований сукупністю змінних $\vec{\mathbf{u}}(t) \in U$, що поступають на його вхід, і сукупністю змінних $\vec{\mathbf{x}}(t) \in X$, які являються реакцією об'єкта на вплив та відображають його стан. Об'єкт занурений в зовнішнє середовище, вплив якого проявляється у виді контрольованих $\zeta(t) \in \Xi$ та неконтрольованих $\xi(t) \in \Sigma$ збурень і також впливає на його стан. В задачах ідентифікації збурення, що контролюються, включаються в склад вектора входу $\vec{\mathbf{u}}(t)$. Неконтрольовані збурення $\xi(t)$ проявляються через вихід об'єкта $\vec{\mathbf{y}}(t) \in Y$, який належить X і являється

тільки частиною вектора стану, тобто $Y \subseteq X$. Інформаційний простір об'єкта представляється у виді [67, 68, 93, 126, 129, 142]

$$\mathbf{I} = \mathbf{U} \times \mathbf{X} \times \Psi \times \mathbf{J} \times \mathbf{S}, \quad (1.4)$$

де $\Psi = \Sigma \times \Xi$ – простір збурень;

\mathbf{J} – інтервал спостереження за об'єктом;

\mathbf{S} – простір системних параметрів

$$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n,$$

де $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{R}^n$ – простір структурних ознак системи «об'єкт+середовище»,
 $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{S}$.

Інформативний простір \mathbf{I} в реальних умовах є неповністю спостережуваним і тому він покривається деякою інформаційною множиною I , що містить доступні для вимірювання множини U та X . В цьому випадку множина I являє собою сукупність векторів $\vec{\mathbf{u}}(t) \in U \subset \mathbf{U}$, $\vec{\mathbf{y}}(t) \in Y \subseteq \mathbf{X}$, спостережуваних на \mathbf{J} ,

$$\mathbf{I}_e = \{\mathbf{U} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n \mid \vec{\mathbf{u}}(t), \vec{\mathbf{y}}(t), t \in \mathbf{J}\}. \quad (1.5)$$

Так як елементи \mathbf{I} отримуються в процесі вимірювання спостережуваних змінних стану, то множина I містить тільки чисельні образи елементів просторів \mathbf{U} та \mathbf{X} . Для повної характеристики об'єкту в множину I включають апріорні відомості, тому \mathbf{I} представляється у виді

$$\mathbf{I} = \{\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_e\}, \quad (1.6)$$

де $\mathbf{I}_a, \mathbf{I}_e$ – відповідно апріорна і експериментальна інформація.

Для ідентифікації об'єктів управління використовується інформаційна множина I (1.6). Структура і властивості множини I_e дуже впливають на вибір метода синтезу математичної моделі і вид використовуваного алгоритму оцінювання параметрів. Інформація I_e має вид (1.5) і включає в себе результати вимірювань як вхідних та спостережуваних (вихідних) змінних стану, так і непрямих параметрів, що залежать від вихідних змінних [140, 141].

В залежності від задачі ідентифікації, що розв'язується, множина I_e може мати різну структуру. Якщо розв'язується задача разової ідентифікації об'єкту управління, то процес вимірювання має фіксоване закінчення t_e , причому $t_e > t_0$, де t_0 – час початку спостереження. В цьому випадку інформація I_e має вид (1.5) і представляється у вигляді

$$I_e(\mathbf{J}) = \{\mathbf{H}_U(\mathbf{J}), \mathbf{H}_Y(\mathbf{J})\},$$

де $\mathbf{H}_U(\mathbf{J}) = [u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_e)]$, $\mathbf{H}_Y(\mathbf{J}) = [y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_e)]$ – матриці відповідних розмірностей.

Якщо виконується поточна ідентифікація, то інформація I_e має вид

$$I_e = \{\bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{y}}(t)\},$$

де $t = t_0 + (i - 1)\tau$, $i = 1, 2, \dots, t$ – поточний момент часу;

τ – інтервал знімання даних.

При поточній ідентифікації i необмежено зростає в міру зростання часу функціонування об'єкта.

Таким чином, множина I_e в конкретних додатках має різний вигляд. Інформація I_e містить дані про параметри та характеристики об'єкта і межі їх вимірювання. В неявному виді I_e відображує обмеження на параметричний простір процесів, що перебігають в об'єкті. Тому множина

I_e , маючи вид цифрового масиву, може мати достатньо складну структуру. Елемент $w(t) \in I_e$ можна представити у виді [12, 32, 70, 84]

$$w(t) = w_c(t) + w_g(t) + w_x(t) + \xi(t),$$

де $w_c(t)$ – постійна або функція, що довільно змінюється;

$w_g(t)$ – гармонічна функція з фіксованим періодом;

$w_x(t)$ – деякий процес;

$\xi(t)$ – перешкода вимірювання.

Складова $w_c(t)$ відображує основний режим роботи об'єкта, а $w_g(t)$ – будь-які періодичні явища і процеси, також зв'язані з основним процесом. Функції $w_x(t)$ та $\xi(t)$ відображують вплив різних збурень: $w_x(t)$ характеризують внутрішні, а $\xi(t)$ зовнішні впливи.

Таку структуру множина I_e буде мати не завжди. У залежності від властивостей об'єкту деякі із складових w можуть бути відсутні або мати більш конкретний вид, тобто функцію $w(t)$ можна записати у виді

$$w(t) = w_s(t) + \xi(t),$$

де $w_s(t)$ – функція, яка відображає структурні особливості об'єкта;

$\xi(t)$ – середовища.

Процеси $w_s(t)$ та $\xi(t)$ можуть мати як стохастичну, так і регулярну структуру. У випадку регулярної структури використовуються різні описи, які допускають алгоритмічне представлення. У випадку стохастичного характеру процесів для представлення $\xi(t)$ використовуються різні статичні та ймовірнісні характеристики.

1.4 Представлення випадкових процесів

Випадковим процесом називається зміна випадкової величини в часі. До випадкових процесів відноситься більшість процесів, що перебігають в радіотехнічних пристроях, а також перешкоди, які супроводжують передачу сигналів каналами зв'язку [25, 73, 74, 81, 130]. Випадкові процеси можуть бути безперервними або дискретними в залежності від того, яка випадкова величина безперервна або дискретна за зміною у часі. Також існує декілька методів опису сигналів:

- завдання сигналів в часовій області;
- завдання сигналів в частотній області;
- представлення сигналів та перешкод ортогональними рядами.

Кожен раз, коли проводиться експеримент, підсумком його є функція, що визначена на інтервалі часу. Необхідно характеризувати весь випадковий сигнал (процес). Існує одна властивість, якою повинен володіти метод завдання (подання). Якщо розглядати ряд моментів часу t_1, t_2, \dots, t_n на інтервалі визначення процесу, то їм відповідають n випадкових величин $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}$. Будь-яке повне завдання повинно дозволяти визначити спільну щільність ймовірності $p_{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}}(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Крім того, воно повинно дозволяти визначити цю щільність для будь-якої множини n моментів часу на заданому інтервалі (для будь-якого кінцевого n) [45, 61, 71, 81, 131].

Розглянемо операції над випадковим процесом, які можуть бути вивчені без фактично повного завдання процесу. Для таких операцій необхідно тільки часткове завдання процесу, який аналізується. Можливо велике число часткових завдань. Два найбільш поширених з них є:

- 1) подання значення процесу тільки в один момент часу;
- 2) подання значень процесу другими моментами.

При завданні в один момент часу визначається тільки $p_{x_i}(X)$ – щільність ймовірності першого порядку в момент часу t . Вона є функцією часу.

При завданні процесу його другими моментами задаються тільки перші і другі моменти процесу. Функція середнього значення процесу визначається формулою

$$m_x(t) = E(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} X_i p_{x_i}(X_i) dX_i, \quad (1.7)$$

Це також є функція часу. Кореляційна функція визначається виразом:

$$R_x(t, u) = E(x_i x_u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_i X_u p_{x_i x_u}(X_i, X_u) dX_i dX_u, \quad (1.8)$$

Коваріаційна функція визначається наступним чином:

$$K_x(t, u) = E\{[x_t - m_x(t)][x_u - m_x(u)]\} = R_x(t, u) - m_x(t)m_x(u), \quad (1.9)$$

Часткове завдання процесу добре підходить до лінійних операцій над випадковими процесами.

Коваріаційна функція володіє декількома корисними властивостями. Однією із властивостей є властивість симетрії, що випливає з визначення (1.9)

$$K_x(t, u) = K_x(u, t). \quad (1.10)$$

Якщо помножити вибірку функцію $x(t)$ на деяку детерміновану функцію $f(t)$, що інтегрується в квадраті, і проінтегрувати на інтервалі $[0, T]$, то отримаємо випадкову величину

$$x_j = \int_0^T x(t)f(t)dt. \quad (1.11)$$

Середнє цієї випадкової величини дорівнює:

$$E(x_j) = \overline{x_j} = E \int_0^T x(t)f(t)dt = \int_0^T m_x(t)f(t)dt, \quad (1.12)$$

а дисперсія, після введення математичного очікування під знак інтеграла, має вигляд

$$\sigma^2(x_j) = \int_0^T \int_0^T f(t)K_x(t,u)f(u)dt du. \quad (1.13)$$

Дисперсія повинна бути більше нуля або дорівнювати нулю. Таким чином

$$\int_0^T \int_0^T f(t)K_x(t,u)f(u)dt du \geq 0 \quad (1.14)$$

істинний для будь-якої $f(t)$ з кінцевим значенням енергії. Ця властивість називається невід'ємною визначеністю. Якщо нерівність (1.14) виконується строго для всіх $f(t)$ з ненульовою кінцевою енергією, то кажуть, що $K_x(t, u)$ позитивно визначена.

Якщо процес визначений на нескінченному інтервалі і його коваріаційна функція залежить тільки від $|t-u|$, а не від t або u порізно, то кажуть, що процес коваріаційно-стаціонарний і його можна записати у вигляді:

$$K_x(t, u) = K_x(t - u) = K_x(\tau). \quad (1.15)$$

Аналогічно, якщо кореляційна функція залежить тільки від $|t-u|$, то кажуть, що процес кореляційно-стаціонарний, і його можна записати у вигляді:

$$R_x(t, u) = R_x(t - u) = R_x(\tau). \quad (1.16)$$

1.5 Гаусові процеси

Розглянемо гаусові випадкові процеси. Випадкові величини x_1, x_2, \dots, x_N є спільно гаусовими, якщо

$$y = \sum_{i=0}^N g_i x_i \quad (1.17)$$

є гаусова випадкова величина для будь-якої множини g_i . Якщо N – рахункове нескінченне, то потрібно, щоб g_i було таким, що $E[y^2] < \infty$. У випадковому процесі необхідно отримати лінійний функціонал випадкової функції. Для цього припустимо, що $x(t)$ є випадковим процесом, визначений на деякому інтервалі $[T_\alpha, T_\beta]$ із середнім значенням $m_x(t)$ і коваріаційною функцією $K_x(t, u)$. Якщо кожен лінійний функціонал від $x(t)$ є гаусова випадкова величина, то $x(t)$ є гаусовим випадковим процесом [45, 61, 131, 132]. Тобто, якщо

$$y = \int_{T_\alpha}^{T_\beta} g(u) x(u) du \quad (1.18)$$

і $g(u)$ – яка завгодно функція, яка задовольнить умові $E[y^2] < \infty$, то для того, щоб $x(u)$ був гаусовим випадковим процесом, y має бути гаусовою випадковою величиною для кожного $g(u)$ в зазначеному вище класі.

Вихідна величина лінійної системи є заданий лінійний функціонал. Позначимо імпульсну реакцію – вихідну величину в момент часу t , обумовлену впливом на вхід одиничного імпульсу в момент часу u через $h(t, u)$. Якщо вхідна величина дорівнює $x(t)$ і є вибірковою функцією гаусова випадкового процесу, то вихідна величина $y(t)$ також є вибірковою функцією гаусова випадкового процесу. Таким чином:

$$y(t) = \int_{T_\alpha}^{T_\beta} h(t, u) x(u) du, \quad T_\gamma \leq t \leq T_\Delta, \quad (1.19)$$

де $h(t, u)$ – імпульсна перехідна характеристика з параметрами, що змінюються в часі.

Інтервал $[T_\gamma, T_\Delta]$ є область, на якій визначена функція $y(t)$ [45, 132].

1.6 Генерування випадкових процесів динамічними системами

Лінійні системи характеризуються за допомогою імпульсної характеристики $h(t, u)$ або просто $h(\tau)$ у випадку з постійними в часі параметрами. Відмінною особливістю такого опису є те, що вхідний сигнал вважається відомим на інтервалі $-\infty < t < \infty$. Імпульсна характеристика $h(t, u)$ являється просто розв'язком диференціального рівняння, коли вхідним сигналом служить імпульс в момент часу u .

Існує три розв'язання для опису систем за допомогою диференціальних рівнянь.

Перше розв'язання пов'язане з початковими умовами і змінними стану при розгляді динамічних систем [24, 29, 56]. Стан системи визначається як мінімальна кількість інформації щодо впливів попередніх сигналів на вході системи, необхідна для повного опису вихідного сигналу при $t \geq 0$. Змінні величини, що містять цю інформацію, є змінними стану. Якщо задані стан системи в момент часу t_0 та вхідний сигнал на інтервалі від t_0 до t_1 , то можна знайти як вихідний сигнал, так і стан системи в момент часу t_1 .

Друге розв'язання зводиться до реалізації (або моделювання) диференціального рівняння за допомогою аналогового обчислювача. Його можна представити як систему, що складається з інтеграторів, ланцюгів зі змінними в часі коефіцієнтами передачі, суматорів і нелінійних безінерційних пристроїв, об'єднаних таким чином, щоб відтворити необхідне співвідношення між вхідними і вихідним сигналами. Початкова умова $y(t_0)$ виступає тут як зміщення на виході інтегратора. Зміщена вихідна напруга інтегратора є змінною стану системи [18, 24, 27, 28, 78, 98].

Третє розв'язання відноситься до питання генерування випадкового процесу. Якщо $u(t)$ є випадковим процесом або $y(t_0)$ є випадкова величина (або вони обидва є випадковими), то $y(t)$ є також випадковий процес.

Розглянемо систему, яка описується диференціальним рівнянням виду

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_0(t)y(t) = b_0u(t), \quad (1.20)$$

де $y^{(n)}(t)$ – n -а похідна від $y(t)$;

$p_i(t)$ – оператор диференціювання;

$u(t)$ – сигнал на вході системи;

b_0 – ваговий коефіцієнт.

Для визначення розв'язання рівняння n -го порядку необхідно знати значення $y(t)$, ..., $y^{(n-1)}(t)$ в момент часу t_0 . Першим кроком при знаходженні

реалізації в формі аналогового обчислювача є моделювання членів лівої частини цього рівняння. Наступний крок полягає в такому взаємному з'єднанні цих величин, щоб вказане рівняння задовольнялося. Диференціальне рівняння визначає вхідна напруга на суматорі. Вводимо початкові умови, задаючи визначені зміщення на виходах інтегратора. Змінні стану є зміщені напруги на виході інтегратора.

Простіше працювати з векторним диференціальним рівнянням першого порядку, ніж зі скалярним диференціальним рівнянням n -го.

Нехай

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) = \dot{x}_{n-1}(t), \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t) = -\sum_{k=1}^n p_{k-1} y^{(k-1)}(t) + b_0 = \\ &= -\sum_{k=1}^n p_{k-1} x_k(t) + b_0 u(t), \end{aligned} \tag{1.22}$$

Позначивши систему $x_i(t)$ через матрицю-стовпець, помічаємо, що скалярному рівнянню n -го порядку еквівалентно наступне n -мірне векторне рівняння першого порядку [24, 98, 99]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \tag{1.23}$$

де \mathbf{A} – матриця стану системи;

\mathbf{B} – матриця управління (входу).

Вектор $\mathbf{x}(t)$ називається вектором стану для даної лінійної системи, а (1.23) – рівнянням стану системи. Будь-яке несингулярне лінійне

перетворення вектора $\mathbf{x}(t)$ дає інший вектор стану. Вихідна напруга $y(t)$ пов'язана з вектором стану рівнянням [84, 100, 120, 121]

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1.24)$$

де \mathbf{C} – матриця вимірювання.

Рівняння (1.24) вихідне рівняння системи. Рівняння – (1.23) і (1.24) – повністю визначають систему.

Для систем зі змінними в часі параметрами в якості основного уявлення розглянемо векторні рівняння

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \quad (1.25)$$

$$y(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \quad (1.26)$$

де $\mathbf{x}(t)$ – вектор стану;

$\mathbf{A}(t)$ та $\mathbf{B}(t)$ – змінні матриці диференціального рівняння;

$u(t)$ – сигнал на вході системи, процес типу білого шуму;

$\mathbf{C}(t)$ – матриця вимірювання.

Рівняння (1.25) – рівняння стану системи, а (1.26) – вихідне рівняння системи.

Використовуючи в якості вхідного впливу білий шум

$$E[u(t)u(\tau)] = q\delta(t - \tau), \quad (1.27)$$

можна моделювати деякі нестационарні випадкові процеси. Нестационарний процес може з'явитися навіть тоді, коли матриці \mathbf{A} та \mathbf{B} постійні, а $\mathbf{x}_0(t)$ – детермінована величина [24, 84].

Розглянемо систему, яка генерує два вихідних повідомлення $y_1(t)$ та $y_2(t)$ (рис. 1.1).

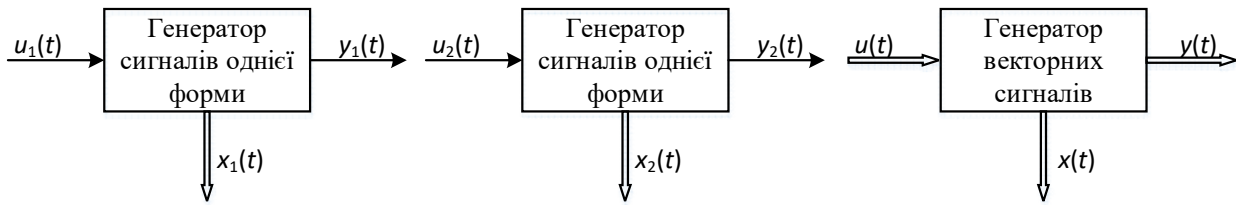


Рисунок 1.1 – Генерування двох повідомлень

Стан першої системи описується рівняннями

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1(t)u_1(t), \quad (1.28)$$

$$y_1(t) = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{x}_1(t), \quad (1.29)$$

де $\mathbf{x}_1(t)$ – n -мірний вектор стану.

Представлення другої системи, аналогічно першій та має вигляд

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2(t)u_2(t), \quad (1.30)$$

$$y_2(t) = \mathbf{C}_2(t)\mathbf{x}_2(t), \quad (1.31)$$

де $\mathbf{x}_2(t)$ – m -мірний вектор стану.

Єдина векторна система рівнянь з двомірним вектором стану є більш зручним способом опису цих двох систем:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Результуючі диференціальні рівняння мають вигляд

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (1.38)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t). \quad (1.39)$$

Збуджуюча функція є векторною.

Для моделювання процесу припустимо, що збуджуюча функція – білий шум з матричною коваріаційною функцією [120, 128]

$$E[u(t)u(\tau)] = \mathbf{Q}\delta(t - \tau), \quad (1.40)$$

де \mathbf{Q} – невід’ємно визначена матриця.

Блок-схема процесу моделювання буде виглядати наступним чином (рис. 1.2)

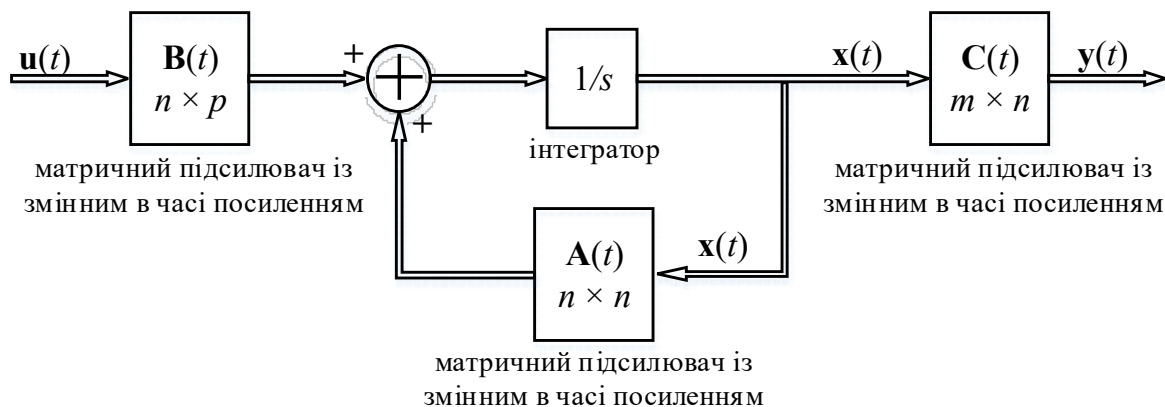


Рисунок 1.2 – Схема генерування процесу $y(t)$

При випадкових початкових умовах необхідно задати коваріаційну функцію і середнє значення $E[\mathbf{x}(t_0)]$ в початковий момент часу при t_0 [24, 30, 121]

$$\mathbf{K}_x(t_0, t_0) = E[\mathbf{x}(t_0) \mathbf{x}^T(t_0)]. \quad (1.41)$$

Можна моделювати пов’язані процеси шляхом заміни діагональних матриць в (1.38), (1.39) і (1.41) матрицями загального вигляду.

Якщо рівняння (1.38) – однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами, тоді

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (1.42)$$

з початковою умовою $\mathbf{x}(t_0)$. Якщо $\mathbf{x}(t)$ та \mathbf{A} – скаляри, то розв'язання має вигляд

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0). \quad (1.43)$$

Для векторного випадку можна показати, що

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0), \quad (1.44)$$

де $e^{\mathbf{A}t}$ визначається нескінченним рядом

$$e^{\mathbf{A}(t)} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots, \quad (1.45)$$

де \mathbf{I} – одинична матриця.

Функцію $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ позначимо через $\Phi(t-t_0) = \Phi(\tau)$. Функція $\Phi(t-t_0)$ являється перехідною матрицею стану системи, яка визначається як функція двох змінних $\Phi(t, t_0)$, що задовольняє диференціальному рівнянню

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \quad (1.46)$$

з початковою умовою $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$.

Розв'язання в будь-який момент часу має вигляд

$$\mathbf{x}(t, t_0) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0). \quad (1.47)$$

Для неоднорідного випадку загальний розв'язок містить однорідне і приватне розв'язання вигляду:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (1.48)$$

Лінійні системи з параметрами, що змінюються в часі, характеризуються за допомогою імпульсної характеристики $\mathbf{h}(t, \tau)$ за умови, що вхідна величина відома на інтервалі від $-\infty$ до t . Таким чином,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (1.49)$$

У більшості випадків вплив початкової умови $\mathbf{x}(-\infty)$ в (1.48) не проявляється, отже можна прийняти його рівним нулю. Тоді отримаємо

$$y(t) = \mathbf{C}(t) \int_{-\infty}^t \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (1.50)$$

Порівнюючи (1.49) та (1.50), маємо

$$\mathbf{h}(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(t) \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau), & t \geq \tau, \\ 0 & \text{при інших } t. \end{cases} \quad (1.51)$$

Матриці $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{\Phi}(t, \tau)$ та $\mathbf{B}(\tau)$ залежать від уявлення системи, але матрична імпульсна характеристика є єдиною.

Встановимо деякі статистичні властивості векторних процесів $\mathbf{x}(t)$ та $\mathbf{y}(t)$, коли $\mathbf{u}(t)$ є вибірковою функцією векторного випадкового процесу типу білого шуму

$$E[\mathbf{u}(t) \mathbf{u}^T(\tau)] = \mathbf{Q} \delta(t - \tau). \quad (1.52)$$

Взаємна кореляція між вектором стану $\mathbf{x}(t)$ системи, що збуджується білим шумом $\mathbf{u}(t)$ з нульовим середнім, і вхідною величиною $\mathbf{u}(\tau)$ дорівнює

$$\mathbf{K}_{xu}(t, \tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{u}^T(\tau)]. \quad (1.53)$$

Ця розривна функція має вигляд

$$\mathbf{K}_{xu}(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau > t, \\ \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}, & \tau = t, \\ \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{Q}, & t_0 < \tau < t. \end{cases} \quad (1.54)$$

Підставимо (1.47) у визначення (1.53) отримаємо

$$\mathbf{K}_{xu}(t, \tau) = E\left\{\left[\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, \alpha)\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u}(\alpha)d\alpha\right]\mathbf{u}^T(\tau)\right\}, \quad (1.55)$$

де α – час запізнювання.

Внесемо математичне очікування під знак інтеграла і приймемо, що початковий стан $\mathbf{x}(t_0)$ не залежить від $\mathbf{u}(\tau)$ при $\tau > t_0$, тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{xu}(t, \tau) &= \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, \alpha)\mathbf{B}(\alpha) E[\mathbf{u}(\alpha)\mathbf{u}^T(\tau)]d\alpha = \\ &= \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, \alpha)\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{Q}\delta(\alpha - \tau)d\alpha. \end{aligned} \quad (1.56)$$

При $\tau > t$ цей вираз дорівнює нулю. Якщо $\tau = t$, а дельта-функція симетрична, так як є межею коваріаційної функції, то необхідно взяти тільки половину площі біля правої граничної точки інтервалу. Таким чином,

$$\mathbf{K}_{xu}(t, t) = \frac{1}{2} \Phi(t, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{Q}. \quad (1.57)$$

Використовуючи результат, який впливає з (1.46), отримаємо вираз, розташований у другому рядку (1.54).

Якщо $\tau < t$, матимемо

$$\mathbf{K}_{xu}(t, \tau) = \frac{1}{2} \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{Q}, \quad \tau < t, \quad (1.58)$$

що відповідає третьому рядку (1.54). Окремий випадок (1.58) виходить, якщо припустити $\tau \rightarrow t$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \mathbf{K}_{xu}(t, \tau) = \mathbf{B}(t) \mathbf{Q}. \quad (1.59)$$

Звідси взаємкореляційна функція вихідного вектора $\mathbf{y}(t)$ та $\mathbf{u}(\tau)$:

$$K_{yu}(t, \tau) = \mathbf{C}(t) \mathbf{K}_{xu}(t, \tau). \quad (1.60)$$

Позначимо

$$\Lambda_x(t) = \mathbf{K}_x(t, t). \quad (1.61)$$

Отже

$$\Lambda_x(t) = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^T(t)]. \quad (1.62)$$

Диференціюючи (1.62), отримаємо

$$\frac{d\Lambda_x(t)}{dt} = E\left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \mathbf{x}^T(t)\right] + E\left[\mathbf{x}(t) \frac{d\mathbf{x}^T(t)}{dt}\right]. \quad (1.63)$$

Підставляючи (1.38) в перший член (1.63), отримаємо

$$E\left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \mathbf{x}^T(t)\right] = E\left\{[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)]\mathbf{x}^T(t)\right\}. \quad (1.64)$$

Використовуючи властивість (1.58) до другого члену (1.64), отримаємо

$$E\left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \mathbf{x}^T(t)\right] = \mathbf{A}(t)\Lambda_x(t) + \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}\mathbf{B}^T(t). \quad (1.65)$$

Тоді дисперсійна матриця вектора стану $\mathbf{x}(t)$ системи (1.38) задовольняє диференціальному рівнянню

$$\dot{\Lambda}_x(t) = \mathbf{A}(t)\Lambda_x(t) + \Lambda_x(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}\mathbf{B}^T(t) \quad (1.66)$$

з початковою умовою

$$\Lambda_x(t_0) = E[\mathbf{x}(t_0)\mathbf{x}^T(t_0)]. \quad (1.67)$$

Дисперсійне рівняння не містить прийнятого сигналу, тому його можна розв'язувати до прийому будь-якої інформації та використовувати для розв'язання коефіцієнтів передачі. Дисперсійне рівняння є матричним рівнянням Ріккати.

1.7 Постановка задачі

Основною метою монографії є розробка методів і моделей упорядкування експериментальної інформації, розв'язання задачі ідентифікації технологічних процесів безперервних виробництв для визначення структури динамічного об'єкта за вихідним сигналом, структури його оператора на основі структурних властивостей лінійних операторів та упорядкування.

Розв'язання задач ідентифікації та прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів розглянемо для типового процесу нафтохімічного виробництва – процесу виробництва технічного вуглецю, а саме кінцевого етапу його виробництва – технологічного процесу сушіння. Одним з основних технологічних параметрів процесу сушіння гранульованого технічного вуглецю є температурний режим роботи технологічної установки – сушильний барабан (додаток А). Процес автоматичної стабілізації температури технічного вуглецю на виході сушильного барабана значно впливає на підсумкову якість продукції, тому виникає необхідність вивчення динаміки безперервного технологічного процесу виготовлення технічного вуглецю, розробки інформаційних технологій для розв'язання задач ідентифікації і вимірювання при умові, що відомі тільки експериментальні (вихідні) дані, та прогнозування стану вихідного продукту на виході установки сушіння за визначеними характеристиками динамічної системи.

Два рівняння, якими описується система (1.38) та (1.39), являються рівняннями управління та спостереження.

Керованість – одне з найважливіших властивостей системи управління та об'єкта управління, що характеризує можливість приведення системи в заданий стан за допомогою управляючих впливів. Система

вважається керованою, якщо існує управління, що забезпечує її переклад з довільного початкового стану в довільний стан за кінцевий час [41, 136].

Якщо керованість вимагає, щоб кожний стан системи був чутливим до дії вхідного сигналу, то спостережуваність вимагає, щоб кожний стан системи впливав на вимірюваний вихідний сигнал. Система спостережувана, якщо весь її стан можна безпосередньо чи опосередковано визначити по вихідному вектору системи.

Для досягнення поставленої мети сформульовані такі задачі:

1. Створити метод ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем.
2. Провести дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем.
3. Створити метод знаходження структури оператора динамічного об'єкта і упорядкування множини вихідних сигналів з представленням їх у виді ганкелевих форм та матриць з використанням інформаційних технологій.
4. Виконати розробку інформаційної технології для реалізації методу факторизації коваріаційних функцій та знаходження оператора моделі безперервного технологічного процесу.
5. Провести тестування роботи інформаційної технології для контролю технологічних параметрів режиму роботи установки сушіння технічного вуглецю з розробкою відповідного програмного додатку.

Висновки до глави 1

У першій главі позначені основні проблеми ідентифікації і прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів. Розглянуті передумови розв'язання задачі ідентифікації систем та проведений аналіз даних з метою отримання відомостей про процеси, що вивчаються.

В системах ідентифікації інформація розглядається як матеріальний об'єкт, що характеризується множиною станів. Під інформаційною множиною розуміємо всі стани системи сумісні з отриманими даними в процесі спостереження, тобто сукупність даних, отриманих в ході спостереження за змінними динамічної системи в процесі нормальної експлуатації. Розглянута структура експериментальних даних в системах ідентифікації. Наведений підхід до оцінки степені невизначеності інформаційної множини системи.

Для побудови моделі прогнозування структури зміни стану динамічних систем виконаний опис і завдання випадкових процесів, розглянутий метод представлення задач виявлення і оцінки випадкових процесів, що мають нормальний (гаусів) характер. Вихідною величиною лінійної системи є заданий лінійний функціонал. Показано, що лінійні системи характеризуються за допомогою імпульсної характеристики $h(t, u)$ або просто $h(\tau)$ у випадку з постійними в часі параметрами. Розглянуті існуючі розв'язки для опису систем за допомогою диференціальних рівнянь. Проаналізовані випадки, коли процеси характеризуються, використовуючи метод змінних стану. Виявлені переваги використання метода змінних стану та використання інформаційних технологій для ідентифікації і прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів.

На основі результатів аналізу конкретизована основна мета роботи і задачі досліджень.

Глава 2

МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Друга глава присвячена розробці моделей і методів прогнозування стану безперервного процесу, зокрема розробці метода визначення коваріаційної функції вихідного процесу за його описом в змінних стану та розкладення коваріаційної функції вихідного процесу на множники і отримання матриць стану динамічної системи.

2.1 Представлення випадкових процесів в змінних стану

Для розробки метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем необхідно введення поняття про завдання випадкового процесу у виді системи зі змінним станом, яку можна використовувати для генерування процесу.

Динамічна система, що генерує деякий випадковий процес, в лінійному представленні може бути задана п'ятьма матрицями $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, \mathbf{Q} , \mathbf{P}_i , системою диференціальних та алгебраїчних рівнянь, із заданими початковими умовами:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\bar{x}(t) + \mathbf{B}(t)\bar{u}(t), T_i \leq t \quad (2.1)$$

$$\bar{y}(t) = \mathbf{C}(t)\bar{x}(t), T_i \leq t, \quad (2.2)$$

де $\vec{x}(t)$ – вектор стану з розмірністю $(n \times 1)$;

$\vec{u}(t)$ – білий збуджуючий процес з розмірністю $(p \times 1)$;

$\vec{y}(t)$ – процес, що спостерігається, з розмірністю $(m \times 1)$.

Рівняння (2.1) є лінійним рівнянням стану, а (2.2) – рівнянням спостереження. Матриці $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ мають відповідно розмірності $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(m \times n)$.

Вхідний процес $\vec{u}(t)$ (це можуть бути шуми навколишнього середовища, теплові шуми елементів самої системи) має коваріаційну функцію виду

$$E[\vec{u}(t) \vec{u}^T(\tau)] = \mathbf{Q} \delta(t-\tau) \quad (2.3)$$

Вектор початкового стану є випадковою величиною з коваріаційною матрицею

$$E[\vec{x}(T_i) \vec{x}^T(T_i)] = \mathbf{K}_x(T_i, T_i) = \mathbf{P}_i, \quad (2.4)$$

де E – оператор математичного очікування.

Багато результатів теорії випадкових процесів можна виразити через матрицю коваріаційних функцій

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = E[\vec{y}(t) \vec{y}^T(\tau)] \quad (2.5)$$

Для розв'язання задачі прогнозування стану динамічних систем необхідно створення бібліотек сигналів, тобто розв'язок прямої задачі, тому слід виконати процедуру пошуку коваріаційної функції випадкового процесу за його представленням в змінних стану.

2.2 Визначення коваріаційної функції випадкового процесу за його описом в змінних стану

Визначення коваріаційної функції випадкового вихідного процесу $\vec{y}(t)$ за його описом в змінних стану наведемо згідно [24, 45, 56, 62] без доказу і використовуємо для розв'язання оберненої задачі – знаходження змінних стану за відомою коваріаційною матрицею. Згідно (2.2) $\mathbf{K}_y(t, \tau)$ легко зв'язати з коваріаційною матрицею вектору стану $\vec{x}(t)$:

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = \mathbf{C}(t) \mathbf{K}_x(t, \tau) \mathbf{C}^T(\tau). \quad (2.6)$$

Коваріаційна матриця $\mathbf{K}_x(t, \tau)$, в свою чергу, задовольняє диференціальному рівнянню [24]

$$\dot{\mathbf{K}}_x(t, \tau) = \mathbf{A}(t) \mathbf{K}_x(t, \tau) + \mathbf{K}_x(t, \tau) \mathbf{A}^T(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{Q} \mathbf{B}^T(t) \quad (2.7)$$

при початковій умові

$$\mathbf{K}_x(T_i, T_i) = \mathbf{P}_i. \quad (2.8)$$

В силу некорельованості $\vec{u}(t')$ та $\vec{x}(t)$ на інтервалі інтегрування диференціального рівняння (2.7), отримуємо

$$\mathbf{K}_x(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{\Theta}(t, \tau) \mathbf{K}_x(\tau, \tau), & t \geq \tau \\ \mathbf{K}_x(t, t) \mathbf{\Theta}^T(\tau, t), & \tau \geq t \end{cases} \quad (2.9)$$

де $\mathbf{\Theta}(t, \tau)$ – перехідна матриця, що одержується з диференціального рівняння [2]

$$\dot{\Theta}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Theta(t, t_0), \quad \text{при початковій умові} \quad \Theta(t_0, t_0) = \mathbf{I},$$

де \mathbf{I} – одинична матриця.

Розв'язання для вектору стану $\vec{x}(t)$ в будь-який момент часу має вигляд $\vec{x}(t) = \Theta(t, t_0) x(t_0)$. Властивість (2.9) справедлива для всіх процесів, що представляються змінними станами у формі (2.1)-(2.5). Для стаціонарного випадку, якщо параметри системи, що генерують процес $\vec{y}(t)$ постійні, то перехідна матриця визначається експоненціальним множником [25, 100].

$$\Theta(t, \tau) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}. \quad (2.10)$$

Для того, щоб матриця $\mathbf{K}_x(t, t+\Delta t)$ була функцією тільки Δt , матриця $\mathbf{K}_x(t, t)$ повинна, відповідно (2.9), дорівнювати постійній величині \mathbf{P}_∞ . Ця постійна матриця є стаціонарним розв'язком рівняння (2.7). Отже, можна моделювати відрізки стаціонарного процесу, використовуючи системи з постійними параметрами і встановлюючи коваріаційну матрицю початкового стану \mathbf{P}_i рівною \mathbf{P}_∞ . Як показано в [1, 25, 136] стаціонарне розв'язання рівняння (2.7) має вигляд

$$\mathbf{P}_\infty = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}^T t} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [\mathbf{I}s - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T [-\mathbf{I}s - \mathbf{A}^T]^{-1} ds \quad (2.11)$$

і коваріаційна матриця вектору стану

$$\mathbf{K}_x(t, t + \Delta t) = \begin{cases} e^{-\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{P}_\infty, & \Delta t \leq 0 \\ \mathbf{P}_\infty e^{\mathbf{A}\Delta t}, & \Delta t > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

І звідси, згідно формули (2.6)

$$\mathbf{K}_y(t, t + \Delta t) = \begin{cases} \mathbf{C}(t) e^{-\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{P}_\infty \mathbf{C}^T(t), & \Delta t \leq 0 \\ \mathbf{C}(t) \mathbf{P}_\infty e^{\mathbf{A}^T \Delta t} \mathbf{C}^T(t), & \Delta t > 0 \end{cases}, \quad (2.13)$$

тобто кореляційна функція виходу системи виражається через змінні стану системи і, отже, навпаки, повинна існувати обернена задача: знаючи кореляційну матрицю виходу при заданих $\mathbf{C}(t)$ та $\mathbf{P}_\infty = \text{const}$ визначити структуру передавальної функції системи, тобто розв'язати задачу часткової ідентифікації і прогнозування системи. Для розв'язання цієї задачі доцільно використовувати метод факторизації коваріаційних функцій.

2.3 Вдосконалення метода факторизації коваріаційних функцій

Раніше передбачалося, що є опис випадкового процесу в змінних стану, і була запропонована модель визначення коваріаційної функції (матриці) цього процесу. Тепер розглянемо ситуацію, коли відома коваріаційна функція процесу, і, виходячи з цього, наведемо модель опису процесу в змінних стану.

Отже, нехай є коваріаційна матриця виходу системи $\bar{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{K}_y(t, \tau)$, побудована на основі спостереження випадкового вихідного процесу $\bar{\mathbf{y}}(t)$ вимірюваного пристроєм з матрицею спостереження $\mathbf{C}(t)$ на інтервалі $T_i \leq t, \tau \leq T_j$. Для процесу $\bar{\mathbf{y}}(t)$, що розглядається, використовуємо його опис в змінних стану (2.1)÷(2.4), для чого необхідно знайти матриці $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, \mathbf{Q} та \mathbf{P}_i , тобто розв'язати задачу факторизації коваріаційної функції. Задача факторизації може бути розв'язана в часовій або в частотній області. Для розв'язання задачі факторизації в частотній області необхідно знайти перетворення Фур'є від (2.13). Так як єдиним способом врахувати можливу

нестационарність вихідного процесу системи є факторизація в часовій області, то розглянемо її можливості. Отже, маємо

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(t) \mathbf{\Theta}(t, \tau) \mathbf{K}_x(\tau, \tau) \mathbf{C}^T(\tau), & t \geq \tau \\ \mathbf{C}(t) \mathbf{K}_x(t, t) \mathbf{\Theta}^T(\tau, t) \mathbf{C}^T(\tau), & \tau \geq t \end{cases} \quad (2.14)$$

З властивості перехідних матриць [25, 45, 145] ($\dot{\mathbf{\Theta}}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \mathbf{\Theta}(t, t_0)$) впливає висновок, що коваріаційна функція процесу $\vec{y}(t)$, генерованого системою з невідомою структурою, представленою у вигляді змінних стану, повинна мати сепарабельну (розкладену) форму.

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{F}^T(t) \mathbf{G}(\tau), & t \geq \tau \\ \mathbf{G}^T(t) \mathbf{F}(\tau), & \tau \geq t \end{cases}, \quad (2.15)$$

де

$$\mathbf{F}^T(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{\Theta}(t, t_1), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{\Theta}(t_1, t) \mathbf{K}_x(t, t) \mathbf{C}^T(t), \quad (2.17)$$

t_1 – довільна змінна часу в області визначення процесу $\vec{y}(t)$ (прийнемо її рівною T_i).

Розмірності $\mathbf{F}(t)$ та $\mathbf{G}(t)$ зв'язані з розмірністю вихідного процесу $\vec{y}(t)$. Тому першим кроком в задачі факторизації є відшукування $(n \times m)$ -мірних матриць $\mathbf{F}(t)$ та $\mathbf{G}(t)$ за заданими коваріаційними функціями. Другим кроком є розробка алгоритму отримання $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, \mathbf{Q} та \mathbf{P}_i по $\mathbf{F}(t)$ та $\mathbf{G}(t)$. Розглянемо випадок, коли на мінімальність n не накладено обмеження. У разі немінімальної факторизації кожен елемент коваріаційної матриці повинен мати форму

$$[\mathbf{K}_y(t, \tau)]_{ij} = \begin{cases} \sum_k^{n'} \sum_l^{n'} b_{ij}^*(k, l) f_k(t) q_l(\tau), & T_i \leq \tau \leq t \leq T_j \\ \sum_k^{n'} \sum_l^{n'} b_{ij}^*(k, l) q_l(t) f_k(\tau), & T_i \leq t \leq \tau \leq T_j \end{cases} \quad (2.18)$$

Члени рядів $\{f_k(t), 1 \leq k \leq n'\}$, $\{q_l(\tau), 1 \leq l \leq n'\}$ будуть, наприклад для $n = 2$, якщо

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 e^{-k_1|t-\tau|} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 e^{-k_2|t-\tau|} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

то

$$\begin{aligned} f_1(t) = e^{-k_1 t} & \quad q_1(\tau) = e^{k_1 \tau} & \quad b_{11}(k, l) = \mathbf{P}_1 \delta_{k_1} \delta_{l_1} \\ f_2(t) = e^{-k_2 t} & \quad q_2(\tau) = e^{k_2 \tau} & \quad b_{22}(k, l) = \mathbf{P}_2 \delta_{k_2} \delta_{l_2} \\ & & \quad b_{12}(k, l) = b_{21}(k, l) = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

В загальному випадку вектор-стовбці

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Утворюють системи лінійно-незалежних функцій. Кожен елемент матриці (2.19) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_y(t, \tau)]_{ij} &= \vec{f}^T(t) \begin{bmatrix} g_{ij}^*(1,1) & g_{ij}^*(1,2) & \cdots & g_{ij}^*(1,n^1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_{ij}^*(n^1,1) & & \cdots & g_{ij}^*(n^1,n^1) \end{bmatrix} \vec{q}(\tau) = \\ &= \vec{f}^T(t) \mathbf{G}_{ij}^* \vec{q}(\tau), \end{aligned} \quad (2.22)$$

де \mathbf{G}_{ij}^* – матриця розмірності $n^1 \times n^1$.

Використовуючи це подання, можливе розкладання на множники, необов'язково мінімальної степені, отримаємо у вигляді матриць розмірністю $((n^1 \cdot m) \times m)$:

$$\mathbf{F}^*(t) = \begin{bmatrix} \vec{f}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vec{f}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vec{f}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{G}^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^* \vec{q}(t) & \mathbf{G}_{12}^* \vec{q}(t) & \dots & \mathbf{G}_{1n}^* \vec{q}(t) \\ \mathbf{G}_{21}^* \vec{q}(t) & \mathbf{G}_{22}^* \vec{q}(t) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{m1}^* \vec{q}(t) & 0 & \dots & \mathbf{G}_{mn}^* \vec{q}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Достатнім критерієм для перевірки того, що матриці $\mathbf{F}^*(t)$ та $\mathbf{G}^*(t)$ є множниками мінімальної степені, являється позитивна визначеність двох матриць

$$\mathbf{M}_F = \int_{T_i}^{T_j} \mathbf{F}^*(t) \mathbf{F}^{*T}(t) dt, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{M}_G = \int_{T_i}^{T_j} \mathbf{G}^*(t) \mathbf{G}^{*T}(t) dt, \quad (2.26)$$

тобто ранг матриць \mathbf{M}_F та \mathbf{M}_G дорівнює мінімальної розмірності ($n^* = n^1 \cdot m$). Оскільки \mathbf{M}_F та \mathbf{M}_G симетрична, позитивно напіввизначені, вони повинні бути узгоджені через невироджені перетворення \mathbf{T}_F і \mathbf{T}_G відповідно з матрицями – умовними математичними очікуваннями \mathbf{E}_F та \mathbf{E}_G . Завжди існує

координатна система, в якій випадкові величини некорельовані [18, 147], і нова система пов'язана з вихідною лінійним перетворенням, тобто

$$\mathbf{T}_F \mathbf{E}_F \mathbf{T}_F^T = \mathbf{M}_F , \quad (2.27)$$

$$\mathbf{T}_G \mathbf{E}_G \mathbf{T}_G^T = \mathbf{M}_G \quad (2.28)$$

і при цьому

$$\int_{T_i}^{T_j} (\mathbf{T}_F \mathbf{E}_F \mathbf{T}_F^{-1} \mathbf{F}^*(t) - \mathbf{F}^*(t)) (\mathbf{T}_F \mathbf{E}_F \mathbf{T}_F^{-1} \mathbf{F}^*(t) - \mathbf{F}^*(t))^T dt = 0 , \quad (2.29)$$

$$\int_{T_i}^{T_j} (\mathbf{T}_G \mathbf{E}_G \mathbf{T}_G^{-1} \mathbf{G}^*(t) - \mathbf{G}^*(t)) (\mathbf{T}_G \mathbf{E}_G \mathbf{T}_G^{-1} \mathbf{G}^*(t) - \mathbf{G}^*(t))^T dt = 0 . \quad (2.30)$$

В результаті отримаємо

$$\mathbf{F}^*(t) = \mathbf{T}_F \mathbf{E}_F \mathbf{T}_F^{-1} \mathbf{F}^*(t) , \quad T_i \leq t \leq T_j \quad (2.31)$$

$$\mathbf{G}^*(t) = \mathbf{T}_G \mathbf{E}_G \mathbf{T}_G^{-1} \mathbf{G}^*(t) , \quad T_i \leq t \leq T_j \quad (2.32)$$

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = \mathbf{F}^{*T}(t) \mathbf{G}^*(\tau) = \mathbf{F}^{*T}(t) \mathbf{T}_F^{-1T} \mathbf{E}_F \mathbf{T}_F^T \mathbf{T}_G \mathbf{E}_G \mathbf{T}_G^{-1} \mathbf{G}^*(\tau) , \quad t > \tau \quad (2.33)$$

Для отримання множника мінімальної степені для (2.15) визначимо $\mathbf{F}(t)$ і $\mathbf{G}(t)$ наступним чином:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{N}_1 \mathbf{T}_F^{-1} \mathbf{F}^*(t) , \quad (2.34)$$

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{N}_2 \mathbf{T}_G^{-1} \mathbf{G}^*(t), \quad (2.35)$$

де матриці \mathbf{N}_1 та \mathbf{N}_2 , розмірністю $(n \times n^*)$, задовольняють умові

$$\mathbf{E}_F \mathbf{T}_F^T \mathbf{T}_G \mathbf{E}_G = \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2, \quad (2.36)$$

а матриця $\mathbf{E}_F \mathbf{T}_F^T \mathbf{T}_G \mathbf{E}_G$ має відповідно розмірність $(n^* \times n^*)$. Тепер, маючи алгоритмічну процедуру розкладання коваріаційної матриці $\mathbf{K}_y(t, \tau)$ на множники, необхідно на підставі $\mathbf{F}(t)$ і $\mathbf{G}(t)$ визначити матриці стану динамічної системи $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ і коваріаційні матриці \mathbf{Q} та \mathbf{P}_i . Так як координатна система вектора стану не є єдиною і з цього випливає, що зазначені матриці свідомо не єдині [37, 45, 148].

Дійсно, за виключенням своєї розмірності, матриця $\mathbf{A}(t)$ по суті не задана.

Спочатку розглянемо реалізацію з триплетом матриць $(0, \mathbf{B}^*(t), \mathbf{C}^*(t))$, а потім – питання про перетворення до координатних систем з бажаними властивостями (тут "0" – нульова матриця $\mathbf{A}^*(t)$). Перехідна матриця, що пов'язана з $\mathbf{A}^*(t) = 0$ є одиничною матрицею [25]. Тому, згідно (2.14) маємо

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = \begin{cases} \mathbf{C}_*(t) \mathbf{K}_{x^*}(\tau, \tau) \mathbf{C}_*^T(\tau), & t > \tau \\ \mathbf{C}_*(t) \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \mathbf{C}_*^T(\tau), & \tau > t \end{cases} \quad (2.37)$$

або

$$\mathbf{F}^T(t) = \mathbf{C}_*(t), \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \mathbf{C}_*^T(\tau) \quad (2.38)$$

Помітимо, що (2.38) не визначає $\mathbf{K}_{x^*}(t, t)$ однозначно, так як матриця $\mathbf{C}_*(t)$ має розмірність $(m \times n)$, а матриця $\mathbf{K}_{x^*}(t, t)$ розмірність $(n \times n)$. Використовуючи (2.7), можна показати справедливості наступних двох властивостей

$$\dot{\mathbf{K}}_{x_*}(t, t) = \mathbf{B}_*(t) \mathbf{Q} \mathbf{B}_*(t) \quad (2.39)$$

$$\mathbf{F}^T(t) \dot{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{G}^T(t) \dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{C}_*(t) \mathbf{B}_*(t) \mathbf{Q} \mathbf{B}_*^T(t) \mathbf{C}_*(t) \quad (2.40)$$

Відомо [18], що коваріаційна функція похідної випадкового вектору $\vec{y}(t)$ визначається виразом

$$\mathbf{K}_{\dot{y}}(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} \mathbf{K}_y(t, \tau) \quad (2.41)$$

або

$$\mathbf{K}_y(t, \tau) = \begin{cases} \dot{\mathbf{F}}^T(t) \dot{\mathbf{G}}(\tau), & t > \tau \\ \dot{\mathbf{G}}^T(t) \dot{\mathbf{F}}(\tau), & \tau > t \end{cases} + (\mathbf{F}^T(t) \dot{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{G}^T(t) \dot{\mathbf{F}}(t)) \delta(t - \tau) \quad (2.42)$$

Якщо процес диференціюємо в середньоквадратичному, то коефіцієнт при δ -функції повинен дорівнюватися нулю [18]. Помічаючи, що \mathbf{Q} можна, не втрачаючи спільності, вважати позитивно визначеною, приходимо до висновку, що для процесу, що диференціюється в середньоквадратичному

$$\mathbf{C}_*(t) \mathbf{B}_*(t) = 0 \quad (2.43)$$

Для процесу, що диференціюється, розкладання, згідно (2.42), має вигляд

$$\mathbf{F}_{\dot{y}}^T(t) = \dot{\mathbf{F}}^T(t) = \dot{\mathbf{C}}_*(t), \quad (2.44)$$

$$\mathbf{G}_{\dot{y}}(t) = \dot{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{K}_{x_*}(t, t) \dot{\mathbf{C}}_*^T(\tau). \quad (2.45)$$

З цього випливає, що реалізацією для похідної процесу була б функція $(0, \mathbf{V}_*(t), \mathbf{C}_*(t))$. Стратегія висновку полягає в повторенні цієї процедури диференціювання до тих пір, поки не буде досягнута $\bar{y}^{(l)}(t)$ – похідна процесу $\bar{y}(t)$ вищого порядку, яка ще існує в середньоквадратичному сенсі. Необхідність цієї процедури в тому, що розкладання процесу $\bar{y}(t)$ і всіх його похідних до $\bar{y}^{(l)}(t)$ включно необхідно для визначення матриць стану. В загальному випадку, для інтервалу $1 \leq k \leq l$ маємо

$$\mathbf{F}^{(k-1)T}(t) \mathbf{G}^{(k)}(t) - \mathbf{G}^{(k-1)T}(t) \mathbf{F}^{(k)}(t) = 0 \quad (2.46)$$

$$\mathbf{C}_*^{(k-1)}(t) \mathbf{V}_*(t) = 0 \quad (2.47)$$

Похідна l -го порядку має реалізацію $(0, \mathbf{V}_*(t), \mathbf{C}_*^{(l)}(t))$ і розкладення $\mathbf{C}_*^{(l)}(t)$ та $\mathbf{K}_{x*}(t, t) \mathbf{C}_*^{(l)}(t)$ для $\mathbf{F}^T(t)$ та $\mathbf{G}(t)$ відповідно.

Рівняння (2.44), (2.45), (2.46), (2.47) містять основні результати, що зв'язують диференційованість процесу з похідними множників $\mathbf{F}(t)$ та $\mathbf{G}(t)$. Коротко алгоритм визначення матриць стану $(0, \mathbf{V}_*(t), \mathbf{C}_*(t))$ можна звести до наступної послідовності операцій [3, 4]. Розташовуємо компоненти $\mathbf{K}_y(t, \tau)$ в порядку оберненому їх диференційованості, тобто перші r_1 компонент мають похідні тільки нульового порядку, другі r_2 компонент мають похідні тільки першого порядку і т.д. Передбачається також, що стовпці матриць $\mathbf{F}(t)$ та $\mathbf{G}(t)$ відповідно переставлені місцями і, що \mathbf{Q} – m -мірна одинична матриця. Далі розбиваємо матриці $\mathbf{V}_*(t)$ та $\mathbf{C}_*(t)$ відповідно до порядку диференційованості (r_1, r_2, \dots, r_L) :

$$\mathbf{V}_*(t) = [\mathbf{V}_{*1}(t) \quad \mathbf{V}_{*2}(t) \quad \dots \quad \mathbf{V}_{*L}(t)] - n \text{ компонент,} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{C}_*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{*1}(t) \\ \mathbf{C}_{*2}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{*L}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \text{ рядків} \\ r_2 \text{ рядків} \\ \vdots \\ r_L \text{ рядків} \end{matrix} \quad (2.49)$$

n КОМПОНЕНТ

Кожна компонента $\vec{y}_L(t)$ має реалізацію $(0, \mathbf{B}_*(t), \mathbf{C}_{*l}(t))$, яка $(l - 1)$ -кратна (а не l -кратна) диференційована в середньоквадратичному сенсі (рис. 2.1) [24].

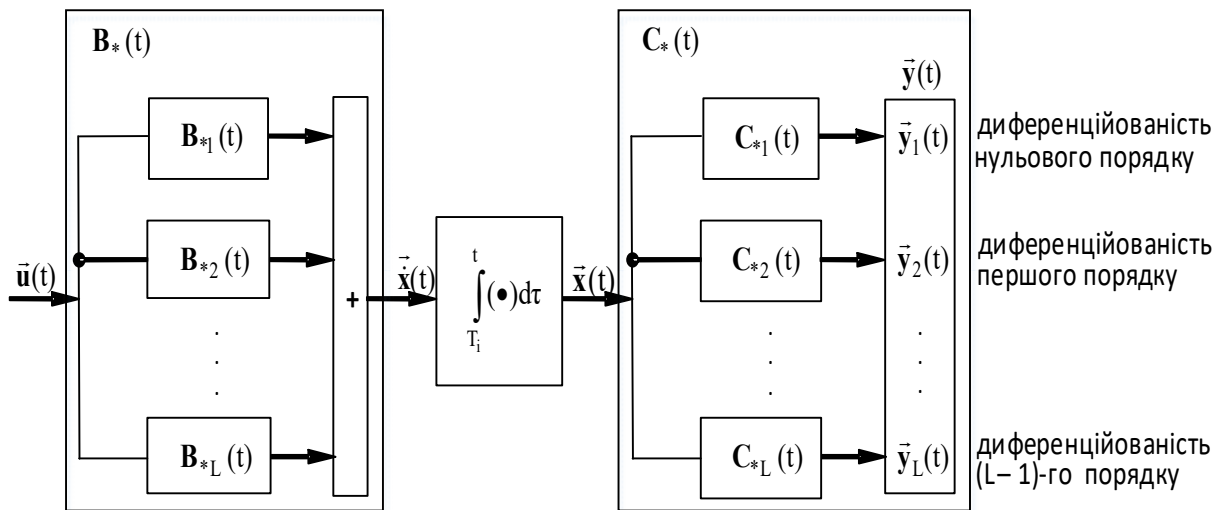


Рисунок 2.1 – Структурна схема реалізації вихідного процесу відповідно з диференційованістю його компонент [25]

Згідно (2.39) диференціальне рівняння для коваріаційної функції процесу записується у вигляді

$$\dot{\mathbf{K}}_{x*}(t, t) = \mathbf{B}_*(t) \mathbf{B}_*^T(t) = \sum_{l=1}^L \mathbf{B}_{*l}(t) \mathbf{B}_{*l}^T(t) \quad (2.50)$$

Якщо до відповідних компонент $\vec{y}_i(t)$ використати також (2.47), то з вказаних умов диференційованості випливає, що

$$\mathbf{C}_*^{(k)}(t) \mathbf{C}_*(t) = 0 \text{ при } 0 \leq k < l-1. \quad (2.51)$$

Розіб'ємо $\mathbf{F}(t)$ і $\mathbf{G}(t)$ у виді

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(t) & \mathbf{F}_2(t) & \cdots & \mathbf{F}_L(t) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\begin{array}{cccc} r_1 & r_2 & \cdots & r_L \\ \text{стовпців} & \text{стовпців} & & \text{стовпців} \end{array} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(t) & \mathbf{G}_2(t) & \cdots & \mathbf{G}_L(t) \end{bmatrix}$$

Тепер, як очевидно з (2.37), (2.38) необхідно ототожнити $\mathbf{C}_*(t)$ з $\mathbf{F}^T(t)$, тобто

$$\mathbf{C}_*(t) = \mathbf{F}^T(t) \quad (2.54)$$

$$\mathbf{C}_{*l}^T(t) = \mathbf{F}_l(t) \quad (2.55)$$

Зважаючи на це можна вільно взаємно замінити матриці $\mathbf{F}(t)$ і $\mathbf{C}^T(t)$ в наступних рівняннях. Таким чином отримуємо

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{K}_{x*}(t, t) \mathbf{F}(t) \quad (2.56)$$

$$\mathbf{G}_l(t) = \mathbf{K}_{x*}(t, t) \mathbf{F}_l(t) \quad (2.57)$$

Продиференціюємо (2.57), отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{G}}_l(t) &= \dot{\mathbf{K}}_{x^*}(t, t) \mathbf{F}_l(t) + \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \dot{\mathbf{F}}_l(t) = \\ &= \mathbf{B}_*(t) \mathbf{B}_*^T(t) \mathbf{C}_{*l}^T(t) + \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \dot{\mathbf{F}}_l(t)\end{aligned}\quad (2.58)$$

Якщо $l = 1$, то

$$\dot{\mathbf{G}}_1(t) = \mathbf{B}_*(t) \mathbf{B}_*^T(t) \mathbf{C}_{*1}^T(t) + \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \dot{\mathbf{F}}_1(t) \quad (2.59)$$

Якщо $l \neq 1$, то з урахуванням (2.51)

$$\dot{\mathbf{G}}_l(t) = \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \dot{\mathbf{F}}_l(t) \quad (2.60)$$

Після l -кратного диференціювання

$$\dot{\mathbf{G}}_l^{(l)}(t) = \mathbf{B}_*(t) \mathbf{B}_*^T(t) \mathbf{C}_{*l}^{(l-1)T}(t) + \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \dot{\mathbf{F}}_l^{(l)}(t) \quad (2.61)$$

$$\mathbf{G}_l^{(k)}(t) = \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \mathbf{F}_l^{(k)}(t), \quad 0 \leq k \leq l-1 \quad (2.62)$$

Зробимо почленне множення (2.61) на $\mathbf{C}_{*l}^{(l-1)}(t)$, поставивши $\mathbf{C}_{*l}^{(l-1)}(t)$ попереду, і, використовуючи результат перестановки (2.62), одержимо матричне рівняння розмірності $(r_l \times r_l)$

$$\begin{aligned}& \left(\mathbf{C}_{*l}^{(l-1)}(t) \mathbf{B}_*(t) \right) \left(\mathbf{B}_*^T(t) \mathbf{C}_{*l}^{(l-1)T}(t) \right) = \\ & = \mathbf{F}_l^{(l-1)T}(t) \mathbf{G}_l^{(l)}(t) - \mathbf{G}_l^{(l-1)T}(t) \dot{\mathbf{F}}_l^{(l)}(t) = \mathbf{D}_l(t),\end{aligned}\quad (2.63)$$

яке визначає систему матриць $\mathbf{D}_l(t)$.

Припустимо, що матриця $\mathbf{K}_y(t, \tau)$ позитивно визначена. З цього припущення і з умов диференційованості випливає, що $\mathbf{D}_l(t)$ також позитивно визначена матриця; тому вона має позитивно визначений квадратний корінь [13, 26, 57, 101]. Матрицю $(\mathbf{C}_{*l}^{(l-1)}(t) \mathbf{V}_*(t))$ розмірністю $(r_l \times m)$ можна виразити у вигляді

$$(\mathbf{C}_{*l}^{(l-1)}(t) \mathbf{V}_*(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \mathbf{D}_l^{\frac{1}{2}}(t) & \cdots & 0 \\ r_l & \cdots & r_l & \cdots & r_l \end{bmatrix}, \quad r_l \text{ рядків}, \quad (2.64)$$

Тепер підставимо транспоновану матрицю (2.64) у формулу (2.61)

$$\mathbf{V}_{*l}(t) \left[\mathbf{D}_l^{\frac{1}{2}}(t) \right]^T = \mathbf{G}_l^{(l)}(t) - \mathbf{K}_{x*}(t, t) \mathbf{F}_l^{(l)}(t), \quad (2.65)$$

звідси

$$\mathbf{V}_{*l}(t) = \left(\mathbf{G}_l^{(l)}(t) - \mathbf{K}_{x*}(t, t) \mathbf{F}_l^{(l)}(t) \right) \left[\mathbf{D}_l^{-\frac{1}{2}}(t) \right]^T. \quad (2.66)$$

Формула (2.66) визначає розкладення $\mathbf{V}_*(t)$ через $\mathbf{K}_{x*}(t, t)$, $\mathbf{F}(t)$ та $\mathbf{G}(t)$; однак $\mathbf{K}_{x*}(t, t)$ залишається ще невідомою. Визначимо диференціальне рівняння для $\mathbf{K}_{x*}(t, t)$, підставив (2.66) в (2.50), отримаємо

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{K}}_{x^*}(t, t) &= \\
 &= \left\{ \left[\mathbf{G}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{G}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{G}_L^{(L)}(t) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \left[\mathbf{F}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{F}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{F}_L^{(L)}(t) \right] \right\} \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}_L(t) \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \left[\mathbf{G}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{G}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{G}_L^{(L)}(t) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{K}_{x^*}(t, t) \left[\mathbf{F}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{F}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{F}_L^{(L)}(t) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Це диференціальне рівняння типу Ріккати [125]. Для того, щоб довести існування цілком визначеного розв'язку необхідно за допомогою ряду підстановок звести його до звичайного диференціального рівняння, позначивши

$$\left[\mathbf{G}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{G}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{G}_L^{(L)}(t) \right] = \tilde{\mathbf{G}} \tag{2.68}$$

$$\left[\mathbf{F}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{F}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{F}_L^{(L)}(t) \right] = \tilde{\mathbf{F}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}_L(t) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{D}} \tag{2.69}$$

прийдемо до рівняння

$$\dot{\mathbf{K}}_{x^*}(t, t) = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{K}_{x^*}^2(t, t) - (\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{F}}^T + \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{G}}) \mathbf{K}_{x^*}(t, t) + \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}}^2 \tag{2.70}$$

і вводячи ще одне позначення

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T &= f(t); & -(\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{F}}^T + \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{G}}) &= q(t); \\ \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{G}}^2 &= h(t); & \mathbf{K}_{x^*}(t, t) &= z(t), \end{aligned} \quad (2.71)$$

отримаємо

$$\dot{z}(t) = f(t) z^2(t) + q(t) z(t) + h(t) \quad (2.72)$$

– класичне рівняння Ріккати, яке зводиться підстановкою $\varphi(t) = \exp(-\int f z dt)$ у відмінне від нуля розв'язання лінійного диференціального рівняння

$$f\varphi'' - (f' + f q) \varphi' + f^2 h \varphi = 0 \quad (2.73)$$

Навпаки, так як $f \neq 0$, то кожний ненульовий розв'язок рівняння (2.73) перетворенням

$$z(t) = \frac{\varphi'}{\varphi f} \quad (2.74)$$

переводиться в розв'язання рівняння Ріккати, яке, у свою чергу, дозволяє оцінити вектор простору станів $\vec{x}(t)$ і матриці $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$. Позначивши $f = a_0$, $(f' + f q) = a_1$, $f^2 h = a_2$, запишемо перетворення Лапласа, рівняння (2.73), у виді

$$(a_0 s^2 - a_1 s + a_2) \varphi = 0 \quad (2.75)$$

$$r_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_0}$$

Загальне розв'язання рівняння (2.73) $\varphi = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$, а рівняння (2.72) згідно (2.74)

$$Z = \mathbf{K}_{x*}(t, t) = \frac{k_1 r_1 e^{r_1 t} + k_2 r_2 e^{r_2 t}}{(k_1 r_1 e^{r_1 t} + k_2 r_2 e^{r_2 t}) \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T} \quad (2.76)$$

і на підставі формул (2.6), (2.54), (2.71)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_y(t, \tau) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{K}_x(t, \tau) \mathbf{C}^T(\tau) = \mathbf{C}_*(t) \frac{k_1 r_1 e^{r_1 t} + k_2 r_2 e^{r_2 t}}{(k_1 r_1 e^{r_1 t} + k_2 r_2 e^{r_2 t}) \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T} \mathbf{C}_*^T(\tau) = \\ &= \mathbf{F}^T(t) \frac{k_1 r_1 e^{r_1 t} + k_2 r_2 e^{r_2 t}}{(k_1 r_1 e^{r_1 t} + k_2 r_2 e^{r_2 t}) \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T} \mathbf{F}(\tau) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Для визначення початкових умов розв'язання рівняння Ріккати досить вимагати, щоб початкова умова $\mathbf{K}_{x*}(T_i, T_j)$ описувалась від'ємно визначеною симетричною матрицею, $\mathbf{F}(t)$ та $\mathbf{G}(t)$ та їх похідні були кінцевими і безперервними, коваріаційна функція визначалася співвідношенням (2.15) і при

$$\tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{F}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{F}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{F}_L^{(L)}(t)]$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = [\mathbf{G}_1^{(1)}(t) \quad \mathbf{G}_2^{(2)}(t) \quad \dots \quad \mathbf{G}_L^{(L)}(t)]$$

була позитивно визначеною матрицею.

Для визначення початкових умов співвідношення (2.62) можна виразити у вигляді системи L матричних рівнянь розмірністю $(n \times n)$:

$$\dot{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{T}^{-1}(t) \quad (2.82)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \quad (2.83)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_i(t) = \mathbf{T}(T_i) \mathbf{P}_i \mathbf{T}^T(T_i) \quad (2.84)$$

Визначимо умови, за яких можна здійснити таке перетворення, щоб всі матриці стану були постійними, тобто знайдемо умови, коли матриці $\dot{\mathbf{A}}(t)$, $\dot{\mathbf{B}}(t)$, $\dot{\mathbf{C}}(t)$ постійні, а вихідними матрицями є $(0, \mathbf{B}^*(t), \mathbf{C}^*(t))$. З (2.80) при $\mathbf{A}(t) = 0$ та $\dot{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}_c$ маємо

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{T}(t), \quad (2.85)$$

де \mathbf{A}_c – матриця, що підлягає визначенню.

Загальне розв'язання рівняння (2.85) має вигляд [26, 34]

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-T_i)} \mathbf{T}(T_i), \quad (2.86)$$

При $\dot{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{B}_c$ і $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_*(t)$ після підстановки (2.86) в (2.81) і диференціювання знайдемо, що для отримання постійної реалізації необхідно, щоб матриця $\mathbf{B}_*(t)$ задовольняла рівнянню

$$\dot{\mathbf{B}}_*(t) = -\mathbf{B}_*(t) \left(\mathbf{T}^{-1}(T_i) \mathbf{A}_c \mathbf{T}(T_i) \right) \mathbf{B}_*(t) = -\mathbf{A}_T \mathbf{B}_*(t), \quad (2.87)$$

де в явному вигляді визначена матриця \mathbf{A}_T . Аналогічним чином знайдемо

$$\dot{\mathbf{C}}_*(t) = \left(\mathbf{T}^{-1}(T_i) \mathbf{A}_c \mathbf{T}(T_i) \right) \mathbf{C}_*(t) = \mathbf{C}_*(t) \mathbf{A}_T. \quad (2.88)$$

Отже, для існування реалізації системи з постійними (не залежними від часу) параметрами необхідно і достатньо, щоб існувала матриця \mathbf{A}_c , що задовольняє рівнянням (2.87) і (2.88). Тоді маємо реалізацію через перетворення загального розв'язку (2.86). Триплет матриць реалізації прийме вигляд $(\mathbf{T}(T_i) \mathbf{A}_c \mathbf{T}^{-1}(T_i), \mathbf{T}(T_i) e^{\mathbf{A}_c(t-T_i)} \mathbf{B}_*(t), \mathbf{C}_*(t) e^{-\mathbf{A}_c(t-T_i)} \mathbf{T}^{-1}(T_i))$ [90].

Хоча рівняння (2.87) і (2.88) утворюють необхідний і достатній критерій існування реалізації з постійними параметрами, цим критерієм досить важко користуватися. Простіші критерії для випадку диференційованості першого і другого порядку будуть приведені з результатами моделювання далі.

Для створеного метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем в часі розроблений метод визначення матриць динамічної системи за допомогою методу факторизації коваріаційних функцій (розв'язання прямої і оберненої задачі). Етапи методу ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем зображені на рис. 2.2.

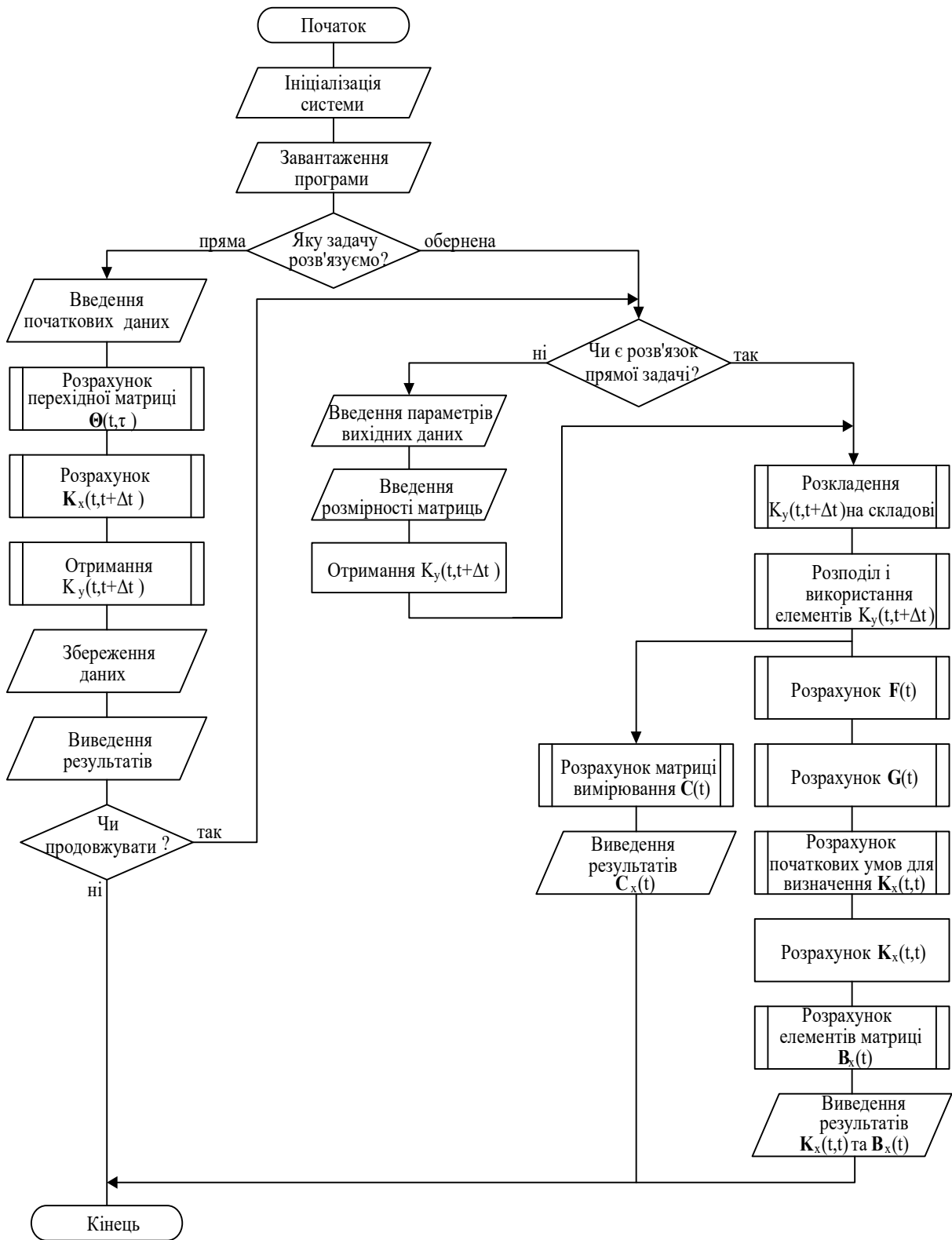


Рисунок 2.2 – Етапи методу ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем

Висновки до глави 2

Розроблений метод ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем з вдосконаленням метода факторизації коваріаційних функцій, тобто визначення основних матриць динамічної системи з використанням рівняння Ріккати. Методом підстановок це рівняння зведено до лінійного диференціального рівняння, розв'язок якого трансформується в розв'язання рівняння Ріккати, через розв'язок якого можна визначити основні матриці динамічної системи.

Використання методу простору станів дозволяє звести задачу ідентифікації структури динамічної системи з використанням додаткової інформації про генерований нею випадковий процес до розв'язання рівняння Ріккати.

На підставі взаємно однозначних диференціальних перетворень вектора стану застосована процедура дозволяє звести задачу прогнозування структури динамічної системи до задачі прогнозування структури з постійними матрицями простору станів.

Глава 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Третя глава присвячена дослідженню чутливості власних значень матриць моделей динамічних систем в просторі станів та стійкості моделей динамічних систем.

3.1 Проекційні методи оцінки станів динамічної системи

Задача знаходження оцінок станів динамічних систем є досить поширеною при проектуванні оптимальних безперервних і дискретних систем управління при їх стохастичному і детермінованому вигляді. Розглянемо можливості розв'язати окремі задачі знаходження оцінок і оптимальних управлінь методом проектування багатовимірних просторів на власні підпростори в порядку зростаючих труднощів розв'язуваних задач. При дослідженні динамічних систем в окремих випадках всі вихідні координати системи допускають безпосереднє вимірювання і спостереження.

Для лінійних систем, що володіють такими властивостями, формування оптимального закону управління як функції координат стану може здійснюватися навіть при наявності шумів вимірювання. Однак в інженерній практиці дуже часто не всі координати стану допускають спостереження і вимірювання (наприклад, швидкість реакції в хімічних виробництвах) [69, 119, 124]. У цих випадках оптимальний закон управління визначається як функція частини найкращих оцінок координат стану, які

визначаються за вимірюваннями вихідних сигналів системи. Отже, проблема оптимального управління в більш загальній постановці включає в себе як проблему знаходження оптимальної оцінки станів системи, так і проблему оптимального управління.

Для сучасної теорії управління при описі системи характерне використання змінних стану і застосування методів проектування, які оптимізують її рух управлінь в просторі можливих станів.

Найбільш часто при проектуванні систем управління використовуються наступні математичні методи:

- варіаційне обчислення;
- принцип максимуму;
- динамічне програмування.

У всіх випадках кінцевою метою проектування є визначення оптимального закону управління або керуючої послідовності, що доставляє максимум або мінімум заданому функціоналу, що характеризує якість системи [75, 120].

Загальним зазначених трьох методів є використання варіаційного обчислення: перший метод має безпосереднє відношення до рівнянь Ейлера-Лагранжа, другий – до принципу Гамільтона, третій – до рівнянь Гамільтона-Якобі.

Рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq_i} \right) - \frac{dL}{dq_i} = 0, \quad (3.1)$$

де

$$L = L(\dot{q}_i, q_i) = T(\dot{q}_i, q_i) - V(q_i); \quad (3.2)$$

L – лагранжиан;

q_i – узагальнені координати.

Рівняння Лагранжа виводиться з варіаційного принципу Гамільтона: будь-яка динамічна система буде рухатися під дією консервативних сил з будь-якого початкового стану таким чином, щоб мінімізувати середню за часом різницю між кінетичної $T(\dot{q}_i, q_i)$ і потенціальною $V(q_i)$ енергіями. Функцію, яка має повну енергію системи через узагальнені координати q та імпульси p , називають функцією Гамільтона

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = T_p + V; \quad (3.3)$$

та

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad (3.4)$$

канонічне рівняння Гамільтона.

Розглянемо в узагальненому підході розв'язання цих задач на основі методу проєціювання просторів на підпростори і оцінимо труднощі та переваги цього підходу [37, 87].

Нехай в унітарному або евклідовому просторі R даний довільний вектор \vec{x} і деякий підпростір S з базисом $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$. Вектор \vec{x} можна представити (і до того ж єдиним способом) у вигляді суми

$$\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_N, \quad \vec{x}_S \in S, \quad \vec{x}_N \perp S \quad (3.5)$$

де \vec{x}_S – ортогональна проєкція вектора \vec{x} на підпростір S .

Під ортогональністю \perp до підпростору S розуміється ортогональність до всіх векторів з цього підпростору. Пояснимо це рисунком 3.1.

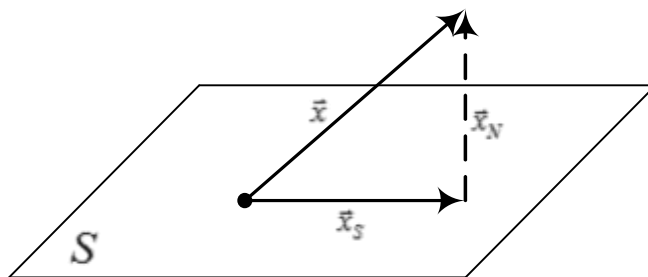


Рисунок 3.1 – Проєціювання \vec{x} на підпростір S [37]

Для встановлення розкладу (3.5) представимо \vec{x}_S у виді

$$\vec{x}_S = C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 + \dots + C_m \vec{x}_m, \tag{3.6}$$

де C_1, C_2, \dots, C_m – деякі комплексні або дійсні (для евклідова простору) числа. Для рисунку 3.1 $m = 2$.

Для визначення цих чисел виходимо з співвідношень

$$(\vec{x} - \vec{x}_S, \vec{x}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \tag{3.7}$$

Підставимо в (3.7) замість \vec{x}_S його вираз з (3.6)

$$\begin{cases} (\vec{x}_1 \vec{x}_1)C_1 + \dots + (\vec{x}_m \vec{x}_1)C_m + (\vec{x} \vec{x}_1)(-1) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ (\vec{x}_1 \vec{x}_m)C_1 + \dots + (\vec{x}_m \vec{x}_m)C_m + (\vec{x} \vec{x}_m)(-1) = 0 \\ \vec{x}_1 C_1 + \dots + \vec{x}_m C_m + \vec{x}_S (-1) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Розглянемо цю систему рівностей як систему лінійних однорідних рівнянь, що мають нульове рішення $C_1, C_2, \dots, C_m, -1$, прирівняємо її визначник нулю (попередньо транспонував його відносно головної діагоналі)

$$\begin{vmatrix} (\vec{x}_1 \vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}_1 \vec{x}_m) & \vec{x}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{x}_m \vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x}_m \vec{x}_m) & \vec{x}_m \\ (\vec{x} \vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x} \vec{x}_m) & \vec{x}_S \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

Виділяючи з цього визначника член, що містить \vec{x}_S , отримаємо

$$\vec{x}_S = \frac{\begin{vmatrix} & & & \vec{x}_1 \\ & & & \cdots \\ & \Gamma & & \vec{x}_m \\ (\vec{x} \vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x} \vec{x}_m) & 0 \end{vmatrix}}{\Gamma} \quad (3.10)$$

де $\Gamma = \Gamma(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_m)$ – визначник Грама для векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ (в силу незалежності цих векторів $\Gamma \neq 0$).

З (3.5)

$$\vec{x}_N = \vec{x} - \vec{x}_S = \frac{\begin{vmatrix} & & & \vec{x}_1 \\ & & & \cdots \\ & \Gamma & & \vec{x}_m \\ (\vec{x} \vec{x}_1) & \cdots & (\vec{x} \vec{x}_m) & 0 \end{vmatrix}}{\Gamma} \quad (3.11)$$

Формули (3.10) та (3.11) виражають проекцію \vec{x}_S вектора \vec{x} на підпростір S , спостережуваних на виході (вимірних на виході векторів параметрів процесу, що пербігає в системі), за лінійними комбінаціями яких будемо знаходити (відновлювати) оцінки векторів простору станів системи [37, 103].

Позначимо \vec{y} – довільний вектор множини векторів в S , а \vec{x} – довільний вектор в R . Якщо вектори побудувати з початку координат, то

$|\vec{x} - \vec{y}|$ і $|\vec{x} - \vec{x}_S|$ будуть відповідно дорівнювати величинам похилої і висоти, проведеної з кінця вектора \vec{x} до поверхні S (рис. 3.1). Тому, записуючи, що висота коротше похилої, матимемо $h = |\vec{x} - \vec{x}_S| \leq |\vec{x} - \vec{y}|$ (знак рівності буде лише при $\vec{y} = \vec{x}_S$). Таким чином, серед всіх векторів $\vec{y} \in S$ вектор \vec{x}_S найменш ухилиється від заданого вектора $\vec{x} \in R$. Величина $h = \sqrt{(\vec{x} - \vec{x}_S)(\vec{x} - \vec{x}_S)}$ заданого вектора $\vec{x} \in R$ є квадратичною похибкою при наближенні $\vec{x} \approx \vec{x}_S$.

Проекційні методи дослідження дозволяють одночасно і незалежно розв'язувати задачу оцінювання векторів стану динамічної системи і знаходження оптимальних управляючих послідовностей.

Застосуємо цей підхід до розв'язання задачі управління багатомірною системою з координатами недоступними для спостереження.

3.2 Дослідження на чутливість власних значень матриць моделей динамічних систем в просторі станів

При застосуванні узагальненого підходу, що викладений в пункті 3.1, до розв'язання задачі управління багатомірною системою з координатами недоступними для спостереження, тільки вихідні сигнали можуть бути виміряні безпосередньо.

Вимірювані координати відносять до вихідних змінних і позначають через y_1, y_2, \dots, y_p , вважаючи їх компонентами вектора \vec{y} .

При розв'язанні задачі будемо вважати, що вихідні змінні є лінійними функціями координат стану $\vec{x}(k)$ і пов'язані з останнім лінійним перетворенням

$$\vec{y}(k) = \mathbf{M} \vec{x}(k), \quad (3.12)$$

де \vec{x} – n -мірний вектор;

\vec{y} – p -мірний вектор;

\mathbf{M} – матриця розміру $p \times n$ з $p \leq n$.

В тому випадку, коли розмірність вектора виходу менше вектора стану, матриця \mathbf{M} є прямокутною і не має оберненої матриці. За змістом ця матриця є матрицею виходу (матрицею вимірюваних змінних) [46, 119, 124].

При дослідженні можливості оптимального управління будемо виходити з того, що система описується векторно-матричним диференціальним рівнянням [90, 120, 121, 124].

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t) + \mathbf{B}(t)\vec{u}(t) + \vec{n}(t), \quad (3.13)$$

де $\vec{x}(t)$ – n -мірний вектор, що представляє змінні стану;

$\vec{u}(t)$ – k -мірний вектор, що представляє управляючі впливи;

$\vec{n}(t)$ – s -мірний вектор, що представляє зовнішні випадкові впливи;

$\mathbf{A}(t)$ – матриця коефіцієнтів процесів, що протікають в системі;

$\mathbf{B}(t)$ – матриця управління.

Розв'язання рівняння (3.13) має вигляд [88, 124]

$$\vec{x}(t) = \mathbf{\Theta}(t, t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [\mathbf{\Theta}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\vec{u}(\tau) + \vec{n}(\tau)]d\tau, \quad (3.14)$$

де $\mathbf{\Theta}(t, t_0)$ – матриця переходу, що задовольняє однорідному диференціальному рівнянню

$$\frac{d\mathbf{\Theta}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Theta}(t, t_0) \quad (3.15)$$

і співвідношенню

$$\Theta(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (3.16)$$

де \mathbf{I} – одинична матриця.

В дискретних динамічних системах з цифровим управлінням $u(\tau) = u(kT)$ для $kT \leq \tau \leq (k+1)T$ розв'язок в дискретній формі дається рівнянням перехідних станів

$$\bar{x}(k+1) = \Theta(k)\bar{x}(k) + \mathbf{G}(k)\bar{u}(k) + \bar{m}(k), \quad (3.17)$$

де

$$\Theta(k) = \Theta(\overline{(k+1)T}, kT), \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Theta(\overline{(k+1)T}, \tau) \mathbf{B}(\tau) d\tau, \quad (3.19)$$

$$\bar{m}(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Theta(\overline{(k+1)T}, \tau) n(\tau) d\tau, \quad (3.20)$$

Принцип побудови оптимальних управлінь динамічної системи визначається також показником якості, у вимогах якого враховуються обмеження, при дотриманні яких гарантується фізична реалізація оптимального управління динамічною системою. При реалізації цифрових систем управління показник якості визначається квадратичною формою [119, 124].

$$\begin{aligned} J_N &= \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ [\bar{x}^d(k) - \bar{x}(k)]' \mathbf{Q}(k) [\bar{x}^d(k) - \bar{x}(k)] + \lambda \bar{u}'(k-1) \mathbf{H}(k-1) \bar{u}(k-1) \right\}, \quad (3.21) \end{aligned}$$

де $\bar{x}^d(k)$ – вектор бажаного стану;

\mathbf{Q}, \mathbf{H} – позитивно визначені симетричні матриці;

λ – постійний множник.

Перший доданок в (3.21) дає відхилення процесу від заданого в будь-який момент часу kT , другий доданок враховує обмеження енергії управляючого впливу.

При відповідному виборі елементів матриці \mathbf{Q} будь-яку координату стану процесу можна зробити більш важливою і ефективною для оцінки якості системи в порівнянні з іншою змінною. Аналогічно, шляхом вибору елементів матриці \mathbf{H} можна накласти бажані обмеження на енергію управляючих впливів. Оптимальне управління полягає у визначенні послідовності векторів управління $\bar{u}'(0), \bar{u}'(1), \dots, \bar{u}'(N-1)$, що мінімізують очікуване середнє значення показника якості [88, 119].

Для лінійних систем, які характеризуються рівнянням перехідних станів (3.17), вектор реалізованого управління, що мінімізує очікуване середнє значення показника якості дається формулою [119, 124]:

$$\hat{u}^\circ(k/k) = \mathbf{D}(N-k) \vec{\hat{x}}(k/k), \quad (3.22)$$

де $\mathbf{D}(N-k)$ – матриця оберненого зв'язку, елементами якої є коефіцієнти оберненого зв'язку (вона змінюється в часі, так як обчислюється на кожному кроці);

$\vec{\hat{x}}(k/j)$ – оцінка вектора стану $\bar{x}(k)$, яка використовує виміряні значення

$$\bar{y}(j), \bar{y}(j-1), \dots, \bar{y}(0) \quad (3.23)$$

вектора виходу, оптимальна в тому сенсі, що очікуване середнє значення

$$E\{[\vec{x}(k) - \vec{\hat{x}}(k/j)]'[\vec{x}(k) - \vec{\hat{x}}(k/j)]\} \quad (3.24)$$

мінімально, де згідно формули (3.5) і рис. 3.1 $\vec{\hat{x}}(k/k)$ – це ортогональна проекція вектора стану на підпростір $Y(j)$. Тому

$$\vec{x}(k) = \vec{\hat{x}}(k/k) + \vec{\tilde{x}}(k/k), \quad (3.25)$$

$Y(j)$ є підпростором простору $\vec{X}(k)$ – простору векторів стану динамічної системи.

Згідно (3.25) вектор оптимального управління $\hat{u}^\circ(k/k)$ можна записати у вигляді суми його ортогональної проекції $\hat{u}^\circ(k/k)$ на підпростір $Y(j)$ і його нормальної компоненти $\vec{\tilde{u}}^\circ(k/k)$ [37, 79].

Перший доданок в (3.21) дає відхилення від заданого процесу в будь-який момент часу kT , другий доданок враховує обмеження енергії управляючого впливу [45, 89, 119, 124]. При відповідному виборі матриці \mathbf{Q} будь-яку координату стану процесу можна зробити більш важливою і ефективною для оцінки якості системи в порівнянні з іншою змінною.

З урахуванням формули (3.5) і рис. 3.1 за аналогією можна записати

$$\vec{\hat{u}}^\circ(k/k) + \vec{\tilde{u}}^\circ = \mathbf{D}(N-k)\vec{\hat{x}}(k/k) + \mathbf{D}(N-k)\vec{\tilde{x}}(k/k). \quad (3.26)$$

Використовуючи основні властивості ортогональної проекції [37], знаходимо

$$\begin{aligned} \vec{\hat{u}}^\circ(k/k) &= \mathbf{D}(N-k)\vec{\hat{x}}(k/k) \\ \vec{\tilde{u}}^\circ(k/k) &= \mathbf{D}(N-k)\vec{\tilde{x}}(k/k) \end{aligned} \quad (3.22^*)$$

Ортогональна проекція $\vec{\hat{u}}^\circ(k/k)$, яка є найкращою оцінкою для $\vec{u}^\circ(k)$, пов'язана лінійно з найкращою оцінкою для $\vec{x}(k)$. Нормальна компонента вектора $\vec{\tilde{u}}^\circ(k)$ являє собою помилку оцінки [37, 124]. Оцінка $\vec{u}^\circ(k)$ фізично реалізовується, так як є функцією оцінки $\vec{\hat{x}}(k/k)$, яка може бути визначена за вимірюваннями вихідних сигналів.

Покажемо тепер, що використовуючи принцип оптимальності і коли замість вектора оптимального управління $\vec{u}^\circ(k)$ використовується його найкраща оцінка (3.22) і якість системи визначається по мінімуму середнього значення J_N . Розв'язання знаходиться на основі динамічного програмування. Вираз (3.21) описує оптимальний закон управління [17]. При доказі цього використовується симетричність матриць **Q** і **H** [16, 37]. Позначимо мінімум очікуваного середнього значення J_N через

$$f_N[\vec{x}(0)] = \min_{\vec{u}(j)} EJ_N, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.27)$$

Вочевидь, що коли $\vec{u}(j) = \vec{u}^\circ(j)$, то $EJ_N = f_N$ та $EJ_N - f_N = 0$. Однак, коли $\vec{u}(k) \neq \vec{u}^\circ(k)$, то $EJ_N - f_N > 0$, тобто вводиться помилка, так як за визначенням f_N є мінімумом для EJ_N . Отже, задача полягає у визначенні для $\vec{u}^\circ(k)$ оцінки, що мінімізує помилку $EJ_N - f_N$, обумовлену нереалізованістю $\vec{u}^\circ(k)$. Ця оцінка називається найкращою оцінкою і вона дається ортогональною проекцією $\vec{\hat{u}}(k/k)$ і тому рівняння (3.22) визначає оптимальний закон управління для процесів з координатами, недоступними для вимірювання. Задача зводиться до знаходження оцінок для багатокрокового процесу, в результаті якого послідовно знаходяться оцінки для всіх кроків і в кожному наступному кроці використовуються знайдені

оптимальні розв'язання на попередньому кроці, тобто реалізується принцип динамічного програмування [17, 93].

Застосовуючи принцип оптимальності, мінімальне значення $f_N[\bar{x}(0)]$ для N -крокового процесу управління з $N > 1$ можна записати у виді

$$f_N[\bar{x}(0)] = \min_{\bar{u}(0)} E\{\bar{x}'(1)\mathbf{Q}(1)\bar{x}(1) + \lambda\bar{u}'(0)\mathbf{H}(0)\bar{u}(0) + f_{N-1}[\bar{x}(1)]\}, \quad (3.28)$$

де зв'язок між $\bar{x}(1)$ та $\bar{u}(0)$ дається рівнянням

$$\bar{x}(k+1) + \varphi(k)\bar{x}(k) + G(k)\bar{u}(k) + \bar{m}(k). \quad (3.29)$$

Для $N = 1$ мінімум дорівнює [120]

$$f_1[\bar{x}(0)] = \min_{\bar{u}(0)} E\{\bar{x}'(1)\mathbf{Q}(1)\bar{x}(1) + \lambda\bar{u}'(0)\mathbf{H}(0)\bar{u}(0)\}. \quad (3.30)$$

Тут, як було сказано раніше, прийнята симетричність матриць \mathbf{Q} та \mathbf{H} .

В рівнянні (3.13) \mathbf{A} – основна матриця системи, так як її структура визначає характер перехідної матриці стану (3.15) і тому чутливість коренів характеристичного рівняння матриці \mathbf{A} визначає чутливість системи до збурень. Раніш в [90] методом факторизації кореляційних функцій множини вихідних параметрів динамічної системи, що ідентифікується, знайдена оцінка матриці \mathbf{A} (формула (3.13)). Найпростішим методом аналізу чутливості є чисельне дослідження параметричної моделі системи у всьому діапазоні зміни визначальної сукупності параметрів. Основним методом дослідження в теорії чутливості є використання функцій чутливості.

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – множина власних значень характеристичного полінома матриці \mathbf{A} . При цьому змінні стану $\bar{x}_i, i = 1, n$ і показники якості J_1, J_2, \dots, J_s є однозначними функціями параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, тобто

$$\bar{x}_i(t, \lambda) = \bar{x}(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad i = 1, n \quad (3.31)$$

та

$$J_i(\lambda) = J_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad i = \overline{1, s} \quad (3.32)$$

Приватні похідні $\frac{\partial \bar{x}_i(t, \lambda)}{\partial \lambda_k}$, $\frac{\partial J_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}$ називаються функціями чутливості

першого порядку величин \bar{x}_i і J_i по аргументам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$\frac{\partial^k \bar{x}_i}{\partial \lambda_1^{k_1} \partial \lambda_2^{k_2} \dots \partial \lambda_m^{k_m}}, \quad \frac{\partial^k J_i}{\partial \lambda_1^{k_1} \partial \lambda_2^{k_2} \dots \partial \lambda_m^{k_m}}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = k \quad (3.33)$$

називаються функціями чутливості k -го порядку за відповідними комбінаціями параметрів. Очевидно, що функції чутливості змінних стану $\bar{x}(t, \lambda)$ залежать від t і параметрів λ , а функції чутливості показників якості лише від параметрів $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Функції чутливості різних порядків є розв'язаннями рівнянь моделі системи. Ці рівняння є рівняннями чутливості.

Сукупність вихідної математичної моделі (3.13) і критеріїв якості (3.21), що визначають функції чутливості називаються моделлю чутливості системи, що вивчається.

Розглянемо два випадки. Перший – $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$ – фіксоване (розрахункове) значення параметрів; $(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) = \bar{\lambda}$ – базисна сукупність; $\bar{\lambda}$ відповідає сукупності змінних стану [76, 114, 115]. $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t, \lambda)$ будемо називати основним базовим рухом системи. Базовому руху відповідає базове значення показників якості $\bar{J}_i = J_i(\bar{\lambda})$. При зміні параметрів $\lambda_i = \bar{\lambda}_i + \mu$ отримаємо новий рух $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t, \bar{\lambda}_1 + \mu_1, \dots, \bar{\lambda}_m + \mu_m) = \bar{x}_i(t, \bar{\lambda} + \bar{\mu})$, якому відповідають нові значення показників якості

$J_i = J_i(\bar{\lambda}_1 + \mu_1, \dots, \bar{\lambda}_m + \mu_m) = J_i(\bar{\lambda} + \bar{\mu})$. Вектор $\Delta \bar{x}_i = \bar{x}_i(t, \bar{\lambda} + \bar{\mu}) - \bar{x}_i(t, \bar{\mu})$, називається додатковим рухом, який викликаний зміною власних значень матриці \mathbf{A} . При цьому можуть бути два результати:

- 1) дійсна частина одного або декількох власних значень характеристичного полінома виявиться позитивною і система буде нестійкою;
- 2) сумарна зміна λ_i дасть зміну показника якості, що не відповідає проектному завданню.

Аналіз задач 1) і 2) буде вироблено методами теорії збурень на підставі теорем Гершгоріна [79, 89, 125].

Нехай отримана в [90] матриця $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$, постійна квадратна матриця з дійсними елементами. Матриця $\|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}\|$, де λ – скалярна незалежна змінна, буде характеристичною матрицею ідентифікованої системи, а її визначник

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (3.34)$$

– характеристичним поліномом матриці \mathbf{A} .

Розглянемо випадок, коли всі власні значення (корені полінома (3.34)) різні, і залежать безперервно від всіх елементів матриці \mathbf{A} [79, 125]. Задамо збурення матриці \mathbf{A} у виді

$$\mathbf{A}(\Delta_\lambda) = \mathbf{A} + \Delta_\lambda \mathbf{B}, \quad (3.35)$$

де \mathbf{B} – довільна дійсна квадратна матриця такого ж порядку як і матриця \mathbf{A} .

Величина Δ_λ задається виходячи з рівня шумів на виході ідентифікованої системи. З теорії збурень лінійних операторів і матриць [79, 115, 125] випливає, що $\lambda_i(\Delta_\lambda)$ – власні значення матриці $\mathbf{A} + \Delta_\lambda \mathbf{B}$ та власні

вектори $\mathbf{x}_i(\Delta_\lambda)$ являються безперервними і диференційованими функціями параметра Δ_λ [79, 115, 125]:

$$\lambda_i(\Delta_\lambda) = \lambda_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial^j \lambda_i(\Delta_\lambda)}{\partial \Delta_\lambda^j} \right) \Big|_{\Delta_\lambda=0} \Delta_\lambda^j, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{x}_i(\Delta_\lambda) = \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial^j \mathbf{x}_i(\Delta_\lambda)}{\partial \Delta_\lambda^j} \right) \Big|_{\Delta_\lambda=0} \Delta_\lambda^j. \quad (3.37)$$

В формулах (3.36) і (3.37) $\beta_{ij} = \frac{\partial^j \lambda_i(\Delta_\lambda)}{\partial \Delta_\lambda^j} \Big|_{\Delta_\lambda=0}$ – коефіцієнт чутливості j -го порядку, $\gamma_{ij} = \frac{\partial^j \mathbf{x}_i(\Delta_\lambda)}{\partial \Delta_\lambda^j} \Big|_{\Delta_\lambda=0}$ – вектор чутливості j -го порядку.

Згідно теореми Гершгоріна [79, 125] будь-яке власне значення матриці \mathbf{A} лежить принаймні в одному з кіл з центром в a_{ii} з радіусом $\rho = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Якщо сума

$$a_{ii} + \rho > 0, \quad (3.38)$$

то модель системи для одного i -го значення (або декількох власних значень) нестійка. Це можливо навіть при від'ємних a_{ii} . При умові $|a_{ij}| < \rho$, що виконується згідно формул (3.36) і (3.38) при $\lambda_i(\Delta_\lambda) > 0$, що необхідно перевіряти для всіх $i = \overline{1, n}$ ($n \times n$ – порядок отриманої оцінки матриці моделі динамічної системи) [90], і в цьому випадку треба знайти допустимі додаткові рухи системи і знову перевірити стійкість матриці \mathbf{A} динамічної моделі. Розв'язок цієї задачі зводиться до фільтрації вимірюваних вихідних n^* параметрів ($n^* < n$).

У загальному випадку власні значення матриці \mathbf{A} являються комплексними числами i , при позитивному значенні дійсної частини комплексного числа власного значення хоча б для одного λ_i , отримана оцінка матриці \mathbf{A} моделі динамічної системи буде нестійкою.

Проекційні методи дослідження динамічних систем дозволяють при певному підборі матриць \mathbf{Q} та \mathbf{H} розв'язувати задачу знаходження квазіоптимального управління з певною точністю при неповному спостереженні вихідних сигналів системи.

Дослідження одержуваних моделей динамічних систем на чутливість дозволяють визначити критичні зміни власних значень оператора системи і прогнозувати нестійкі режими роботи системи.

3.3 Дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем

При розв'язанні задачі ідентифікації багатомірної динамічної системи виходили з того, що модель її динаміки може бути задана векторно-матричним диференціальним рівнянням (3.13) [90, 124].

Оцінка матриці $\mathbf{A}(t)$ визначалась на основі факторизації кореляційної матриці вихідних сигналів системи [90], а оцінка вектора управління $\vec{u}(t)$ знаходилась проекційним методом [37, 89] в припущенні, що система має оптимальне управління і $\vec{n}(t)$ – багатомірний білий шум, потужність якого залежить від режимів роботи динамічної системи.

Заключним етапом є дослідження чутливості отриманої моделі до збуджень і її стійкість.

Розв'язання задачі цього етапу потребує врахування того, що елементи матриці $\mathbf{A}(t)$ визначаються з експерименту і тому вони можуть мати помилки. В цьому випадку матриця $\mathbf{A}(t)$, оцінку якої отримано при

розв'язанні задачі факторизації кореляційної функції вихідних процесів системи, є наближенням матриці, відповідної точним вимірам [90].

Враховуючи точнісні характеристики вимірювальної системи та рівень шумів, величина помилки ε елементів a_{ij} матриці $\mathbf{A}(t)$, що дорівнює $\varepsilon \leq \delta$. Це можна відобразити у вигляді реальної матриці системи як суму двох матриць: $\mathbf{A}(t)$ – реальна розрахункова матриця без врахування шумів і матриця \mathbf{E} – такого ж порядку як і матриця \mathbf{A} та розглядати матрицю $(\mathbf{A}(t) + \mathbf{E})$. Елементи матриці \mathbf{E} :

$$|e_{ij}| \leq \varepsilon. \quad (3.39)$$

Повне розв'язання поставленої задачі може бути зведено до алгебраїчної проблеми власних значень матриць $\mathbf{A}(t)$ та $(\mathbf{A}(t) + \mathbf{E})$ і складається не тільки у визначенні власних значень і власних векторів матриць $\mathbf{A}(t)$ та $(\mathbf{A}(t) + \mathbf{E})$, але також в оцінці можливих варіацій власних значень всіх матриць класу $(\mathbf{A} + \mathbf{E})$, що задовольняє умові (3.39). При цьому фундаментальна алгебраїчна проблема власних значень заключається у визначенні значень λ в рівнянні

$$\mathbf{A}x = \lambda x \quad (3.40)$$

системи n однорідних лінійних рівнянь з n невідомими. Рівняння (3.40) можна представити у вигляді

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})x = 0, \quad (3.41)$$

де \mathbf{I} – $(n \times n)$ одинична матриця.

При довільному λ система рівнянь (3.41) має тільки розв'язок $x = 0$. Нетривіальне розв'язання існує тоді, коли матриця $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ особлива, тобто коли її визначник

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (3.42)$$

Розкриваючи визначник в лівій частині рівняння (3.42) за степенями λ , отримаємо

$$a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n = 0 \quad (3.43)$$

– характеристичне рівняння і характеристичний поліном. В полі комплексних чисел це рівняння завжди має n коренів, які можуть бути комплексними навіть при дійсній матриці \mathbf{A} та будь-якої кратності, аж до n [37, 79, 125]. Вони називаються власними значеннями або характеристичними числами. Кожному значенню λ відповідає принаймні один нетривіальний розв'язок x . Якщо ранг матриці $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ менше ніж $(n - 1)$, то буде не менш двох лінійно незалежних векторів, що задовольняє рівнянню (3.41). Якщо x – розв'язок рівняння (3.41), то kx – теж розв'язання при будь-якому k . Навіть, якщо ранг $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ дорівнює $n-1$, власний вектор, що відповідає λ , визначений з точністю до довільного множника, тому здійснюється нормування. Найбільш зручними способами нормування є:

- а) сума квадратів модулів компонент вектора x дорівнює одиниці;
- б) найбільша за модулем компонента вектора x дорівнює одиниці;
- в) сума модулів компонент вектора x дорівнює одиниці.

Способи а) та в) – нормування, що рідко зустрічаються.

Формули (3.39-3.43) справедливі і для транспонованої матриці \mathbf{A}^T . при цьому мають місце співвідношення:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^T \mathbf{y} &= \lambda \mathbf{y}; & \det(\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I}) &= 0; \\
 \mathbf{A}^T \mathbf{y}_i &= \lambda_i \mathbf{y}_i; & \mathbf{y}_i^T \mathbf{A} &= \lambda_i \mathbf{y}_i^T; \\
 \mathbf{x}_i^T \mathbf{y}_j &= 0 & (\text{якщо } \lambda_i &\neq \lambda_j).
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

Зауважимо, що, так як \mathbf{x}_i та \mathbf{y}_j можуть бути комплексними векторами, $(\mathbf{x}_i^T \mathbf{y}_j)$ не є скалярним добутком в звичайному сенсі. Дійсно, маємо

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j^T \mathbf{x}_i,
 \tag{3.45}$$

а не

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{y}_j = \overline{\mathbf{y}_j^T \mathbf{x}_i}.
 \tag{3.46}$$

Якщо \mathbf{x} – комплексний, то може статися, що

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0,
 \tag{3.47}$$

в той час як даний скалярний добуток завжди позитивний для всіх ненульових \mathbf{x} .

Розв’язання задачі стійкості моделі динамічної системи (3.13) в загальному випадку визначається структурою матриці \mathbf{A} , її рангом, типом та кратністю коренів характеристичного поліному і може бути розв’язано методом теорії збурень різного порядку власних значень і власних векторів [15, 45, 79, 91, 124, 125].

Є три підходи до розв’язання задачі стійкості моделі (3.13):

- 1) на основі алгебраїчних функцій і теорії векторних та матричних норм [125];
- 2) на основі функцій комплексного аргументу, слідства теореми Коши – принципу аргументу [105, 111, 122];
- 3) на основі теорем Гершгоріна [79].

Перший та другий підходи в термінах характеристичного поліному для кратних значень λ занадто грубі, так як поліном недостатньо відображує будову матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$. тому використовуємо третій підхід – на основі теорем Гершгоріна; він має більшу практичну цінність і враховує структуру матриць \mathbf{A} і $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$, що впливає з теореми 1 [79]:

Будь-яке власне значення матриці \mathbf{A} лежить принаймні в одному з кіл з центром a_{ii} і радіусами

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (3.48)$$

на комплексній площині.

З цього випливає, що у будь-якого власного значення λ є хоча б один ненульовий \mathbf{x} , що $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$. В обраному \mathbf{x} проведемо нормування (б) за r -ій найбільшій за модулем компоненті вектора \mathbf{x} :

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, 1, x_{r+1}, \dots, x_n),$$

де $|x_i| \leq 1, i \neq r$.

Звідси випливає:

1)

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} x_j = \lambda x_r = \lambda \quad (3.49)$$

2)

$$|\lambda - a_{rj}| \leq \sum_{j \neq r} |a_{rj} x_j| \leq \sum_{j \neq r} |a_{rj}| |x_j| \leq \sum_{j \neq r} |a_{rj}| \quad (3.50)$$

і λ лежить в одному з цих кіл.

Теорема 2 [79]. Якщо φ кіл теореми 1 утворюють зв'язну область, то в цій зв'язній області знаходиться рівно φ власних значень матриці \mathbf{A} . З доказу теореми та теорії алгебраїчних функцій випливає, що корені характеристичного поліному для матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$ являються безперервними функціями від збурення ε та радіусами εr_i для ε від 0 до 1 і при $\varepsilon = 1$. Аналогічні висновки і результати можна отримати, якщо розглядати транспоновану матрицю \mathbf{A}^T замість матриці \mathbf{A} .

Для визначення стійкості моделі необхідно проаналізувати власні значення матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$, використовуючи її жорданову канонічну форму. Для простих власних значень λ_i матриці, що має елементарні дільники [14, 37, 45, 79] матриць \mathbf{A} та $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$ діагональні. Отже існує матриця \mathbf{H} така, що $(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}) = \text{diag}(\lambda_i)$, причому стовпці \mathbf{H} складають повну систему правих власних векторів x_i , а рядки \mathbf{H}^{-1} складають повну систему лівих власних векторів y_j^T .

При нормуванні $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$ [47, 48, 79, 127] ($\|\bullet\|_2$ – евклідова норма) можна взяти в якості i -го стовпці матриці \mathbf{H} власний вектор \mathbf{x}_i і тоді i -ий рядок матриці \mathbf{H}^{-1} буде

$$\mathbf{y}_i^T / s_i, \tag{3.51}$$

де $\mathbf{s}_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_i$ при $i = (1, 2, \dots, n)$.

Тоді

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})\mathbf{H} = \text{diag} \lambda + \varepsilon \begin{vmatrix} \beta_{11}/s_1 & \beta_{12}/s_1 & \dots & \beta_{1n}/s_1 \\ \beta_{21}/s_2 & \beta_{22}/s_2 & \dots & \beta_{2n}/s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}/s_n & \beta_{n2}/s_n & \dots & \beta_{nn}/s_n \end{vmatrix}. \tag{3.52}$$

Згідно теореми 1 Гершгоріна отримаємо, що власні значення лежать в колах з центрами $\lambda_i + \varepsilon \beta_i / s_i$ та радіусами $\sum_{j \neq i} |\beta_{ij} / s_i|$, де $\beta_{ij} = \mathbf{y}_i^T \mathbf{E} \mathbf{x}_j$, так як

$\|\mathbf{E}\|_2 \leq n$, то

$$|\beta_{ij}| = |\mathbf{y}_i^T \mathbf{E} \mathbf{x}_j| \leq \|\mathbf{y}_i\|_2 \|\mathbf{E} \mathbf{x}_j\|_2 \leq \|\mathbf{E}\|_2 \leq \|\mathbf{E}\|_2 \|\mathbf{y}_i\|_2 \|\mathbf{x}_j\|_2 \leq n. \quad (3.53)$$

За визначенням

$$(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E}) \mathbf{x}_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon) \mathbf{x}_i(\varepsilon) \quad (3.54)$$

і так як $\lambda(\varepsilon)$ та всі компоненти $\mathbf{x}_i(\varepsilon)$ представляються рядами, що сходяться, порівнюємо члени при однакових степенях ε в рівнянні (3.54) [125]. Порівнюючи коефіцієнти при ε та враховуючи, що

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i + k_1 \varepsilon + k_2 \varepsilon^2 + \dots, \quad (3.55)$$

взявши перше наближення ряду

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i + k_1 \varepsilon \quad (3.56)$$

і так як

$$k_1 = \frac{\mathbf{y}_i^T \mathbf{E} \mathbf{x}_i}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_i} = \frac{\beta_{11}}{s_1}; \quad (3.57)$$

з (3.53) випливає

$$|k_i| = \frac{n}{|s_i|}. \quad (3.58)$$

Тобто при достатньо невеликому ε головний член λ_i дорівнює $k_1 \varepsilon$ і чутливість цього власного значення в першу чергу залежить від s_i .

Висновки до глави 3

В цій главі було проведено дослідження чутливості і стійкості моделей динамічних систем.

Система і відповідно її модель стійкі, якщо корені характеристичного рівняння збуреної матриці \mathbf{A} – (матриці $\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E}$) лежать в лівій напівплощині комплексної площини (лівіше уявної осі – осі ординат). При цьому центри кіл Гершгоріна є діагональні елементи матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$, а радіуси визначаються згідно рівняння (3.48) для матриці $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$.

Для обчислення власних значень матриць \mathbf{A} та $(\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{E})$ існують розроблені чисельні методи: метод обертань для симетричних матриць, метод А.М.Данилевського з перетворенням вихідної матриці в матрицю Фробеніуса, метод О.Н.Крилова [54, 55, 77, 94] на основі тотожності Гамільтона-Келі, метод Леверрьє-Фаддєєва на основі формул Ньютона для сум степенів коренів характеристичного рівняння матриці [19, 35, 44, 53, 127]. Останні три метода приблизно однакові з точки зору обчислювальних витрат і не потребують умови симетричних матриць.

Стійкість моделі динамічної системи визначається розташуванням власних значень на комплексній площині.

Чутливість моделі до збурень параметрів моделі можна в першому приближенні оцінити першим членом в розкладанні в ряд $\lambda(\varepsilon)$.

Вдосконалена методика знаходження оптимальної оцінки системи за рахунок використання проєкційних методів на відміну від інших методів, що використовують варіаційне обчислення. Проєкційні методи дослідження дозволяють одночасно і незалежно розв'язувати задачу оцінювання векторів стану динамічної системи і знаходження оптимальних управляючих послідовностей.

Глава 4

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОПЕРАТОРА МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА

Четверта глава присвячена розв'язанню задачі аналізу структури динамічного об'єкту: з урахуванням стохастичного підходу до аналізу вихідних сигналів та без урахування випадкових складових вихідного сигналу на підставі лінійних відображень множини лінійних просторів, тобто теоретико-множинний підхід.

Поставлена задача знаходження структури динамічного об'єкта за вихідним сигналом досліджувалася методом факторизації кореляційної матриці вихідного сигналу [90]. Розглянутий раніш метод і методи, що розглянуті в цій главі, відносяться до обернених задач дослідження динамічних систем, сутність яких заключається в тому, що вихідний спостережуваний сигнал являється розв'язанням динамічного оператора об'єкта, а структура самого оператора не відома. При цьому є деякі припущення про його клас: лінійний диференціальний, нелінійний диференціальний і диференціальний в частинних похідних та інші. [23, 41, 59, 97, 109, 117].

Евристичний підхід ґрунтується на тому, що вхідний сигнал діє на об'єкт, при цьому здійснюється збір інформації про всі ступені свободи динамічного некерованого об'єкта. Таким вхідним сигналом, що має нескінченний спектр, є білий шум. Необхідно розглянути методику знаходження структури оператора і оцінку його параметрів для лінійного випадку та метод ідентифікації моделі багатомірної динамічної системи.

4.1 Стохастичний підхід до аналізу структури динамічного об'єкта

Розглянемо методику знаходження структури оператора і оцінку його параметрів для лінійного випадку на відносно простому прикладі.

Нехай сигнал $y_o(t)$ виходу автономного об'єкта описується звичайним диференціальним рівнянням m -го порядку з постійними коефіцієнтами і стійкою точкою спокою $y_o = 0$ [36, 38, 39, 42]

$$\frac{d^m y_o(t)}{dt^m} + \sum_{m=0}^{m-1} a_m \frac{d^m y_o(t)}{dt^m} = 0 \quad (4.1)$$

з початковими умовами

$$\left\{ \frac{d^m y_o(0)}{dt^m} \right\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, m - 1.$$

Припустивши, для простоти, що рівняння (4.1) не має кратних коренів, отримаємо розв'язок

$$y_o(t) = \sum_{i=1}^m C_i \exp(r_i t), \quad t \leq 0. \quad (4.2)$$

Характеристичний поліном рівняння (4.1)

$$a_m r^m + a_{m-1} r^{m-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0, \quad (4.3)$$

де r_i – корені рівняння (4.1).

Рівняння (4.3) відображає структуру лінійного оператора (4.1) і встановлює взаємозв'язок між множиною коренів r_i та вектором коефіцієнтів (a_0, a_1, \dots, a_m) [42, 49, 82, 97, 109].

З іншої сторони, при кожному наборі коренів маємо m рівностей:

$$\sum_{i=1}^m C_i r_i^{(m)} = y_o^{(m)}, \quad m = (0, 1, \dots, m-1),$$

що однозначно зв'язують вектори (C_1, C_2, \dots, C_m) та $(y_o^{(0)}, y_o^{(1)}, \dots, y_o^{(m-1)})$.

Кожний запис сигналу $y_o(t)$ дозволяє знайти тільки ті значення r_i , для яких у відповідності з початковими умовами коефіцієнти C_i виявляться відмінними від нуля. Метою є обчислення коефіцієнтів a_i за записами $y_o(t)$, тому можна враховувати, що кожний з векторів $(y_o^{(0)}, y_o^{(1)}, \dots, y_o^{(m-1)})$, для якого всі $C_i \neq 0$, дозволяє без додаткових збуджень досліджувати об'єкт, тобто одне таке початкове відхилення реалізує повний набір збуджень об'єкту. Враховуючи, що взяття різниці та знаходження похідної являються ізоморфними операціями, то можна перейти від рівняння (4.1) до різницевих рівнянь регресії шляхом перетворення вихідного сигналу об'єкта за допомогою операції квантування за часом (з урахуванням теореми Котельникова) та квантування за рівнем до часових рядів [21, 22, 60, 86, 90, 96, 127].

Ізоморфізм моделей лінійних диференціальних рівнянь та регресійних рівнянь може бути забезпечений при виконанні для рядів кінцевих різниць чотирьох умов Гауса-Маркова. Якщо кінцеві різниці i -го порядку не задовольняють вимогам випадковості i -х різниць: їх нормальному закону розподілення, рівності нулю їх середнього значення та відсутності суттєвих кореляцій, то необхідно перейти до $(i + 1)$ -х кінцевих різниць (тобто до рівняння регресії більш високого порядку і знов перевірити умови Гауса-

Маркова). Крім того, отримані числові ряди на кожному кроці необхідно перевіряти на наявність помилок (першого та другого роду) [37] методами Ірвіна, за критерієм Фішера, Фостера-Стьюарта та при відсутності грубих помилок для збільшення точності оператора моделі структури об'єкту провести згладжування часового ряду y_1, y_2, \dots, y_n [21, 22, 104, 144, 146].

Для отримання оцінок коефіцієнтів характеристичного поліному (рівняння (4.3)) і визначення його порядку необхідно виконати наступні операції:

1) Знайти :

$$1\text{-і різниці} \quad u_i^{(1)} = y_i - y_{i-1}$$

$$2\text{-і різниці} \quad u_i^{(2)} = u_i^{(1)} - u_{i-1}^{(1)}$$

...

$$k\text{-і різниці} \quad u_i^{(k)} = u_i^{(k-1)} - u_{i-1}^{(k-1)}.$$

2) Для всіх різницевих рядів, попередньо перевіривши їх на виконання умов Гауса-Маркова, знайти їх дисперсії:

– для вихідного згладженого ряду

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n-1} \quad (4.4)$$

– різницевих рядів k -го порядку ($k = 1, 2, \dots$)

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{i=k+1}^n (u_i^{(k)})^2}{(n-k)C_{2k}^k}, \quad (4.5)$$

де C_{2k}^k – біноміальні коефіцієнти.

- 3) Визначити порядок регресійного рівняння шляхом порівняння $|\sigma_k^2 - \sigma_{k-1}^2|$ з $0,1\sigma_{k-1}^2$, $0,05\sigma_{k-1}^2$, $0,01\sigma_{k-1}^2$ (у залежності від заданої точності); якщо ця величина не перевищує задану точність аналого-цифрового перетворювача, то $m = k - 1$ визначає порядок диференціального оператора (4.1) – його характеристичного поліному (модель структури об'єкту) та відповідних регресійних рівнянь

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m. \quad (4.6)$$

Коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_m характеристичного полінома визначаються з визначення системи нормальних рівнянь, наприклад, для $m = 3$:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + a_3 \sum t^3 &= \sum y_t \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + a_3 \sum t^4 &= \sum y_t t \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 + a_3 \sum t^5 &= \sum y_t t^2 \\ a_0 \sum t^3 + a_1 \sum t^4 + a_2 \sum t^5 + a_3 \sum t^6 &= \sum y_t t^3 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, \quad a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad a_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

де Δ – визначник системи (4.7);

$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – відповідні визначники, в яких перший, другий, третій, четвертий стовпці у визначнику Δ замінені стовпцем

$$\begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum y_t t \\ \sum y_t t^2 \\ \sum y_t t^3 \end{pmatrix}^T$$

і характеристичне рівняння диференціального оператора (4.1) має вигляд

$$a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \quad (4.8)$$

Використовуючи метод Лобачевського-Греффе [44] (або методи Данилевського О.М., Крилова О.М., Леверьє-Фаддєєва, метод обертань [31, 53]) можна оцінити корені r_1, r_2, r_3 характеристичного рівняння диференціального оператора (4.1) з точністю знайдених коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3 згідно системи нормальних рівнянь (4.7).

У випадку, коли корені характеристичного полінома мають кратність, розглянута процедура може бути вдосконалена з урахуванням того, що при непарному числі коренів завжди є хоча б один дійсний корінь, а комплексні корені завжди зустрічаються як комплексносполучені числа та при від'ємності дійсних частин комплексносполучених коренів знайдене розв'язання буде стійким, крім того, при умові, що модулі всіх коренів $|r_i| < 1, i = \overline{1, m}$ забезпечується асимптотична стійкість лінійного оператора (4.1) [44, 50, 97, 110, 115].

Оцінка структури моделі динамічного оператора для лінійного випадку зведена до оцінки структури його характеристичного полінома.

Таким чином, з використанням ізоморфності моделей операторів на основі лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами та регресійних різницевих рівнянь, знайдених методом найменших квадратів, отримані системи нормальних рівнянь для визначення коефіцієнтів характеристичного полінома.

При виконанні вимог умов Гауса-Маркова та перевірки часових рядів на наявність (та усунення) грубих помилок в часових згладжених рядах різниць можна отримати задовільні оцінки коефіцієнтів моделі структури динамічного об'єкта, що не регулюється, за його вихідними сигналами.

Розрахунок коренів характеристичного поліному на основі метода Лобачевського-Греффе дозволяє оцінити стійкість моделі структури динамічного об'єкту [44].

4.2 Ідентифікація моделі багатомірної динамічної системи

Найбільш часто зустрічаються задачі ідентифікації оператора моделі динамічного об'єкта, вихідний сигнал якого багатомірний і в результаті його квантування за часом та за рівнем будуть отримані багатомірні (векторні) часові ряди, на підставі яких будемо оцінювати оператор динамічної системи. Попередньо, слідуючи [31, 60], введемо множину позначень та понять теорії лінійних просторів і лінійних відображень [31, 37, 60, 97, 127]:

id – тотожний оператор;

inj – канонічна ін'єкція (вкладення, відповідність між множинами, при яких різним елементам з множини X відповідають різні елементи в множині Y);

dim – розмірність лінійного простору;

im – образ лінійного простору (область значень);

ker – ядро (нуль простору) лінійного відображення;

iso – ізоморфізм (лінійна бієкція);

σ – оператор зсуву;

$S(mod \sim)$ – множина класів еквівалентності;

$\mathcal{L}(mod \mathcal{L})$ – векторний простір, індуковане відношення еквівалентності;

$\mathcal{L} \oplus span\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathcal{L}$ – тоді набір $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ є додатковим базисом для підпростору \mathcal{L} в \mathcal{L} .

Сюр'єкція – відображення між множинами X та Y [$X \rightarrow Y$], при якому

кожний елемент множини Y відповідає деякому елементу множини X .

Динамічна система задається згідно Калмана Р.Е. та Віллемса Я.К. [31, 60, 127] у виді трійки

$$\Sigma := \{T, W, \mathcal{B}\}, \quad (4.9)$$

де T – деякий (нескінчений) інтервал в R (R – дійсна пряма: R_+ – множина невід'ємних дійсних чисел, Z – множина цілих чисел, Z_+ – множина невід'ємних цілих чисел);

$$T \subset R;$$

W – алфавіт сигналів;

$\mathcal{B} \subset W^T$ – поведінка системи;

T в W^T – W транспоноване.

Якщо S – деяка множина, q – позитивне число, то $S^q = \underbrace{S \times S \times \dots \times S}_{q \text{ раз}}$ –

декартовий добуток.

$R_+^n = \underbrace{R_+ \times R_+ \times \dots \times R_+}_{n \text{ раз}}$ – декартовий добуток множин невід'ємних

цілих чисел.

R^n – множина n -мірних векторів – те, що отримуємо після квантування за часом багатомірного вихідного сигналу динамічної системи.

W – простір, в якому знаходяться значення змінних, що цікавлять, і через який система взаємодіє зі своїм зовнішнім середовищем. Елементи з W описують характерні властивості (атрибути) динамічної системи.

\mathcal{B} – поведінка системи, складається з тих траєкторій $W: T \rightarrow W$ (\rightarrow – знак відображення), які сумісні із законами, що управляють динамічною системою.

Наведене визначення узагальнює звичне поняття системи типу «вхід-вихід», а \mathcal{B} – множина всіх траєкторій системи типу «вхід-вихід».

Розглядається клас динамічних моделей M , що складається з зовнішніх поведінок скінченомірних лінійних стаціонарних систем з простіром зовнішніх сигналів R^q ; кожний елемент з M визначається двома цілими числами m та n і чотирма матрицями:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= R^{n \times n} - \text{матриця коефіцієнтів;} \\ \mathbf{B}' &= R^{q \times m} - \text{матриця управління;} \\ \mathbf{C}' &= R^{n \times m} - \text{матриця виходу;} \\ \mathbf{D}' &= R^{q \times n} - \text{матриця обходу системи,} \end{aligned} \quad (4.10)$$

що задають зовнішню поведінку системи [31, 65, 109, 124, 127], який має вид (при умові, що динамічна система може бути описана лінійними диференціальними (або різницевиими) рівняннями)

$$\begin{aligned} \sigma \vec{x} &= \mathbf{A}' \vec{x} + \mathbf{B}' \vec{u}, \\ \vec{w} &= \mathbf{C}' \vec{x} + \mathbf{D}' \vec{u}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

де \vec{x} – вектор стану системи;

\vec{u} – вектор входу – вектор управління;

σ – оператор зсуву.

Поведінка системи має чітке теоретико-множинне визначення:

$$\mathcal{B}_s(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}') := \{ \vec{w} : T \rightarrow R^q \mid \exists \vec{x} : T \rightarrow R^n \text{ та } \vec{u} \rightarrow R^m, \text{ таке, що справедливі і рівняння } (s) \}, \quad (4.12)$$

де \exists – квантор існування;

рівняння (s) визначають множину поліномів p , $p \in R[s]$;

s – невідома змінна.

Аналогічно $R^n[s]$ – множина векторних поліномів з коефіцієнтами в

R^n , а $R^{n_1 \times n_2}[s]$ – множина (матричних) поліномів з коефіцієнтами в $R^{n_1 \times n_2}$.

Якщо поліном

$$p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_0 =: p \in R[s] \quad (4.13)$$

маємо коефіцієнт $p_n \neq 0$, то число n називається його ступенем $\partial(p) := n$.

Множина поліномів від позитивних і негативних ступенів s з коефіцієнтами з R , позначимо через $R[s, s^{-1}]$. Його векторні та матричні аналоги записуються у виді $R^n[s, s^{-1}]$ і $R^{n_1 \times n_2}[s, s^{-1}]$ відповідно.

Задача для (4.10), (4.11) зводиться до знаходження найбільш сильної моделі з класу M не спростовану виміром $Z = \{\vec{w}\}$ та серед таких моделей вказати одну, для якої розмірність простору станів n і розмірність m простору управляючих входів \vec{w} будуть найменшими можливими.

Оптимальне розв'язання можливо отримати у математично точній постановці на теоретико-множинному рівні з використанням ганкелевих матриць [31, 66, 102, 108].

4.3 Обґрунтування побудови моделі «вхід – простір станів – вихід»

Модель «вхід – простір станів – вихід» базується на основних властивостях лінійних операторів [97, 143].

Дві матриці \mathbf{A} та \mathbf{B} , зв'язані співвідношенням $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$, де \mathbf{T} – деяка неособлива матриця, називаються подібними. Таким чином, дві матриці, відповідні одному оператору в лінійному просторі \mathbf{R} при різних базисах подібні між собою, причому матриця \mathbf{T} , що зв'язує ці матриці, збігається з матрицею перетворення координат при переході від першого базису до другого. Іншими словами, лінійному оператору в \mathbf{R} відповідає цілий клас

подібних між собою матриць; ці матриці представляють даний оператор в різних базисах. Дві подібні матриці мають завжди рівні визначники, тобто

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = |\mathbf{A}|. \quad (4.14)$$

Рівність $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$ є необхідною, але не достатньою умовою подібності.

Для того щоб дві матриці $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|_1^n$ та $\mathbf{B} = \|b_{ik}\|_1^n$ були подібні ($\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$), необхідно і достатньо, щоб вони мали одні й ті ж інваріантні многочлени, або одні і ті ж елементарні дільники в числовому полі K [37, 79].

Нехай матриця $\mathbf{A} = (\lambda)$ (λ – корінь характеристичного поліному, має ранг r , оскільки в цій матриці нерівні тотожні нулю мінори r -го порядку, в той час як всі мінори порядку більшого ніж r дорівнюють нулю тотожно щодо λ). Позначимо через $D_j(\lambda)$ найбільший спільний дільник всіх мінорів j -го порядку матриці $\mathbf{A} = (\lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, r$). Тоді в ряду

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) = 1, \quad (4.15)$$

кожен многочлен ділиться без залишку на наступний. Відповідні частки позначимо як $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$:

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \dots, i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda). \quad (4.16)$$

Многочлени $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ називаються інваріантними многочленами прямокутної матриці $\mathbf{A} = (\lambda)$ [16, 37].

Для подальших доказів розглянемо деякі приватні типи лінійних операторів в \mathbf{R} : оператор \mathbf{J} в \mathbf{R} називається інволютивним, якщо $\mathbf{J}^2 = \mathbf{E}$ (де

\mathbf{E} – одинична матриця). Інволютивному оператору в будь-якому базисі відповідає інволютивна матриця \mathbf{J} . Інволютивний оператор неособливий, тобто $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$.

Оператор \mathbf{P} в \mathbf{R} є проєкційним, якщо $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Нехай дано довільне розщеплення простору \mathbf{R} на два підпростори \mathbf{S} та \mathbf{T} : $\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$. Тоді для будь-якого вектора $\vec{x} \in \mathbf{R}$ має місце розкладання $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_T$, де $\vec{x}_S \in \mathbf{S}$, $\vec{x}_T \in \mathbf{T}$ [37, 85, 95].

Вектор \vec{x}_S являється проєкцією вектора \vec{x} на підпростір \mathbf{S} паралельно підпростору \mathbf{T} . Аналогічно вектор \vec{x}_T – проєкція вектора \vec{x} на підпростір \mathbf{T} паралельно підпростору \mathbf{S} .

Розглянемо оператор \mathbf{P} , що здійснює проєктування простору \mathbf{R} на підпростір \mathbf{S} паралельно підпростору \mathbf{T} , тобто оператор в \mathbf{R} визначається рівністю $\mathbf{P}\vec{x} = \vec{x}_S$ для будь-якого вектора $\vec{x} \in \mathbf{R}$. Очевидно цей оператор є лінійним, але він є проєктивним, оскільки $\mathbf{P}\vec{x} = \vec{x}_S$, $\mathbf{P}^2\vec{x} = \mathbf{P}\vec{x}_S$ і, отже, $(\mathbf{P}^2 - \mathbf{P})\vec{x} = \vec{x}_S - \vec{x}_S = 0$, тобто $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Можна перевірити і обернене твердження. Довільний проєкційний оператор \mathbf{P} в \mathbf{R} здійснює проєктування всього простору \mathbf{R} на підпростір $\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{R}$ паралельно підпростору $\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})\mathbf{R}$. Будь-яка натуральна ступінь проєкційного оператора є проєкційним оператором. Якщо \mathbf{P} – проєкційний оператор, то $\mathbf{E} - \mathbf{P}$ – проєкційний оператор, оскільки

$$(\mathbf{E} - \mathbf{P})^2 = \mathbf{E} - 2\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 = \mathbf{E} - \mathbf{P}. \quad (4.17)$$

Квадратна матриця \mathbf{P} буде проєкційною, якщо $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Очевидно, в довільному базисі проєкційному оператору відповідає проєкційна матриця. Для знаходження оператора динамічної системи на основі експериментальних даних (у вигляді векторних часових рядів, отриманих в результаті обробки вихідних сигналів досліджуваної системи) зробимо їх

упорядкування в вигляді ганкелевих квадратичних форм і відповідних їм ганкелевих матриць.

Для отримання моделі, що має вигляд «вхід – простір станів – вихід» (моделі з пам'яттю), розглянемо розкладність матричного оператора в моделі простору станів (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}). Тут \mathbf{A} – матриця коефіцієнтів системи, \mathbf{B} – матриця управління, \mathbf{C} – матриця виходу, \mathbf{D} – матриця обходу (встановлює безпосередню залежність вихідних даних системи від вхідних змінних) (рис. 4.1) [40, 105, 119].

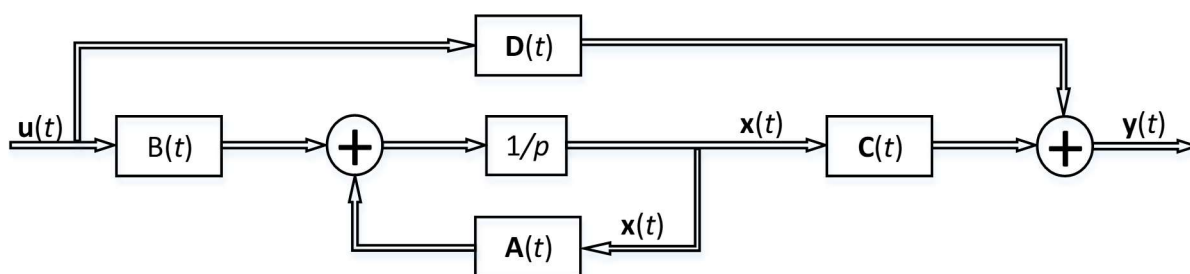


Рисунок 4.1 – Модель з пам'яттю

Нехай в результаті обробки вихідних сигналів отримані $2n-1$ чисел (або векторів в разі багатомірного вихідного сигналу динамічної системи) $s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}$. Складемо симетричну ганкелеву матрицю $\mathbf{S} = \| \| s_{i+k} \| \|_0^{n-1}$, в розгорнутому вигляді вона має вид:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Послідовні головні мінори матриці \mathbf{S} будемо позначати $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_n$:

$$\mathbf{D}_p = |s_{i+k}|_0^{n-1}.$$

Основні результати Фробеніуса [37, 60] відносно рангу ганкелевих дійсних матриць: якщо в ганкелевій матриці $\mathbf{S} = \|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ перші h рядків лінійно залежні, то $\mathbf{D}_h \neq 0$.

Матриця, що складається з перших h рядків $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_h$ матриці \mathbf{S}

$$\left\| \begin{array}{ccccc} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{h-1} & s_h & s_{h+1} & \dots & s_{h+n-2} \end{array} \right\| \quad (4.19)$$

має ранг h . З іншого боку, будь-який стовпець цієї матриці виражається лінійно через h попередніх стовпців, але тоді, оскільки ранг матриці (4.19) дорівнює h , ці перші h стовпців матриці (4.19) повинні бути лінійно незалежні, тобто $\mathbf{D}_h \neq 0$.

Для розгляду питання розкладеності ганкелевих матриць з метою зручності доказу їх розкладеності і отримання на цій основі представлення моделі в просторі станів (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}) позначимо елементи прямокутної матриці (4.19) як a_{ik} з двома індексами, де i – нумерація за рядками, k – нумерація за стовпцями, тобто перейдемо від матриці \mathbf{S} до співпадаючої за розмірністю матриці $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|_1^n$ ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$). Виходячи з алгоритмів обробки вихідних сигналів динамічного об'єкта значення елементів матриць (4.18) та (4.19) будуть невід'ємними $a_{ik} \geq 0$ або позитивними $a_{ik} > 0$.

Матриця $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|_1^n$ буде розкладеною, якщо вона може бути приведена до вигляду

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix}, \quad (4.20)$$

де \mathbf{B} та \mathbf{D} – квадратні матриці [37, 79].

Це можливо тоді і тільки тоді, коли можливе деяке розбиття всіх її індексів $1, 2, \dots, n$ на дві додаткові системи (без загальних індексів) $i_1, i_2, \dots, i_\mu; k_1, k_2, \dots, k_\nu$ ($\mu + \nu = n$) $a_{i_\alpha k_\beta} = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, \mu; \beta = 1, 2, \dots, \nu$).

В іншому випадку матриця \mathbf{A} буде нерозкладеною. Під перестановкою рядів в квадратній матриці $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ розуміється з'єднання перестановок рядків з такою ж перестановкою стовпців матриці \mathbf{A} .

Нехай матриця $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ відповідає лінійному оператору в n -мірному векторному просторі \mathbf{R} (n векторів виходу динамічної системи) з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Перестановка рядів відповідає перенумерації базисних векторів, тобто переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ до нового базису $\vec{e}'_1 = \vec{e}_{j_1}, \vec{e}'_2 = \vec{e}_{j_2}, \dots, \vec{e}'_n = \vec{e}_{j_n}$, де (j_1, j_2, \dots, j_n) деяка перестановка індексів $1, 2, \dots, n$. При цьому матриця \mathbf{A} переходить в подібну їй матрицю $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ (в кожному рядку і кожному стовпці перетворюючої матриці \mathbf{T} один елемент дорівнює одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю) [60, 79].

Під ν -мірним координатним підпростором в \mathbf{R} будемо розуміти будь-який підпростір в \mathbf{R} з базисом $\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \dots, \vec{e}_{k_\nu}$ ($1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\nu \leq n$). З кожним базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ простору \mathbf{R} зв'язано C_n^ν ν -мірних координатних підпросторів. C_n^ν – біноміальний коефіцієнт:

$$C_n^\nu = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}. \text{ Тоді матриця } \mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n \text{ розкладена в тому і тільки в}$$

тому випадку, якщо відповідний цій матриці оператор \mathbf{A} має ν -мірний

інваріантний координатний підпростір з $\nu < n$. Звідси випливає, що, якщо \mathbf{A} розкладена матриця, то перестановкою рядів вона може бути представлена у виді (4.20), і, якщо $|\mathbf{A}| \geq 0$ і в характеристичному визначнику

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & r - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4.21)$$

будь-який з головних мінорів дорівнює нулю (матриця \mathbf{A} розкладена), тоді перетворюється в нуль будь-який "охоплюючий" головний мінор і, зокрема, один з головних мінорів $(n - 1)$ -го порядку $\mathbf{B}_{11}(\lambda)$, $\mathbf{B}_{22}(\lambda)$, ..., $\mathbf{B}_{nn}(\lambda)$ [37, 60, 85, 95].

Матриця $|\mathbf{A}| \geq 0$ є розкладеною в тому і тільки в тому випадку, коли в одному з співвідношень $\mathbf{B}_{ii}(r)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) є знак рівності.

На цьому обґрунтуванні будуюмо модель динамічної системи.

4.4 Знаходження моделі динамічної системи

Модель опису структури оператора динамічних систем повинна відповідати таким вимогам:

- бути простою;
- містити мало довільних або уточнюючих елементів;
- узгоджуватися з усіма існуючими спостереженнями і пояснювати їх в рамках теорії лінійних динамічних систем;
- давати детальне передбачення результатів майбутніх спостережень, які можуть спростувати цю модель або довести її хибність, якщо передбачення, зроблені за цією моделлю, не підтверджуються.

Після введення основних властивостей лінійних операторів уточнимо фундаментальне поняття в теорії динамічних систем – поняття стану, яке надзвичайно важливо з практичної точки зору в теорії прийняття рішень і обробки сигналів.

Система з простором станів являє собою четвірку

$$\Sigma_i = \{T, W, X, \mathcal{B}_i\}, \quad (4.22)$$

де $T \subset R$ – множина моментів часу;

W – алфавіт зовнішніх сигналів;

X – простір станів;

$\mathcal{B}_i \subset (W \times X)^T$ – множина внутрішніх станів.

Припускається, що \mathcal{B}_i задовольняє аксіомі стану

$$\{(\vec{w}_k, \vec{x}_k) \in \mathcal{B}_i, k = 1, 2, t_0 \in T, \vec{x}_1(t_0) = \vec{x}_2(t_0)\} \rightarrow \{\vec{w}_1, \vec{x}_1 \underset{t_0}{\wedge} (\vec{w}_2, \vec{x}_2) \in \mathcal{B}_i\}, \quad (4.23)$$

де \vec{w}_k – вектори вихідних сигналів динамічного об'єкта;

$\underset{t_0}{\wedge}$ – знак конкатенації.

З аксіоми стану випливає, що будь-яка траєкторія, що приходить в деякий стан, сумісна з будь-якою іншою траєкторією, що виходить з цього ж самого стану. Інакше кажучи, в теоретико-множинному сенсі для заданого в даний момент стану минуле і майбутнє умовно незалежні, тобто цей стан розщеплює минуле і майбутнє поведінки системи [31, 37, 86]. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \sigma \vec{x} &= \mathbf{A}' \vec{x} + \mathbf{B}' \vec{u} \\ \vec{w} &= \mathbf{C}' \vec{x} + \mathbf{D}' \vec{u}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Вона визначає динамічну систему з простором станів, в якій σ – оператор зсуву в часі, $T = Z_+$ або Z_- – множина моментів часу (дискретна або безперервна), $Z \geq 0$.

$W = R^q, X = R^n$ та $\mathcal{B}'(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}') := \{(\vec{w}, \vec{x}) : T \rightarrow R^q \otimes R^n \mid \exists \vec{u} : T \rightarrow R^m, \text{ таке, що виконується (4.24)}\}$. Її зовнішня поведінка $\in \mathcal{B}_S(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$. R – числова ось (проквантована або безперервна); R^q, R^n, R^m – відповідні q, n, m -мірні лінійні простори; знак $:=$ – дорівнює за визначенням; \otimes – декартовий добуток множин (просторів) [31, 37, 60, 86].

Поставлена задача полягає в знаходженні моделі динамічного об'єкта за результатами вимірювань його вихідних сигналів, які після їх обробки представляють векторні часові ряди. В якості елемента класу моделей, що пояснює отриману множину спостережень і є найменшою серед можливих, знайдемо найбільш сильну неспростовану модель. Виходячи з спостережуваного векторного часового ряду визначимо відповідно до [60, 85, 95, 123, 133] алгоритми обчислення найсильнішою неспростованої моделі. Для виконання цього розроблена теорія реалізації на основі усіченої поведінки [60, 85, 95]. Сформулюємо поставлену задачу: для отриманого в результаті обробки спостережень за динамічним об'єктом q -мірного часового ряду $\vec{w}(t_0), \vec{w}(t_0 + 1), \dots, \vec{w}(t_1)$ ($-\infty \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$) з $\vec{w}(t) \in R^q$ знайти динамічну модель об'єкта, що пояснює наведенні спостереження.

У загальному випадку, методичний підхід до побудови алгоритмів, що адекватно представляють модель і враховують раніше заявлені вимоги до лінійності, упорядкованості, законам збереження, розкладеності операторів, полягає в завданні деякого певного набору рівнянь, що містять поки що мінімальний набір параметрів з мінімальним набором обмежень. Однак, перш ніж створювати алгоритм для отримання оптимальних (наближених) моделей з урахуванням перешкод, доцільно побудувати алгоритм з урахуванням тільки розглянутих структурних властивостей лінійних операторів для реалізації точних моделей [31, 60, 86, 97, 143].

Клас моделей \mathcal{M} складається з усіх лінійних підпросторів векторного простору вихідних параметрів динамічного об'єкта. Конкретна модель M_1 заданого явища (функціонування динамічного об'єкта) вважатимемо сильнішою ніж модель M_2 , якщо $M_1 \subset M_2$. При цьому будемо розглядати тільки прямі вимірювання атрибутів самого явища. Припустимо, що явище S потрібно моделювати на основі вимірювань $Z \subset S$ в заданому класі моделей $\mathcal{M} \subset 2^S$. Перевагу у виборі моделі з \mathcal{M} віддамо тієї, що не суперечить Z і дає найкращі передбачення. Вона є найбільш сильною неспростованою моделлю. З математичної точки зору, вона неможорується в \mathcal{M} , якщо є імплікація $\{Z \subset M' \subset \mathcal{M} \text{ та } M' \subset M\} \rightarrow \{M' \equiv M\}$.

Модель M_Z^* є найбільш сильною з класу моделей \mathcal{M} , заснованої на вимірюваннях Z , якщо

$$Z \subset M_Z^* \in \mathcal{M} \text{ та } \{Z \subset M \in \mathcal{M}\} \rightarrow \{M_Z^* \subset M\}. \quad (4.25)$$

Це можливо, коли сімейство моделей $\mathcal{M} \subset 2^S$ має властивість перетину, тобто

$$\{\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}\} \rightarrow \left\{ \bigcap_{M \in \mathcal{M}'} M \subset \mathcal{M} \right\}, \quad (4.26)$$

і що для кожного $Z \in \mathcal{L} \in 2^S$ існує найбільш сильна неспростована модель M_Z^* в класі моделей \mathcal{M} , яка ґрунтується на вимірюваннях Z [60]. Це виходить з наступного обґрунтування.

При $T = Z_+$ або Z розглянемо систему $\Sigma = \{T, R^q, \mathcal{B}\}$. Тоді поліноміальна матриця \mathbf{R} , така, що $\Sigma = \Sigma(\mathbf{R})$, існує в тому і тільки в тому випадку, коли система Σ лінійна, стаціонарна і повна, тобто в тому і тільки в тому випадку, коли її поведінка \mathcal{B} лінійна, інваріантна щодо зсуву і

замкнена в топології поточечної збіжності простору $(R^q)^T$ (простору q -мірних часових рядів). Це сама чітка з можливих характеристик цього класу систем: потрібно, щоб поведінка $\mathcal{B} \subset (R^q)^T$ була лінійною, інваріантною відносно зсуву ($\sigma\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, якщо $T = Z_+$ та $\sigma\mathcal{B} = \mathcal{B}$ для Z), і повним в топології поточечної збіжності, де σ – оператор зсуву.

Після наведеного обґрунтування можна приступити до розв'язання поставленої задачі знаходження моделі динамічного об'єкта за його вихідними сигналами [52, 60].

Вихідні сигнали динамічного об'єкта $\bar{w}(t)$ після обробки вимірювальною системою будуть багатомірними часовими рядами: $\bar{w}(0), \bar{w}(1), \dots, \bar{w}(t)$ у 1-ому випадку дискретного часу $T = Z_+$ та $\bar{w}(-1), \bar{w}(0), \bar{w}(1), \dots, \bar{w}(t)$ у 2-ому випадку $T = Z$.

На їх підставі для структурного упорядкування інформації побудуємо нескінченні векторні ганкелеви матриці [14, 31, 33, 37, 60, 79, 86].

$$\mathcal{H}_1(\bar{w}) := \begin{pmatrix} \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \dots & \bar{w}(t') & \dots & \dots \\ \bar{w}(1) & \bar{w}(2) & \dots & \bar{w}(t'+1) & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{w}(t) & \bar{w}(t+1) & \dots & \bar{w}(t+t') & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

(випадок $T = Z_+$)

або у випадку $T = Z$

$$\mathcal{H}_2(\bar{w}) := \begin{pmatrix} \dots & \bar{w}(-1) & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \dots & \bar{w}(t') & \dots \\ \dots & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \bar{w}(2) & \dots & \bar{w}(t'+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \bar{w}(t-1) & \bar{w}(t) & \bar{w}(t+1) & \dots & \bar{w}(t+t') & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

На підставі (4.27), (4.28) побудуємо розбиту на блоки (нескінченну в чотирьох напрямках) ганкелеву матрицю [31, 86] для ряду $\vec{w}(t): Z \rightarrow R^q$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_-(\vec{w}) \\ \hline \mathcal{H}_+(\vec{w}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & \vec{w}(-t-1) & \vec{w}(-t) & \dots & \vec{w}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \vec{w}(t-2) & \vec{w}(-1) & \dots & \vec{w}(t'-1) & \dots \\ \dots & \vec{w}(-1) & \vec{w}(1) & \dots & \vec{w}(t') & \dots \\ \dots & \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & \dots & \vec{w}(t'+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \vec{w}(t-1) & \vec{w}(t) & \dots & \vec{w}(t+t') & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Введемо поняття відносного рангу по рядках $\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2)$ розділеної на блоки нескінченної матриці (4.29), представивши її у вигляді

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \hline \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Спочатку припустимо, що матриця \mathbf{M} скінченна. Тоді за визначенням

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2) = \text{rank } \mathbf{M}_1 + \text{rank } \mathbf{M}_2 - \text{rank } \mathbf{M} = \text{rank } \mathbf{M} \quad (4.31)$$

і припустимо далі, що матриця \mathbf{M} має нескінченне число стовпців і з урахуванням формул (4.18) і (4.19) припустимо

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{rank}(\mathbf{M}_{1,t}; \mathbf{M}_{2,t}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{M}}_1; \tilde{\mathbf{M}}_2). \quad (4.32)$$

Тут згідно [31, 86] $\mathbf{M}_{1,t}$ позначає матрицю, отриману з \mathbf{M}_1 в результаті обмеження її по стовпцю з номером t , а $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 \end{pmatrix}$ – підматрицю максимального ранга в \mathbf{M} .

Введене визначення очевидним чином поширюється на випадок матриці з нескінченним в обидві сторони числом стовпців. В результаті отримуємо

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2) = \sup_{t \rightarrow \infty} \text{rank}(\mathbf{M}_1^t; \mathbf{M}_2^t), \quad (4.33)$$

тобто (4.33) є верхньою межею відносно рангу за всіма підматрицями \mathbf{M}_1 та \mathbf{M}_2 , що одержані в результаті викреслювання будь-якого числа рядків в \mathbf{M}_1 і \mathbf{M}_2 .

Доказано в [31, 60, 86], що $\text{rank}(\mathcal{H}_-(\vec{w}); \mathcal{H}_+(\vec{w})) < \infty$ і він дорівнює розмірності мінімального представлення з простором станів $\Sigma_S(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$ найбільш сильної неспростованої (AR)-моделі $\mathcal{B}(R_{\vec{w}}^*)$ часового ряду \vec{w} (тут (AR) – авторегресійна модель). Для отриманого в результаті обробки спостережуваного часового ряду $\vec{w}: Z \rightarrow R^q$ та побудованої для системи (4.24) матриці $\mathbf{M} \in R^{(n+q) \times (n+m)}$, яка задає відображення

$$\mathbf{M}: \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \vec{u}(t_i) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i + 1) \\ \vec{w}(t_i) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

де $\vec{x}(t)$ – вектор стану;

$\vec{u}(t)$ – вектор управління;

$\vec{w}(t)$ – спостережуваний часовий ряд.

Розбивши матрицю \mathbf{M} (4.34) на блоки

$$\mathbf{M} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \hline \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{array} \right), \quad (4.35)$$

так, що $\mathbf{A}' = R^{n \times n}$, $\mathbf{B}' = R^{n \times m}$, $\mathbf{C}' = R^{q \times n}$ і $\mathbf{D}' = R^{q \times m}$, отримаємо модель динамічного оператора $\Sigma(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$, яка є найбільш сильною неспростованою моделлю з мінімальним простором станів і мінімальним числом входів m для часового ряду $\vec{y}(t)$ [60, 105, 119]. Обґрунтуємо ці розв'язання, наділивши лінійні оператори необхідними додатковими властивостями: сюр'єктивною відповідністю (відображенням) між множинами, при якому кожен елемент однієї множини відповідає деякому елементу іншої множини і бієктивним відображенням – взаємно однозначною відповідністю, що є одночасно однозначною, ін'єктивною (при якому різним елементам з першої множини відповідають різні елементи іншої), і сюр'єктивною [60].

Таким чином, вперше розроблений метод знаходження моделі динамічної системи, що задається тільки вихідним сигналом, та визначення характеристик динамічної системи на відміну від відомих процесів, описаних задачами ідентифікації, управління і вимірювання.

4.5 Метод моделювання оператора динамічної системи

Нехай вимірювальною системою зафіксований невідомий сигнал, який після обробки має вигляд часового ряду $\vec{y}(-1), \vec{y}(0), \vec{y}(1), \dots, \vec{y}(t)$. Такі сигнали можуть мати різну фізичну природу: електромагнітну, гравітаційну, акустичну, оптичну, біологічну, соціальну, зафіксувавши які, знайти в лінійному наближенні модель об'єкта, його генеруючого. Умовою для розв'язання цієї оберненої задачі є наявність лінійної відповідності з часом, відстанню, тиском і т.д., з однаковою топологією і збігом початкових (граничних) умов.

При розробці методу спочатку визначимо основну ідею, а потім вона буде приведена в систематичну процедуру, яку можна застосовувати майже механічно. Однак одержуваний метод включає тільки стандартні методи лінійної алгебри, його не можна представляти як чисельні процедури, оскільки тут не враховується чисельна стійкість, робастність, обчислювальна складність.

Маємо вихідні дані $\vec{w}(-1), \vec{w}(0), \vec{w}(1), \dots, \vec{w}(t), \dots$

1. Визначаємо структуру в матриці (4.30) $\mathcal{H}(\vec{w})$.

Для цього введемо такі матриці H_- та H_+ (де H_- складена з рядків матриці $\mathcal{H}_-(\vec{w})$, а H_+ – з рядків матриці $\mathcal{H}_+(\vec{w})$), що

$$\text{rank}(H_-; H_+) = \text{rank}(\mathcal{H}_-(\vec{w}); \mathcal{H}_+(\vec{w})) =: n.$$

Визначаємо запізнювання. З ганкелевої структури випливає, що для $t \in Z_+$, вирази

$$\begin{aligned} \rho_t &:= \text{rank } \mathcal{H}_t(\vec{w}) - \text{rank } \mathcal{H}_{t-1}(\vec{w}) \\ \rho_0 &:= \text{rank } \mathcal{H}_0(\vec{w}) \end{aligned} \tag{4.36}$$

визначають незростаючу послідовність невід'ємних цілих чисел.

Тепер обчислимо таке t' , що $\rho_t = \rho_{t'}$, для $t > t'$. В результаті отримаємо відповідні матриці, зупинившись на $q(t' + 1)$ нижніх рядках в $\mathcal{H}_-(\vec{w})$ та $q(t' + 1)$ верхніх рядках в $\mathcal{H}_+(\vec{w})$.

Далі визначимо матрицю $\text{col}(H_1, H_2) = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, що складається з такої кількості стовпців $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, що стовпці $\text{col}(H_1, H_2)$ породжують

лінійний простір, натягнутий на стовпці матриці \mathbf{H} [21, 37, 55, 79, 144]. Природно, що ранг матриці \mathbf{H} $\text{rank}(H_1; H_2) = n$ [60].

2. Визначаємо простір станів: обчислимо ядро (ker) матриці H_1 і припустимо $\mathcal{H} = H_2 \text{ker} H_1$.

Розмірність (dim) ядра лінійного оператора (матриці) співпадає з розмірністю її спектра [37, 97, 143,] набором коренів характеристичного полінома. Відзначимо, що розмірність області значень H_2 за модулем \mathcal{H} дорівнює n , тобто

$$\text{dim}(\text{im } H_2)(\text{mod } \mathcal{H}) = n. \quad (4.37)$$

Потім прийmemo

$$X \cong ((\text{im } H_2)(\text{mod } \mathcal{H})). \quad (4.38)$$

Якщо \sim – відношення еквівалентності на множині S , то $S(\text{mod } \sim)$ представляє собою множину класів еквівалентності; $(\text{im } H_2)$ – область значень оператора (матриці H_2); X – простір станів. Приймемо $\vec{x}(t) := \vec{h}_+(t)(\text{mod } \mathcal{H})$, де $\vec{h}_+(t)$ – стовпець з номером t матриці H_+ .

3. Визначимо простір вхідних сигналів.

Прийmemo

$$\vec{f}(t) := \text{col}(\vec{w}(t), \vec{x}(t)) \quad \text{та} \quad S := \text{span} \{ \vec{f}(t), t \in Z \}. \quad (4.39)$$

Формула (4.39) означає, що, якщо \mathcal{L} – векторний простір і $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ – його підпростір, то $\mathcal{L}(\text{mod } \mathcal{L}')$ означає векторний простір, індукований відношенням еквівалентності, та $\vec{e}_i \in \mathcal{L}$, $i \in n$ – такі лінійно незалежні

вектори, що $\mathcal{L}' \oplus \text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} = \mathcal{L}$; тоді набір $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ буде додатковим базисом \mathcal{L}' в \mathcal{L} [37, 60, 97, 143].

Очевидно, що проекція $\pi_x: S \rightarrow X$, що визначається рівністю $\pi_x \vec{f}(t) := \vec{x}(t)$, сюр'єктивна (така відповідність між множинами, при якому кожен елемент однієї множини відповідає деякому елементу іншої множини) – тим самим S представлений як векторне розшарування на X [37, 97, 143].

Задамо векторний простір U і сюр'єктивне відображення $\pi_u := S \rightarrow U$ так, що $S = X \oplus U$, тобто так, що відображення $\pi := (\pi_x, \pi_u)$ бієктивно (відповідність, що є одночасно однозначною, ін'єктивною і сюр'єктивною); ін'єкція – вкладення, відображення – таке співвідношення між множинами, при якому різним елементам з однієї множини відповідають різні елементи з іншої множини.

Очевидно, що розмірність $U = \dim U = \dim S - \dim X$

Приймемо, що $\vec{u}(t) = P_u \vec{f}(t)$, де P_u – оператор проектування.

4. Визначення параметрів системи.

Для $i \in (n+m)$ введемо числа t_i так, що вектори $\vec{f}(t_i)$ утворюють базис простору S . Тоді $\vec{f}(t_i) = \text{col}(\vec{x}(t_i), \vec{u}(t_i))$ будуть базисом для $X \oplus U$. Тепер визначимо таку $(n+q) \times (n+m)$ -матрицю \mathbf{M} , що

$$\mathbf{M}: \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \vec{u}(t_i) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i+1) \\ \vec{w}(t_i) \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

В результаті нехай $\vec{w}: Z \rightarrow R^q$ – спостережуваний часовий ряд і $\mathbf{M} \in R^{(n+q) \times (n+m)}$ – побудована матриця (4.40). Розіб'ємо \mathbf{M} на блоки

$$\mathbf{M} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \hline \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{array} \right), \quad (4.41)$$

так $\mathbf{A}' \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B}' \in R^{n \times m}$, $\mathbf{C}' \in R^{q \times n}$ та $\mathbf{D}' \in R^{q \times m}$. Тоді система $\Sigma_s(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$ є найбільш сильною неспростованою моделлю з мінімальним простором станів і мінімальним числом входів для часового ряду \vec{w} [31, 86, 97, 143].

Етапи розробленого методу зображені на рис. 4.2.

Таким чином, запропонований метод моделювання оператора динамічної системи на основі властивостей лінійних операторів та упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих квадратичних форм та ганкелевих матриць, що дозволяє розв'язувати обернені задачі динаміки.

Висновки до глави 4

Розглянуто два підходи, щодо розв'язання поставленої задачі аналізу структури динамічного об'єкту: з урахуванням стохастичного підходу до аналізу вихідних сигналів та без урахування випадкових складових вихідного сигналу на підставі лінійних відображень множини лінійних просторів, тобто теоретико-множинний підхід. В першому підході визначається характеристичний поліном оператора моделі динамічного об'єкту, в другому – представлення у виді оператора моделі «вхід – простір станів – вихід».



Рисунок 4.2 – Етапи метода моделювання оператора динамічної системи

Пропонований метод моделювання оператора динамічної системи на основі властивостей лінійних операторів та упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих квадратичних форм і ганкелевих матриць дозволяє обговорювати розв'язання обернених задач динаміки на теоретико-множинному рівні в математично точній і

погодженій постановці. Це призводить до поняття оптимальної точної моделі (без урахування перешкод), а саме до найбільш сильної неспростованої моделі в класі лінійних систем. Така модель пояснює спостереження і мала наскільки можливо [14, 31, 42, 60, 85, 86, 95]. Її існування випливає з властивості перетину (4.26).

Лінійні скінченномірні системи задовольняють найбільш сильної неспростованої моделі через те, що їх поведінка в точності відповідає замкнутим лінійним інваріантним відносно зсуву підпросторам в $(R^q)^T$.

Проілюстрована послідовність побудови моделі оператора лінійної динамічної системи як розв'язання оберненої задачі динаміки: по вихідному сигналу визначити структуру оператора в просторі станів, дозволяє розробляти обчислювальні алгоритми для реальних динамічних систем в лінійному наближенні.

Глава 5

ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ БЕЗПЕРЕРВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У п'ятій главі представлені результати моделювання та розробки компонентів програми «Trinity-factor» для визначення оператора моделі безперервного виробництва та факторизації коваріаційних функцій динамічної системи (розв'язання прямої і оберненої задачі).

5.1 Структура інформаційної технології

Для реалізації методів ідентифікації і прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів необхідно розробити програмне забезпечення, яке базується на запропонованому в главі 4 методі упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих форм та матриць та методах моделювання оператора динамічної системи та факторизації коваріаційних функцій (глава 2), що дозволяють розв'язувати обернені задачі динаміки.

Інформаційна технологія ідентифікації і прогнозування стану динамічної системи зображена на рис. 5.1, де всі інформаційні процеси представлені блоками, що мають інформаційні входи, управляючі виходи, регламент виконання, який визначається методами і моделями. Верхні блоки відповідають реалізації метода знаходження оператора моделі динамічної системи, нижні – виконанню прямої задачі (отримання бібліотек моделей), середні – розв'язанню оберненої задачі з використанням методу факторизації коваріаційних функцій.

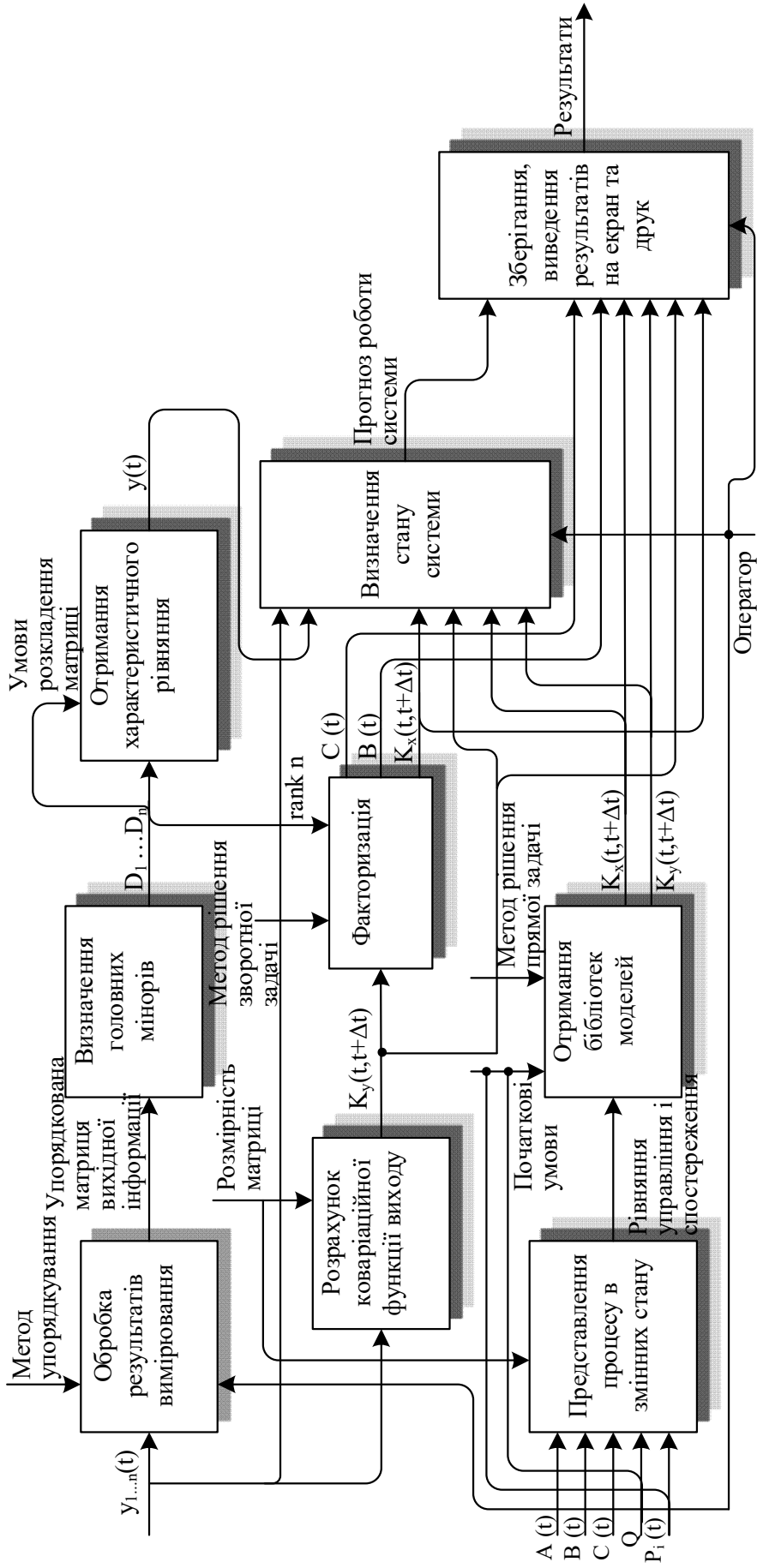


Рисунок 5.1 – Інформаційна технологія ідентифікації і прогнозування стану динамічної системи

Для розробки комп'ютерної програми «Trinity-factor» було обрано мову програмування Python [83, 112, 116]. Ця мова на відміну від інших є дуже зручною, код на ній лаконічний. Python має досить функціональну стандартну бібліотеку і включає можливість встановлювати додаткові бібліотеки з офіційного менеджера пакетів і не тільки.

Розробка проводиться в середовищі програмування JetBrains PyCharm – комерційному інтегрованому середовищі розробки, що дозволяє пришвидшити процес розробки на Python, а також у версії Professional Edition підтримує розробку за допомогою фреймворків Django та ряду інших [10, 20, 116, 118].

Для представлення матриць, проведення символічних та чисельних розрахунків, а також зображення графіків було використано сторонні бібліотеки, а саме NumPy, SymPy, matplotlib.

NumPy – розширення мови Python, що додає підтримку великих багатовимірних масивів і матриць, разом з великою бібліотекою високорівневих математичних функцій для операцій з цими масивами [9]. Основні пакети, що доповнюють NumPy, це: SciPy – бібліотека, що додає більше MATLAB-подібної функціональності; Matplotlib – пакет для створення графіки в стилі MATLAB. Внутрішньо NumPy базується на бібліотеці LAPACK, призначеній для розв'язання основних задач лінійної алгебри. Matplotlib – бібліотека на мові програмування Python для візуалізації даних двовимірною 2D графікою (3D графіка також підтримується) [8].

SymPy – це бібліотека Python для символічних обчислень [11]. SymPy включає в себе функції, починаючи від базової символічної арифметики, обчислення, алгебри, дискретної математики та квантової фізики.

5.2 Характеристика безперервного технологічного процесу сушіння технічного вуглецю

Технічним вуглецем (техвуглецем) називають продукт, що складається з вуглецю (вміст вуглецю близько 99%), який широко застосовується в хімічній промисловості як підсилюючий наповнювач при виробництві гум і пластичних мас, використовується у виробництві автомобільних шин і гумотехнічних виробів, а також в якості компонента, що додає пластмасам спеціальні властивості, і як пігмент в лакофарбової, полімерної та електрохімічної промисловості. Вироблений технічний вуглець може відповідати різним маркам, які відрізняються адсорбуючими властивостями, значенням рН, зольністю, вмістом сірки, міцністю гранул, насипною щільністю, змістом пилу.

Технологічний процес отримання технічного вуглецю включає в себе наступні етапи виробництва:

- процес приготування сировинної суміші і подача її в виробництво;
- процес отримання технічного вуглецю в хімічних реакторах;
- процес уловлювання технічного вуглецю і транспортування в ділянку обробки;
- процес вологого гранулювання і сушіння технічного вуглецю;
- процес упаковки технічного вуглецю.

Основна кількість промислового техвуглецю випускається в гранульованому вигляді, тобто у вигляді кульок розміром 0,25-0,3 мм. Такий техвуглець добре транспортується, володіє необхідною плинністю, не злежується і тому може зберігатися в бункерах великого об'єму.

Гранулювання – це отримання з сипучих матеріалів порівняно однорідних за розмірами і щільності гранул [58]. Існує два основних способи гранулювання технічного вуглецю – сухий і мокрий. На ПАТ «Кременчуцький завод технічного вуглецю» грануляція здійснюється

мокрим способом, тобто шляхом змішування дрібнодисперсного вуглецевого порошку з підігрітим водно-мелясовим розчином в роторному грануляторі. Після гранули техвуглецю потребують сушіння для видалення зайвої вологи і придбання потрібних фізичних властивостей. Таким чином, технологічний процес сушіння гранульованого технічного вуглецю є кінцевим етапом його виробництва.

Сушка є енергоємним процесом, який значно впливає на якість вихідного продукту. Процес сушіння здійснюється в модифікованих барабанних печах, які працюють в дуже напруженому режимі, та відбувається за рахунок підведення тепла від топкових газів аксіального газового пальника та підведення тепла від рідкопаливних і газових пальників топки через стінки барабану. Схему сушильного барабану, розташування пальників і точок контролю температури наведено в додатку А.

В даний час відсутня можливість прямих вимірювань температури гранульованого вуглецю, що просувається по барабану від завантажувального торця до вивантаження. Процес сушіння характеризується нелінійною кінетичною залежністю і змінною масою матеріалу на різних ділянках барабана, що ускладнює управління процесом і знижує точність стабілізації температури вихідного продукту.

Граничні значення окремих чисельних показників процесу обробки техвуглецю наведено в табл. 5.1.

Процес автоматичної стабілізації температури технічного вуглецю на виході сушильного барабана значно впливає на підсумкову якість продукції. При розробці програмних засобів слід дотримуватися нижче приведенного переліку вимог (табл. 5.2).

Таблиця 5.1 – Перелік чисельних показників технологічного процесу

№ п/п	Найменування показника	Чисельне значення
1	Навантаження на гранулятор по воді, кг/год	500 – 5000
2	Концентрація меляси в водно-мелясовому розчині по сухим речовинам, % не більше	1,5
3	Тиск води на вході в змішувач-гранулятор, кг / см ²	2 – 8
4	Температура води, яка подається в змішувач-гранулятор, °С	60-90
5	Масова частка вологи на виході із змішувача-гранулятора,%	40 – 55
6	Тиск природного газу перед пальниками топки, кг/см ² , не нижче	1,3
7	Температура газів на виході з сушильного барабана, °С	120 – 250
8	Температура газів в 1-й зоні топки сушильного барабана, °С, не більше	780
9	Температура газів в димовій трубі, °С, не більше	650
10	Температура техвуглецю на виході сушильного барабану, °С, не більше	115 – 200
11	Температура техвуглецю на вході в бункер готової продукції, °С, не більше	85
12	Масова частка води після сушильного барабану, %, не більше	0,9
13	Розрідження в сушильному барабані, мм вод. ст (Па), не менш	2 (19,6)
14	Розрідження в зрівняльній ємності, мм вод. ст (Па), не менш	10 (98)

Таблиця 5.2 – Перелік вимог до процесу автоматичної стабілізації температури технічного вуглецю на виході сушильного барабана

№ п/п	Вимога	Найменування/ Чисельне значення
1	Мінімальна температура гранул техвуглецю на виході сушильного барабану, °С	115
2	Максимальна температура гранул техвуглецю на виході сушильного барабану, °С	190
3	Бажаний діапазон температур гранул техвуглецю на виході сушильного барабану, °С	140-160
4	Модельний розрахунок стану безперервного технологічного процесу для кожної зони вимірювання	розрахунок (додаток Г)
5	Формування прогнозу температури техвуглецю на час, с, не менш	600 – 1200

Вимірювання температури здійснювалося в наступних точках технологічної схеми:

- вуглецево-газової суміші на виході барабану;
- сухого гранульованого вуглецю на виході барабану;
- в верхній частині топки в 1-й зоні;
- в верхній частині топки в 2-й зоні;
- в верхній частині топки в 3-й зоні.

Аналіз даних і отримання чисельних показників процесу керування проводився по миттєвим значенням параметрів техпроцесу, що отримані з інтервалом в 1 секунду (без усереднення). Результати фіксації миттєвих значень параметрів безперервного технологічного процесу наведено в додатку Б, графічне відображення на рис. Б.1.

5.3 Реалізація інформаційної технології ідентифікації і прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів

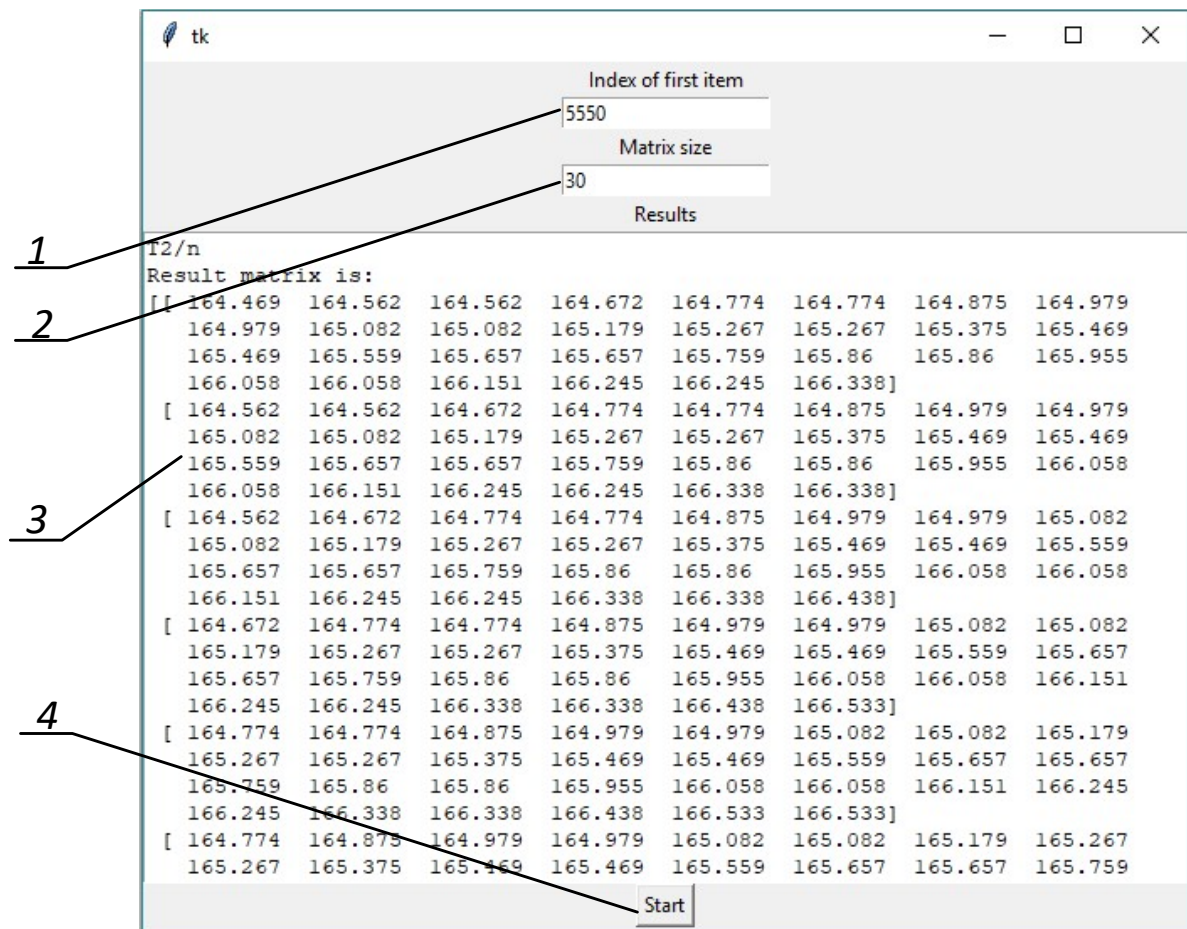
5.3.1 Реалізація метода знаходження оператора моделі динамічної системи

Метод знаходження оператора моделі динамічної системи, описаний в главі 4, складається з етапів, зображених на рисунку 4.2.

Запуск головного скрипта програми «Trinity-factor» здійснюється за допомогою командного рядка (командою `python model.py`), або ж за допомогою файлу `run.bat`, який власне і виконує цю команду.

Вхідними даними до цієї частини програми є номер першого експериментального значення, з якого буде будуватися ганкелева матриця, або момент часу, якщо програмний додаток підключений безпосередньо до технологічного процесу, та розмір матриці ($n - 1$). Для розрахунку характеристик системи необхідно натиснути кнопку Start. Головне вікно програми зображено на рис. 5.2.

Виходячи з того, що стійкість моделі динамічної системи визначається структурою матриці A , її рангом, типом та кратністю коренів характеристичного поліному і визначається розташуванням власних значень на комплексній площині, тому програма «Trinity-factor» обчислює головні мінори побудованої ганкелевої матриці, її власні значення. За допомогою розв'язання різницевих рівнянь, отримуються коефіцієнти характеристичного рівняння та його корені. Вікно результатів обчислень наведено на рис. 5.3.



- 1 – номер першого значення, з якого будується ганкелева матриця;
- 2 – розмір матриці $(n-1)$;
- 3 – поле отримання даних;
- 4 – кнопка «Start», початок розрахунків

Рисунок 5.2 – Головне вікно знаходження оператора моделі системи

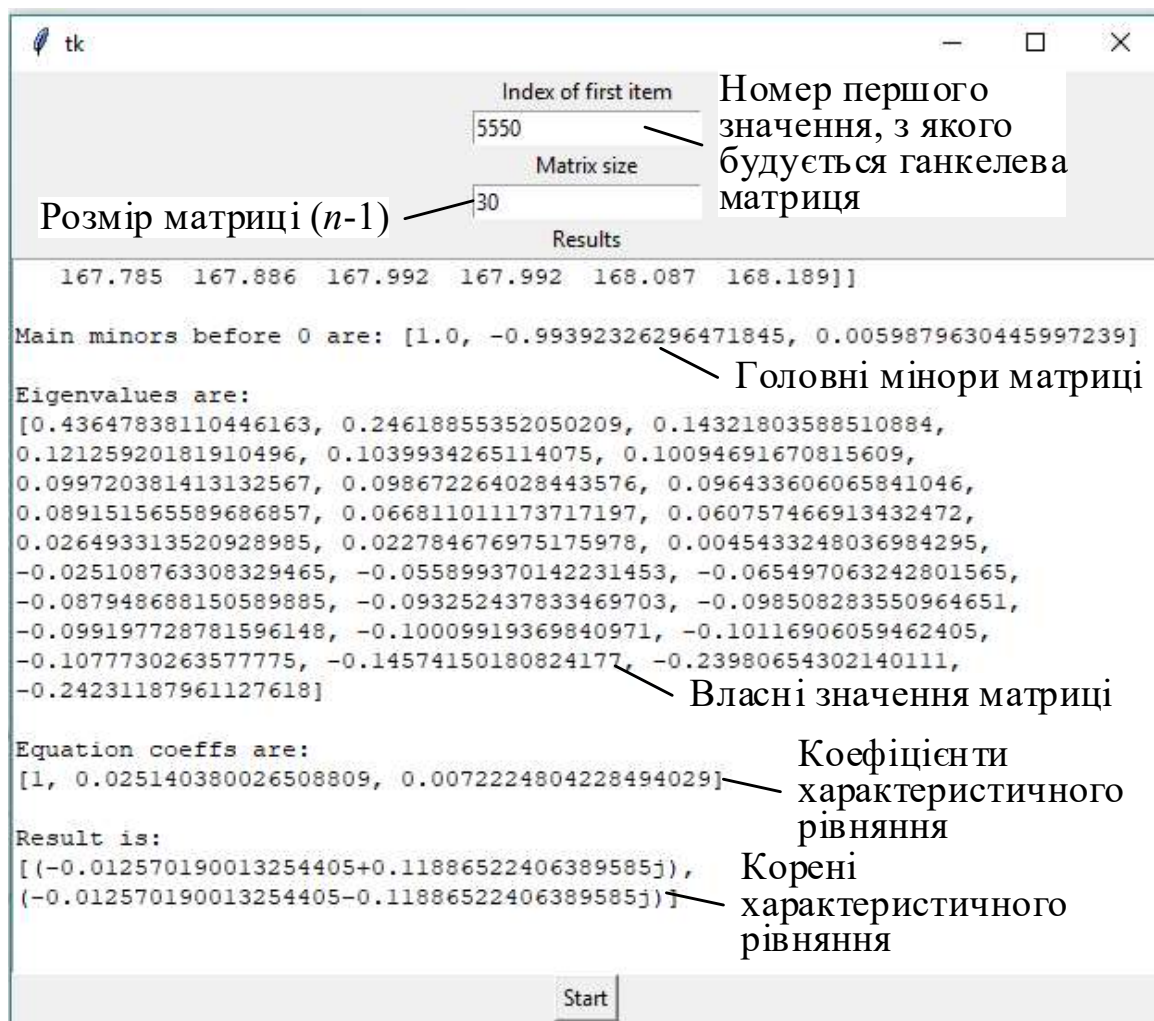


Рисунок 5.3 – Результати знаходження оператора моделі системи

На рис. 5.4 показані графіки температури з пристроїв контролю технологічної установки – сушильний барабан, безперервного технологічного процесу виробництва технічного вуглецю ПАТ «Кременчуцький завод технічного вуглецю», а саме термопар контролю топкових газів, сушильного барабану та температури сухих гранул техвуглецю для досліджуваного інтервалу часу.

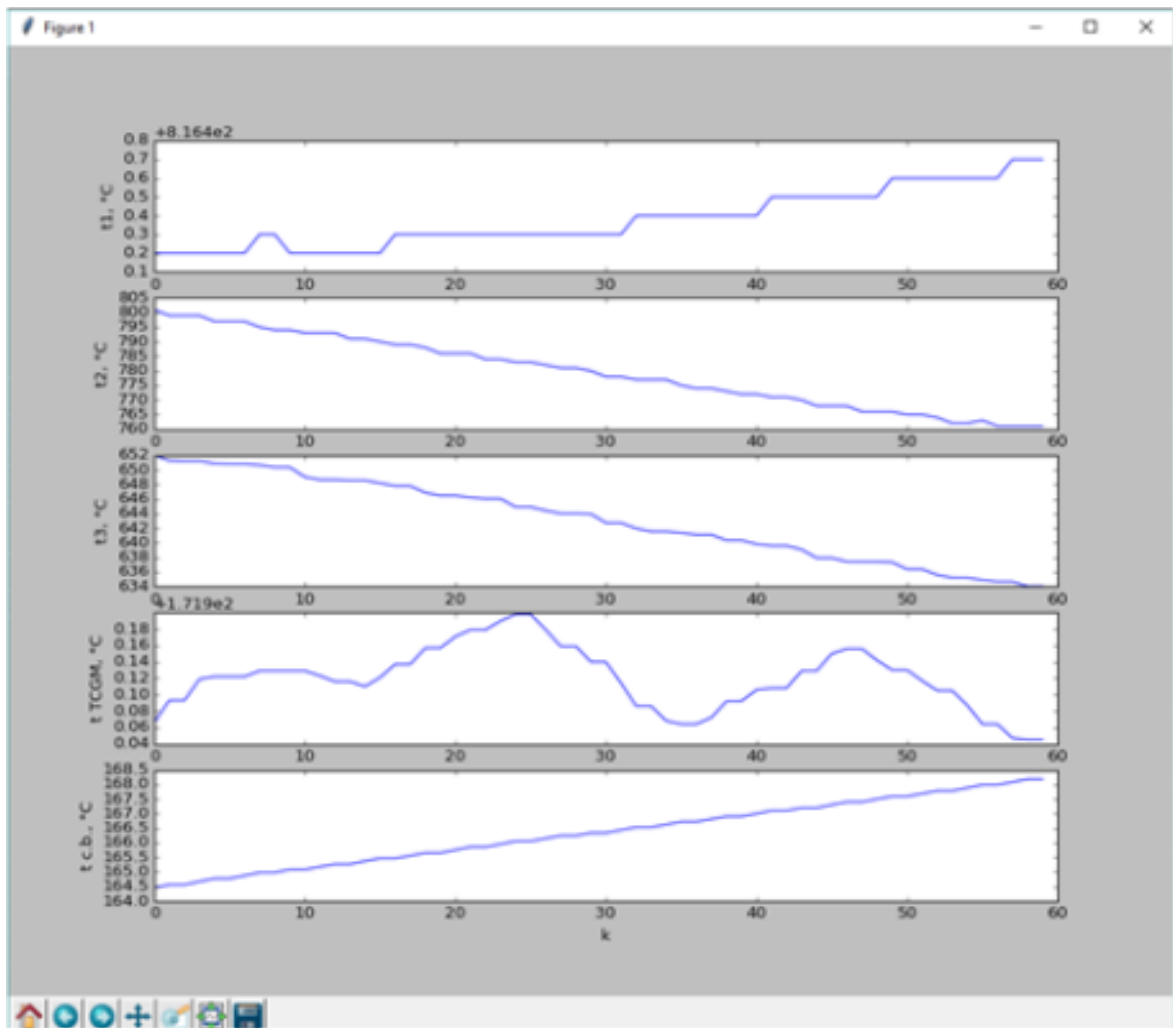


Рисунок 5.4 – Графіки температури з пристроїв контролю для досліджуваного інтервалу часу

Результати обчислень зберігаються в окремі файли MS Excel (додаток Г).

На підставі отриманих результатів розраховані вихідні дані для характеристичного рівняння і зроблений прогноз, похибка якого складає менш ніж 1% (табл.5.3).

Таблиця 5.3 – Фрагмент таблиці результатів прогнозування стану системи для досліджуваного інтервалу часу (температура техвуглецю на виході установки)

Час	Вихідні дані, °С		Похибка, %
	експериментальні	за прогнозом	
11:33:26	167,785	168,639	0,51
11:33:27	167,886	168,687	0,48
11:33:28	167,992	168,734	0,44
11:33:29	167,992	168,781	0,47
11:33:30	168,087	168,827	0,44
11:33:31	168,189	168,874	0,41
11:33:32	168,389	168,920	0,32
11:33:33	168,492	168,966	0,28
11:33:34	168,492	169,011	0,31
11:33:35	168,588	169,057	0,28
11:33:36	168,683	169,102	0,25
11:33:37	168,683	169,147	0,28

5.3.2 Реалізація метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем

Для виконання факторизації коваріаційних функцій динамічної системи необхідно перейти до розробленого методу, етапи якого зображені на рис. 2.2. Робота програми виглядає наступним чином: проводиться запуск головного скрипта за допомогою командного рядка (командою `python model.py`), або за допомогою файлу `run.bat`, обирається задача для розв'язання, вводяться початкові дані для обраної задачі, виконуються необхідні розрахунки програмою, проводиться вивід результату.

Вхідними даними програми є 5 матриць: $\mathbf{A}(t)$ та $\mathbf{B}(t)$ – матриці диференціального рівняння, що змінюються в часі; $\mathbf{C}(t)$ – матриця модуляції

або вимірювання; \mathbf{Q} – коваріаційна матриця векторного білого шуму, що збуджує; $\mathbf{P}_i(t)$ – взаємно кореляційна матриця між входом джерела повідомлень і адитивним шумом в каналі [51].

Написання власних функцій для отримання матриць з файлів додають зручності у написанні основного скрипта.

Розв'язанням прямої задачі є складання бібліотек моделей поведінки динамічної системи, тобто бібліотек станів перехідних характеристик процесу сушіння технічного вуглецю в п'яти різних зонах сушильного барабану. Для перевірки роботи розробленої програми були використані матриці, що розраховані методом моделювання оператора моделі динамічної системи, при цьому матрицю $\mathbf{A}(t)$, за виключенням розмірності, не використовуємо.

При виконанні програми після розв'язання прямої задачі визначення коваріаційної матриці технологічного процесу за його описом в змінних стану отримуються результати (додаток Г), які, для зручності демонстрації, зображені у вигляді графіку $K_y(t, \tau)$ (рис. 5.5).

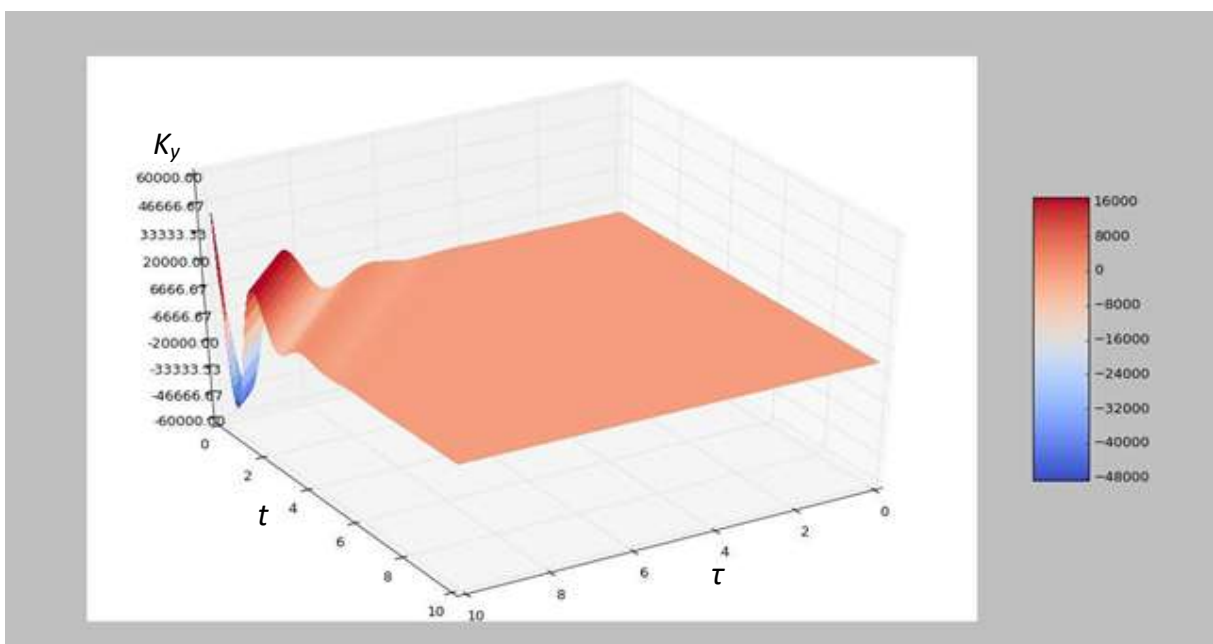


Рисунок 5.5 – Графік коваріаційної функції виходу $K_y(t, \tau)$

Для розв'язання оберненої задачі потрібні експериментальні дані технологічного процесу безперервного виробництва. Розрахунок ведеться згідно структурної схеми реалізації вихідного процесу відповідно з диференційованістю його компонент в оберненому порядку (рис. 2.1). Результати обчислення оберненої задачі розкладення коваріаційної функції на множники (додаток Г) для наочності представлені у вигляді графіків $K_x(t)$, $C(t)$ та $G(t)$ (рис. 5.6, 5.7, 5.8, 5.9).

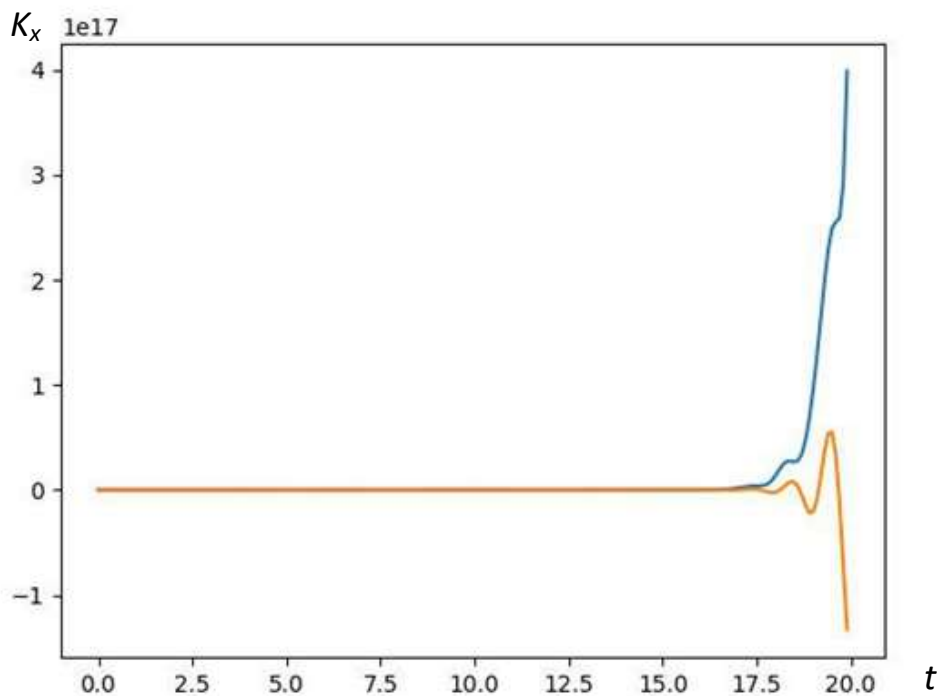


Рисунок 5.6 – Графік коваріаційної функції входу $K_x(t)$ елементів $k_{1,1}$ та $k_{1,2}$

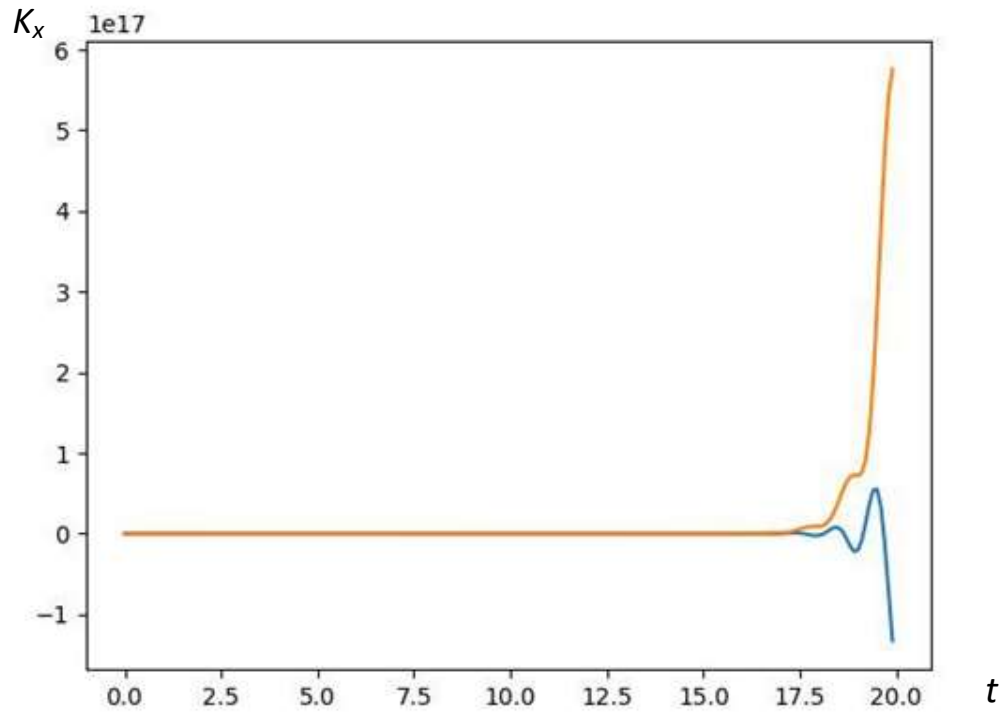


Рисунок 5.7 – Графік коваріаційної функції входу $K_x(t)$ елементів $k_{2,1}$ та $k_{2,2}$

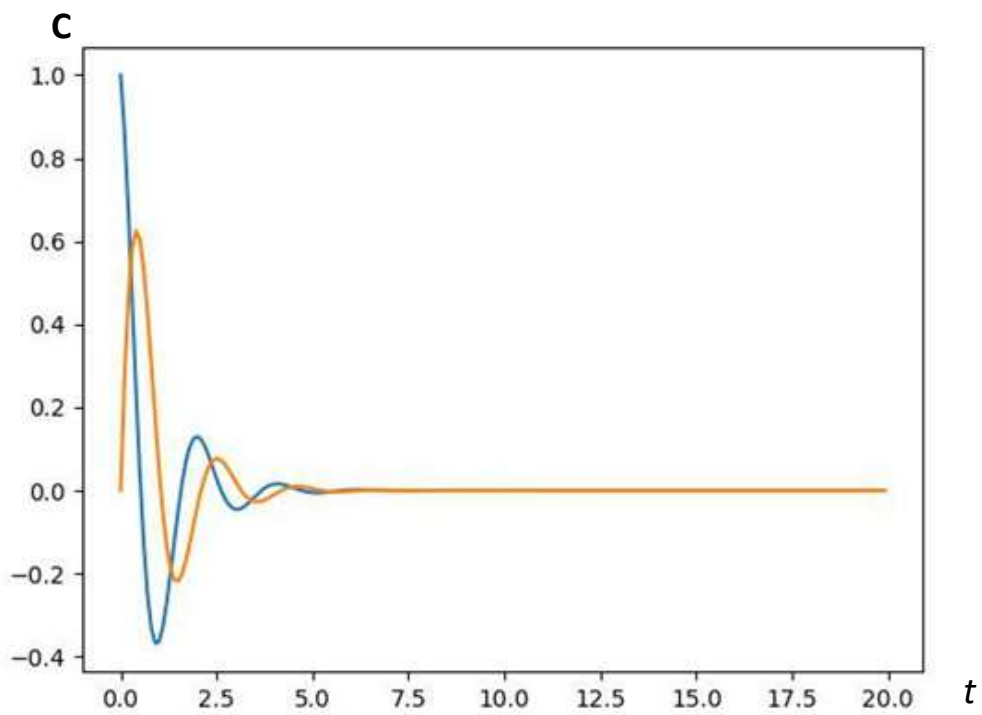
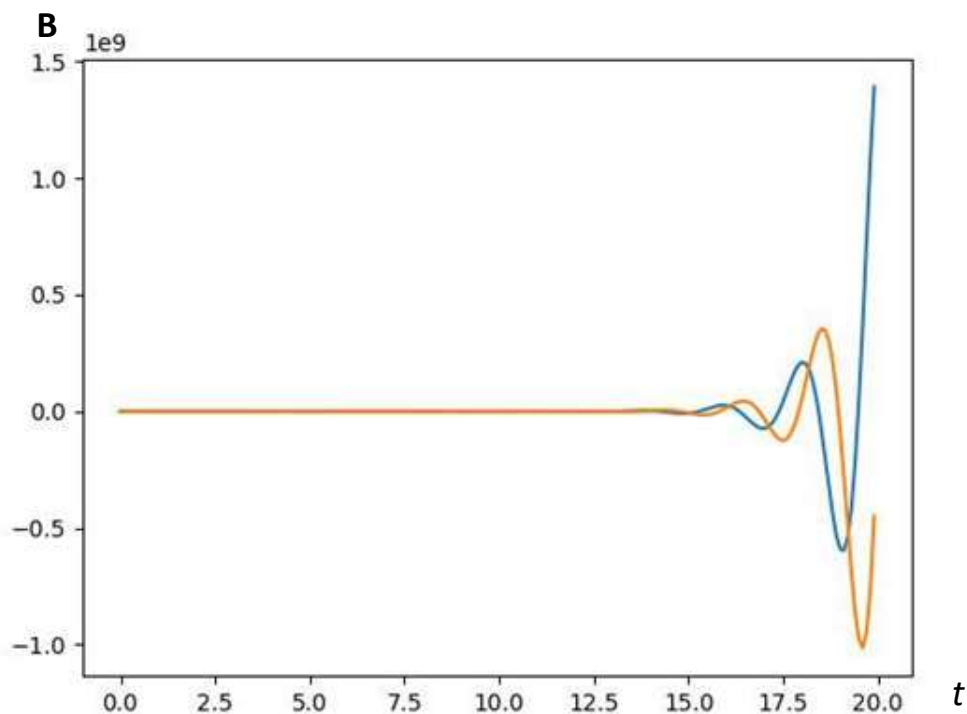


Рисунок 5.8 – Графіки залежності коефіцієнта $C(t)$

Рисунок 5.9 – Графіки залежності коефіцієнта $B(t)$

Екранні форми для обчислення експериментальних даних методом ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем за допомогою факторизації коваріаційних функцій наведені в додатку Д. Лістинги скриптів програмного додатку «Trinity-factor» розташовані в додатках Е та Ж.

5.4 Тестування програмного додатку

Основними методами тестування програмних продуктів є методи білого і чорного ящика [92].

Тестування білим ящиком означає тестування програмного продукту зі знанням логіки роботи програми та маючи повний доступ та розуміння роботи програмного коду, коректності його роботи.

Тестування програми методом білого ящика передбачає прогін певних значень через програму на підставі структури програми у вигляді вихідного коду або блок-схеми. Прогін цих значень може здійснюватися як через весь код, так і через окремі його складові. При цьому ведеться перевірка правильності написаного коду, як і в цілому, так і його окремих функцій.

Тестування чорного ящика або поведінкове тестування – це стратегія тестування функціональної поведінки об'єкта (програми, системи) з точки зору зовнішнього світу, при якому не використовуються знання про внутрішній устрій об'єкта тестування. Під стратегією розуміються систематичні методи відбору і створення тестів для тестового набору. Стратегія тесту чорного ящика виходить з технічних вимог та здорового глузду людини, що проводить тестування.

У цьому методі програма розглядається як чорний ящик. Метою тестування є з'ясування обставин, в яких поведінка програми не відповідає специфікації. Для виявлення всіх помилок в програмі необхідно виконати вичерпне тестування, тобто тестування на будь-яких наборах даних. Для більшості програм вичерпне тестування неможливо, тому застосовують спеціальні техніки тест-дизайну, при якому тестування програми обмежується невеликою підмножиною наборів даних. При цьому необхідно вибирати найбільш підходящі підмножини з високою ймовірністю виявлення помилок.

Для тестування методом чорного ящика, необхідно мати спеціальну команду тестерів, які, знаючи про потрібну поведінку програми, перевіряють, чи відповідає вона дійсності.

Тестування програми методом чорного ящика також передбачає розгляд інтерфейсу, зручності, правильності виведення деяких значень з точки зору звичайного користувача, без доступу до вихідного коду програми.

Для розробленого програмного додатку проведено тестування методом чорного ящика. В ході тестування було зроблено висновок про те, що окремі частини програми (функції) і програма в цілому працює відповідно до висунутих вимог.

Висновки до глави 5

Виконана розробка інформаційної технології ідентифікації і прогнозування стану безперервних процесів. Ідентифікацію і прогнозування проведено методом факторизації коваріаційної функції вихідного процесу за його описом в змінних стану та розкладення коваріаційної функції вихідного процесу на множники і отримання матриць стану динамічної системи. Розроблений програмний додаток для визначення оператора моделі безперервного виробництва та факторизації коваріаційних функцій динамічної системи (розв'язання прямої і оберненої задачі). На комп'ютерну програму «Trinity-factor» зареєстровано свідоцтво про авторське право.

Проведено тестування роботи методів інформаційних технологій для контролю технологічних параметрів режиму роботи установки сушіння технічного вуглецю на ПАТ «Кременчуцький завод технічного вуглецю» методом чорного ящика та отримано акт про впровадження елементів наукових досліджень.

В даний час у виробництво впроваджено метод знаходження оператора моделі динамічної системи, де, на відміну від раніш використовуваного контролю тільки в одній точці – в патрубку виходу техвуглецево-газової суміші (ТВГС) (зона 13, додаток А), проводиться контроль в п'яти точках – трьох умовних зонах топкової камери 10 від термопар 4, в патрубку виходу ТВГС та в ковші вивантаження сухого

техвуглецю (зона 11). При наближенні температури до критичної оператор може зробити розрахунок стійкості системи в кожній точці та спрогнозувати її поведінку на найближчій час.

Метод ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем, оснований на факторизації коваріаційних функцій, на даний момент не впроваджений, оскільки потрібно багато часу для складання бібліотек перехідних характеристик (сигналів) для даного безперервного виробництва.

ВИСНОВКИ

У монографії розв'язано актуальну наукову задачу ідентифікації технологічних процесів безперервного виробництва для визначення структури динамічного об'єкта за вихідним сигналом, структури його оператора на основі структурних властивостей лінійних операторів та упорядкування множини вихідних сигналів безперервного технологічного процесу. Створені моделі, методи та інформаційні технології, що використовуються для ідентифікації динамічних систем, що не повністю визначені. Отримані результати мають важливе наукове і практичне значення, які полягають в наступному:

1. Розглянуті передумови розв'язання задачі ідентифікації систем та проведений аналіз представлення лінійних систем за допомогою диференціальних рівнянь і генерації випадкових процесів. Позначені основні проблеми ідентифікації і прогнозування перебігу безперервних технологічних процесів.

2. Використання методу простору станів дозволив звести задачу ідентифікації стану динамічної системи до розв'язання рівняння Рікатті, яке за рахунок *вдосконалення* метода факторизації коваріаційних функцій дозволяє отримати більш простіше виконання в порівнянні з прямим розв'язанням.

3. При проектуванні систем управління для визначення оптимального закону управління, що характеризує якість системи, використовуються методи основані на варіаційному обчисленні. Для знаходження оптимальної оцінки системи використовуються проєкційні методи на основі проєціювання просторів на підпростори. Проєкційні методи дослідження дозволяють одночасно і незалежно виконувати задачу оцінювання векторів стану динамічної системи і знаходження оптимальних управляючих послідовностей.

4. *Вперше* розроблено метод знаходження моделі динамічної системи. Він дозволяє визначати параметри і характеристики динамічної системи, яка задається тільки вихідним сигналом. Відмінність методу в тому, що у відомих задачах ідентифікації, управління і вимірювання відновлення інформації здійснюється за двома параметрами.

5. *Вперше* запропоновано метод моделювання оператора динамічної системи на основі властивостей лінійних операторів та упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих квадратичних форм та ганкелевих матриць, що дозволяє розв'язувати обернені задачі динаміки на теоретико-множинному рівні. Це призводить до поняття оптимальної точної моделі (без урахування перешкод), а саме до найбільш сильної неспростованої моделі в класі лінійних систем.

6. Розроблено метод формування моделі оператора лінійної динамічної системи як розв'язання оберненої задачі динаміки: по вихідному сигналу визначити структуру оператора в просторі станів, *набув подальшого розвитку*. Він дозволяє розробляти обчислювальні алгоритми для реальних динамічних систем в лінійному приближенні.

7. *Вперше* розроблено інформаційну технологію ідентифікації і прогнозування перебігу безперервного процесу, що дозволяє контролювати і прогнозувати його поведінку протягом всього процесу сушіння. Отримані рівняння представлення процесу за вимірними вихідними параметрами використовуючи методи знаходження оператора динамічної системи та факторизації коваріаційних функцій.

8. Проведено тестування роботи методів інформаційної технології для контролю технологічних параметрів режиму роботи установки сушіння технічного вуглецю на ПАТ «Кременчуцький завод технічного вуглецю», що дозволило робити розрахунки стійкості системи та спрогнозувати її поведінку на найближчий час. Похибка прогнозу складає менш ніж 1%.

ЛІТЕРАТУРА

1. Akaike H. Stochastic theory of minimal realization. IEEE Trans. Automat. Control, vol. 26, pp.667-673, Dec. 1974.
2. Astrom K.J., Bohlin T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. Proc. IFAC Symp. Self-Adaptive System, 1965. pp. 96–111.
3. Baggeroer A.B. State Variables and Communication Theory. M.I.T. Press, Cambridge, Mass.,1970. 262.
4. Baggeroer A.B. State Variables, the Fredholm Theory, and Optimal Communications, Sc. D. Thesis, Department of Electrical Engineering, M.I.T., Jan, 1968. 244.
5. Faure P. Realisations markoviennes de processus stationnaires. Rapport Laboria No.13, IRIA, Rocquencourt, France, Tech. Rep. 1973.
6. Ho B.L., Kalman R.E. Effective construction of linear state-variable models from input-output functions. Regelungstechnik, vol.12, 1965. pp. 545–548.
7. Koopmans T.C., Rubin H., Leipnik R.B. Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics. (Cowles Commission Monograph, vol. 10, T.C.Koopmans, Ed.). New York: Wiley, 1950.
8. Matplotlib 2.0.0rc2 is available [Електронний ресурс]. 2017. URL: <http://matplotlib.org/1.5.3/index.html> (дата звернення 19.01.17).
9. NumPy v1.13.dev0 Manua. [Електронний ресурс]. 2017. URL: <https://docs.scipy.org/doc/numpy-dev/user/quickstart.html> (дата звернення 16.01.17).
10. Python 3.6.0 documentation [Електронний ресурс]. 2017. URL: <https://docs.python.org/3/> (дата звернення 04.01.17).

11. SymPy 1.0 documentation [Електронний ресурс]. 2017. URL: <http://docs.sympy.org/latest/index.html> (дата звернення 16.01.17).
12. Александров П.С. Введение в теорию групп. Москва: Наука, 1980. 144 с.
13. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. Москва: Наука, 1964. 780 с.
14. Арбиб М.А., Мейнс Э.Дж. Основание теории систем; разложимые системы. Математические методы в теории систем. Выпуск 14. Москва: Мир, 1979. 327 с.
15. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. Москва: Высшая школа, 1988. 448 с.
16. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Москва: Наука, 1969. 368 с.
17. Беллман Р. Динамическое программирование. Москва: ИЛ, 1960. 400 с.
18. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. Москва: Мир, 1989. 540 с.
19. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. Москва: Физматгиз, 1962. 639 с.
20. Бизли Д. Python. Подробный справочник, 4-е издание. Санкт-Петербург – Москва: Символ-Плюс, 2012. 864 с.
21. Бідюк П.І., Савенков О.І., Баклан І.В. Часові ряди: моделювання та прогнозування. Київ: ЕКМО, 2004. 144 с.
22. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. Вып. 1. Москва: Мир, 1974. 406 с.
23. Борухов В.Т., Гайшун И.В., Тимошпольский В.И. Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики. Минск: Беларус.навука, 2009. 174 с.
24. Ван Трис Г.Л. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т I. Москва: Советское радио, 1972. 744 с.

25. Ван Трис Г.Л. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т II. Москва: Советское радио, 1975. 344 с.
26. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. Москва: Наука, 1976. 649 с.
27. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов: От редукции к идеальному прибору в физике и технике. Москва: Советское радио, 1979. 372 с.
28. Вдовин В.М., Суркова Л.Е., Валентинов В.А. Теория систем и системный анализ: Учебник. Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2016. 644 с.
29. Верлань А.Ф., Абдусаттаров Б.Б., Игнатенко А.А., Максимович Н.А. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов. Киев: Наукова Думка, 1993. 208 с.
30. Верлань А.Ф., Максимович Н.А., Гулямов Ш.М., Сагатов М.В. Метод декомпозиционной регуляризации для восстановления сигналов. // Промышленные АСУ и контроллеры, № 3, 2002. С.19–23.
31. Виллемс Ян К. От временного ряда к линейной системе // Теория систем. Математические методы и моделирование. Сборник статей. Москва: Мир, 1989. 384 с.
32. Волгин В.В., Каримов Р.Н. Оценка корреляционных функций в промышленных условиях. Москва: Энергия, 1979. 80 с.
33. Воронов А.А., Рутковский В.Ю. Современное состояние и перспективы развития адаптивных систем. Вопросы кибернетики: Проблемы теории и практики адаптивного управления. Москва: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1985. С. 5-48.
34. Высшая математика [Электронный ресурс]. 2010. URL: http://mathprofi.ru/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka.html (дата звернення 10.02.18).

35. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 752 с.
36. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Математическое моделирование макроэкономических процессов. Кишинев: Эврика, 1997. 313 с.
37. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
38. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1959. 400 с.
39. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). Учебное пособие. Москва: Наука, 1977. 440 с.
40. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов. Москва: Металлургия, 1978. 112 с.
41. Гроп Д. Методы идентификации систем. Москва: Мир, 1979. 302 с.
42. Гудзенко Л.И. Некоторые вопросы структуры объекта по установившемуся сигналу. Труды физического института имени П.Н. Лебедева, Т.45. 1969, С. 110-133.
43. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. Москва: Энергия, 1979. 240 с.
44. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Москва: Наука, 1966. 664 с.
45. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. Москва: Наука, 1970. 620 с.
46. Димова Г.О. Аналіз чутливості власних значень матриць моделей динамічних систем. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Матеріали XVII Міжнар. наук.-техн. конференції (8-13 червня 2017 р., м.Одеса); Одес. нац. акад. зв'язку ім. О.С.Попова. Одеса–Хмельницький: ХНУ, 2017. С. 150-152
47. Димова Г.О. Дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем. Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво, Луцьк. 2017. № 28-29. С. 55-59.

48. Димова Г.О. Дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем. Актуальні проблеми автоматизації та управління Матеріали V Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції молодих учених та студентів [Електронний ресурс]. Луцьк: ЛНТУ [сайт], 2017. Випуск № 5 С. 62-67. URL: <http://www.av.lntu.edu.ua> (дата звернення: 01.12.2017).
49. Димова Г.О. Метод знаходження моделі динамічного об'єкта за вихідним сигналом. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Матеріали XVIII Міжнар. наук.-техн. конференції (8-13 червня 2018 р., м.Одеса); Одес. нац. акад. зв'язку ім. О.С.Попова. Одеса–Хмельницький: ХНУ, 2018. С. 202-204.
50. Димова Г.О. Методика знаходження структури оператора моделі динамічної системи. Матеріали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з автоматичного управління присвяченої дню космонавтики. Херсон: ХНТУ, Видавництво ІІІ Вишемирський В.С., 2018. С. 59-60.
51. Димова Г.О. Рішення задачі факторизації кореляційної матриці багатомірної динамічної системи за допомогою інформаційних технологій. Матеріали V Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з автоматичного управління ХНТУ. Херсон: ХНТУ, 2017. С. 62-66.
52. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. Москва: Мир, 1974. 464 с.
53. Долгополов Д.В. Методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц. Санкт-Петербург: СПбГТИ(ТУ), 2005. 39 с.
54. Дымова А.О. Исследование на чувствительность собственных значений матриц моделей динамических систем в пространстве

- состояний. Проблеми інформаційних технологій. 2017.№1(021). С. 92-96
55. Дымова А.О. Исследование на чувствительность собственных значений матриц моделей динамических систем в пространстве состояний. Проблеми інформаційних технологій, Херсон. 2017. №1(021). С. 92-96.
56. Емельянов С.В., Коровин С.К., Сизиков В.И. Бинарные системы управления нестационарными процессами с применением аддитивных и мультипликативных обратных связей. Москва: МНИИПУ, 1983. 61 с.
57. Жордановы матрицы: компьютерный курс [Электронный ресурс]. 2003. URL: <http://dep805.ru/education/kk/jmatrix/part3.htm> (дата звернення 11.12.16).
58. Ивановский В.И. Технический углерод. Процессы и аппараты: Учебное пособие. Омск: ОАО «Техуглерод», 2004. 228 с.
59. Калинин В.Н., Резников Б.А. Теория систем и управления (Структурно-математический подход). Ленинград: ВИКИ им. А.Ф. Можайского, 1978. 417 с.
60. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
61. Калмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. Москва: Наука, 1981. 448 с.
62. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1971. 576 с.
63. Карабутов Н.Н. Адаптивная идентификация систем: Информационный синтез. Москва: КомКнига, 2006. 384 с.
64. Карабутов Н.Н. Аналитический метод синтеза алгоритмов управления непрерывными динамическими объектами. Математическое и программное обеспечение систем обработки информации и принятия решений; Сб. науч. тр. Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1989. С. 145-150.

65. Карабутов Н.Н. Идентификация нестационарных динамических систем в пространстве «вход-выход». Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Сб. науч. тр. Вып. 7. Москва: Янус-К, 2004. С. 209-218.
66. Карабутов Н.Н. Об оптимизации непрерывных адаптивных алгоритмов. Управление и проектирование на базе интеллектуальных технологий: Меж-вуз. сб. науч. тр. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет). Москва, 1999. С. 664-669.
67. Карабутов Н.Н. Построение адаптивных наблюдателей динамических объектов с переменным коэффициентом усиления в контуре адаптации. М., 1986. 36 с. Деп. В ВИНТИ. № 3435-В86.
68. Карабутов Н.Н. Применение методов анализа экспериментальных данных в системах идентификации металлургических процессов. Черная металлургия: Бюллетень института «Черметинформация». М., 1990. Вып. 2. С. 25-27.
69. Карабутов Н.Н., Арестова Л.Д. Ограничения и информационное пространство в системах идентификации и управления. Техника, технология и перспективные материалы: Межвуз. сб. науч. трудов. Москва: МГИУ, 2004. С. 242-246.
70. Карабутов Н.Н., Салыга В.И. Адаптивная идентификация объектов управления с анализом экспериментальных данных. Адаптивные и экспертные системы в управлении. 5-й Ленинградский симпозиум по теории адаптивных систем. Ленинград, 1991. С. 100-102.
71. Карташов Г.Д. О нахождении функциональной зависимости между случайными величинами. Теория вероятностей и ее применение. Т.10, вып. 3. Москва-Ленинград, 1965. С. 584-593.
72. Кашьяп Р.Л., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. Москва: Наука, 1983. 389 с.

73. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. Москва: Энергия, 1980. 424 с.
74. Красовский А.А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем управления. Москва: Физматгиз, 1962. 468 с.
75. Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. Москва: Наука, 1977. 272 с.
76. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: Физматгиз, 1959. 455 с.
77. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырний П.И. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Минск: Наука и техника, 1985. 279 с.
78. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980. 298 с.
79. Ланкастер П. Теория матриц. Москва: Наука, 1978. 280 с.
80. Литвинов В.В., Марьянович Т.П. Методы построения имитационных систем. Киев: Наукова думка, 1991. 120 с.
81. Лоэв М. Теория вероятностей. Москва: ИЛ, 1962. 720 с.
82. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. Москва: Статистика, 1974. 254 с.
83. Лутц М. Программирование на Python, 4-е издание, I том. Санкт-Петербург – Москва: Символ-Плюс, 2011. 992 с.
84. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. Москва: Наука, 1991. 432 с.
85. Малышенко А.М. Математические основы теории систем: учебник для вузов. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. 364 с.

86. Марасанов В.В., Димова Г.О. Евристичні підходи до аналізу динамічних об'єктів по вихідним сигналам. Проблеми інформаційних технологій, Херсон. 2017. №1(022). С. 134-141.
87. Марасанов В.В., Димова А.О. Модель пространства контролируемых параметров нестационарного динамического объекта. Вісник ХНТУ, Херсон. 2015. №2(53). С. 152 – 156.
88. Марасанов В.В., Димова А.О., Дымов В.С. Исследование на чувствительность моделей динамических систем, полученных проекционным методом. Проблеми інформаційних технологій, Херсон. 2016. №1(019). С. 169-173.
89. Марасанов В.В., Димова А.О., Дымов В.С. Проекционные методы оценки состояний динамической системы при частично наблюдаемых выходных координатах. Проблеми інформаційних технологій, Херсон 2016. №1(019). С. 259-264.
90. Марасанов В.В., Забытовская О.И., Димова А.О. Прогнозирование структуры динамических систем. Вестник ХНТУ № 1 (44), 2012, С. 292-302.
91. Математические основы теории автоматического регулирования. Т. 1. В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко. Москва: Высшая школа, 1977. 614 с.
92. Математичне забезпечення інформаційно-керуючих систем: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. А.М.Гуржій, З.В. Дудар, В.М. Левикін, Б.В. Шамша. Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. 448 с.
93. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем. В.В. Поповський, С.О. Сабуров, В.Ф. Олійник, Ю.І. Лосєв, Д.В. Агеєв [та ін.] Ред. В.В.Поповського. Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. 564 с.

94. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. [Электронный ресурс]. Томск. 2007. URL: <https://old.math.tsu.ru/EEResources/cm> (дата звернення 19.02.18).
95. Месарович М. Общая теория систем. Математические основы. Москва: Мир, 1978. 311 с.
96. Моделювання та прогнозування нелінійних процесів. Бідюк П.І., Баклан І.В., Баклан Я.І., Коршевніук Л.О., Літвіненко В.І., Мінін М.Ю., Петренко В.В. Петренко О.О., Селін М.Ю., Фефелов А.А. Ред. П.І. Бідюка. Київ: ЕКМО, 2004. 120 с.
97. Неймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Москва: Наука, 1969. 526 с.
98. Обнаружение изменений сигналов в динамических системах. Ред. М. Бассвиля. Москва: Мир, 1989. 278 с.
99. Описание дискретных систем [Электронный ресурс]. 2017. URL: <https://studizba.com/lectures/1-avtomatizaciya/32-kompyuternoe-upravlenie/475-16-opisanie-diskretnyh-sistem.html> (дата звернення 15.03.18).
100. Ортега Дж., Рейнболд В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений с многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
101. Основы анализа спектра [Электронный ресурс]. – 2001. – URL: <http://www.unitest.com/theory/spectrum-1.html>. (дата звернення 12.11.16)
102. Основы теории оптимального управления. Ред. В.Ф.Кротова – Москва: Мир, 1984. 430 с.
103. Основы управления технологическими процессами. Ред. Н.С. Райбмана. Москва: Наука, 1978. 440 с.
104. Отнес Р., Эконсон Л. Прикладной анализ временных рядов. Москва: Мир, 1982. 428 с.
105. Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в примерах и задачах: Учебное пособие. Москва: Высшая школа, 2003. 583 с.

106. Перельман И.И. Методология выбора структуры модели при идентификации объектов управления. Автоматика и телемеханика. 1983. № 11. С. 5-29.
107. Перельман И.И. Оперативная идентификация объектов управления. Москва: Энергоиздат, 1982, 272 с.
108. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные алгоритмы критериальной оптимизации в условиях неопределенности. Доклады АН СССР, 1983. Т. 273. 2. С. 315-318.
109. Портер У. Современные основания общей теории систем. Москва: Наука, 1971. 556 с.
110. Постников М.М. Устойчивые многочлены. Москва: Наука, 1981. 176 с.
111. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Москва: Наука, 1984. 432 с.
112. Прохоренок Н., Дронов В. Python 3 и PyQt 5. Разработка приложений. Санкт-Петербург: ВHV, 2017. 832 с.
113. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей процессов производства. Москва: Энергия, 1975. 376 с.
114. Райншке К. Модели надежности и чувствительности систем. Москва: Мир, 1979. 454 с.
115. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. Москва: Наука, 1981. 464 с.
116. Россум Г., Дрейк Ф.Д., Откидач Д.С.. Язык программирования Python. Санкт-Петербург – Москва: Символ-Плюс, 2001. 454 с.
117. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.
118. Саммерфилд М. Программирование на Python 3. Подробное руководство. Санкт-Петербург – Москва: Символ-Плюс, 2009. 608 с.
119. Сейдж Э.П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. Москва: Наука, 1974. 284 с.

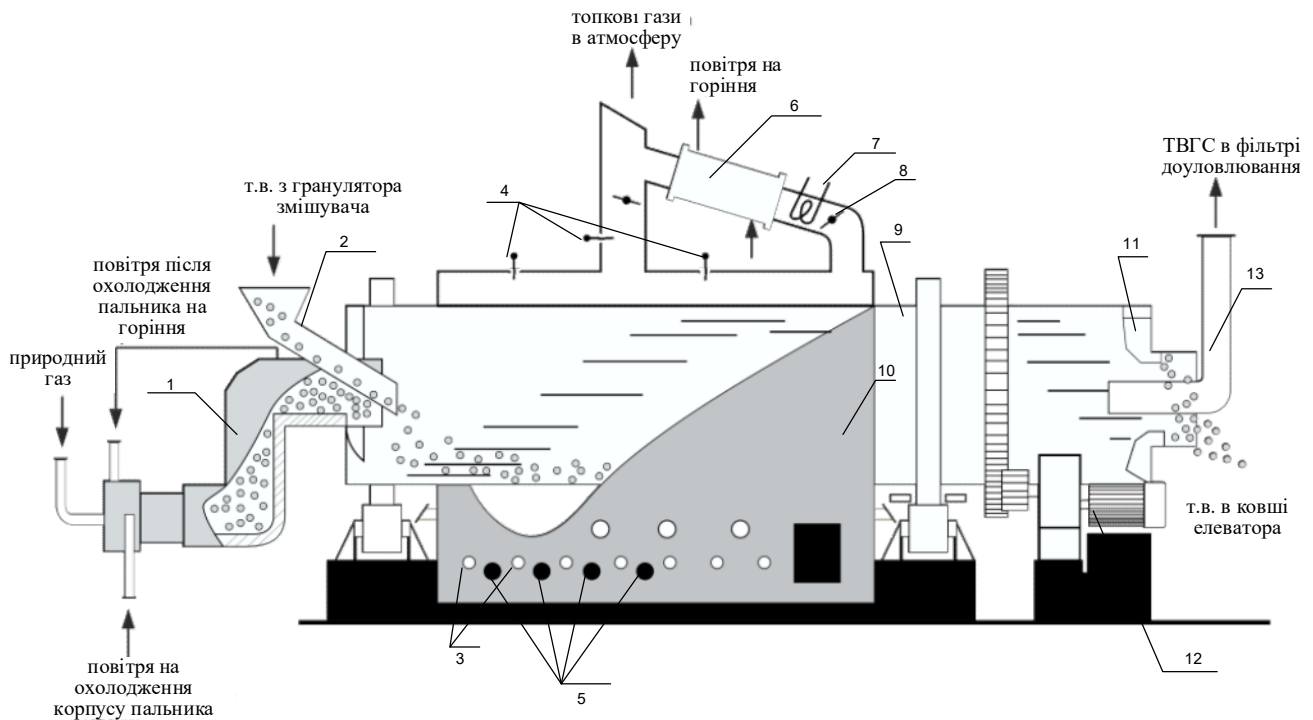
120. Сейдж Э. П., Уайт III Ч. С. Оптимальное управление системами. Москва: Радио и связь, 1982. 392 с.
121. Сейдж Э.П., Мелса Дж. Л. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Москва: Связь, 1976. 496 с.
122. Теория автоматического регулирования. Книга 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования. Ред. д-ра техн. наук, проф. В.В. Солодовникова. Москва: Машиностроение, 1967. 770 с.
123. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1986. 288 с.
124. Ту Ю. Современная теория управления. Москва: Машиностроение, 1971. 472 с.
125. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1972. 565 с.
126. Устойчивость адаптивных систем. Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К. и др. Москва: Мир, 1989. 263 с.
127. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Москва: Физматгиз, 1963. 736 с.
128. Федосов Б.Т. Уравнения состояния динамических объектов с запаздыванием [Электронный ресурс]. 2011. URL: http://model.exponenta.ru/bt/bt_172_St_Sp_Ext_Obj_Short.htm (дата звернення 11.12.16).
129. Федулов Ю.Г., Юсов А.Б. Теория систем. Москва-Берлин: Директ-Медиа, 2015. 366 с.
130. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. Москва: Мир, 1967. 499 с.
131. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. Москва: Мир, 1984. 738 с.

132. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах) Москва: Гостехиздат, 2001. Т.1 616с.; Т.2 810с.; Т.3 662с.
133. Фомин А.Ф., Новоселов О.Н., Плющев А.В. Отбраковка аномальных результатов измерений. Москва: Энергоатомиздат, 1985. 200 с.
134. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. Москва: Наука, 1981. 448 с.
135. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. Москва: Наука, 1990. 342 с.
136. Фролов М.В. Контроль функционального состояния человека-оператора. Москва: Наука, 1987. 196 с.
137. Фурасов В.Д. Задачи гарантированной идентификации. Дискретные системы. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 150 с.
138. Хеннан Э. Анализ временных рядов. Москва: Наука, 1964. 215 с.
139. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. Москва: Наука, 1968. 380 с.
140. Цыпкин Я.З. Оптимальные алгоритмы оценивания параметров в задачах идентификации. Автоматика и телемеханика. 1982. № 12. С. 9-23.
141. Цыпкин Я.З. Оптимизация в условиях неопределенности. Доклады АН СССР. 1976. Т. 228. № 6. С. 1306-1309.
142. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. Москва: Наука, 1995. 336 с.
143. Щитов И.Н. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 172 с.
144. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Москва: Мир, 1975. 648 с.

-
145. Эйкхофф П. Современные методы идентификации систем. Москва: Мир, 1983. 402 с.
146. Экономико-математические методы и прикладные модели. В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Ред. В.В. Федосеева. Москва: ЮНИТИ, 1999. 391 с.
147. Юлдашева М.Т. Коррекция динамических погрешностей измерительных преобразователей с помощью цифровых фильтров. Молодой ученый. 2017. №4. С. 93-95. URL <https://moluch.ru/archive/138/38753/> (дата звернення: 18.02.2018).
148. Яглом А.М. Корреляционная теория процессов со стационарными n -ми приращениями. Математический сборник, Т.37 (79), №1, 1955. С. 141-196.

ДОДАТОК А

ТЕХНОЛОГІЧНА УСТАНОВКА БЕЗПЕРЕРВНОГО ВИРОБНИЦТВА



- 1 – гази аксиального пальника,
- 2 – завантажувальний патрубков вологого техвуглецю,
- 3 – газові пальники,
- 4 – термопари контролю топкових газів,
- 5 – рідкопаливні пальники,
- 6 – теплообмінник підігріву повітря на горіння,
- 7 – теплообмінник повітря на розпил,
- 8 – регулююча засувка,
- 9 – сушительний барабан (БС),
- 10 – топкова камера,
- 11 – ковші вивантаження сухого техвуглецю (т.в.),
- 12 – моторно-редукторна група,
- 13 – патрубков виходу техвуглецево-газової суміші (ТВГС)

Рисунок А.1 – Технологічна установка – сушительний барабан

ДОДАТОК Б
РЕЗУЛЬТАТИ ФІКСАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ БЕЗПЕРЕРВНОГО
ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ

Таблиця Б.1 – Результати фіксації технологічних параметрів з усередненням в одну хвилину

Дата/час	T1 зона БС, °C	T2 зона БС, °C	T3 зона БС, °C	T ТВГС з БС, °C	T т.в. з БС, °C
22.03.18 10:00	710,418	891,867	700,311	162,71	163,918
22.03.18 10:01	708,338	893,3	700,425	163,192	163,364
22.03.18 10:02	707,532	896,233	700,814	163,855	162,802
22.03.18 10:03	707,087	898,317	701,23	164,692	162,219
22.03.18 10:04	705,477	897,583	701,312	165,652	161,832
22.03.18 10:05	697,985	890,917	699,487	166,628	161,593
22.03.18 10:06	685,762	873,083	693,504	167,392	161,576
22.03.18 10:07	667,245	853,75	685,276	168,106	161,597
22.03.18 10:08	652,022	841,5	678,293	168,83	161,766
22.03.18 10:09	663,083	837,117	674,098	169,661	162,012
22.03.18 10:10	669,43	832,183	670,323	170,642	162,565
22.03.18 10:11	665,443	826,25	666,581	171,452	163,473
22.03.18 10:12	659,055	821,767	663,116	172,041	164,672
22.03.18 10:13	648,11	818,7	659,884	172,247	166,15
22.03.18 10:14	630,958	817,067	657,321	172,19	167,788
22.03.18 10:15	618,892	814,4	655,205	172,04	169,614
22.03.18 10:16	617,422	811,8	653,33	171,682	171,559
22.03.18 10:17	620,382	809,483	651,216	171,377	173,422
22.03.18 10:18	622,612	807,55	649,794	171,039	175,401
22.03.18 10:19	625,162	806,567	648,568	170,668	177,399
22.03.18 10:20	634,912	806,15	647,287	170,273	179,391
22.03.18 10:21	647,317	806,3	646,906	169,981	181,331
22.03.18 10:22	664,467	807,767	647,342	169,632	183,046
22.03.18 10:23	681,188	809,267	648,051	169,419	184,58
22.03.18 10:24	697,582	810,983	648,59	169,005	185,853
22.03.18 10:25	714,758	813,333	649,153	168,622	186,885
22.03.18 10:26	727,92	814,933	649,723	168,163	187,617
22.03.18 10:27	741,207	816,883	650,21	167,762	188,146
22.03.18 10:28	755,388	819,933	650,86	167,133	188,513
22.03.18 10:29	768,097	823,2	652,007	166,531	188,618
22.03.18 10:30	780,86	826,367	654,195	165,896	188,516
22.03.18 10:31	790,47	829	657,071	165,394	188,322
22.03.18 10:32	794,435	829,517	658,718	164,721	187,942
22.03.18 10:33	800,563	826,9	659,949	164,064	187,32
22.03.18 10:34	808,397	822,933	661,13	163,39	186,487
22.03.18 10:35	812,525	820,167	662,501	162,821	185,472

Продовження таблиці Б.1

Дата/час	T1 зона БС, °C	T2 зона БС, °C	T3 зона БС, °C	T ТВГС з БС, °C	T т.в. з БС, °C
22.03.18 10:36	810,422	816,667	662,989	162,275	184,439
22.03.18 10:37	808,587	813,833	662,456	161,587	183,222
22.03.18 10:38	809,11	812,433	661,778	160,916	181,643
22.03.18 10:39	809,828	811,2	661,171	160,387	180,012
22.03.18 10:40	808,958	810,2	660,627	159,851	178,254
22.03.18 10:41	806,345	808,683	660,841	159,369	176,361
22.03.18 10:42	804,148	807,167	661,036	158,772	174,468
22.03.18 10:43	799,948	805,933	661,414	158,283	172,793
22.03.18 10:44	795,05	805,083	661,742	157,791	171,375
22.03.18 10:45	791,195	804,7	662,148	157,357	170,027
22.03.18 10:46	788,393	803,617	662,821	156,877	168,815
22.03.18 10:47	786,392	802,767	663,391	156,543	167,999
22.03.18 10:48	785,232	801,967	663,834	156,17	167,425
22.03.18 10:49	784,383	801,5	664,572	155,896	167,111
22.03.18 10:50	783,863	804,017	666,054	155,664	166,982
22.03.18 10:51	784,273	822,1	673,414	155,615	166,84
22.03.18 10:52	785,107	840,95	683,18	155,734	166,66
22.03.18 10:53	786,187	852,933	691,518	155,91	166,393
22.03.18 10:54	788,317	863,433	697,523	156,136	165,779
22.03.18 10:55	794,69	872,55	699,198	156,51	164,789
22.03.18 10:56	800,448	879,233	699,707	156,748	163,461
22.03.18 10:57	803,81	887,667	703,063	157,023	161,978
22.03.18 10:58	804,99	893,533	705,804	157,182	160,387
22.03.18 10:59	805,763	896,9	707,894	157,356	158,704
22.03.18 11:00	806,423	899,55	709,631	157,364	157,011
22.03.18 11:01	806,888	900	710,771	157,426	155,249
22.03.18 11:02	807,525	900	711,92	157,36	153,666
22.03.18 11:03	807,933	900	712,538	157,413	152,326
22.03.18 11:04	808,46	900	713,162	157,401	151,229
22.03.18 11:05	809,033	900	713,566	157,387	150,383
22.03.18 11:06	809,5	900	713,956	157,278	149,94
22.03.18 11:07	810,262	900	714,247	157,353	149,896
22.03.18 11:08	810,782	900	714,433	157,292	150,256
22.03.18 11:09	810,972	900	714,725	157,292	150,749
22.03.18 11:10	811,207	900	715,25	157,301	151,309
22.03.18 11:11	811,745	900	715,532	157,372	151,957
22.03.18 11:12	812,413	900	715,749	157,436	152,865
22.03.18 11:13	812,857	900	715,978	157,56	153,752
22.03.18 11:14	813,248	900	716,337	157,68	154,336
22.03.18 11:15	813,792	900	716,533	158,064	154,727
22.03.18 11:16	813,652	897,733	713,311	158,381	154,848
22.03.18 11:17	813,652	880,2	706,382	158,536	154,726
22.03.18 11:18	814,412	866,733	700,16	158,74	154,084
22.03.18 11:19	814,833	858,467	695,369	159,03	153,132

Продовження таблиці Б.1

Дата/час	T1 зона БС, °C	T2 зона БС, °C	T3 зона БС, °C	T ТВГС з БС, °C	T т.в. з БС, °C
22.03.18 11:20	815,4	853,817	691,563	159,459	152,02
22.03.18 11:21	815,593	849,317	687,565	160,159	150,866
22.03.18 11:22	815	841,983	682,181	160,753	149,668
22.03.18 11:23	814,673	835,917	677,17	161,492	148,678
22.03.18 11:24	814,995	832,167	673,378	162,268	148
22.03.18 11:25	815,587	829,967	670,261	163,336	147,732
22.03.18 11:26	815,968	827,583	667,651	164,402	148,163
22.03.18 11:27	816,252	826	665,717	165,836	149,53
22.03.18 11:28	816,442	825	663,785	166,971	151,582
22.03.18 11:29	816,925	822,6	661,895	168,308	154,105
22.03.18 11:30	816,94	818,483	659,579	169,528	157,18
22.03.18 11:31	816,945	814,767	657,392	170,862	160,734
22.03.18 11:32	816,695	799,15	651,332	171,884	164,47
22.03.18 11:33	817,002	762,117	634,192	171,963	168,233
22.03.18 11:34	816,522	751,05	623,742	171,699	171,898
22.03.18 11:35	814,61	756,117	621,559	171,869	175,061
22.03.18 11:36	812,842	762,033	622,302	172,029	177,828
22.03.18 11:37	811,192	764,9	623,263	172,207	180,268
22.03.18 11:38	809,827	765,5	623,557	172,094	182,361
22.03.18 11:39	808,642	765,967	623,509	171,952	184,227
22.03.18 11:40	807,895	765,183	623,244	171,494	185,819
22.03.18 11:41	807,023	764,5	622,543	170,946	187,288
22.03.18 11:42	806,693	763,467	621,731	170,113	188,52
22.03.18 11:43	807,232	763,783	621,957	169,531	189,499
22.03.18 11:44	808,29	766,4	624,57	169,304	190,146
22.03.18 11:45	808,148	764,883	624,379	168,52	190,418
22.03.18 11:46	807,88	762,15	624,145	167,464	190,525
22.03.18 11:47	807,457	759,733	625,174	166,467	190,607
22.03.18 11:48	807,302	759,367	627,112	165,251	190,535
22.03.18 11:49	808,615	771,2	632,618	164,075	190,317
22.03.18 11:50	810,34	784,733	639,104	163,035	189,914
22.03.18 11:51	811,653	794,25	644,726	162,283	189,332
22.03.18 11:52	812,692	799,583	649,641	161,774	188,59
22.03.18 11:53	813,668	802,517	653,864	161,917	187,863
22.03.18 11:54	814,475	804,567	657,366	161,616	186,948
22.03.18 11:55	814,865	806,083	660,217	161,227	186,081
22.03.18 11:56	815,14	806,583	662,864	160,765	185,091
22.03.18 11:57	815,32	806,967	664,942	160,157	184,151
22.03.18 11:58	815,532	807	666,944	159,476	183,161
22.03.18 11:59	815,74	807,367	668,863	158,917	182,035
22.03.18 12:00	815,93	807,983	670,337	158,171	180,805
22.03.18 12:01	815,967	808,683	669,628	157,077	179,39
22.03.18 12:02	816,287	808,833	668,623	155,782	177,787
22.03.18 12:03	816,563	808,25	668,459	154,686	175,882

Продовження таблиці Б.1

Дата/час	T1 зона БС, °C	T2 зона БС, °C	T3 зона БС, °C	T ТВГС з БС, °C	T т.в. з БС, °C
22.03.18 12:04	816,965	810,4	669,145	153,697	173,778
22.03.18 12:05	817,202	817,35	672,68	153,14	171,548
22.03.18 12:06	817,497	826,017	677,689	152,691	169,067
22.03.18 12:07	818,358	832	682,502	152,554	166,488
22.03.18 12:08	819,203	835,733	686,365	152,598	163,834
22.03.18 12:09	819,987	838,35	689,226	152,54	160,975
22.03.18 12:10	820,875	840,017	691,85	152,547	157,882
22.03.18 12:11	821,542	841,317	693,888	152,738	154,63
22.03.18 12:12	821,873	842,667	695,795	152,929	151,556
22.03.18 12:13	822,333	843,883	697,404	153,249	148,801
22.03.18 12:14	822,968	844,617	698,671	153,659	146,388
22.03.18 12:15	823,112	845,083	699,709	154,136	144,442
22.03.18 12:16	823,475	845,967	700,444	154,718	142,999
22.03.18 12:17	822,117	844,35	700,799	155,282	141,749
22.03.18 12:18	818,397	839,467	698,699	155,622	140,652
22.03.18 12:19	814,108	834,133	695,434	156,051	140,007
22.03.18 12:20	810,552	830,267	692,166	156,341	139,561
22.03.18 12:21	807,477	827,417	689,183	156,723	139,379
22.03.18 12:22	805,317	825,15	686,344	157,149	139,471
22.03.18 12:23	803,827	823,333	683,345	157,672	139,964
22.03.18 12:24	802,627	822,1	680,879	158,178	140,921
22.03.18 12:25	801,385	821,867	678,999	158,815	142,263
22.03.18 12:26	800,29	820,95	677,406	159,454	143,876
22.03.18 12:27	799,392	819,2	675,247	160,328	146,038
22.03.18 12:28	798,36	817,017	672,762	160,912	148,809
22.03.18 12:29	797,583	815,033	670,372	161,339	152,092
22.03.18 12:30	796,603	813,417	668,374	161,214	155,659
22.03.18 12:31	795,663	811,5	666,838	160,775	159,203
22.03.18 12:32	794,563	809,783	665,398	159,986	162,481
22.03.18 12:33	793,3	808,6	664,326	159,285	165,563
22.03.18 12:34	792,152	807,317	664,104	158,525	168,453
22.03.18 12:35	791,75	806,183	664,332	157,932	170,826
22.03.18 12:36	792,032	805,267	664,684	157,527	172,319
22.03.18 12:37	792,457	804,1	665,322	157,24	173,153
22.03.18 12:38	792,612	802,967	666,036	156,839	173,537
22.03.18 12:39	792,957	801,7	666,605	156,368	173,551
22.03.18 12:40	792,953	801,017	667,345	155,781	173,383
22.03.18 12:41	792,865	801,183	666,405	155,187	173,124
22.03.18 12:42	792,965	800,667	664,984	154,187	172,852
22.03.18 12:43	792,612	800,383	664,042	153,244	172,446
22.03.18 12:44	792,307	800,083	663,856	152,305	172,091
22.03.18 12:45	792,015	799,517	664,454	151,343	171,764
22.03.18 12:46	791,615	799,117	665,812	150,406	171,387
22.03.18 12:47	791,145	798,683	667,276	149,75	170,971

Продовження таблиці Б.1

Дата/час	T1 зона БС, °C	T2 зона БС, °C	T3 зона БС, °C	T ТВГС з БС, °C	T т.в. з БС, °C
22.03.18 12:48	790,997	798,433	668,744	149,019	170,043
22.03.18 12:49	791,223	798,417	670,194	148,299	168,501
22.03.18 12:50	791,49	799,833	671,617	147,753	166,308
22.03.18 12:51	792,48	804,967	673,974	147,312	163,103
22.03.18 12:52	793,582	811,233	676,712	147,02	158,674
22.03.18 12:53	794,077	815,8	679,471	146,83	152,922
22.03.18 12:54	794,225	818,8	682,244	146,76	146,406
22.03.18 12:55	794,777	821,283	684,283	146,896	139,725
22.03.18 12:56	794,85	823,067	686,694	147,091	133,55
22.03.18 12:57	795,21	824,817	689,035	147,405	128,472
22.03.18 12:58	795,207	826,55	690,867	147,705	124,459
22.03.18 12:59	795,007	828,483	692,647	148,074	121,671

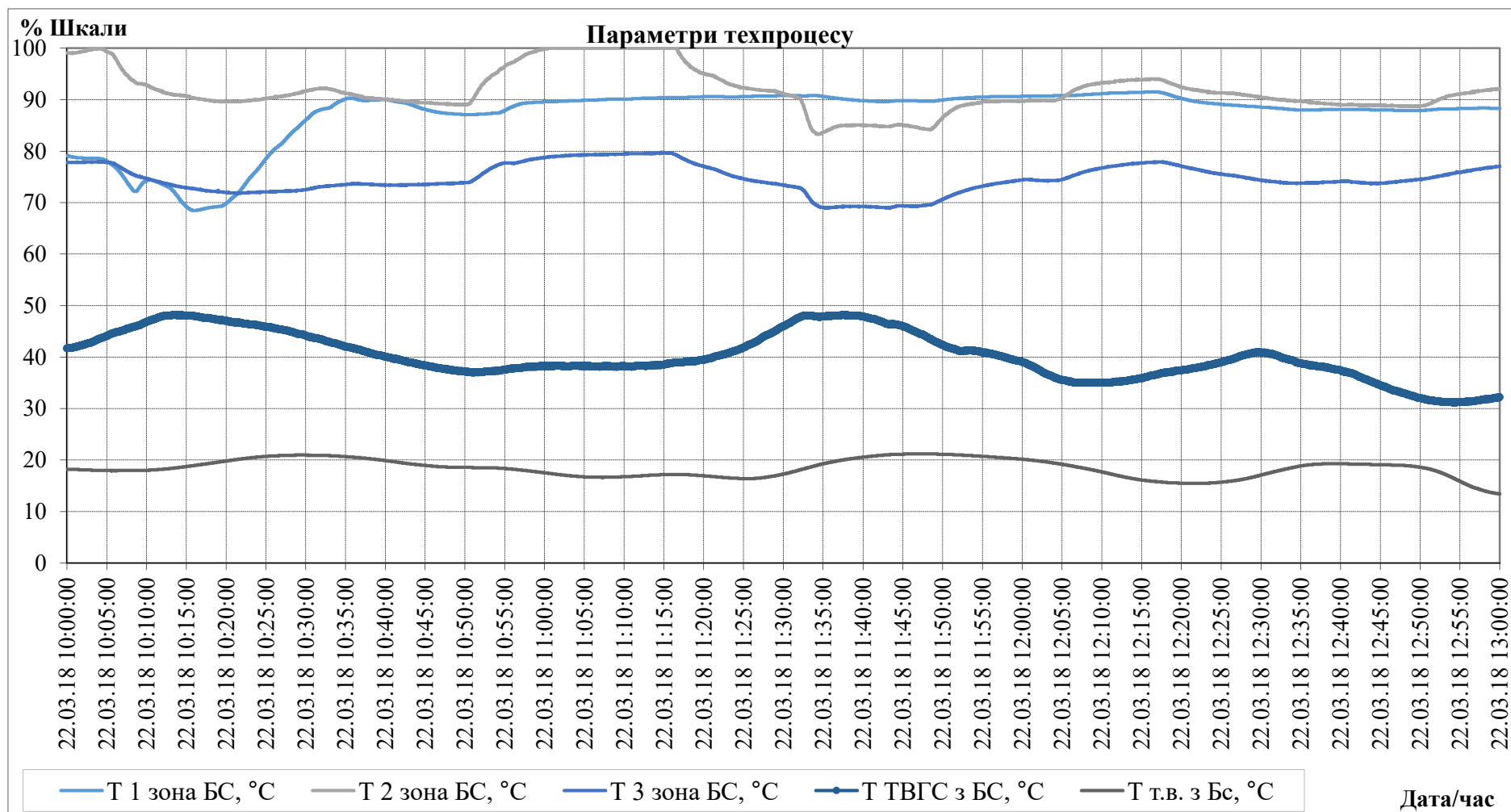


Рисунок Б.1 – Результати фіксації миттєвих значень параметрів технологічного процесу, отриманих в ході експерименту

ДОДАТОК В

ЛІСТІНГИ ЕЛЕМЕНТІВ КОМП'ЮТЕРНОЇ ПРОГРАМИ

TRINITY-FACTOR

В.1 Лістинг скрипта метода знаходження оператора моделі динамічної системи

```
import numpy as np # learn more: https://python.org/pypi/numpy
import math
from configurator import Configuration

class DataProcessor:
    # get matrix from file
    @classmethod
    def get_matrix(cls, file, s1, n):
        data = []
        with open(file) as f:
            data = [float(line.strip().replace(',', ' ')) for
line in f.readlines()]
        current_data = data[s1:s1 + 2 * n - 2]
        mtx = []
        for i in range(0, n - 1):
            mtx.append(current_data[i:i + n - 1])
        mtx = np.matrix(mtx)
        return mtx

    # calculate main minor with defined order
    @classmethod
    def main_minor(cls, mtx, order):
        minor = mtx[:order, :order]
        minor /= minor.max()
        return np.linalg.det(minor)

    # generate main minors sequence with error = eps
    @classmethod
    def minor_seq(cls, mtx):
```

```
        current_minor = cls.main_minor(mtx, 1)
        result = []
        order = 2
        while abs(current_minor) >
Configuration.keys['defaultError']:
            result.append(current_minor)
            current_minor = cls.main_minor(mtx, order)
            order += 1
        return result

# matrix eigenvalues
@classmethod
def get_eigenvalues(cls, mtx):
    eig = sorted(list(np.linalg.eigvals(mtx)), key=lambda x: -
x)
    eig = eig[1:-1]
    return eig

# average value for list of numbers
@classmethod
def avg(cls, lst):
    return sum(lst) / len(lst)

# generate lists of subtractions and calculate average value
@classmethod
def get_average_subtractions(cls, eig, rank):
    result = []
    prev = eig
    for i in range(rank):
        diffs = [prev[i] - prev[i + 1] for i in range(len(prev)
- 1)]
        result.append(cls.avg(diffs))
        prev = diffs
    return result

# solve square equation
@classmethod
def solve(cls, coeffs):
```

```

    res = []
    a, b, c = coeffs
    d = b**2 - 4*a*c
    if d < 0:
        res = [
            complex(-b / (2 * a), math.sqrt(abs(d) / (2 *
a))),
            complex(-b / (2 * a), -math.sqrt(abs(d) / (2 *
a)))
        ]
    else:
        res = [
            (-b + math.sqrt(abs(d))) / (2 * a),
            (-b - math.sqrt(abs(d))) / (2 * a)
        ]
    return res

@classmethod
def process_data(cls, s1, n, file_code):
    debug = Configuration.keys['includeDebugInformation']
    result = ''
    mtx = cls.get_matrix(Configuration.sources[file_code], s1,
n)

    np.savetxt(f'matrix_{file_code}.csv', mtx, delimiter=';')
    result += f'\nResult matrix is: \n{mtx}\n'
    m2 = mtx.copy()
    seq = cls.minor_seq(m2)
    result += f'\nMain minors before 0 are: {seq}\n'
    rank = len(seq) - 1
    eig = cls.get_eigenvalues(mtx)
    result += f'\nEigenvalues are: \n{eig}\n'
    if debug:
        np.savetxt(f'eigenvalues_{file_code}.csv',
np.asarray(eig), delimiter=';')
        diffs = cls.get_average_subtractions(eig, rank)
        coeffs = [1] + diffs
        result += f'\nEquation coeffs are: \n{coeffs}\n'
    if debug:

```

```
        np.savetxt(f'coeffs_{file_code}.csv',
np.asarray(coeffs), delimiter=';')
        res = cls.solve(coeffs)
        result += f'\nResult is: \n{res}\n\n'
        return result
```

В.2 Лістинг скрипта метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем

```
import numpy as np
from sympy import *
from sympy.parsing.sympy_parser import parse_expr
import logging
import math
import itertools
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib.ticker import LinearLocator, FormatStrFormatter

FORMAT = '%(asctime)-25s %(levelname)-10s %(message)s'
logging.basicConfig(level=logging.DEBUG, format=FORMAT)

T_BEGIN = 0
T_END   = 10
T_STEP  = 1

t_BEGIN = 0
t_END   = 10
t_STEP  = 1

def check_squareness(m):
    logging.info(f'Checking if {m} a square matrix ...')
    rows = len(m)
    for i in range(len(m)):
        if len(m[i]) != rows:
```

```
        logging.info('Check failed')
        return False
    logging.info('Check successful')
    return True

def check_rectangularity(m):
    logging.info(f'Checking if {m} a rectangle matrix ...')
    cols = len(m[0])
    for i in range(1, len(m)):
        if len(m[i]) != cols:
            logging.info('Check failed')
            return False
    logging.info('Check successful')
    return True

def size(rect):
    return len(rect), len(rect[0])

def check_all(f, g, c):
    logging.info('Running all checks ...')
    f = f.tolist()
    g = g.tolist()
    c = c.tolist()
    if check_squareness(f) and check_rectangularity(g) and
check_rectangularity(c):
        fn, fm = size(f)
        gn, gm = size(g)
        cn, cm = size(c)
        if fn == gn and fm == cm:
            logging.info('All checks successful')
            return True
    logging.info('All checks failed')
    return False

def get_number(filename):
    logging.info(f'Getting number from {filename} ...')
    file = open(filename, 'r')
```

```
    first = [int(elem) for elem in file.readline().split(' ') if
len(elem) > 0][0]
    logging.info(f'Result is {first}')
    return first
```

```
def get_matrix(filename):
    logging.info(f'Getting matrix from {filename} ...')
    file = open(filename, 'r')
    m = []
    line = file.readline()
    while line:
        row = [int(elem) for elem in line.split(' ') if len(elem)
> 0]
        m.append(row)
        line = file.readline()
    logging.info(f'Result is {m}')
    return np.matrix(m)
```

```
def multiply(mtr, sym):
    logging.info(f'Multiplying matrix {mtr.tolist()} on symbol {sym}
...')
    res = []
    for row in mtr.tolist():
        res.append([elem * sym for elem in row])
    logging.info(f'Result is {res}')
    return np.matrix(res)
```

```
def exp_jordan(J):
    j = J.tolist()
    ej = []
    for c1 in range(len(j)):
        row = []
        for c2 in range(len(j[c1])):
            if c1 == c2:
                row.append(math.e**(j[c1][c2]))
            else:
                row.append(0)
```



```
        ej.append(row)
    return Matrix(ej)

def exp_matrix(m):
    M = Matrix(m)
    P, J = M.jordan_form()
    return (P * exp_jordan(J) * P**(-1)).tolist()

def power(mtr):
    logging.info(f'Calculating exponent e^M, where M =
    {mtr.tolist()} ...')
    res = np.matrix(exp_matrix(mtr))
    logging.info(f'Result is {res.tolist()}')
    return res

def get_theta(mtr):
    logging.info('Getting theta ...')
    theta = power(multiply(mtr, dt))
    logging.info('Theta calculated successfully')
    return theta

def evaluate(expr, **kwargs):
    logging.info(f'Evaluating {expr} with {kwargs} ...')
    res = expr.subs(kwargs).evalf()
    logging.info(f'Result is {res}')
    return res

def evaluate_matrix(mtr, **kwargs):
    logging.info(f'Evaluating matrix {mtr.tolist()} with {kwargs}
    ...')
    res = []
    for row in mtr.tolist():
        res.append([evaluate(elem, **kwargs) for elem in row])
    logging.info(f'Result is {res}')
    return np.matrix(res)

def make_square(mtr):
    size = int(math.sqrt(len(mtr)))
```

```
res = []
for i in range(size):
    row = []
    for j in range(size):
        row.append(mtr[10 * i + j])
    res.append(row)
return np.matrix(res)

def covar(x, y, k):
    d = (y - x).tolist()
    m = []
    for row in d:
        m.append([complex(evaluate_matrix(k,
dt=elem).tolist()[0][0])).real for elem in row])
    return np.array(m)

def diff_row(a, t):
    sz = len(a.tolist())
    res = [a]
    for i in range(sz):
        res.append(diff(res[-1], t))
    return res

def get_coeffs(a, c):
    cs = []
    a = a.tolist()
    for elem in a:
        expr = elem[0]
        cs.append([expr.coeff(math.e**(c*t) * cos(3*t)),
expr.coeff(math.e**(c*t) * sin(3*t))])
    return Matrix(cs)

def get_coeffs_row(row_a, c):
    res = []
    for elem in row_a:
        res.append(get_coeffs(elem, c))
    return res
```

```

def calculate_kx_partial(cof_a, cof_b):
    sz = len(cof_a) - 1
    k = []
    variables = []
    for i in range(sz):
        row = []
        for j in range(sz):
            vr = symbols('k_%d_%d' % (i, j))
            row.append(vr)
            variables.append(vr)
        k.append(row)
    k = Matrix(k)
    system = []
    for i in range(sz):
        ca = cof_a[i].col(0)
        cb = cof_b[i].col(0)
        exprs = (k * ca - cb).tolist()
        system += exprs
    system = [elem[0] for elem in system]
    solution = solve(system, variables)
    k = k.subs(solution).evalf()
    return k

def calculate_kx(a_last, b_last, kx_partial, q, t):
    d = (b_last - kx_partial * a_last)
    diffK = d * (1 / q) * d.T
    K = integrate(diffK, t)
    return K

dt = symbols('dt')
f = get_matrix('f.txt')
g = get_matrix('g.txt')
c = get_matrix('c.txt')
q = get_number('q.txt')
p = get_matrix('p.txt')
if check_all(f, g, c):
    theta = get_theta(f)

```

```
k = theta * p

#xs = [i / 10 for i in range(11)]      #T
#ys = [i for i in range(11)]          #t
#dts = list(itertools.product(xs, ys))
#zs = [evaluate_matrix(k, dt=(elem[1] - elem[0])).tolist()[0][0]
for elem in dts]

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

X = np.arange(T_BEGIN, T_END + T_STEP, T_STEP)
Y = np.arange(t_BEGIN, t_END + t_STEP, t_STEP)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = covar(X, Y, k)

surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1,
cmap=cm.coolwarm, linewidth=0, antialiased=False)
#ax.set_zlim(-1.01, 1.01)

ax.zaxis.set_major_locator(LinearLocator(10))
ax.zaxis.set_major_formatter(FormatStrFormatter('%.02f'))

fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)

logging.info('Plotting ...')
plt.show()
logging.info('Finishing execution')

t = symbols('t')
A = Matrix([math.e**(-t) * cos(3*t), math.e**(-t) * sin(3*t)])
B = Matrix([[4, -4/3], [4/3, 4]]) * Matrix([math.e**(t) *
cos(3*t), math.e**(t) * sin(3*t)])

rowA = diff_row(A, t)
cofA = get_coeffs_row(rowA, -1)

rowB = diff_row(B, t)
```

```
cofB = get_coeffs_row(rowB, 1)

kx_partial = calculate_kx_partial(cofA, cofB)
kx = calculate_kx(rowA[-1], rowB[-1], kx_partial, q, t)

ct = A.T
gt = (rowB[-1] - kx * rowA[-1]) * q**(-0.5)

its = range(0, 200, 1)
ts = [elem / 10 for elem in its]
c1s = [ct.tolist()[0][0].subs({t:elem}) for elem in ts]
c2s = [ct.tolist()[0][1].subs({t:elem}) for elem in ts]
g1s = [gt.tolist()[0][0].subs({t:elem}) for elem in ts]
g2s = [gt.tolist()[1][0].subs({t:elem}) for elem in ts]
plt.plot(ts, c1s)
plt.plot(ts, c2s)
plt.show()
plt.plot(ts, g1s)
plt.plot(ts, g2s)
plt.show()

k1s = [kx.tolist()[0][0].subs({t:elem}) for elem in ts]
k2s = [kx.tolist()[0][1].subs({t:elem}) for elem in ts]
k3s = [kx.tolist()[1][0].subs({t:elem}) for elem in ts]
k4s = [kx.tolist()[1][1].subs({t:elem}) for elem in ts]
plt.plot(ts, k1s)
plt.plot(ts, k2s)
plt.show()
plt.plot(ts, k3s)
plt.plot(ts, k4s)
plt.show()

else:
    logging.critical('Check failed!')
    raise ValueError('Incorrect input')
```


Таблиця Г.2 – Результати розрахунку власних значень заданої матриці

4.364783811044616324e-01
2.461885535205020903e-01
1.432180358851088409e-01
1.212592018191049614e-01
1.039934265114074996e-01
1.009469167081560870e-01
9.972038141313256665e-02
9.867226402844357647e-02
9.643360606584104600e-02
8.915156558968685696e-02
6.681101117371719689e-02
6.075746691343247158e-02
2.649331352092898495e-02
2.278467697517597840e-02
4.543324803698429483e-03
-2.510876330832946535e-02
-5.589937014223145262e-02
-6.549706324280156478e-02
-8.794868815058988487e-02
-9.325243783346970350e-02
-9.850828355096465094e-02
-9.919772878159614782e-02
-1.000991936984097080e-01
-1.011690605946240495e-01
-1.077730263577774961e-01
-1.457415018082417746e-01
-2.398065430214011140e-01
-2.423118796112761764e-01

Таблиця Г.3 – Результати обчислення коефіцієнтів характеристичного рівняння

1.0000000000000000e+00
2.514038002650880940e-02
7.222480422849402934e-03

Г.2 Результати обчислень метода ідентифікації і прогнозування стану динамічних систем

Вихідні дані:

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{C} := (1 \ 0) \quad Q := 160 \quad \underline{P} := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Розв'язання прямої задачі:

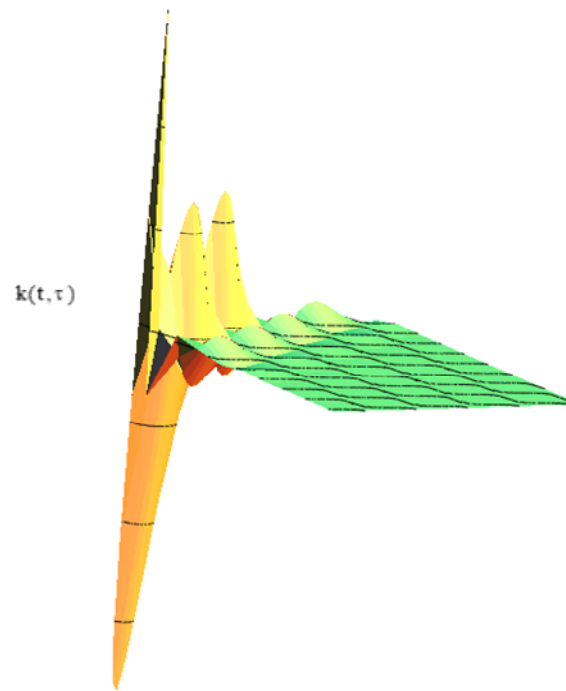
$$e^{\underline{A}t} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-1-3i} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i \right) + e^{-1+3i} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i \right) & \frac{e^{-1-3i} \cdot i}{6} - \frac{e^{-1+3i} \cdot i}{6} \\ -\frac{5i \cdot e^{-1-3i}}{3} + \frac{5i \cdot e^{-1+3i}}{3} & e^{-1-3i} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i \right) + e^{-1+3i} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i \right) \end{bmatrix}$$

$$e^{\underline{A} \cdot (t-\tau)} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i \right) + e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i \right) & -\frac{e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t} \cdot i}{6} + \frac{e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t} \cdot i}{6} \\ \frac{5i \cdot e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t}}{3} - \frac{5i \cdot e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t}}{3} & e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i \right) + e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}i \right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} := e^{\underline{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \underline{P}$$

$$e^{\underline{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \underline{P} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t} \cdot \left(2 - \frac{2}{3}i \right) + e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t} \cdot \left(2 + \frac{2}{3}i \right) & -\frac{20i \cdot e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t}}{3} + \frac{20i \cdot e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t}}{3} \\ \frac{20i \cdot e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t}}{3} - \frac{20i \cdot e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t}}{3} & e^{(1-3i) \cdot \tau + (-1+3i) \cdot t} \cdot \left(20 + \frac{20}{3}i \right) + e^{(1+3i) \cdot \tau + (-1-3i) \cdot t} \cdot \left(20 - \frac{20}{3}i \right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}(t, \tau) := e^{(-1-3i) \cdot t + (1+3i) \cdot \tau} \cdot \left(20 - \frac{20}{3}i \right) + e^{(-1+3i) \cdot t + (1-3i) \cdot \tau} \cdot \left(20 + \frac{20}{3}i \right)$$



Розв'язання оберненої задачі:

$$\underline{\underline{F}}(t) := \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot \cos(3t) \\ e^{-t} \cdot \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}}(t) := \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ \frac{4}{3} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(3t) \\ e^t \cdot \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \cdot \cos(3t) \right) \\ \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \cdot \sin(3t) \right) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \\ 3 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ \frac{4}{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(e^t \cdot \cos(3t) \right) \\ \frac{d}{dt} \left(e^t \cdot \sin(3t) \right) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{40 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \\ \frac{40 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \end{pmatrix}$$

$$F1 := \begin{pmatrix} -\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \\ 3 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$G1 := \begin{pmatrix} \frac{40 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \\ \frac{40 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(-\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(3 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \right) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - 8 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \\ -6 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - 8 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \frac{40 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \\ \frac{d}{dt} \frac{40 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -40 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^t - \frac{40 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \\ \frac{40 \cdot \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^t \end{pmatrix}$$

$$F2 := \begin{bmatrix} -(8 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}) + 6 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \\ -6 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} - 8 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \end{bmatrix} \quad G2 := \begin{pmatrix} -40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t - \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} \\ \frac{40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} 4 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{44}{9} \end{pmatrix}$$

$$F(t)^T \rightarrow (\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} \quad \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t})$$

$$(G2 - X \cdot F2) \cdot \frac{1}{Q} \cdot (G2 - X \cdot F2)^T \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \left(40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{3} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{12} \right) \\ \left(-40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{3} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{7 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{36} \right) \\ \left(\frac{40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t + 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{280 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{9} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{12} \right) \\ \left(\frac{40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t + 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{280 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{9} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{7 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{36} \right) \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} \left(40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{3} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{12} \right) \\ \left(-40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{3} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{7 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{36} \right) \\ \left(\frac{40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t + 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{280 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{9} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{12} \right) \\ \left(\frac{40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{3} - 40 \sin(3 \cdot t) \cdot e^t + 40 \cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t} + \frac{280 \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{9} \right) \left(\frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^t}{12} - \frac{\sin(3 \cdot t) \cdot e^t}{4} + \frac{\cos(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{4} + \frac{7 \cdot \sin(3 \cdot t) \cdot e^{-t}}{36} \right) \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t (K) dt \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{50 \sinh(2 \cdot t)}{9} - \frac{50 \sin(6 \cdot t)}{27} - \frac{80 \cdot t}{9} - \frac{19 \cos(6 \cdot t) \cdot \sinh(2 \cdot t)}{18} + \frac{103 \sin(6 \cdot t) \cdot \cosh(2 \cdot t)}{78} + \frac{5 \cos(9 \cdot t) \cdot \sinh(2 \cdot t)}{13} \\ \frac{50 \cos(6 \cdot t)}{27} - \frac{80 \cdot t}{27} - \frac{50 \cdot e^{-2 \cdot t}}{27} - \frac{50 \sin(6 \cdot t)}{81} - \frac{43 \cos(6 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{108} - \frac{3 \cos(6 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{4} - \frac{5 \cos(9 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{26} - \frac{5 \cos(9 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{78} + \frac{103 \sin(6 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{156} - \frac{103 \sin(6 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{468} + \frac{493}{351} \\ \frac{50 \cos(6 \cdot t)}{27} - \frac{80 \cdot t}{27} - \frac{50 \cdot e^{-2 \cdot t}}{27} - \frac{50 \sin(6 \cdot t)}{81} - \frac{43 \cos(6 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{108} - \frac{3 \cos(6 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{4} - \frac{5 \cos(9 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{26} - \frac{5 \cos(9 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{78} + \frac{103 \sin(6 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{156} - \frac{103 \sin(6 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{468} + \frac{493}{351} \\ \frac{100 \cos(6 \cdot t)}{81} - \frac{40 \cdot t}{9} - \frac{325 \cdot e^{-2 \cdot t}}{81} + \frac{25 \cdot e^{2 \cdot t}}{9} + \frac{50 \sin(6 \cdot t)}{27} - \frac{329 \cos(6 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{324} + \frac{\cos(6 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{4} - \frac{5 \cos(9 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{26} + \frac{5 \cos(9 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{234} - \frac{373 \sin(6 \cdot t) \cdot e^{-2 \cdot t}}{1404} - \frac{133 \sin(6 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}}{156} + \frac{986}{1053} \end{pmatrix}$$

$$k1(t) := \frac{50 \cdot \sinh(2t)}{9} - \frac{50 \cdot \sin(6t)}{27} - \frac{80t}{9} - \frac{19 \cdot \cos(6t) \cdot \sinh(2t)}{18} + \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot \cosh(2t)}{78} + \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot \sinh(2t)}{13}$$

$$k2(t) := \frac{50 \cdot \cos(6t)}{27} - \frac{80t}{27} - \frac{50 \cdot e^{-2t}}{27} - \frac{50 \cdot \sin(6t)}{81} - \frac{43 \cdot \cos(6t) \cdot e^{-2t}}{108} - \frac{3 \cdot \cos(6t) \cdot e^{2t}}{4} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{-2t}}{26} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{2t}}{78} + \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{-2t}}{156} - \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{2t}}{468} + \frac{493}{351}$$

$$k3(t) := \frac{50 \cdot \cos(6t)}{27} - \frac{80t}{27} - \frac{50 \cdot e^{-2t}}{27} - \frac{50 \cdot \sin(6t)}{81} - \frac{43 \cdot \cos(6t) \cdot e^{-2t}}{108} - \frac{3 \cdot \cos(6t) \cdot e^{2t}}{4} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{-2t}}{26} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{2t}}{78} + \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{-2t}}{156} - \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{2t}}{468} + \frac{493}{351}$$

$$k4(t) := \frac{100 \cdot \cos(6t)}{81} - \frac{40t}{9} - \frac{325 \cdot e^{-2t}}{81} + \frac{25 \cdot e^{2t}}{9} + \frac{50 \cdot \sin(6t)}{27} - \frac{329 \cdot \cos(6t) \cdot e^{-2t}}{324} + \frac{\cos(6t) \cdot e^{2t}}{4} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{-2t}}{26} + \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{2t}}{234} - \frac{373 \cdot \sin(6t) \cdot e^{-2t}}{1404} - \frac{133 \cdot \sin(6t) \cdot e^{2t}}{156} + \frac{986}{1053}$$

$$(G2 - X.F2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \right) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{10} \cdot \left(40 \cdot \cos(3t) \cdot e^t + \frac{40 \cdot \sin(3t) \cdot e^t}{3} - 40 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-t} + \frac{40 \cdot \sin(3t) \cdot e^{-t}}{3} \right)}{40} \\ \frac{\sqrt{10} \cdot \left(\frac{40 \cdot \cos(3t) \cdot e^t}{3} - 40 \cdot \sin(3t) \cdot e^t + 40 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-t} + \frac{280 \cdot \sin(3t) \cdot e^{-t}}{9} \right)}{40} \end{array} \right]$$

$$B(t) := \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{10} \cdot \left(40 \cdot \cos(3t) \cdot e^t + \frac{40 \cdot \sin(3t) \cdot e^t}{3} - 40 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-t} + \frac{40 \cdot \sin(3t) \cdot e^{-t}}{3} \right)}{40} \\ \frac{\sqrt{10} \cdot \left(\frac{40 \cdot \cos(3t) \cdot e^t}{3} - 40 \cdot \sin(3t) \cdot e^t + 40 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-t} + \frac{280 \cdot \sin(3t) \cdot e^{-t}}{9} \right)}{40} \end{array} \right]$$

$$B1(t) := \frac{\sqrt{10} \cdot \left(40 \cdot \cos(3t) \cdot e^t + \frac{40 \cdot \sin(3t) \cdot e^t}{3} - 40 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-t} + \frac{40 \cdot \sin(3t) \cdot e^{-t}}{3} \right)}{40}$$

$$B2(t) := \frac{\sqrt{10} \cdot \left(\frac{40 \cdot \cos(3t) \cdot e^t}{3} - 40 \cdot \sin(3t) \cdot e^t + 40 \cdot \cos(3t) \cdot e^{-t} + \frac{280 \cdot \sin(3t) \cdot e^{-t}}{9} \right)}{40}$$

$$C_{\lambda}(t) := \left(\cos(3t) \cdot e^{-t} \quad \sin(3t) \cdot e^{-t} \right)$$

$$C1(t) := \cos(3t) \cdot e^{-t}$$

$$C2(t) := \sin(3t) \cdot e^{-t}$$

$$K_{\lambda}(t) := \left(\begin{array}{c} \frac{50 \cdot \sinh(2t)}{9} - \frac{50 \cdot \sin(6t)}{27} - \frac{80t}{9} - \frac{19 \cdot \cos(6t) \cdot \sinh(2t)}{18} + \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot \cosh(2t)}{78} + \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot \sinh(2t)}{13} \\ \frac{50 \cdot \cos(6t)}{27} - \frac{80t}{27} - \frac{50 \cdot e^{-2t}}{27} - \frac{50 \cdot \sin(6t)}{81} - \frac{43 \cdot \cos(6t) \cdot e^{-2t}}{108} - \frac{3 \cdot \cos(6t) \cdot e^{2t}}{4} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{-2t}}{26} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{2t}}{78} + \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{-2t}}{156} - \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{2t}}{468} + \frac{493}{351} \\ \frac{50 \cdot \cos(6t)}{27} - \frac{80t}{27} - \frac{50 \cdot e^{-2t}}{27} - \frac{50 \cdot \sin(6t)}{81} - \frac{43 \cdot \cos(6t) \cdot e^{-2t}}{108} - \frac{3 \cdot \cos(6t) \cdot e^{2t}}{4} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{-2t}}{26} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{2t}}{78} + \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{-2t}}{156} - \frac{103 \cdot \sin(6t) \cdot e^{2t}}{468} + \frac{493}{351} \\ \frac{100 \cdot \cos(6t)}{81} - \frac{40t}{9} - \frac{325 \cdot e^{-2t}}{81} + \frac{25 \cdot e^{2t}}{9} + \frac{50 \cdot \sin(6t)}{27} - \frac{329 \cdot \cos(6t) \cdot e^{-2t}}{324} + \frac{\cos(6t) \cdot e^{2t}}{4} - \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{-2t}}{26} + \frac{5 \cdot \cos(9t) \cdot e^{2t}}{234} - \frac{373 \cdot \sin(6t) \cdot e^{-2t}}{1404} - \frac{133 \cdot \sin(6t) \cdot e^{2t}}{156} + \frac{986}{1053} \end{array} \right)$$

ДОДАТОК Д

ЕКРАННІ ФОРМИ ПРОГРАМНОГО ДОДАТКУ TRINITY-FACTOR



Рисунок Д.1 – Головне вікно програми Trinity-factor

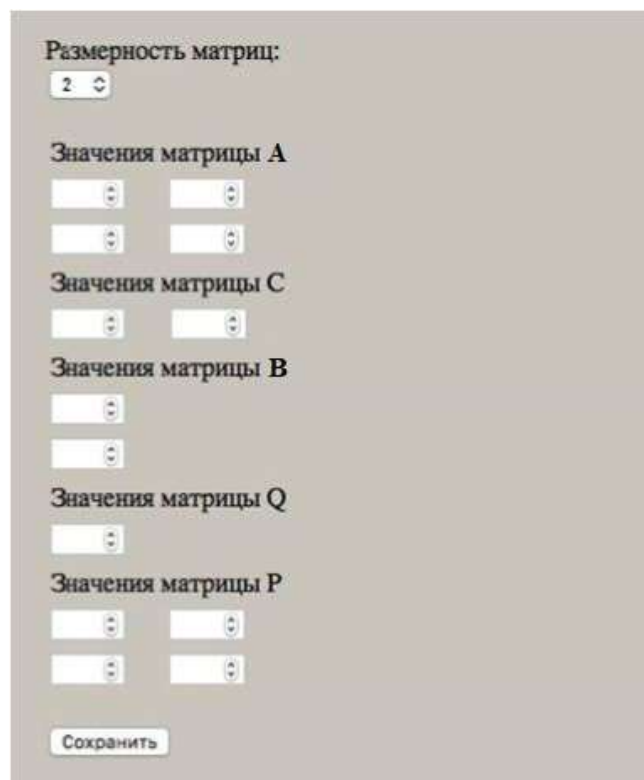
The image shows the data input form of the Trinity-factor software. It has a light gray background. At the top, it says "Размерность матриц:" followed by a spinner control showing the number "2". Below this, there are several sections for entering matrix values, each with a label and spinner controls: "Значения матрицы A" (two spinners), "Значения матрицы C" (two spinners), "Значения матрицы B" (two spinners), "Значения матрицы Q" (one spinner), and "Значения матрицы P" (two spinners). At the bottom of the form, there is a button labeled "Сохранить".

Рисунок Д.2 – Форма введення початкових даних

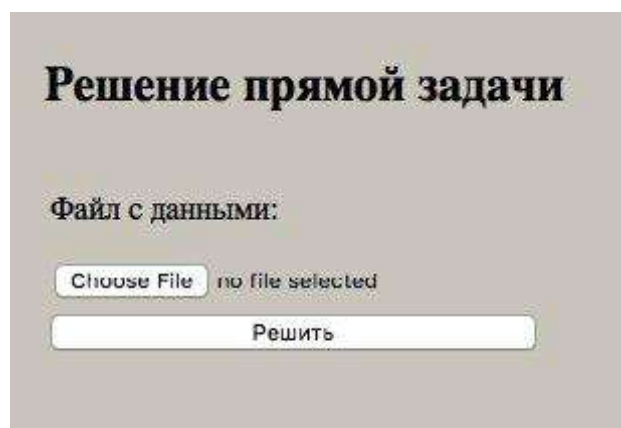


Рисунок Д.3 – Вікно введення даних для розв'язання прямої задачі

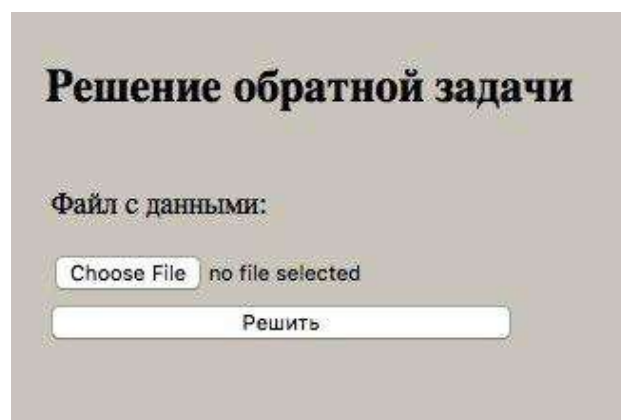


Рисунок Д.4 – Вікно введення даних для розв'язання оберненої задачі



Рисунок Д.5 – Вікно завершення розв'язання прямої задачі



Рисунок Д.6 – Вікно завершення розв'язання оберненої задачі

Монографія

Димова Ганна Олегівна

Методи і моделі упорядкування
експериментальної інформації для ідентифікації
і прогнозування стану безперервних процесів

Підписано до друку 03.03.2020 р. Формат 60×90/16.

Друк: різнографія. Гарнітура Times New Roman.

Наклад 300 прим. Замовлення № 1432.

Книжкове видавництво ПП Вишемирський В. С.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів

видавничої справи: серія ХС № 48 від 14.04.2005 р.

видано Управлінням у справах преси та інформації

73000, Україна, м. Херсон, вул. Соборна, 2,

тел. (050) 133-10-13, e-mail: printvvs@gmail.com, vish_sveta@rambler.ru