Херсонський державний аграрно-економічний університет

Рагулін С.В.

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Кропивницький

2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Предмет «технічної механіки» складається із трьох частин:

• теоретичної механіки, у якій розглядаються загальні закони руху та рівноваги матеріальних тіл;

• основ опору матеріалів, в якій наводяться основні поняття про міцність та найпростіші способи розрахунку елементів конструкцій на міцність та жорсткість з урахуванням механічних характеристик матеріалів;

• деталей механізмів та машин, в якій розглядаються основні поняття, пов'язані з механізмами та машинами, та типові деталі механізмів та з'єднань.

У теоретичній механіці широко застосовуються методи векторного обчислення, що спрощують висновки залежностей та полегшують розуміння фізичного змісту механічних явищ.

У механіці зустрічаються два види величин - скалярні та векторні. Скалярною називається величина, що повністю характеризується своїм чисельним значенням (маса, робота, енергія, щільність тощо). Векторною називається величина, яка визначається не лише своїм чисельним значенням, а й напрямом у просторі (сила, переміщення, швидкість, прискорення).

Векторну величину (або просто вектор) зображують спрямованим у просторі відрізком, довжина якого у вибраному масштабі відповідає чисельному значенню вектору, а напрямок збігається з напрямком вектору. Чисельна величина вектору називається його модулем. Модуль вектору завжди позитивний, його одиниця виміру відповідає одиниці виміру фізичної величини, що представляється вектором. Вектор (Рис.1) можна позначити двома літерами (АВ), що відповідають його початку та кінцю, або однією літерою (а).Модуль цього вектору можна записати по-різному: АВ або α або |а|.

Рисунок 1.

Залежно від властивостей зображуваної ним величини розрізняють вільні, ковзні та пов'язані вектори. За початок вільного вектору може бути прийнята будь-яка точка простору, за початок ковзного вектору може бути прийнята будь-яка точка, що лежить на прямій (лінії дії вектору), пов'язаний вектор прикладений до певної точки простору.

Два вектори складаються за правилом паралелограма (Рис.2), в якому результуючий вектор направлений діагоналі.

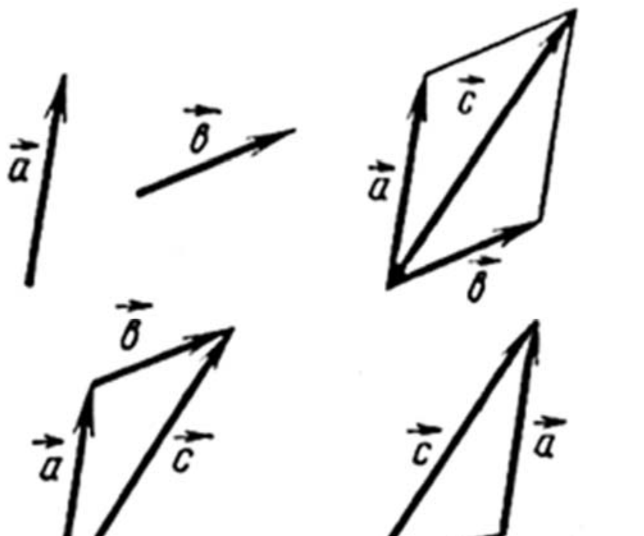

Рисунок 2.

Скласти два вектори можна також побудовою половини паралелограма - трикутника, причому послідовність складання результату не змінює. При додаванні кількох векторів результуючий вектор замикає багатокутник векторів, що складаються, і також не залежить від порядку складання (Рис.3).

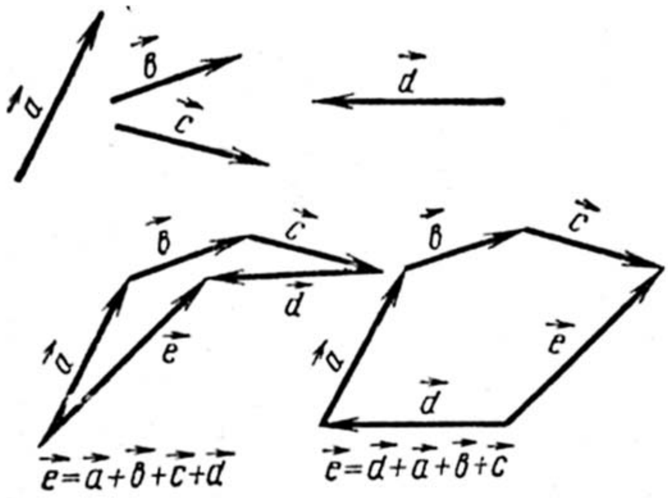

Рисунок 3.

Вектори, що складаються, спрямовані по контуру багатокутника в одну сторону, а вектор суми - в протилежну (див. Рис.2 і Рис.3).

Проекція вектору на вісь дорівнює взятій зі знаком "плюс" або "мінус" довжині відрізка, укладеного між проекціями на цю вісь початку та кінця вектору (Рис.4). Проекція вектору на вісь є скалярною величиною, вона має свого напряму, а повністю визначається своїм чисельним значенням. Проекція вектору на вісь є позитивною, коли відлік її довжини збігається з позитивним напрямом осі (наприклад, відлік довжини A_1B_1 на Рис.4, а).

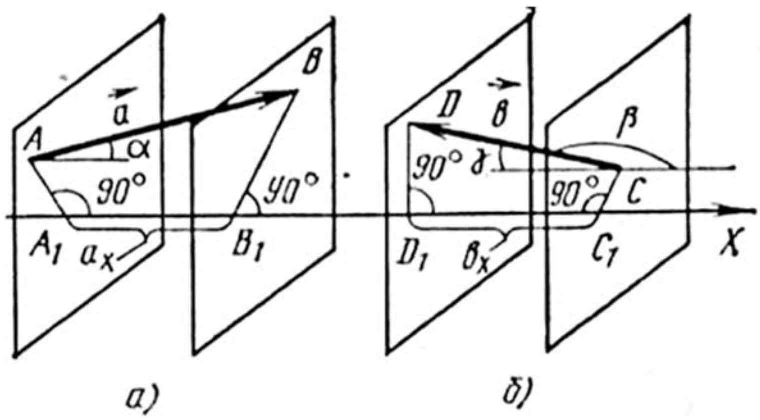

Рисунок 4.

Чисельне значення проекції дорівнює модулю вектору, помноженого на косинус кута, укладеного між напрямками вектору та осі:

$$a_x = A_1B_1 = a\cos(\widehat{\vec{a},x});\ b_x = C_1D_1 = b\cos\left(\widehat{\vec{b},x}\right)$$

Знак проекції регулюється знаком косинуса, отже, при гострому куті між вектором і віссю проекція позитивна, а за тупому - негативна. При вирішенні практичних завдань зручно не використовувати гострі кути, а знак проекції встановлювати заздалегідь у напрямку вектору. Тоді проекція вектору $\vec{b}$ на вісь OX:

$$b_x = -b\cos\gamma$$

Якщо проекція на вісь - скалярна величина, то проекція вектору на площину (Рис.5) є вектор, оскільки він характеризується як чисельним значенням, а й напрямом на площині.

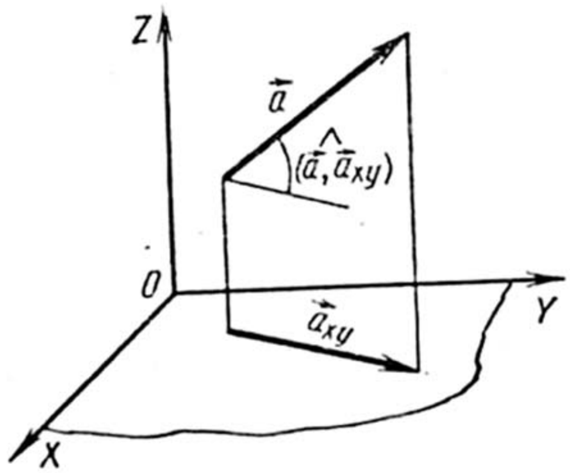

Рисунок 5.

Модуль проекції вектору на площину дорівнює модулю проектованого вектору, помноженого на косинус кута між ним та вектором проекції:

$$a_{xy} = a\cos(\widehat{a,\vec{a}_{xy}})$$

Кожен вектор може бути розкладений на складові. У багатьох випадках доцільно здійснювати розкладання вектору на складові, спрямовані на осі координат (Рис.6):

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

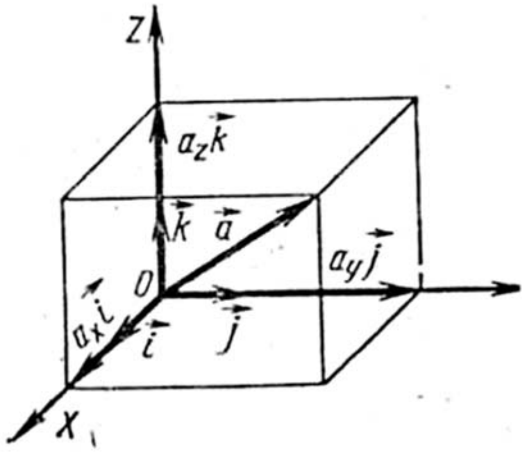

Рисунок 6.

де a_x, a_y, a_z - проекції вектору на осі (координати вектору); i, j, k - одиничні вектори, що визначають напрями прямокутної системи осей (орти осей), їх довжина дорівнює одиниці.

Таким чином, скалярні величини α_x, α_y, α_z, помножені на орти, стають векторами α_xi, α_yj, α_xk, сума яких дорівнює вектору α.

Модуль вектору та косинуси кутів, які він складає з координатними осями, можна знайти, знаючи проекції вектору та використовуючи властивості прямокутного паралелепіпеда:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}_, x}) = \frac{a_x}{a}, \cos(\widehat{\vec{a}_, y}) = \frac{a_y}{a}, \cos(\widehat{\vec{a}_, z}) = \frac{a_z}{a}$$

Проекція суми векторів на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів, що складаються, на ту ж вісь. Дано вектори a, b, c (Рис. 7) та їх сума - вектор d. Проекції векторів на вісь OY:

$$a_y = OA_1, b_y = A_1B_1,\ c_y = -B_1C_1,\ d_y = OC_1,$$

Із рисунку видно, що, $OC_1 = OA_1 + A_1B - B_1C_1$,відповідно,

$$d_y = a_y + b_y + C_y$$

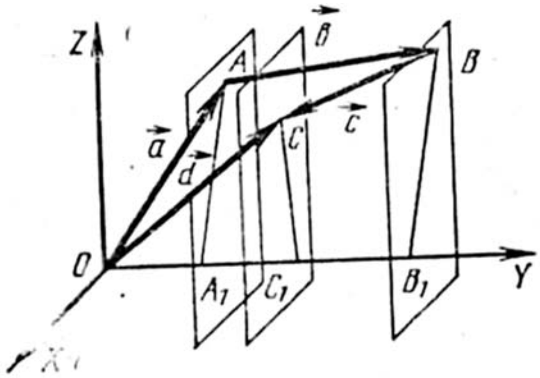

Рисунок 7.

Векторним добутком двох векторів називається вектор, модуль якого дорівнює добутку модулів обох векторів, помноженому на синус кута між ними, а напрям перпендикулярно площині, що проходить через вектори, що перемножуються, віднесені до однієї точки.

Для визначення векторного твору векторів a та b, розташованих довільно у просторі (Рис.8, а), необхідно перенести вектори в точку O і побудувати ними паралелограм OABC. Модуль векторного твору a × b, рівний за визначенням

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

дорівнює водночас площі паралелограма, побудованого на перемножених векторах. Справді,

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = OA \cdot OC \cdot \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right)$$

але $OC \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = h$ (Рис.8, б) і $OA \cdot h = S \quad OABC$

Відповідно,

$$\left|\vec{a} \hat{\times} \vec{b}\right| = S \quad OABC$$

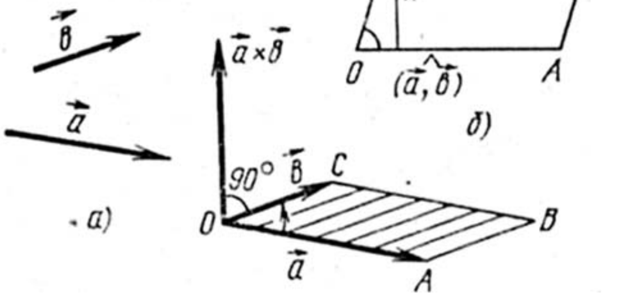

Рисунок 8.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКСІОМИ СТАТИКИ

Для вирішення різноманітних завдань, пов'язаних із експлуатацією техніки, необхідно знати закони механічної взаємодії матеріальних тіл. Механічним називається взаємодія, що викликає зміну руху тіл або зміну взаємного становища їх частинок (деформацію). Механічним рухом називається те, що відбувається з часом, переміщення тіл у просторі по відношенню до інших тіл. Теоретична механіка - наука про загальні закони руху та рівноваги тіл під дією сил.

Курс теоретичної механіки прийнято поділяти на три розділи: статику, кінематику, динаміку. У статиці вивчаються сили та умови рівноваги тіл під дією сил. У кінематиці розглядається рух тіл з геометричної сторони, без зв'язку руху з діючими на ці тіла силами. У динаміці вивчається рух тіл під впливом сил.

1.1 Рівновага тіл. Тверде тіло.

Рівновагою вважають стан спокою тіла або його прямолінійного та рівномірного руху по відношенню до інших тіл, що умовно приймаються за нерухомі. У техніці найчастіше нерухомої вважають Землю і жорстко пов'язані з нею тіла.

Умови рівноваги твердих, рідких та газоподібних тіл різні. Незначні деформації твердих тіл під дією сил не суттєво впливають на їх рівновагу, тому в теоретичній механіці нехтують малими деформаціями тіл і вважають ці тіла абсолютно твердими.

Абсолютно твердим називається тіло, відстань між будь-якими двома точками якого завжди залишається незмінною. Надалі абсолютно тверде тіло називатимемо просто твердим тілом. Твердим тілом (конструкцією) вважатимемо також поєднання кількох твердих тіл, якщо їхнє взаємне розташування не змінюється.

1.2 Сили

Силою називається кількісний вимір механічної взаємодії тіл. Сила є векторною величиною, тому що дія сили на тіло визначається чисельним значенням (модулем), напрямом та точкою докладання сили.

На схемах сила зображується спрямованим відрізком (Рис. 1.1). Основною одиницею зміни сили є 1 ньютон (1 Н). Раніше застосовувалася одиниця сили 1 кгс, причому 1 кгс= = 9,81 Н.

Рисунок 1.1

Введемо такі визначення:

система сил - сукупність сил, прикладених до тіла;

еквівалентні системи сил - системи сил, які мають однакову механічну дію на те саме тіло;

врівноважена система сил (еквівалентна нулю) - система сил, під дією якої тіло перебуває в рівновазі;

рівнодіюча сила - сила, еквівалентна системі сил, тобто сила, яка замінює дію системи сил на тіло;

врівноважуюча сила - сила, додавання якої до деякої системи сил, прикладеної до тіла, приводить цю систему до рівноваги;

зовнішні сили - сили, прикладені до розглянутого тіла або групі тіл (конструкцій) ззовні з боку інших тіл;

внутрішні сили - сили взаємодії між частинками розглянутого тіла або між тілами розглянутої конструкції.

Розподіл сил на зовнішні та внутрішні є довільним та залежить від того, який об'єкт розглядається. Наприклад, щодо умови рівноваги конструкції, що з кількох тіл, сили взаємодії з-поміж них вважають внутрішніми. Якщо ж розглядати одне з цих тіл, то для нього сили дії інших тіл, які в першому випадку вважалися внутрішніми, будуть зовнішніми.

Основне завдання статики полягає у визначенні умов рівноваги тіл під дією зовнішніх сил.

1.3 Аксіоми статики

В основі статики лежать кілька аксіом, що не вимагають доказу, з яких виводяться всі теореми і рівняння.

Аксіома 1. Тверде тіло, до якого прикладено дві сили, знаходиться в рівновазі тоді і тільки тоді, коли ці сили рівні по модулю і направлені по одній прямій у протилежні сторони (Рис. 1.2).

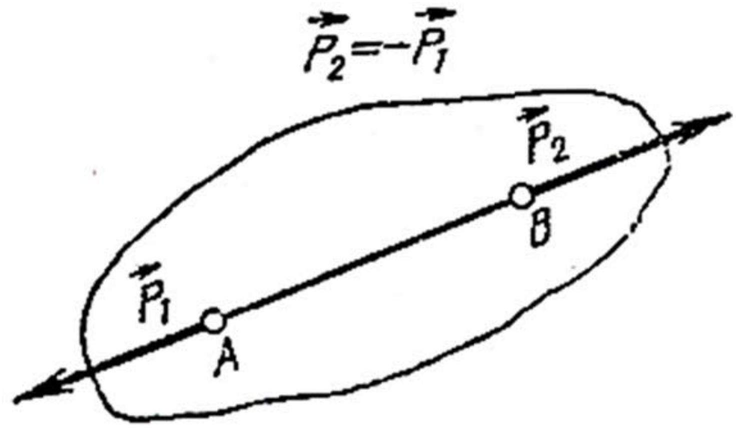

Рисунок 1.2

Аксіома 2. Дія системи сил на тверде тіло не зміниться, якщо до цієї системи докласти або виключити з неї будь-яку врівноважену систему сил.

Слідство з аксіом 1 і 2. Дія сили на тверде тіло не зміниться при перенесенні сили у будь-яку точку, що лежить на лінії її дії.

Нехай до тіла в точці А (Рис. 1.3) прикладена сила Р. Відповідно до аксіоми 2 у точці В, що лежить на лінії дії сили, прикладемо врівноважені сили Р' і —Р' (причому Р'=Р). Відповідно до аксіоми 1 сили Р і —Р' будуть врівноважені, і їх можна відкинути (аксіома 2). В результаті отримаємо силу Р'=Р, але прикладену над точці А, а точці В.

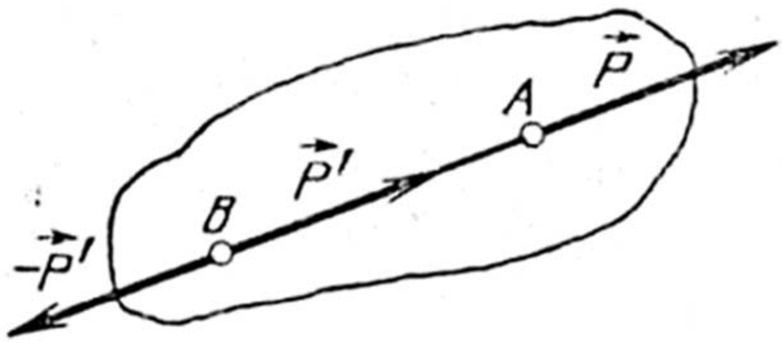

Рисунок 1.3

Аксіома 3. Рівнодіюча двох сил, прикладених до тіла в одній точці, дорівнює геометричній сумі сил і прикладена в тій же точці.

Рівнодіюча R сил P_1 і P_2 (Рис. 1.4), рівна геометричній сумі сил, являє собою діагональ паралелограма, побудованого на цих силах, як на сторонах.

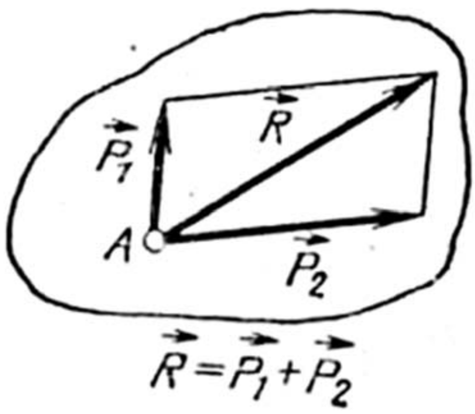

Рисунок 1.4

Аксіома 4. Будь-якій дії одного тіла на інше відповідає рівна за величиною, але протилежне за напрямом протидія.

Отже, два тіла діють один на одного з силами, рівними по модулю та спрямованими по одній прямій у протилежні сторони.

Властивість внутрішніх сил. З аксіоми 4 випливає, що сили взаємодії двох будь-яких частинок тіла або двох будь-яких тіл, що входять у незмінну конструкцію, рівні та протилежно спрямовані. Ці сили для тіла чи конструкції загалом є внутрішніми. Відповідно до аксіоми 1 вони врівноважені і, отже, можуть бути відкинуті (за аксіомою 2). У цьому випадку, при визначенні умов рівноваги твердого тіла або конструкції, слід враховувати тільки зовнішні сили.

Внутрішні сили, які у твердому тілі (конструкції), на рівновагу тіла (конструкції) не впливають.

1.4 Зв'язки та їх реакції

Тіло, яке може здійснювати будь-яке переміщення у просторі, називається вільним. Тіло, що обмежує свободу переміщення даного тіла, є по відношенню до нього зв'язком.

Тіло, свобода переміщення якого обмежена зв'язками, називається невільним.

Сила, з якою зв'язок діє тіло, перешкоджаючи його переміщенню у тому чи іншому напрямі, називається силою реакції цього зв'язку. Сили реакції або сили протидії зв'язків залежать від умов закріплення тіла і від величини і напряму незалежних від зв'язків активних (заданих) сил, що діють на нього. Одне з основних завдань статики полягає у знаходженні реакції зв'язків невільних тіл. Для вирішення цього завдання використовують аксіому зв'язків, на підставі якої всяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки, замінивши їхню дію на тіло силами реакцій цих зв'язків.

Напрямок сили реакції зв'язку протилежний тому напрямку, в якому активні сили прагнуть перемістити тіло. Користуючись цим правилом, можна визначати напрямок сил реакцій деяких зв'язків.

Гладка поверхня. Гладка поверхня перешкоджає переміщенню тіла в одному напрямку - за нормаллю до поверхні, тому реакція гладкої поверхні спрямована нормально до неї (рис. 1.5).

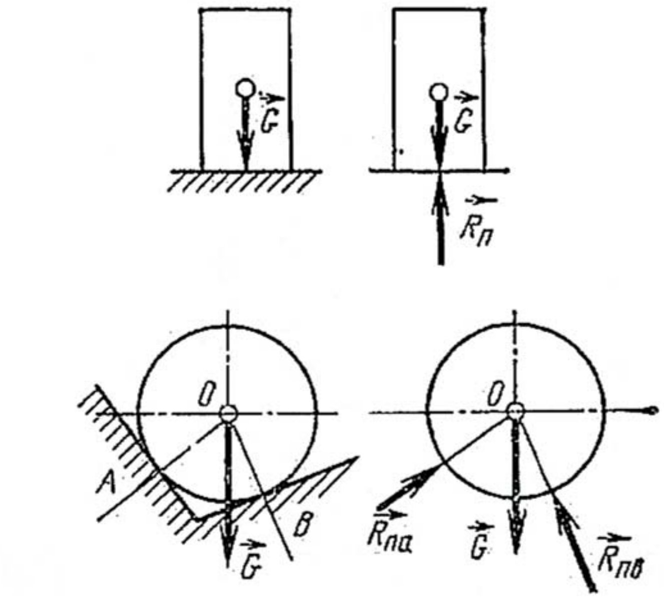

Рисунок 1.5

Нитка. Гнучкий зв'язок (трос, ланцюг, ремінь тощо) називається в механіці ниткою і вважається нерозтяжним. Тіло, закріплене питтям, не може переміщатися вздовж нитки у бік її розтягування. Отже, реакція нитки спрямована вздовж нитки (Рис. 1.6). Звільняючи тіло від зв'язків, реакцію нитки слід спрямовувати убік, відповідну розтягуванню нитки, тобто від тіла (від тіла на Рис. 1.6).

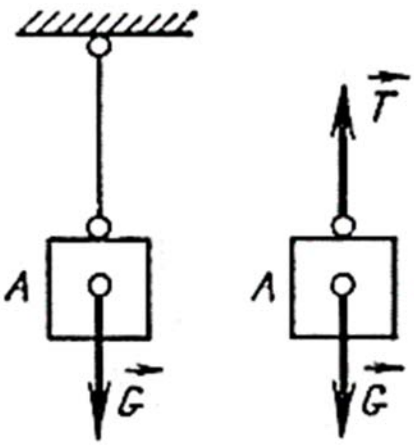

Рисунок 1.6

Якщо нитка відхиляється роликом, у якому не враховується тертя, натяг нитки не змінюється.

Шарніри. Шарніром у механіці називається пристрій, що допускає поворот одного тіла щодо іншого, але обмежує при цьому лінійні переміщення цих тіл. Шарнірними, наприклад, є з'єднання A, B, C елементів задньої опори літака (рис. 1.7), вузли A, B, C, D підвіски двигуна (рис. 1.8).

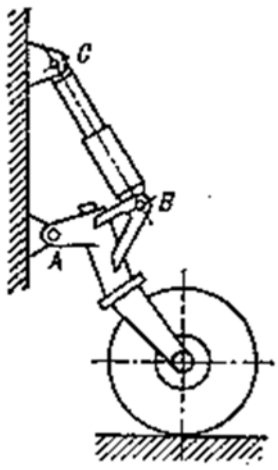

Рисунок 1.7

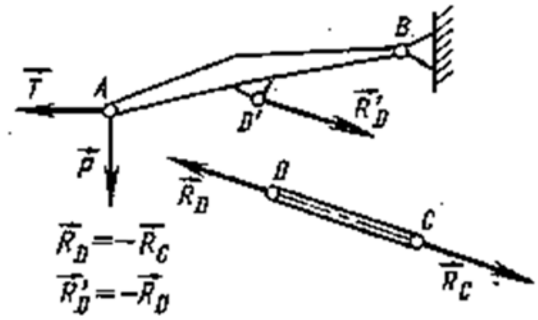

Рисунок 1.8

Циліндричний шарнір (рис. 1.9 а), що з'єднує два тіла, перешкоджає лише переміщенню тіл відносно один одного в напрямку, перпендикулярному осі шарніра, але допускає незначні осьові переміщення (зазвичай за рахунок зазорів у з'єднаннях). Реакція циліндричного шарніра лежить у площині перпендикулярної до осі шарніра. Напрямок реакції залежить від величини і напряму сил, що діють на тіло.

Кульовий шарнір унеможливлює будь-яке переміщення тіла в усіх напрямках, крім обертання (рис. 1.9, б). Реакція шарового шарніра може мати будь-який напрямок у просторі.

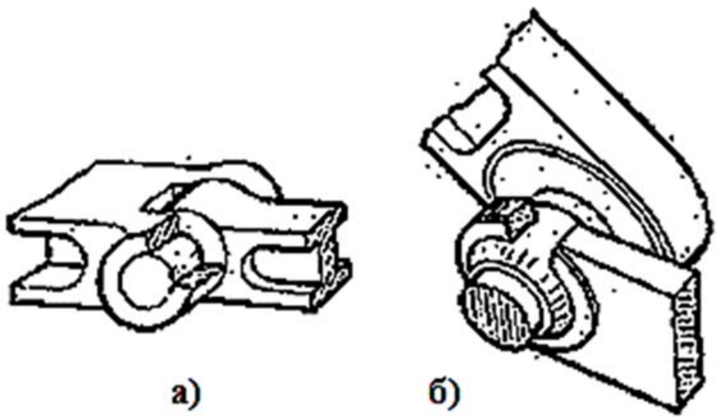

Рисунок 1.9

Опорні пристрої різних конструкцій зазвичай представляють у вигляді циліндричних шарнірів: нерухомого А і рухомого В (рис. 1.10, а).

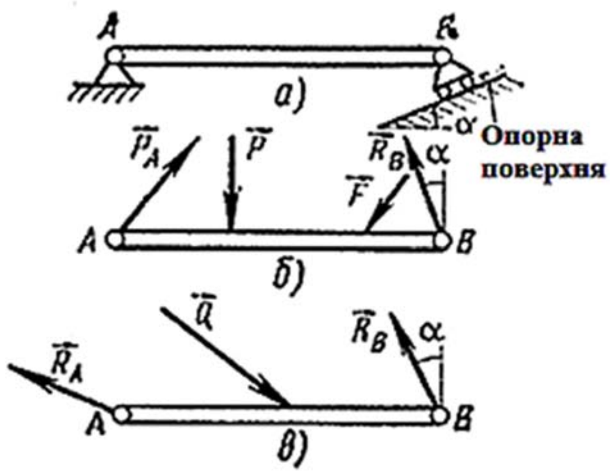

Рисунок 1.10

Реакція рухомого шарніра завжди спрямована нормалі до опорної поверхні шарніра. Реакція нерухомого шарніра залежить від прикладених до балки сил і вказати заздалегідь напрямок цієї реакції не можна. На рис. 1.10 б і в показано зміну напрямку реакції нерухомого шарніра А в двох різних випадках навантаження балки. Реакція рухомого шарніра В обох випадках спрямована нормалі до опорної поверхні.

Шарнірні стрижні. Зв'язками часто служать стрижні із шарнірно закріпленими кінцями. Таким стрижнем є, наприклад, стрижень підвіски CD двигуна (див. рис. 1.9).На нього діють лише дві сили $\vec{R}_C$ та $\vec{R}_D$, прикладені до шарнірів (вага стрижня не враховується). Але якщо стрижень перебуває у рівновазі під дією двох сил, то ці сили спрямовані по одній прямій. Очевидно, що і реакція стрижня $\vec{R}_D{}'$, прикладена до балки AB, буде спрямована по тій самій прямій. Таким чином, реакція шарнірного стрижня спрямована по прямій, що з'єднує центри шарнірів.

Це справедливо у випадках, коли до стрижня прикладені лише сили, що діють через шарніри. До шарнірно закріпленої балки AB правило не застосовується, тому що вона навантажена не тільки реакціями шарнірів B і D, а й силами $\vec{P}$ і $\vec{T}$ у точці A.

Підшипники валів. Різноманітні опорні пристрої валів машин схематично представляють підшипниками двох типів: радіальним (циліндричним), що не перешкоджає деяким осьовим зміщенням валу (підшипник A на рис. 1.11) і радіально-упорним підшипником B, що виключає осьові переміщення валу.

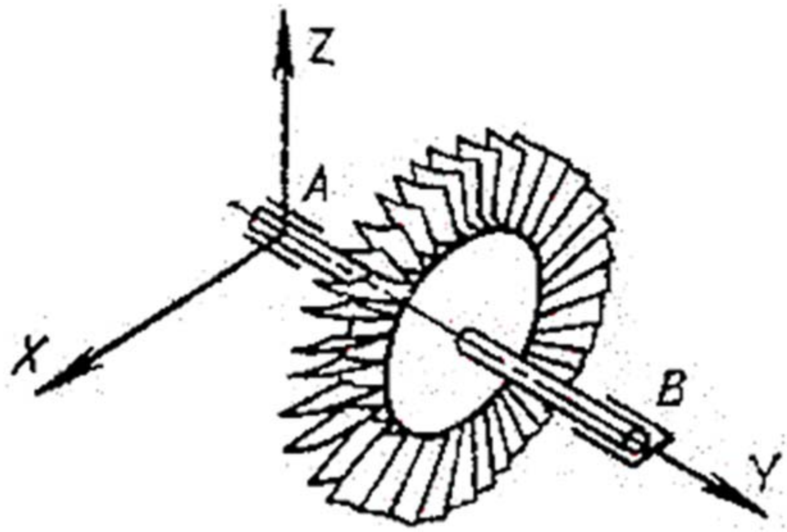

Рисунок 1.11

Реакція радіального підшипника розташована в площині, перпендикулярній до осі валу, реакція радіально-упорного підшипника може мати будь-який напрямок у просторі.

2. СИСТЕМА СИЛ ЩО СХОДЯТЬСЯ

2.1 Складання сил що сходяться

Силами що сходяться називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Складання сил, що сходяться, проводиться за правилом складання векторів. Для визначення рівнодіючої двох сил, що сходяться, прикладених до тіла в різних точках (рис. 2.1, а), необхідно перенести сили по їх лініях дії(аксіома 2) і побудувати паралелограм сил (аксіома 3).

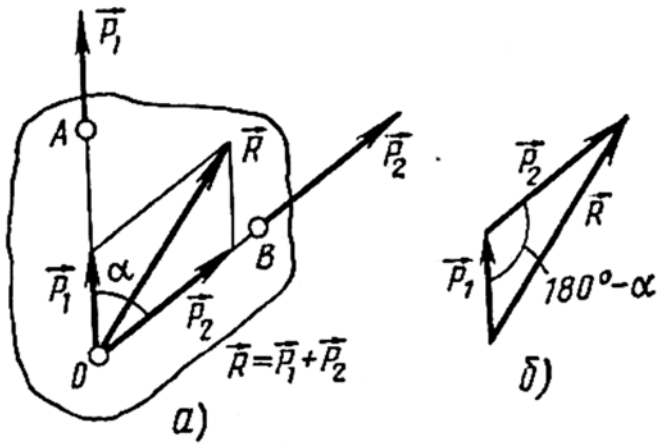

Рисунок 2.1

Знайти рівнодіючу можна також, побудувавши половину паралелограма - трикутник сил (рис. 2.1, б), у якому рівнодіюча є замикаючою стороною. По теоремі косинусів рівнодіюча

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(180^0 - a)}$$

або, враховуючи, що для кута, укладеного між силами,

$$\cos\left(\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}\right) = \cos a = -\ \cos(180^0 - a)$$

Отримаємо

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\left(\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}}\right)}$$

Найпростіша просторова система сил складається із трьох сил, прикладених до однієї точки. Рівнодіюча цієї системи є діагональ паралелепіпеда, сторони якого являють собою складові сили (рис. 2.2).

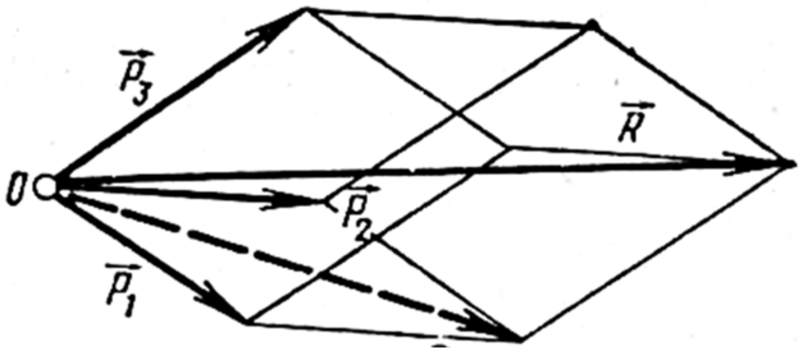

Рисунок 2.2

Рівнодійна система сил, що сходяться, дорівнює їх геометричній сумі і зображується замикаючою стороною багатокутника сил (рис. 2.3):

$$\vec{R} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{P_4}$$

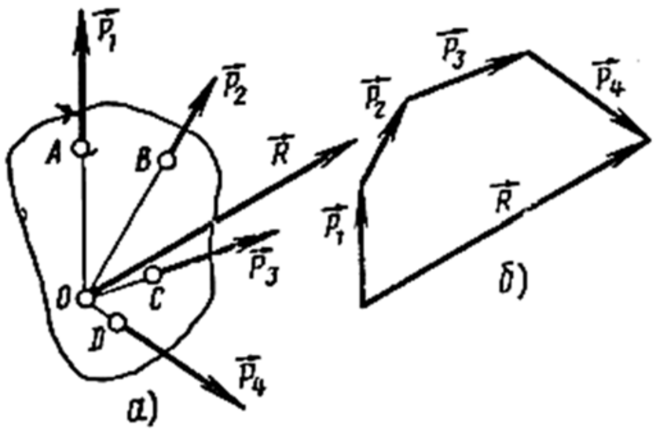

Рисунок 2.3

Якщо на тіло діють n сил, що сходяться, то вираз для їх рівнодіючої можна записати у вигляді

$$\vec{R} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_n} \quad \text{або} \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i^* \qquad (2.1)$$

Модуль і напрямок рівнодіючої n сил, що сходяться, прикладених до тіла, можна знайти також і аналітично, методом проекцій. Справді, проекції рівнодіючої на осі координат відповідно до виразу (4)

$$R_x = \sum P_{ix}\ ,\ R_y = \sum P_{iy},\ R_z = \sum P_{iz}$$

$\sum P_{ix}\ , \sum P_{iy}, \sum P_{iz}$ - суми проекцій, прикладених до тіла сил на осі.

Рівнодіюча, розкладена на складові, спрямовані по осях координат відповідно до виразу (1)

$$\vec{R} = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}$$

Модуль та напрямок рівнодіючої можуть бути визначені відповідно до виразів (2) та (3)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \text{ або } R = \sqrt{(\sum P_{ix})^2 + \left(\sum P_{iy}\right)^2 + (\sum P_{iz})^2} \quad (2.2)$$

$$\text{coz}\left(\widehat{\vec{R},x}\right) = \frac{R_x}{R}, \cos\left(\widehat{\vec{R},y}\right) = \frac{R_y}{R}, \cos\left(\widehat{\vec{R},z}\right) = \frac{R_z}{R} \quad (2.3)$$

2.2 Рівновага системи сил що сходяться

Тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією системи сил, що сходяться, якщо рівнодіюча системи дорівнює нулю.

Умови рівноваги можна подати в геометричній та аналітичній формах.

Геометрична умова рівноваги. Якщо R=0, то із рівняння (2.1) випливає

$$\sum \vec{P}_i = 0$$

При рівновазі системи сил, що сходяться, їх геометрична сума дорівнює нулю. Багатокутник сил замкнутий, кінець вектору останньої сили збігається з початком вектору першої сили, всі сили спрямовані на контур багатокутника в один бік (рис. 2.4).

Аналітична умова рівноваги. При R= 0 із формули (2.2) отримаємо

$$\sqrt{(\sum P_{ix})^2 + \left(\sum P_{iy}\right)^2 + (\sum P_{iz})^2} = 0$$

Відповідно,

$$\sum P_{ix} = 0, \sum P_{iy} = 0, \sum P_{iz} = 0 \qquad (2.4)$$

При рівновазі системи сил, що сходяться, суми проекцій сил на осі координат дорівнюють нулю. Вирази (2.4) називаються рівняннями рівноваги сил, що сходяться.

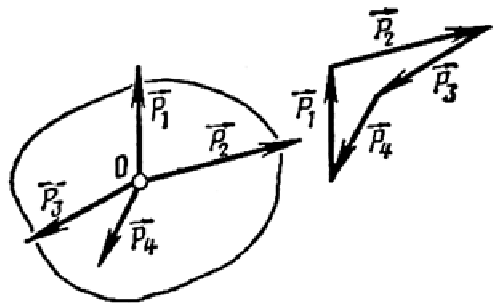

Рисунок 2.4

Для плоскої системи сил, що сходяться, отримаємо два рівняння рівноваги:

$$\sum P_{ix} = 0, \sum P_{iy} = 0$$

2.3 Теорема про три сили

Якщо система із трьох непаралельних сил знаходиться в рівновазі, то лінії їх дії перетинаються в одній точці і сили розташовуються в одній площині (рис. 2.5).

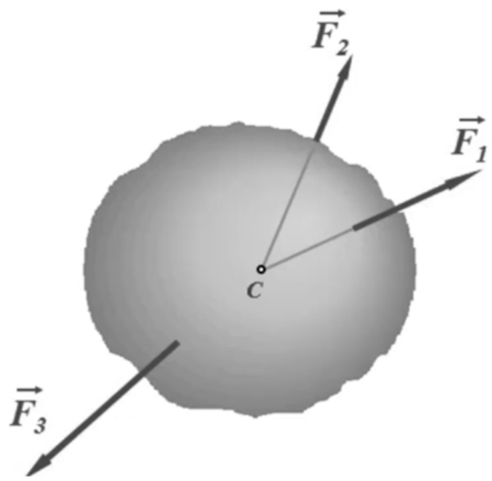

Рисунок 2.5

Розглянемо систему з трьох не паралельних сил. Зрозуміло що лінії двох з них обов'язково перетнуться в одній точці. Необхідно довести що лінія дії третьої сили також пройде через точку перетину двох (F_1,F_2) сил.

Сили (F_1,F_2) переміщуємо по лініям їх дії в точку перетину (рис. 2.6).

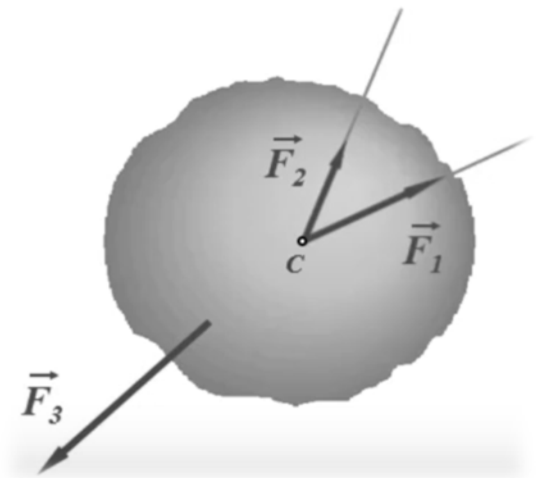

Рисунок 2.6

Просумуємо перенесені сили (F_1,F_2) в точці перетину *C* за правилом паралелограма. Отримаємо їх рівнодіючу R_1 (рис. 2.7).

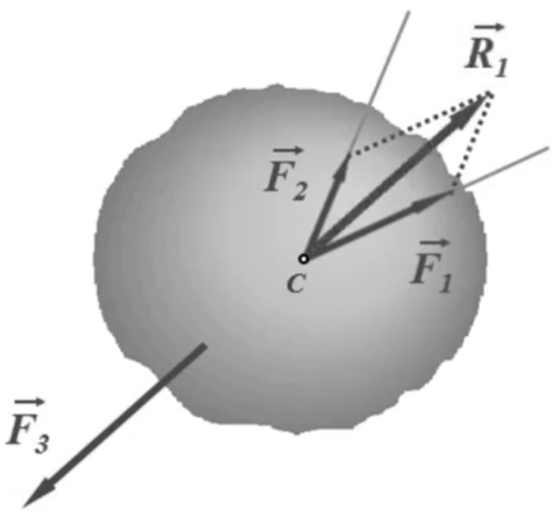

Рисунок 2.7

Отримана R_1 еквівалентна системі двох сил (F_1,F_2). Вихідна система (F_1,F_2,F_3) замінюється еквівалентною їй системою (R_1,F_3).

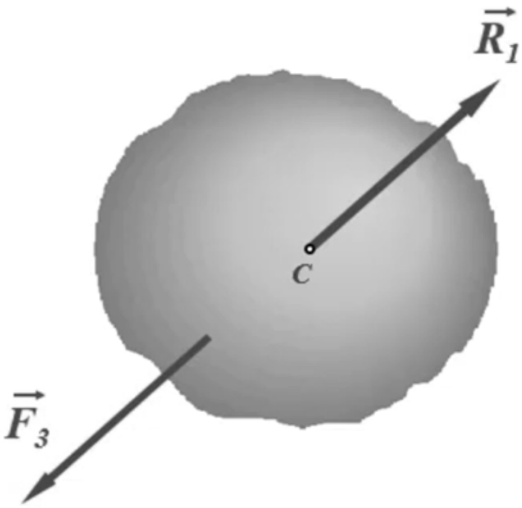

Рисунок 2.8

Система з двох сил що залишились (R_1,F_3) знаходиться в рівновазі. Тобто еквівалентна до 0.

На основі аксіоми 1 тільки дві рівні за модулем, протилежно направлені і діючі по одній прямій сили можуть утворювати систему еквівалентну до 0.

Значить лінія дії сили F_3 проходить через точку перетину сил F_1 і F_2. Всі три сили перетинаються в одній точці.

3. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. ПАРА СИЛ

3.1 Момент сили відносно точки

Досвід показує, що ефект дії сили, прикладеної до тіла (наприклад, важеля) на різних відстанях від точки закріплення тіла, залежить від так званого моменту сили щодо точки закріплення.

Моментом сили відносно точки (центру моменту) називається добуток модуля сили на її плече, що дорівнює відстані від точки до лінії дії сили (рис. 3.1, а). Момент сили P щодо центру O

$m_O(\vec{P}) = Ph$, де h - плече сили P відносно центру O.

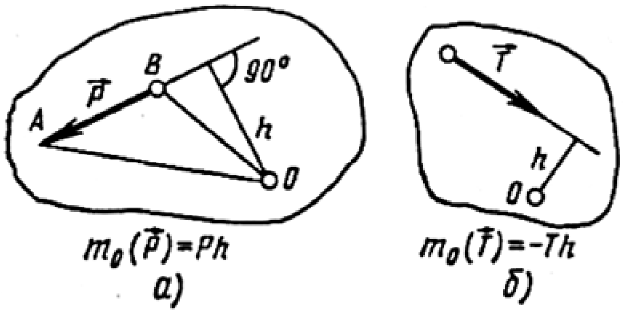

Рисунок 3.1

Момент сили вважається позитивним, якщо сила прагне повернути плече проти ходу годинникової стрілки; негативний момент має протилежний напрямок (рис. 3.1 б). Графічно абсолютна величина моменту сили щодо центру може бути виражена подвоєною площею трикутника, укладеного між центром і кінцями вектору сили:

$$m_O(\vec{P}) = 2 \cdot 0{,}5Ph = 2S\Delta AOB$$

Одиниця моменту дорівнює добутку одиниці сили на одиницю довжини (Н·м).

3.2 Момент сили щодо центру, представлений у вигляді вектору

Для плоскої системи сил напрямок моменту кожної сили щодо центру визначається знаком. Для сил, довільно розташованих у просторі, напрям моменту сили щодо центру не може бути визначено одним із двох знаків, так як при одному і тому ж абсолютному моменті сили обертальний ефект може створюватися в різних площинах. Момент сили щодо центру у просторі визначається площиною дії, напрямом обертального ефекту у цій площині та її абсолютним значенням.

Задати ці три елементи можна, вважаючи момент сили щодо центру вектором, модуль якого дорівнює добутку модуля сили на її плече, а направлення перпендикулярне площині, що проходить лінію дії сили та центр моменту (рис. 3.2). Вектор $\vec{m}_0(\vec{P})$ прикладають у центрі моменту і направляють у бік, звідки силу видно обертаючий плече в напрямку, протилежному ходу стрілки годинника .

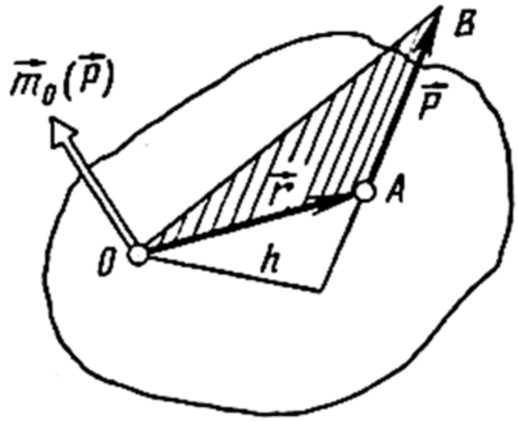

Рисунок 3.2

Надалі вектор моменту будем зображати на відміну інших векторів стрілкою, обведеної по контуру (див. рис. 3.2).

З'єднаємо центр моменту O з точкою A докладання сили радіусом-вектором $\vec{r}$ і знайдемо векторний добуток $\vec{r} \times \vec{P}$. За визначенням векторного твору його модуль

$$\left|\vec{r} \times \vec{P}\right| = 2S\Delta AOB$$

Але модуль вектору моменту сили $\left|\vec{m}_0(\vec{P})\right|$ також дорівнює подвоєної площі ΔAOB. Тоді $\vec{r} \times \vec{P} = \left|\vec{m}_0(\vec{P})\right|$. Напрямок векторного твору також збігається із напрямком вектору моменту.

Отже, момент сили щодо центру дорівнює векторному добутку радіуса-вектору, що з'єднує центр моменту з точкою докладання сили, на силу:

$$\vec{m}_O(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P} \quad (3.1)$$

3.3 Момент сили відносно осі

Якщо прикласти силу до тіла, що може обертатися навколо осі, то, як показує досвід, обертальний ефект, створюваний силою, буде залежати не тільки від значення сили та відстані від точки її прикладання до осі, а й від напрямку сили. Так, чотири рівні за модулем сили $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_4}$, прикладені до тіла в точці A (рис. 3.3), створюють різні обертальні ефекти щодо осі OY. Сила $\overrightarrow{P_1}$, лінія дії якої проходить через вісь, і сила $\overrightarrow{P_2}$, паралельна осі, обертального дії не виробляють. Сили $\overrightarrow{P_3}$ і $\overrightarrow{P_4}$ лежать у площині, перпендикулярній до осі, але сила $\overrightarrow{P_3}$ має більшу обертальну дію, тому що лінія її дії проходить на більшій відстані від осі, ніж лінія дії сили $\overrightarrow{P_4}$.

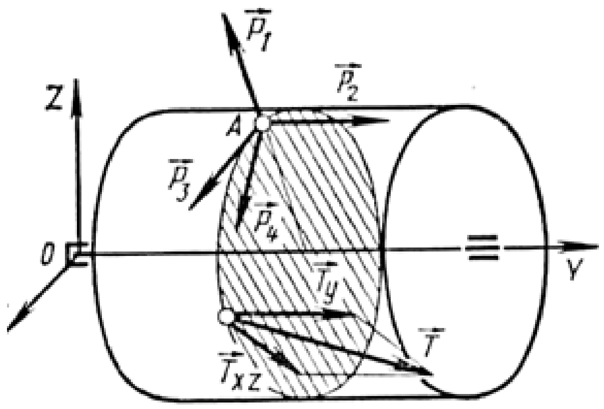

Рисунок 3.3

Обертальна дія сили $\vec{T}$ (розкладеної на дві складові) створюється тільки складовою $\vec{T}xz$, що дорівнює проекції сили $\vec{T}$ на площину, перпендикулярну до осі OY. Друга складова $\vec{T}y$, паралельна до осі, обертального ефекту не створює.

Обертальну дію сили можна оцінити за допомогою моменту сили щодо осі, тобто моменту проекції сили на площину, перпендикулярну до осі, щодо точки перетину осі з площиною.

Момент вважається позитивним, якщо при спостереженні з позитивного кінця осі проекцію сили видно обертаючою тіло проти ходу годинникової стрілки. При зворотному напрямку обертання момент вважається негативним. Оскільки напрямків всього два, то момент сили щодо осі є скалярна величина. Позначивши модуль проекції сили $\vec{P}$ на площину P_{xy} (рис. 3.4), запишемо вираз моменту сили щодо осі OZ:

$$m_z(\vec{P}) = P_{xy}h \quad \text{або } m_z(\vec{P}) = 2S\Delta aOb \qquad (3.2)$$

Момент сили щодо осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна осі або лінія дії сили перетинає вісь, тобто у всіх випадках, коли сила та вісь лежать в одній площині.

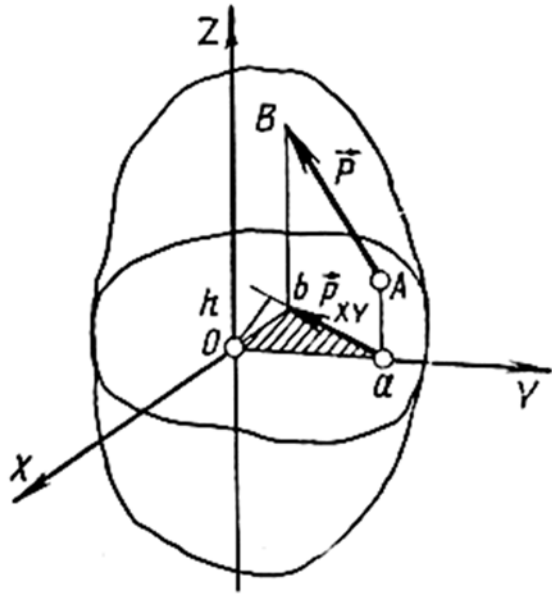

Рисунок 3.4

3.4 Залежність між моментами сили відносно центру та осі

До тіла у точці А прикладена сила $\vec{P}$ (рис. 3.5). Проведемо через тіло вісь і знайдемо момент сили відносно довільного центру *O* на цій осі.

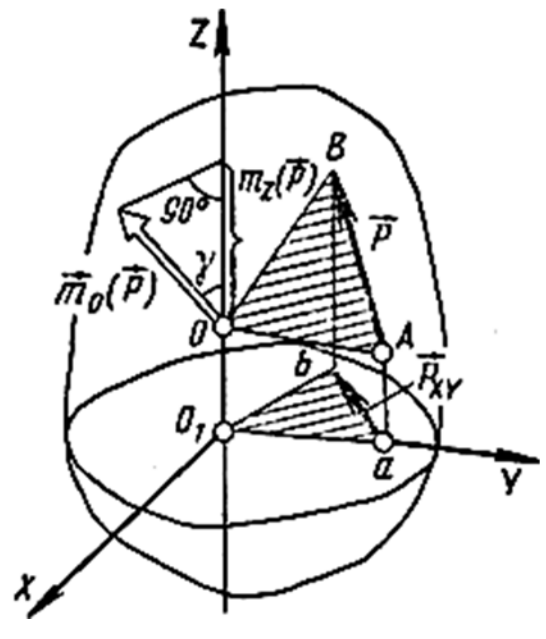

Рисунок 3.5

Цей момент зображується вектором $\vec{m}_0(\vec{P})$, перпендикулярним до площини трикутника АОВ з модулем, рівним подвоєній площі цього трикутника:

$$\left|\vec{m}_O(\vec{P})\right| = 2S\Delta AOB$$

Момент сили $\vec{P}$ щодо осі OZ визначається за допомогою виразу (3.2)

$$m_z(\vec{P}) = 2S\Delta aO_1b$$

Трикутник $\alpha O_1 b$ є проекцією трикутника AOB на площину, перпендикулярну осі OZ, причому

$$S\Delta aO_1b = S\Delta AOB \cos\gamma \quad (3.3)$$

де у - кут між перпендикулярами до площини обох трикутників.

Помножимо обидві частини рівності (3.3) на два і в результаті отримаємо

$$m_z(\vec{P}) = m_O(\vec{P}) \cos\gamma \quad (3.4)$$

де $\vec{\mathrm{m}}_{\mathrm{z}}(\vec{P})$ - проекція вектору$\vec{\mathrm{m}}_0(\vec{P})$ на вісь OZ. Очевидно, що зміна положення центру O на осі одночасно призводить до зміни модуля $|\vec{\mathrm{m}}_0(\vec{P})|$ і кута γ, проте вираз (3.4) у всіх випадках залишається справедливим.

Таким чином, момент сили щодо осі дорівнює проекції на цю вісь вектору моменту сили відносно будь-якого центру на осі.

3.5 Пара сил. Момент пари сил

Парою сил називають систему двох рівних за модулем, паралельних і спрямованих у протилежні сторони сил (рис. 3.6).

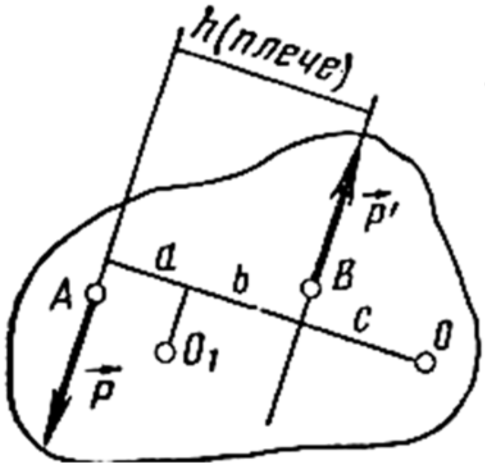

Рисунок 3.6

Сили, що становлять пару, не врівноважені, оскільки вони не спрямовані по одній прямій. Пара сил немає рівнодіючої і може бути врівноважена однією силою. Пара сил - якісно нова (порівняно з силою) міра механічної взаємодії тіл.

Очевидно, що пара сил (або просто пара), прикладена до тіла, створює обертальний ефект, який буде залежати від моментів сил, що становлять пару.

Знайдемо суму моментів сил пари щодо якогось центру *O*. Враховуючи, що P'=P отримуємо

$$m_O(\vec{P}) = m_O(\overrightarrow{P'}) = P(h + c) - P'c = Ph$$

Взявши інший центр моментів O_1, отримаємо

$$m_{O_1}(\vec{P}) + m_{O_1}(\overrightarrow{P'}) = Pa + Pb = Ph$$

Таким чином, сума моментів сил P і $\vec{P}'$ не залежить від положення центру моментів, отже, момент пари не пов'язаний з певною точкою площини.

Момент пари дорівнює добутку однієї із сил пари на її плече, що дорівнює відстані між лініями дії сил. Позначаючи момент пари сил $M(\vec{P}, \vec{P}')$ або просто *M*, отримуємо

$$M(\vec{P}, \overrightarrow{P'}) = M = Ph$$

Позитивним (для плоскої системи сил) вважають момент пари, яка прагне обертати тіло проти перебігу годинникової стрілки. Пара протилежного спрямування має негативний момент. Момент пари вимірюється у тих самих одиницях, як і момент сили.

3.6 Момент пари сил як вектор

Пара сил на площині може мати лише два напрямки, що відповідають двом знакам моменту пари. При просторовому розташуванні сил площина дії пари може займати будь-яке положення, і напрямок моменту пари сил не можна визначити за допомогою одного з двох знаків. Момент пари сил, розташованої довільним чином у просторі, слід вважати вектором, модуль якого дорівнює добутку однієї з сил пари на її плече. Вектор моменту пари сил будемо спрямовувати перпендикулярно площині дії пари сил у бік, звідки пару видно обертаючою тіло проти годинникової стрілки (рис. 3.7, а).

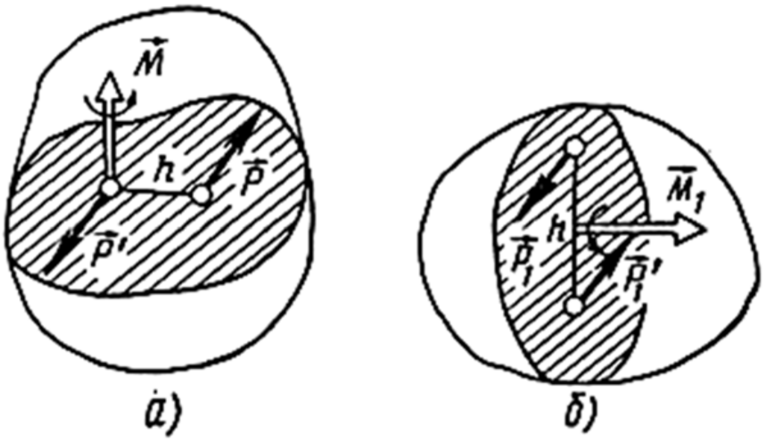

Рисунок 3.7

Вектор моменту повністю визначає пару сил, показуючи площину дії пари, напрямок обертального ефекту та чисельне значення моменту. Так як момент пари сил не пов'язаний з певною точкою площини, то вектор моменту пари можна прикласти в будь-якій точці площини, наприклад, на середині плеча (рис. 3.7, б). Доведемо, що момент пари незмінний для будь-якої точки простору. Знайдемо суму моментів сил пари щодо довільної точки тіла (рис. 3.8), використовуючи вираз (3.1):

$$\vec{m}_O\left(\overrightarrow{P'}\right) + \vec{m}_O\left(\vec{P}\right) = \left(\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{P'}\right) + \left(\overrightarrow{r_B} \times \vec{P}\right)$$

але

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \;\text{ і }\; \overrightarrow{P'} = -\vec{P}$$

тоді

$$\vec{m}_O\left(\overrightarrow{P'}\right) + m_O\left(\vec{P}\right) = -\left(\vec{r}_A \times \vec{P}\right) + \left(\vec{r}_A \times \vec{P}\right) + \left(\vec{r}_{AB} \times P\right)$$

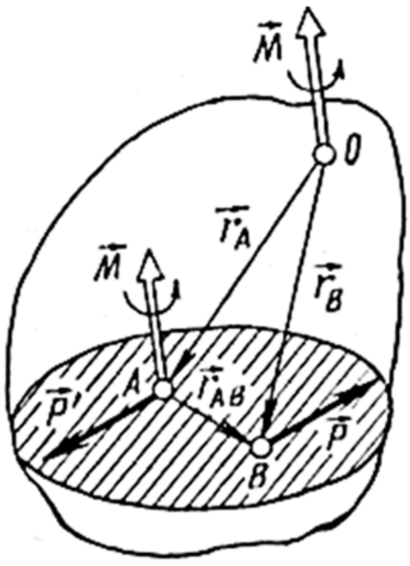

Рисунок 3.8

Векторний добуток $\overrightarrow{r_{AB}} \times \vec{P}$ дорівнює моменту сили $\vec{P}$ відносно точки А, тобто моменту пари. Таким чином, сума моментів сил пари відносно будь-якої точки простору дорівнює моменту самої пари

$$\vec{m}_O(\overrightarrow{P'}) + m_O(\vec{P}) = \vec{M}(\vec{P}, \overrightarrow{P'})$$

Отже, вектор моменту пари - вільний вектор, його можна прикладати в будь-якій точці тіла, а це означає, що дія пари сил на тіло не зміниться при перенесенні її з однієї площини в будь-яку іншу паралельну площину.

3.7 Додавання пар сил. Рівновага тіла під дією системи пар сил

На тіло діють кілька пар сил із моментами $\overrightarrow{M_1}$, $\overrightarrow{M_2}$,…, $\overrightarrow{M_n}$ (рис. 3.9).

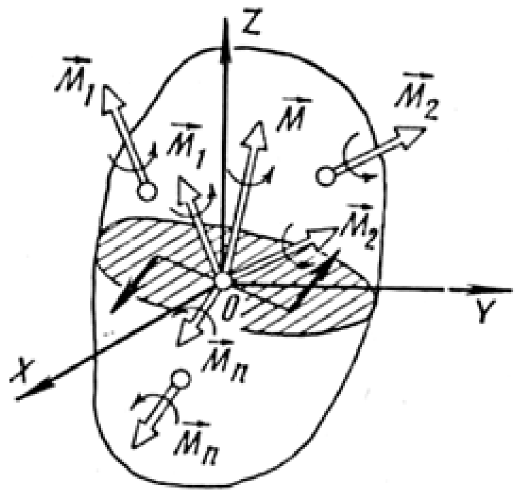

Рисунок 3.9

Перенесемо вектори моментів пар у довільну точку O і складемо їх, в результаті чого отримаємо вектор моменту рівнодіючої пари, рівний сумі моментів складаємих пар :

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \cdots + \overrightarrow{M_n} \text{ або } \vec{M} = \sum \vec{M_i} \quad (3.5)$$

Складати вектори моментів пар можна методом проекцій. Модуль моменту рівнодіючої пари

$$M = \sqrt{(\sum M_{ix})^2 + \left(\sum M_{iy}\right)^2 + (\sum M_{iz})^2} \quad (3.6)$$

де $\sum M_{ix}, \sum M_{iy}, \sum M_{iz}$ - суми проекцій моментів складаємих пар на осі координат.

При рівновазі тіла під дією системи пар момент рівнодіючої пари дорівнює нулю. Тоді з виразу (3.5) отримаємо геометричну умову рівноваги системи пар сил

$$\sum \vec{M_i} = 0$$

З виразу (3.6) при *M=0* отримаємо три рівняння рівноваги системи пар в аналітичній формі

$$\sum M_{ix} = 0; \sum M_{ij} = 0; \sum M_{iz} = 0$$

4. СИСТЕМА ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ СИЛ

4.1 Теорема про паралельний перенос сили

Силу, прикладену до твердого тіла, можна на підставі слідства з аксіоми 2 статики перенести в іншу точку тіла, що лежить на лінії дії сили. Існує також прийом, що дозволяє перенести силу у будь-яку точку. Доведемо теорему про паралельне перенесення сили: силу, прикладену до твердого тіла, можна без зміни її дії перенести паралельно початковому напрямку в будь-яку точку тіла, приєднавши при цьому пару з моментом, рівним моменту сили, що переноситься відносно точки, в яку вона переноситься.

Нехай до тіла у точці А прикладена сила $\vec{\mathrm{P}}$ (рис. 4.1).

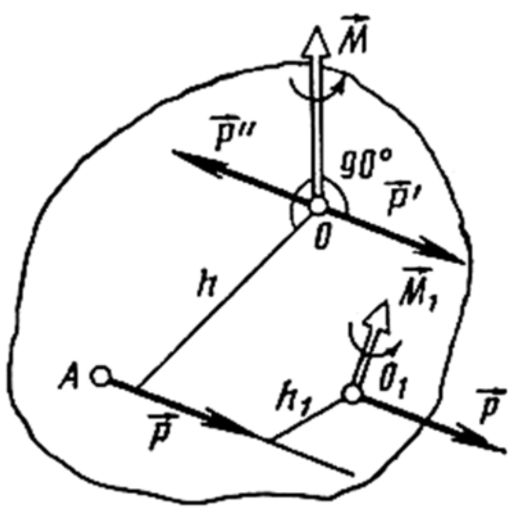

Рисунок 4.1

У довільній точці O (центр приведення) докладемо врівноважені сили $\vec{P}'$ і $\vec{P}''$, взявши $\vec{P}' = \vec{P} = -\vec{P}''$. Тепер до тіла прикладені сила $\vec{P}' = \vec{P}$ у точці O і пара сил $\vec{P}$, $\vec{P}''$ з моментом $\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{m}}_0(\vec{\mathrm{P}})$. Таким чином, теорема доведена. Пару сил $\vec{P}$, $\vec{P}''$ називають приєднаною; її момент дорівнює моменту сили, що переноситься відносно центру приведення і, отже, залежить від положення цього центру. Так, при переносі сили $\vec{P}$ з точки А до центру приведення O модуль моменту приєднаної пари

$$M = Ph$$

А при переносі в центр O_1

$$M_1 = m_{O_1}(\vec{P}) = Ph_1$$

Якщо центр O_1 не лежить в одній площині з центром O і силою $\vec{P}$, то зміниться не тільки модуль, а й напрямок моменту вектору приєднаної пари.

4.2 Приведення системи довільно розміщених сил до даного центру

Систему сил, прикладених до тіла (рис. 4.2 а), можна спростити, використовуючи теорему про паралельне перенесення сили. Переносячи сили з точок А, A_2, . . ., A_n в довільно обраний центр приведення O, отримаємо в цій точці n сил що сходяться і n моментів приєднаних пар. Сили що сходяться складемо, замінивши їх однією силою $\vec{R}_0$, яка називається головним вектором системи сил:

$$\vec{R}_O = \overrightarrow{P_1{}'} + \overrightarrow{P_2{}'} + \cdots + \overrightarrow{P_n{}'} = \sum \vec{P}_i$$

Також додамо приєднані пари і отримаємо одну пару, момент якої називають головним моментом системи сил. Він дорівнює сумі моментів приєднаних пар або сумі моментів сил системи відносно центра приведення

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \sum \vec{m}_O(\vec{P_i}) \quad (4.1)$$

Таким чином, будь-яка система сил, прикладених до тіла, може бути змінена головним вектором системи $\vec{R}_0$, прикладеним у довільному центрі приведення O, і головним моментом $\vec{M}_0$ (рис. 4.2, б).

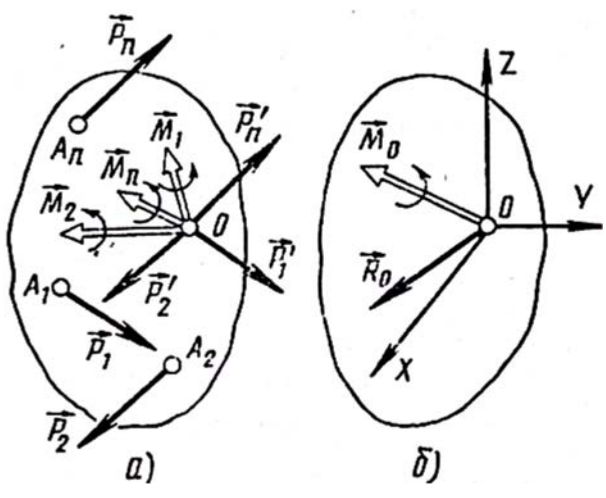

Рисунок 4.2

Головний вектор є геометричною сумою сил і не залежить від положення центру приведення. Головний момент змінюється при перенесенні центру приведення внаслідок зміни моментів складаємих сил. Головний вектор не являється рівнодіючою системи сил, оскільки замінює її, лише діючи разом із головним моментом.

Головний вектор та головний момент системи можна знайти методом проекцій. Зокрема, модулі векторів $\vec{\mathrm{R}}_0$ і $\vec{M}_0$:

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2}\ , M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} \qquad (4.2)$$

де проекції головного вектору на осі R_{Ox}, R_{Oy}, R_{Oz} дорівнюють сумам проекцій на ці осі сил системи:

$$R_{Ox} = \sum P_{ix}, R_{Oy} = \sum P_{iy}, R_{Oz} = \sum P_{iz} \qquad (4.3)$$

Проекції головного моменту на осі дорівнюють сумам проекцій на ті ж осі моментів сил щодо центру *O*. Наприклад, для осі OX маємо

$$M_{Ox} = \left[\vec{m}_O\left(\overrightarrow{P_1}\right)\right]_x + \left[\vec{m}_O(\vec{P}_2)\right]_x + \cdots + \left[\vec{m}_0(\vec{P}_n)\right]_x$$

Але проекція на вісь вектору моменту сили щодо точки на осі дорівнює моменту сили відносно цієї ж осі. Отже, проекції головного моменту на осі дорівнюють сумам моментів сил системи відносно осей, що проходять через центр приведення:

$$M_{Ox} = \sum m_x\left(\vec{P}_i\right), M_{Oy} = \sum m_y\left(\vec{P}_i\right), M_{Oz} = \sum m_z\left(\vec{P}_i\right) \quad (4.4)$$

4.3 Умови рівноваги довільної системи сил

При рівновазі системи сил її головний вектор і головний момент дорівнюють нулю:

$$\vec{R}_O = 0, \vec{M}_O = 0$$

Тоді з виразів (4.2), (4.3) та (4.4) випливає, що

$$R_{Ox}=0, R_{Oy}=0, R_{Oz}=0 \quad \text{і} \quad M_{Ox}=0,\ M_{Oy}=0,\ M_{Oz}=0$$

або

$$\sum P_{ix}=0, \sum P_{iy}=0, \sum P_{iz}=0 \qquad (4.5)$$

$$\sum m_x(\vec{P}_i)=0, \sum m_y(\vec{P}_i)=0, \sum m_z(\vec{P}_i)=0$$

Отже, при рівновазі тіла під дією довільної системи сил суми їх проекцій на три осі координат та суми моментів сил відносно цих осей дорівнюють нулю. Рівняння (4.5) називають рівняннями рівноваги довільної системи сил.

Паралельні сили. При розташуванні однієї з осей, наприклад OZ, паралельно силам (рис. 4.3, а), видно, що три рівняння із системи рівнянь (4.5) звертаються до тотожності виду 0=0,оскільки проекції сил на осі OX та OY та їх моменти відносно осі OZ дорівнюють нулю.

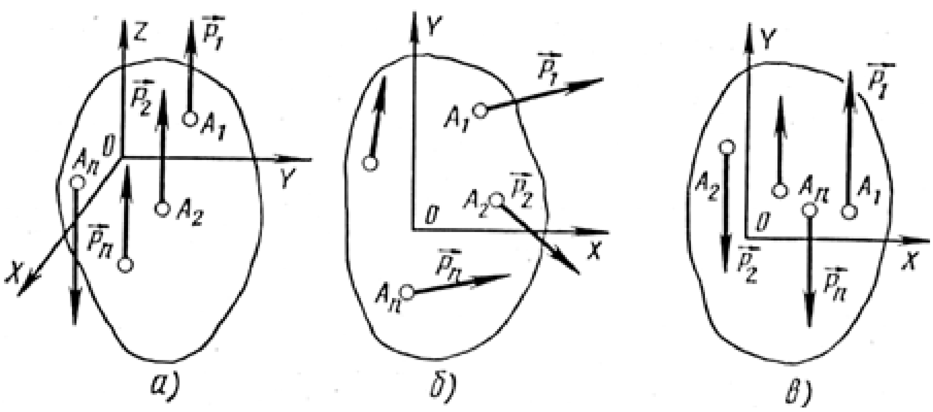

Рисунок 4.3

Три рівняння, що залишилися, є рівняннями рівноваги паралельних сил у просторі

$$\sum P_{iz}=0, \sum m_x(\vec{P}_i)=0, \sum m_y(\vec{P}_i)=0$$

Сили довільно розташовані на площині. Якщо сили діють в одній площині, наприклад, у площині XOY (рис. 4.3, б), то суми проекцій їх на вісь OZ та моментів щодо осей OX та OY дорівнюють нулю. Тоді, враховуючи, що для плоскої системи моменти сил щодо осі OZ дорівнюють їх моментам щодо центру *O*, отримуємо

$$\sum P_{ix} = 0, \sum P_{iy} = 0, \sum m_O(\vec{P}_i) = 0 \qquad (4.6)$$

При рівновазі тіла під дією плоскої системи сил суми їх проекцій на дві осі координат і сума моментів відносно довільного центру, що лежить у площині сил, дорівнює нулю.

Паралельні сили на площині. Розташуємо вісь OY паралельно до сил (рис. 4.3, в). Тоді проекції сил на вісь OX дорівнюють нулю, друге і третє рівняння системи (4.6) визначають умови рівноваги плоскої системи паралельних сил.

4.4 Теорема про момент рівнодійної

Нехай на тіло діє довільна система сил, рівнодіюча котрої $\vec{R}$ (рис. 4.4). Доведемо теорему про момент рівнодіючої (теорему Варіньйона): момент рівнодіючої довільної системи сил відносно будь-якої осі дорівнює сумі моментів складових сил відносно тієї ж осі.

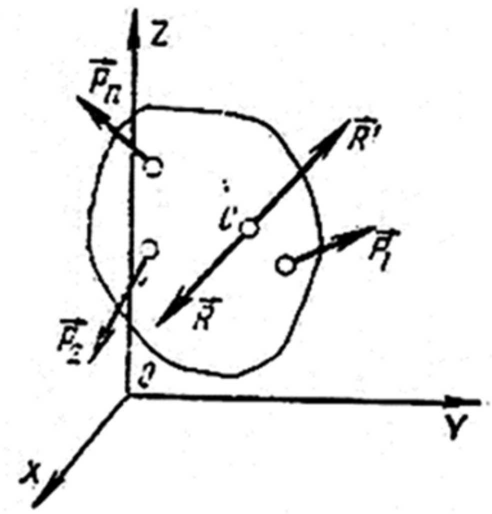

Рисунок 4.4

Врівноважимо тіло, доклавши до нього силу $\vec{R}' = -\vec{R}$. Тепер відповідно до умов рівноваги (4.5) сума моментів сил $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \dots, \vec{P_n}$ і сили $\vec{R}'$ відносно будь-якої осі (наприклад, OY) дорівнює нулю, тобто

$$\sum m_y(\vec{P}_i) + m_y(\vec{R'}) = 0$$

Враховуючи, що сили $\vec{R}'$ і $\vec{R}$ рівні за модулем і спрямовані по одній прямій у протилежні сторони і що, відповідно

$$\mathrm{m_y}(\vec{\mathrm{R}}') = -\mathrm{m_y}(\vec{\mathrm{R}}),$$

можна записати

$$\sum m_y(\vec{P}_i) - m_y(\vec{R}) = 0$$

звідки отримаємо

$$m_y(\vec{R}) = \sum m_y(\vec{P}_i)$$

5. ТЕРТЯ

5.1 Тертя ковзання

Тертям ковзання називається опір, що перешкоджає ковзанню тіл при їх відносному спокої, а також опір, що виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого. Тертя є складним фізико-механічним явищем. Воно виникає внаслідок шорсткості поверхонь та дії молекулярного зчеплення між частинками притиснутих один до одного тіл. Тертя залежить від матеріалу тіл тертя, температури, наявності між тілами мастила, швидкості ковзання та інших факторів, врахування яких ускладнене.

Розглянемо найпростіший випадок - тертя між негладкою горизонтальною поверхнею і важким негладким тілом, що лежить на ній. На тіло діють врівноважені сили: вага $\vec{G}$ та нормальна реакція поверхні $\overrightarrow{R_n}$ (рис. 5.1 а). Прагнемо зрушити тіло, доклавши силу $\vec{P}$ і поступово її збільшуючи (рис. 5.1, б). Поки зсувна сила невелика тіло зберігає стан спокою тому що зі сторони шорсткої поверхні до тіла будуть прикладені сили опору. Назвемо рівнодіючу силу опору силою тертя $\vec{R}_f$. Зі збільшенням рушійної сили збільшується і сила тертя, і поки тіло перебуває у стані спокою з умови його рівноваги слідує $\vec{R}_f = -\vec{P}$, що (перша ділянка графіка залежності між модулями сил $\vec{P}$ і $\vec{R}_f$ на рис. 5.1, в).

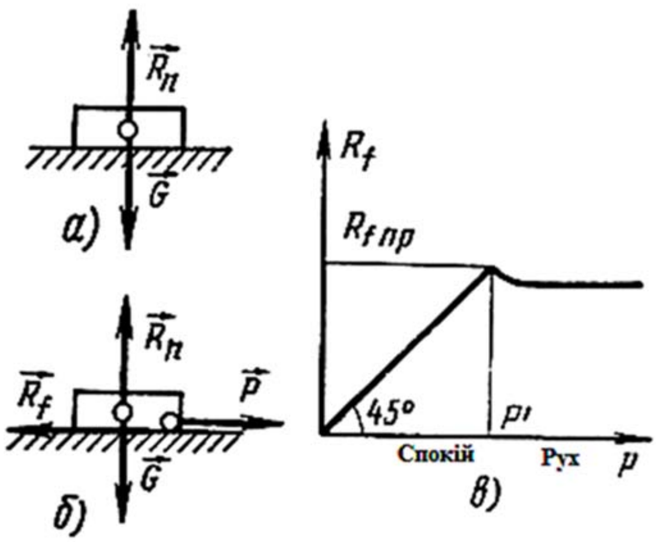

Рисунок 5.1

В останню мить спокою при якійсь силі, що зрушує $\vec{P}'$, сила тертя досягає свого найбільшого значення $\vec{R}_f$ гр, яке називається граничною силою тертя. Подальше збільшення сили, що зсуває, призводить до порушення рівноваги і прискореного руху, при якому сила тертя зі збільшенням швидкості ковзання зазвичай зменшується (друга ділянка графіка на рис. 5.1, в).

При спокої сила тертя може змінюватися від нуля до $\vec{R}_f$ гр, при русі сила тертя $\vec{R}_f$ дв зазвичай менша за граничну. Це зменшення сили тертя у русі однаково не для всіх матеріалів. У наближених розрахунках приймають $\vec{R}_f$ дв $=$ $\vec{R}_f$ гр.

Сила тертя збільшується пропорційно тиску тіл один на одного, але не залежить від зміни площі дотику тіл (останнє справедливо доти, поки зміна площі торкання не викличе такої зміни питомого тиску, при якому прийде деформація самих поверхонь тіл, наприклад, згладжування нерівностей, врізання одного тіла в інше та ін.).

Проведені експерименти дозволили сформулювати закони тертя ковзання.

1. Сила тертя ковзання діє в загальній дотичній площині до поверхонь дотичних тіл і має напрямок, протилежний тому, в якому діючі сили прагнуть перемістити або переміщають тіло.

2. Гранична сила тертя пропорційна нормальному тиску тіл одне на одного (нормальної реакції)

$$R_{f\text{пр}} = f_0 R_{n^*}$$

3. Сила тертя залежить від площі дотику тіл.

Безрозмірний коефіцієнт f_0 називається коефіцієнтом тертя ковзання спокою. Він залежить від матеріалу, стану поверхонь тіл, температури, вологості і визначається дослідним шляхом. Нижче (Табл.1) наведено зразкові значення коефіцієнтів тертя ковзання для деяких матеріалів (при сухих поверхнях).

Таблиця 1

Сталь по сталі	0,15
Дерево по дереву	0,4-0,5
Резина по бетону	0,6-0,8

5.2 Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, що виникає при коченні одного тіла поверхнею іншого. Цей опір пояснюють деформацією тіл у зоні їх контакту, значення якого залежить від матеріалу тіл і сил, що діють на них.

Наприклад, при коченні твердої загартованої кульки по такому ж твердому кільцю шарикопідшипника пружні деформації малі і, отже, малий опір коченню. При коченні колеса шасі літака по поверхні бетонної злітно-посадкової смуги опір коченню менше, ніж при коченні по ґрунтовій злітно-посадковій смузі, так як у першому випадку деформується в основному пневматична шина колеса (рис. 5.2, а), а в другому випадку деформується не тільки шина, але і ґрунт (рис. 5.2, б).

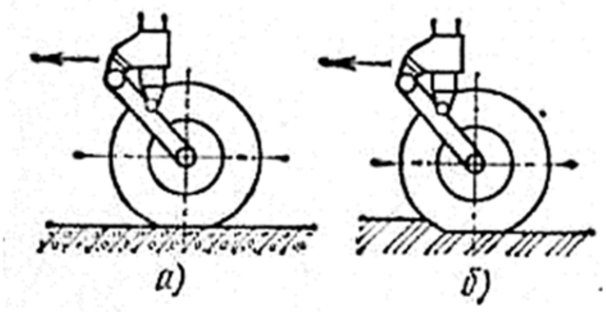

Рисунок 5.2

Розглянемо рух колеса шасі по твердій шорсткій поверхні злітно-посадкової смуги у двох випадках: при вільному коченні та кочення із застосуванням гальмування, приймаючи рух колеса рівномірним.

Вільне кочення колеса з постійною швидкістю (рис. 5.3 а). До колеса прикладені наступні сили: з боку стійки опори вертикальна сила $\vec{P}$ (частка рівнодіючої ваги літака і підйомної сили, що припадає на одне колесо), горизонтальна сила $\vec{T}$, яка переміщує колесо, і зі сторони злітно-посадкової смуги нерівномірно розподілена по поверхні контакту реакції, результуюча, якій рівна $\vec{R}$.

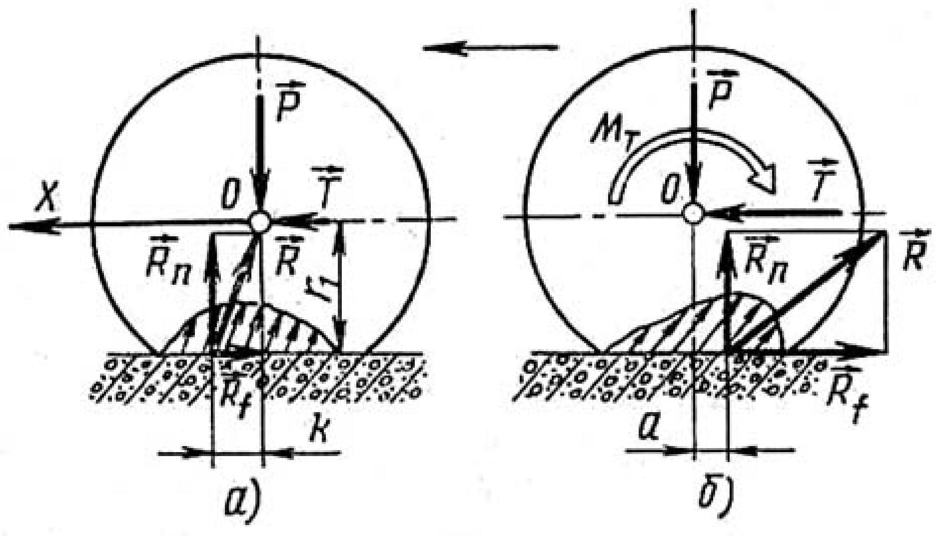

Рисунок 5.3

Так як колесо, рухаючись рівномірно, знаходиться в рівновазі, то реакція $\vec{R}$, що врівноважує $\vec{P}$ і $\vec{T}$, спрямована до точки O (відповідно до теореми про три сили). Розкладемо силу $\vec{R}$ на реакції: нормальну до поверхні злітно-посадочної смуги $\vec{R}_n$ і дотичну силу тертя $\vec{R}_f$. Через деформацію пневматика нормальна реакція $\vec{R}_n$ виявилася зміщеною вперед на величину k. Це зміщення реакції і визначає опір коченню колеса. Справді, склавши рівняння рівноваги сил

$$\sum P_{ix} = T - R_f = 0, \qquad \sum P_{iy} = R_n - P = 0$$

$$\sum m_O(\vec{P}_i) = R_f r_1 - R_n k = 0$$

Отримаємо

$$T = R_f, R_n k = R_f r_1$$

або

$$T r_1 = R_n k \quad (5.1)$$

де r_1- радіус деформованого пневматика.

У рівнянні (5.1) Tr_1 - момент сили, що котить колесо, а $R_n k$ - момент сил опору коченню (момент тертя кочення). Величина k, що вимірюється в одиницях довжини, називається коефіцієнтом тертя кочення. Він залежить від деформації колеса та поверхні кочення, отже, від тиску в пневматиці та стану злітно-посадкової смуги.

Кочення загальмованого колеса. В цьому випадку на колесо крім сил $\vec{\mathrm{P}}$, $\vec{\mathrm{T}}$, $\vec{\mathrm{R}}_\mathrm{n}$ і $\vec{\mathrm{R}}_\mathrm{f}$ діє гальмівний момент $\mathrm{M_T}$, спрямований у бік, протилежну до обертання колеса (рис. 5.3, б). Крім того, відбувається перерозподіл сил взаємодії шини і поверхні злітно-посадкової смуги, в результаті якого точка застосування результуючої $\vec{\mathrm{R}}$ зміщується назад від осі колеса (п'ятковий ефект).

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum m_O\left(\vec{P_i}\right) = -M_\text{т} + R_n a + R_f r_1 = 0$$

звідки

$$M_\text{т} + R_f r_1 + R_n a$$

З цього виразу випливає, що зі збільшенням гальмівного моменту збільшуватиметься і сила тертя між шиною і поверхнею злітно-посадкової смуги, поки не досягне свого граничного значення, яке називається силою зчеплення:

$$R_\text{зч} = f_\text{зч} R_n \quad (5.2)$$

де $f_\text{зч}$ – коефіцієнт зчеплення.

При подальшому збільшенні гальмівного моменту колесо котитиметься з прослизанням і, нарешті, перестане обертатися, почне ковзати, гума горітиме, буде плавиться і сила зчеплення різко зменшиться.

Для ефективного гальмування необхідно забезпечити такий гальмівний момент, при якому сила зчеплення була б трохи менше свого граничного значення. Отже, має бути виконана умова

$$M_\text{т} \le R_\text{сц} r_1 + R_n a$$

або з урахуванням виразу (5.2)

$$M_{т} \leq R_{n(}f_{сц}r_1 + a) \quad (5.3)$$

Хоча вираз (5.3) отримано у припущенні рівномірного кочення колеса, його з невеликою похибкою можна застосувати для уповільненого руху колеса.

Величини r_1, α в формулі (5.3) залежать від розміру пневматика і тиску в ньому і мало змінюються.

6. ЦЕНТР ВАГИ. ЦЕНТР МАС

6.1 Центр паралельних сил

Нехай до тіла прикладені паралельні сили $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ (рис. 6.1). Ці сили можна послідовно складати. Наприклад, склавши сили $\vec{P}_1$і $\vec{P}_2$, отримаємо рівнодіючу $\vec{R}_1 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$, прикладену до деякої точки C_1. Потім, склавши сили $\vec{R}_1$ і $\vec{P}_3$, отримаємо рівнодіючу $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{P}_3$ у точці C_2 і так далі.

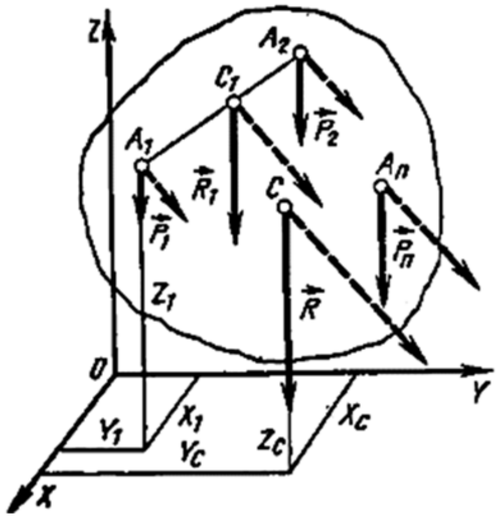

Рисунок 6.1

Рівнодіюча всієї системи, що дорівнює сумі всіх сил

$$\vec{R} = \sum \vec{P_i}$$

буде прикладена до деякої точки C.

Повернемо всі сили біля точок прикладання на однаковий кут в один і той самий бік. Модулі сил $\vec{R}_2, \vec{R}_1$ ... і точки їх прикладання C_1, C_2, ... не зміняться. Не зміниться і модуль рівнодіюючої системи $\vec{R}$, яка знову проходитиме через точку C - центр паралельних сил.

Центром паралельних сил називається точка, через яку проходить лінія дії рівнодіючої системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо їх точок докладання в один бік і на той самий кут.

Знайдемо координати точки C за теоремою Варіньона. Нехай сили розташовані паралельно до осі OZ. Координати точок прикладання сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ і $\vec{R}$ рівні відповідно (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) , (x_n, y_n, z_n) і (x_c, y_c, z_c) . Момент рівнодіючої $\vec{R}$ щодо осі OY дорівнює R_{x_c}, моменти сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ відносно тієї ж осі дорівнюють $P_1x_1, P_2x_2, \dots, Px_n$. Враховуючи, що момент рівнодіючої дорівнює сумі моментів складових сил, отримуємо

$$Rx_C = P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n$$

або

$$Rx_C = \sum R_i x_i \quad (6.1)$$

Візьмемо моменти сил відносно осі OX і ще раз відносно осі OY (повернувши попередньо сили на 90° і розташувавши їх паралельно до осі OX), в результаті отримаємо

$$Ry_C = \sum P_i y_i \quad \text{і} \quad Rz_C = \sum P_i z_i \qquad (6.2)$$

З виразів (6.1) та (6.2) можна знайти координати точки *C* центру паралельних сил

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{R}; y_C = \frac{\sum P_i y_i}{R}; z_C = \frac{\sum P_i z_i}{R} \quad (6.3)$$

6.2 Центр тяжіння тіла. Центр мас тіла

Сили тяжкості $\vec{G}_1$,$\vec{G}_2$, ..., $\vec{G}_n$ окремих частинок тіла (рис.6.2) являються силами що сходяться, оскільки лінії дії сил тяжіння перетинаються в центрі Землі.

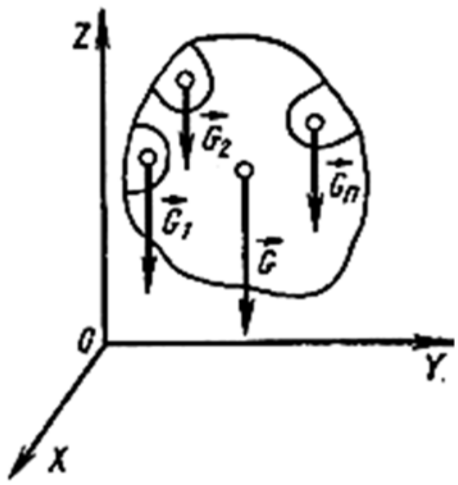

Рисунок 6.2

Однак розміри тіл, які застосовуються на практиці, невеликі в порівнянні з радіусом земної кулі. Тому сили тяжкості частинок тіла можна вважати паралельними, і для знаходження координат центру тяжкості тіла (точки прикладання сили тяжіння $\vec{G}$) слід використовувати формули (6.3). Тоді, позначивши сили тяжкості окремих частинок тіла $\vec{G}_i$;, які координати x_i, y_i, z_i, отримаємо вирази для визначення координат центру тяжкості тіла

$$x_C = \sum G_i x_i / G, y_C = \sum G_i y_i / G, z_C = \sum G_i z_i / G$$

Природно, що поняття центру тяжкості тіла втрачає сенс для тіл, що знаходяться поза земного тяжіння, наприклад, для космічних об'єктів.

Більше загальною характеристикою розподілу речовини тіла або групи тіл є центр мас, координати якого визначаються за допомогою виразів

$$x_C = \sum m_i x_i / m, y_C = \sum m_i y_i / m, z_C = \sum m_i z_i / m \text{ (6.4)}$$

де m_i-маси окремих частинок тіла; x_i, y_i, z_i - їх координати; m - маса всього тіла.

У земних умовах центр тяжкості тіла та центр його мас практично збігаються. Справді, з курсу фізики відомо, що сила тяжкості тіла дорівнює $G = mg$, де g-прискорення вільного падіння у даній точці Землі чи навколоземного простору. Тоді координата центру тяжкості тіла

$$x_C = \sum G_i x_i / (m\mathrm{g}) = \sum m_i \mathrm{g} x_i / (m\mathrm{g})$$

Якщо значення g для всіх точок тіла рівні, то

$$x_C = \sum m_i x_i / m$$

У міжнародній системі одиниць як основна характеристика тіла прийнята його маса, тому надалі використовуватимемо лише поняття центру мас (ЦМ) тіла.

6.3 Центр мас об'єму, площі та лінії

Центр мас об'єму. Маса частинки однорідного тіла $m_i = \nu_i\rho$, а маса всього тіла $m = V\rho$, де ν_i та V - об'єми частинки та всього тіла; ρ - щільність речовини тіла.

Підставимо значення m_i, і m у формули (6.4), винесемо величину ρ за знак суми і скоротимо. В результаті отримаємо вирази для координат центру мас однорідного тіла

$$x_C = \sum v_i x_i / V, y_C = \sum v_i y_i / V, z_C = \sum v_i z_i / V \quad (6.5)$$

Як видно з формул (6.5), положення центру мас однорідного тіла не залежить від густини речовини тіла і, отже, від маси самого тіла. У тіл з однаковою формою та розмірами центри мас розташовані однаково незалежно від матеріалу тіл. Тому центр мас однорідного тіла називається центром мас об'єму.

Центр мас площі. Статичні моменти. Положення центру мас однорідної пластини не залежить від матеріалу пластини та її товщини (мається на увазі постійна товщина), а залежить тільки від форми пластини. Для пластини вводиться поняття про центру мас плоскої фігури (ЦМ площі). Його координати (достатньо двох координат) обчислюють за формулами

$$x_C = \sum F_i x_i / F, y_C = \sum F_i y_i / F \qquad (6.6)$$

де F_i - Площі частин фігури; x_i, y_t - їх координати; F-площа всієї фігури.

Суми добутку площ окремих частин фігури на їх відстані до осей (рис. 6.3) називаються статичними моментами плоскої фігури (площі) щодо їх осей

$$S_x = \sum F_i y_i, S_y = \sum F_i x_i \qquad (6.7)$$

Статичні моменти, що вимірюються зазвичай у см^3 або мм^3, можуть бути позитивними, негативними або рівними нулю, якщо вісь проходить через центр мас плоскої фігури (рис. 6.3, б).

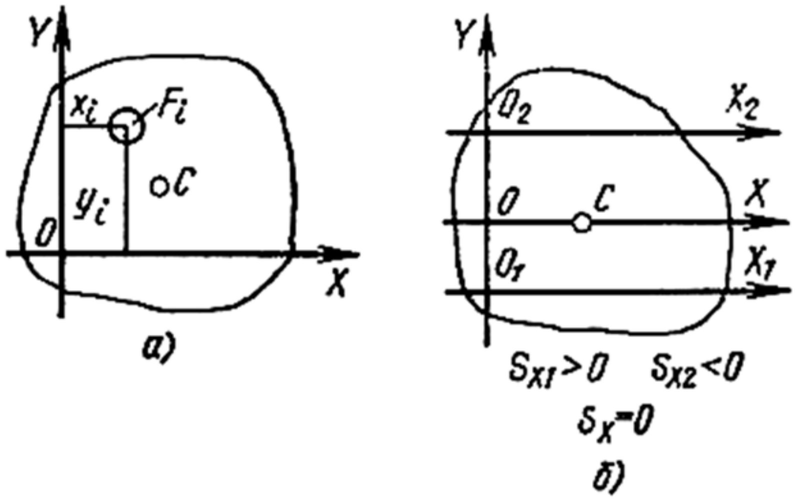

Рисунок 6.3

Координати центру мас плоскої фігури можна виразити через її статичні моменти за формулами (6.6) та (6.7)

$$x_C = S_y/F, y_C = S_x/F$$

звідки, з огляду на те, що щодо осі ОХ $y_c = 0$, отримуємо $s_x = 0$.

Центр мас лінії. Центр мас однорідного дроту (стрижня, труби) постійного діаметра називається центр мас лінії та обчислюється за формулами

$$x_C = \sum l_i x_i/L, y_{C^I} = \sum l_i y_i/L, z_C = \sum l_i z_i/L$$

де L_i - Довжини частинок дроту; x_i, y_i, z_i -їх координати; L - довжина всього дроту (стрижня, труби тощо).

Центр мас тіла - геометрична точка, яка може не збігатися з якоюсь матеріальною точкою тіла і навіть лежати за межами тіла (наприклад, у кільця).

Якщо однорідне тіло має площину, вісь чи центр симетрії, то центр мас тіла лежить у площині, на осі чи центрі симетрії.

6.4 Положення центрів мас площини найпростіших фігур

Паралелограм. Центр мас паралелограма знаходиться у точці перетину його діагоналей (рис. 6.4).

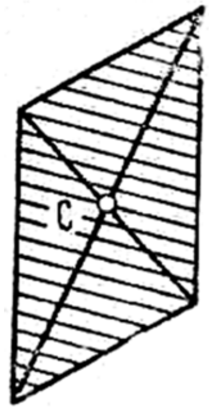

Рисунок 6.4

Трикутник. Розіб'ємо площу трикутника прямими, паралельними його основі, на ряд вузьких смужок (рис. 6.5, а), при цьому центри мас цих смужок лежатимуть на медіані трикутника.

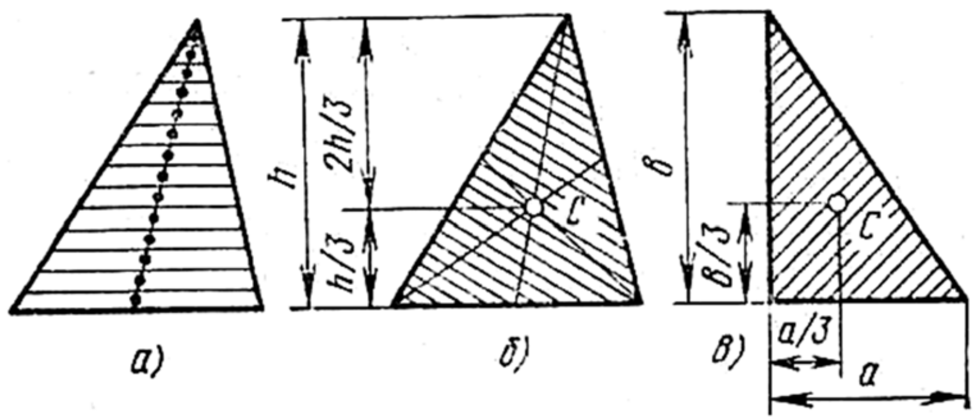

Рисунок 6.5

На ній розташований і центр мас площі всього трикутника. Взявши за основу іншу сторону трикутника і повторивши міркування, знайдемо, що центр мас площі трикутника лежить у точці перетину його медіан.

Так як точка перетину медіан трикутника відстає від його основи на відстані однієї третини довжини медіани, то центр мас площі трикутника відстоїть від основи на відстані однієї третини висоти (рис. 6.5, б).

За допомогою цього правила дуже просто знайти положення центру мас площі прямокутного трикутника (рис. 6.5 в).

Круговий сектор. Центр мас сектора віддалений від центру O дуги сектора (рис. 6.6, а) на відстані

$$a = 2R\, sin\, a \,/\, (3a),$$

де R-радіус сектора; α - половина центрального кута сектора, рад.

В окремому випадку для півкола (рис. 6.6, б) α = 0,5 π.

Тоді

$$a = 2R\, sin\, 0{,}5\pi \,/\, (3 \cdot 0{,}5\pi)$$

або

$$a = 0{,}424R$$

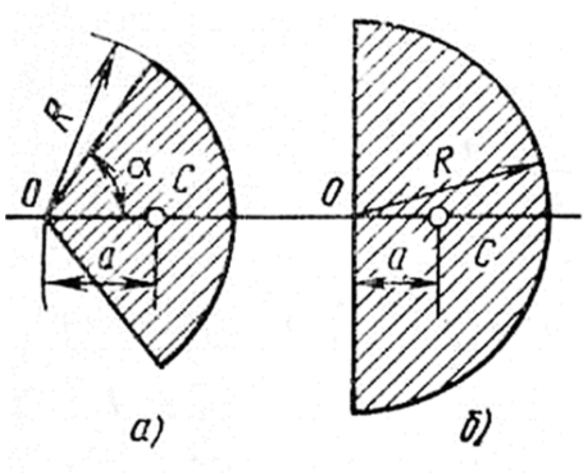

Рисунок 6.6

7. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

7.1 Механічний рух. Система відліку. Час

Кінематика - розділ теоретичної механіки, в якому розглядаються тільки геометричні характеристики руху тіл (траєкторії, швидкості, прискорення) незалежно від маси тіл і сил, що діють на них.

Рухом у механіці називають те, що відбувається з плином часу переміщення тіл у просторі по відношенню до інших тіл, з якими жорстко пов'язують систему координат, звану системою відліку. У навколишньому світі немає абсолютно нерухомих тіл, з якими можна було б пов'язати абсолютно нерухому систему відліку. Тому рух та спокій будь-якого тіла є відносними. Найчастіше тіло, з яким пов'язана система відліку, вважають нерухомим. Наприклад, щодо руху літака аеродромом чи при польотах на невеликі відстані можна Землю вважати нерухомою і зв'язувати з нею систему відліку. При швидкісних польотах великі відстані систему відліку як і раніше пов'язують із Землею, але не вважають її нерухомою, а враховують добовий, а деяких випадках і річний рух. При розрахунках руху космічних кораблів систему відліку пов'язують із Сонцем і так званими нерухомими зірками.

Для вимірювання відстаней у просторі використовують одиницю довжини – метр.

Час у механіці вважають скалярною величиною, що безперервно змінюється, однаковою для всіх систем відліку. За одиницю часу прийнято секунду. Поточний час *t* приймають у кінематиці за незалежну змінну (аргумент). Інші змінні величини (відстань, швидкість, прискорення) виражають як функції часу. Відлік часу ведуть від деякого умовно прийнятого початкового моменту (t_0). Цей момент часу *t* настає після закінчення *t* секунд від початкового моменту. Проміжком часу називається час, що минув між двома послідовними моментами часу. Наприклад, проміжок часу між послідовними моментами t_0 і t_1дорівнює різниці $t_1 - t_0$.

7.2 Задання руху. Тіло і точка

Визначити рух тіла (задати рух) означає дати можливість знайти його положення у просторі у будь-який момент часу. Для задання руху тіла необхідно вказати залежність від часу відстаней (а ряді випадків і кутів), визначаючих положення тіла щодо обраної системи відліку, тобто вказати закон руху тіла. Основне завдання кінематики полягає у визначенні кінематичних характеристик руху тіла за заданим законом руху. Кінематику починають з вивчення руху окремої точки, а потім переходять до розгляду руху тіла, що складається з множини точок. Відмінність між тілом та точкою в механіці досить умовна. У ряді випадків точкою вважають і тіло великих розмірів, коли можна знехтувати різницею в рухах окремих частин тіла. Наприклад, при розрахунках дальності польоту літака його можна вважати точкою, оскільки у цьому разі немає значення різниці у рухах планера літака і деталей двигунів, що обертаються. Але той самий літак не можна вважати точкою при його розворотах на доріжках руління, так як неможливо знехтувати відмінністю в рухах, наприклад, коліс передньої та основних опор шасі.

Для матеріальної точки існує декілька способів задання її руху. Тобто декілька наборів вихідних даних які дозволяють визначити кінематику точки.

Починаючи вивчення кінематики точки, розглянемо способи задання її руху: векторний та природний і координатний спосіб задання руху точки. Встановимо також поняття траєкторії точки. Траєкторією точки називається безперервна лінія, котру вона описує у своєму русі щодо обраної системи відліку. Траєкторія може бути прямою або кривою, виходячи з чого розрізняють прямолінійний і криволінійний рух точки.

7.3 Векторний спосіб задання руху точки

Розглянемо рух точки за довільною траєкторією відносно якого небудь центру о може бути розміщена система координат(декартова).

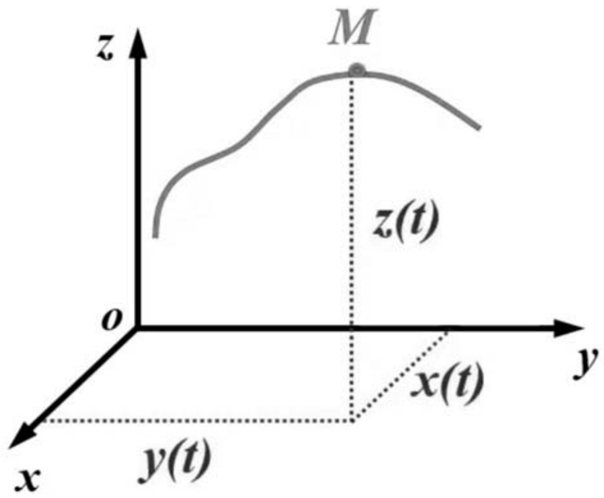

Рисунок 7.1

Положення точки в просторі повністю визначається радіус вектором, який з’єднує вибраний центр (початок координатної системи)з точкою що рухається в кожен момент часу(рис. 7.2).

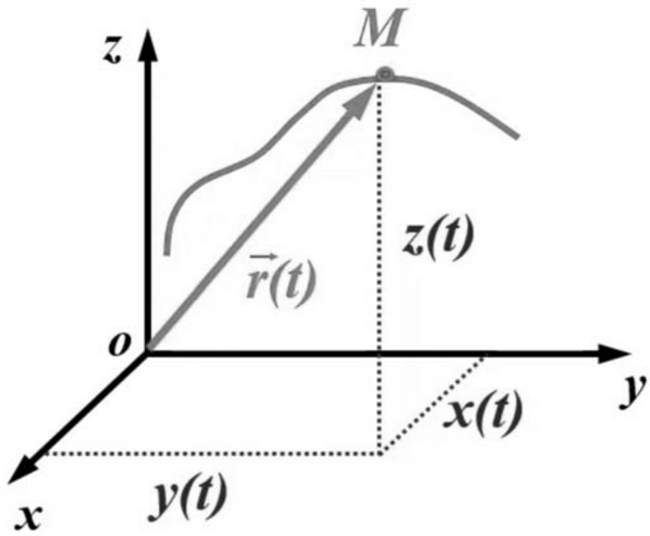

Рисунок 7.2

Задаючи залежність радіуса вектору від часу зможемо в будь який момент визначити розташування точки та розрахувати її кінематичні характеристики. $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Векторний спосіб задання руху точки зв’язаний з координатами.

Зв'язок з координатним способом. Введемо у розгляд орти некортової системи координат - одиничні вектори *i,j,k*.

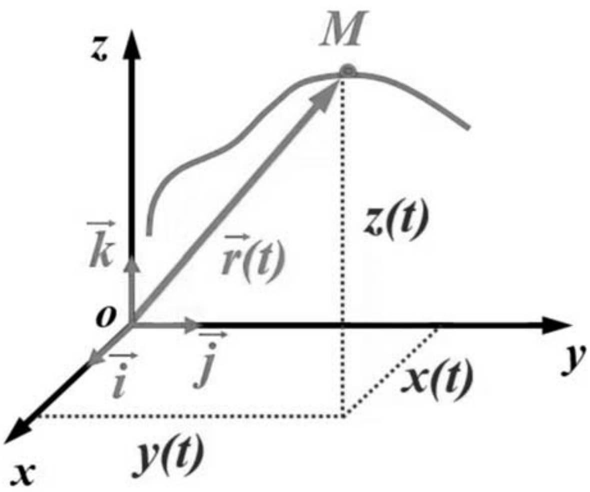

Рисунок 7.3

Тоді згідно правилам векторної алгебри радіус вектор може бути обчислений як сума добутку координат точки що рухається на орти.

Тобто

$$\vec{r} = x(t)\vec{\imath}_{+} \cdot y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \qquad (7.1)$$

7.4 Координатний спосіб задання руху точки

При координатному способі завдання руху точки у вибраній системі координат задаються координати точки, що рухається, як функції від часу.

У прямокутній декартовій системі координат це будуть рівняння:

$$x=x(t);\ y=y(t);\ z=z(t).$$

Ці рівняння є рівняннями траєкторії в параметричній формі. Виключаючи з цих рівнянь параметр t, можна отримати три пари систем двох рівнянь, кожна з яких представляє траєкторію точки, як перетин поверхонь.

Крім декартових можуть бути використані інші системи координат (сферична, циліндрична). Завжди можна перейти від координатного способу задання руху до векторного (рис.7.4):

$$\mathrm{r(t) = i \cdot x(t) + j \cdot y(t) + k \cdot z(t)}$$

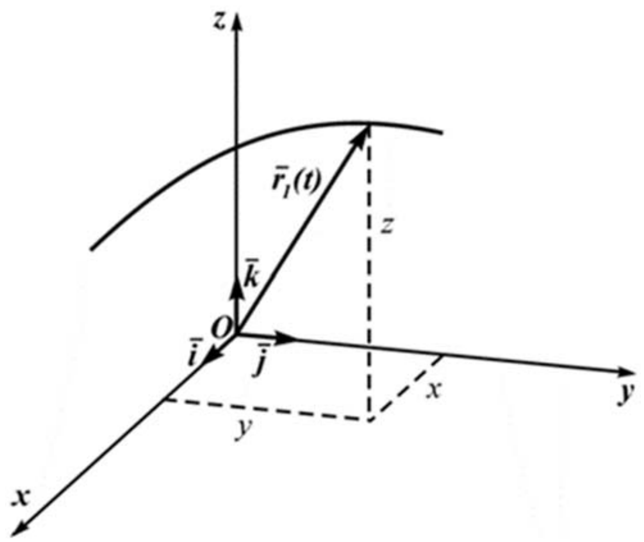

Рисунок 7.4

Тому, використовуючи формули визначення швидкості і прискорення точки при векторному способі завдання руху, можна отримати аналогічні формули для координатного способу:

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \bar{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \bar{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \bar{k}\frac{dz}{dt}$$

7.5 Природний спосіб задання руху точки

У цьому випадку мають бути задані: траєкторія, положення якої щодо обраної системи відліку відоме (рис. 7.5); початок відліку відстаней та напрямок відліку; рівняння руху *s=f(t)*, що зв'язує відстань *s* точки, що рухається від початку відліку з часом.

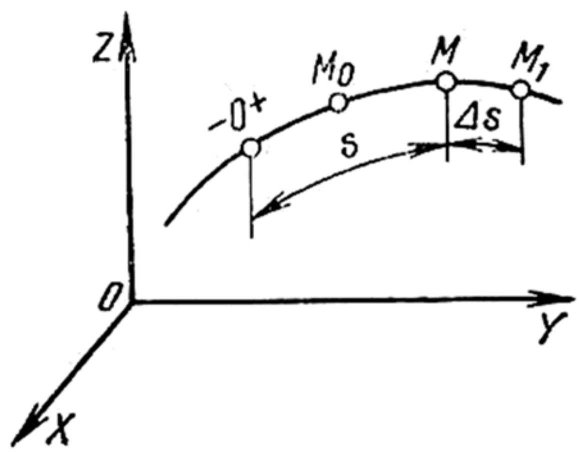

Рисунок 7.5

У загальному випадку відстань s (криволінійна координата) не дорівнює пройденому точкою M шляху, оскільки точка може розпочати рух з початку відліку О, а з іншого положення (наприклад, M_0). Також, наприклад, при коливальному русі точки пройдений нею шлях безперервно зростає, а відстань не буде перевищувати величини максимального віддалення точки від початку відліку.

7.6 Швидкість точки

Швидкістю точки називається величина, що характеризує швидкість переміщення точки. Покажемо, що швидкість є вектор. Нехай у момент t положення точки визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, а в момент $t+\Delta t$ радіусом-вектором $\overrightarrow{r_1}$ (рис. 7.6).

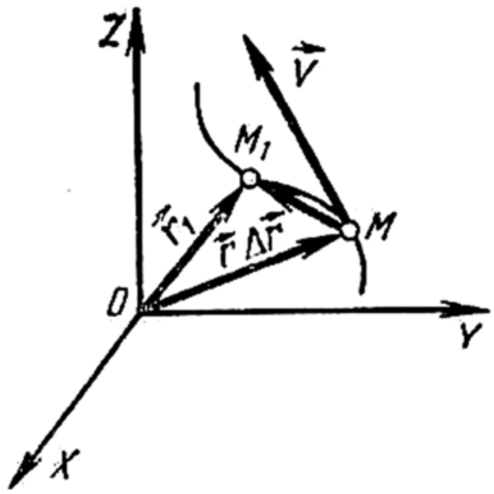

Рисунок 7.6

Точка перемістилася за проміжок часу Δt / по дузі MM_1, якій відповідає збільшення радіуса - вектору:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

що називається вектором переміщення точки.

Вектор, що дорівнює відношенню вектору переміщення точки $\overrightarrow{\Delta r}$ до проміжку часу Δt, називається середньою швидкістю точки за проміжок часу Δt:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$$

Чим менше Δt, тим менша різниця між модулем Δr і довжиною дуги MM_1, по якій насправді перемістилася точка М і, отже, тим точніше середня швидкість $\vec{v}_{ср}$ буде характеризувати швидкість переміщення точки за проміжок часу Δt. При $\Delta t \to 0$ вектор середньої швидкості прагне до вектору швидкості в даний момент $\vec{v}$:

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \vec{v}_{ср} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$$

але, $\vec{r} = f(t)$ тоді

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

відповідно

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \quad (7.2)$$

тобто швидкість точки дорівнює першій похідній від радіусу-вектору точки за часом.

Вектор швидкості точки $\vec{v}$ буде направлений по дотичній, тобто так, як на межі при $\Delta t \to 0$ буде направлений вектор середньої швидкості.

7.7 Прискорення точки

Прискоренням точки називається вектор, що характеризує швидкість зміни вектору швидкості. Нехай у момент t точка має швидкість $\vec{v}$, а момент $t+\Delta t$ швидкість $\vec{v}_1$ (рис. 7.7). За проміжок часу Δt швидкість точки отримала збільшення (приріст) $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$

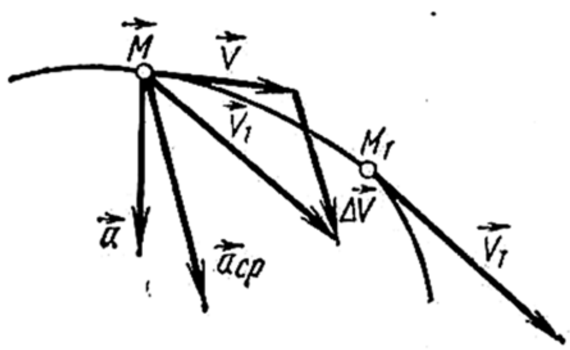

Рисунок 7.7

Співвідношення збільшення швидкості $\overrightarrow{\Delta v}$ до проміжку часу Δt називається середнім прискоренням точки за проміжок часу Δt:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \Delta\vec{v}/\Delta t$$

Вектор $\vec{\alpha}_{\text{ср}}$ характеризує середню швидкість зміни вектора $\vec{v}$ за час переміщення точки з положення *M* положення M_1. Умовимося зображати вектор $\vec{\alpha}_{\text{ср}}$, виходячим з точки *M*.

Прискоренням точки в даний момент (або просто прискоренням) називається межа, до якої прагне середнє прискорення при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta_t \to 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

звідки, враховуючи рівність (7.2), отримаємо

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d^2 r}}{dt^2} \qquad (7.3)$$

тобто прискорення точки дорівнює першій похідній від вектору швидкості або другій похідній від радіусу-вектору точки за часом.

Враховуючи напрямки векторів $\overrightarrow{\Delta v}$ і $\vec{\alpha}_{\text{ср}}$, помічаємо, що вектор прискорення точки завжди спрямований у бік увігнутості траєкторії і лежить в так званій площині, що стикається. У цій площині лежить нескінченно малий відрізок траєкторії, що примикає до точки *M*. Площина, що проходить через вектори $\vec{v}$ і $\vec{v}_1$,відкладені з точки *M*, в межі при $\Delta t \to 0$ звертається в площину, що стикається.

Швидкість точки та її прискоренні за виразами (7.2) і (7.3) є похідними від векторів $\vec{r}$ і $\vec{v}$ за часом. Похідна за часом від будь-якого вектора характеризує швидкість його зміни одночасно за модулем і напрямом. Тому похідна від постійного за модулем вектору в загальному випадку не дорівнює нулю. Нехай, наприклад, точка рухається із постійною за величиною швидкістю по колу (рис. 7.8). Вочевидь, $r_1 = r = const$ *і* $v_1 = v = const$, тобто модулі векторів постійні, але змінюються їх напрями, тому похідні від векторів не дорівнюють нулю. Швидкість точки змінюється, отже, вона має прискорення.

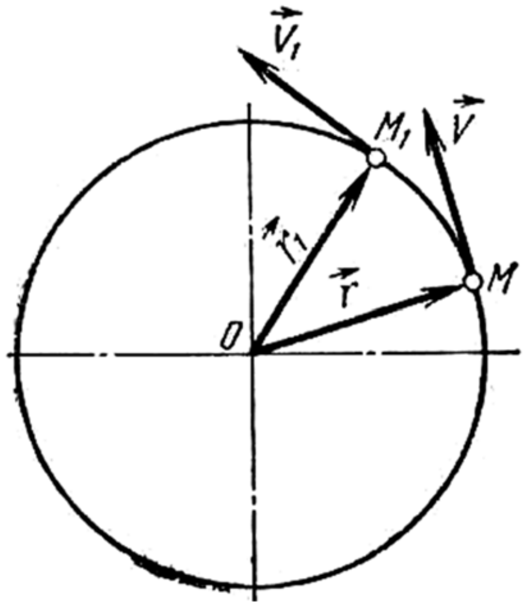

Рисунок 7.8

7.8 Визначення швидкості точки при векторному способі задання руху

Рух точки за довільною траєкторією розглядається відносно якого небудь центру O в якому може бути розміщена декартова система координат. Розташування точки визначається залежність радіус вектору r від часу t. Вектор швидкості точки направлений за дотичною до її траєкторії.

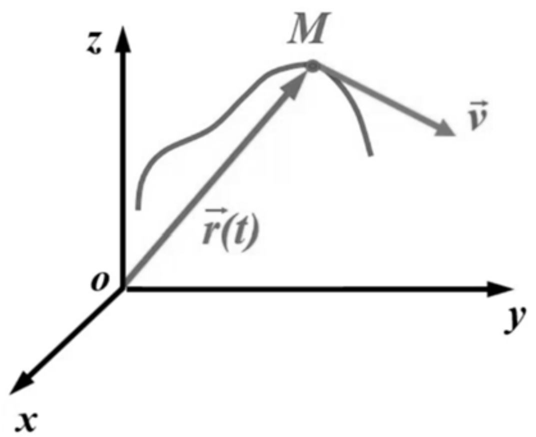

Рисунок 7.9

Вектор швидкості визначається як перша похідна від радіус вектору за часом.

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Визначення швидкості точки при векторному способі задання руху ідентично основному визначенню вектору швидкості.

7.9 Визначення швидкості при природному способі задання руху точки

Матеріальна точка рухається за довільною траєкторією згідно закону руху *s=s(t)* . Згідно базового визначення - вектор швидкості дорівнює першій похідній від радіуса вектору за часом

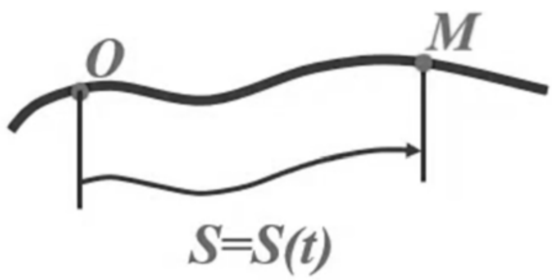

Рисунок 7.10

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Помножимо чисельник і знаменник на диференціал дугової координати

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} | \cdot \frac{ds}{ds}$$

Отримаємо наступне: вектор швидкості рівний відношенню диференціалу радіус вектору до диференціалу дугової координати і помножити на відношення диференціалу дугової координати до диференціалу часу.

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Диференціал радіус вектору за дуговою координатою можливо представити як межу відношення приросту радіус вектору до прирощення дугової координати при прямуванні до 0. Відомо ця межа дорівнює 1. Але векторній 1, тобто такій, що має напрям.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \vec{1} = \vec{\tau}$$

Отриманий одиничний вектор направлений за дотичною, так як в межі хорда, яка є прирощенням радіус вектору прямує до дотичної. Позначимо цей вектор τ.

Він характеризує напрямок дотичної до траєкторії в даній точці.

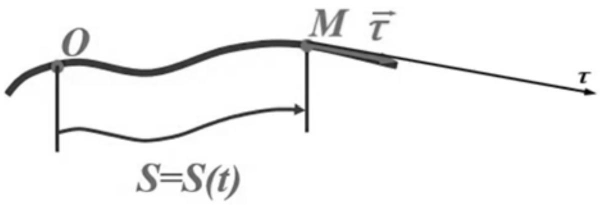

Рисунок 7.11

Вектор швидкості при природному способі задання руху обчислюється як похідна від дугової координати за часом помноженої на вектор τ.

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

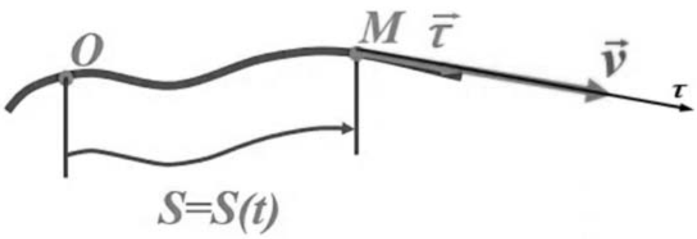

Рисунок 7.12

Модуль швидкості обчислюється як похідна від дугової координати за часом. Або ж похідна від шляху за часом.

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Нехай точка в момент t знаходиться в положенні M (див. рис. 7.5), а в момент t+Δt в положенні M_1, пройшовши за проміжок часу Δt відстань Δs. Чисельне значення середньої швидкості руху точки по траєкторії дорівнює

$$v_{\text{ср}} = \Delta s/\Delta t$$

При Δt →0 отримаємо

$$v = \lim_{\Delta_t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Але s=f(t), тоді чисельне значення швидкості

$$v = ds/dt,$$

тобто дорівнює першій похідній за часом від відстані.

Знак швидкості показує напрямок руху точки в даний момент. При знаку «плюс» точка рухається у бік позитивного відліку відстаней і навпаки.

7.10 Поняття про природні осі та кривизну траєкторії

При природному способі задання руху прискорення точки визначають його складовими, спрямованими по так званим природним, осям. Траєкторія точки, як і будь-яка крива, має три природні осі (рис. 7.13):

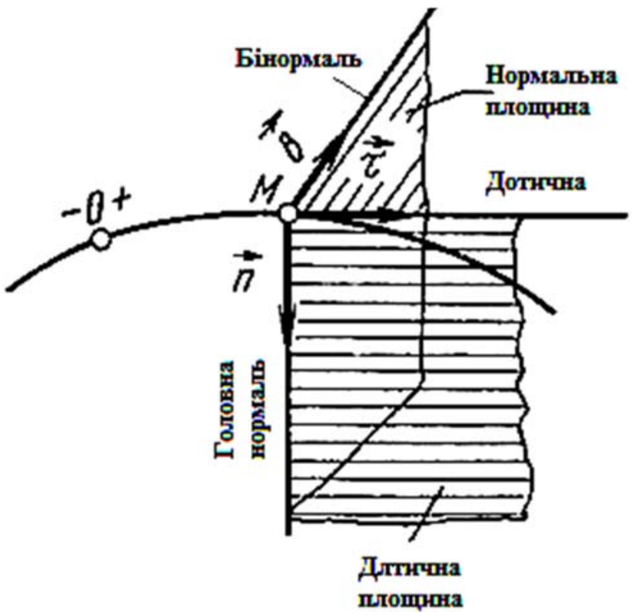

Рисунок 7.13

дотичну (орт осі $\vec{\tau}$), спрямовану у бік позитивного відліку відстаней;

головну нормаль (орт осі $\vec{n}$) - лінію перетину, площини що стикається і нормальної площини, спрямовану у бік увігнутості кривої;

бінормаль (орт осі $\vec{b}$), перпендикулярну дотичній та головній нормалі.

Кривизною K кривої у цій точці називають межу відношення кута суміжності Δφ (рис. 7.14) до довжини дуги Δs, відповідної йому, при Δs→0:

$$K = \lim_{\Delta_s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

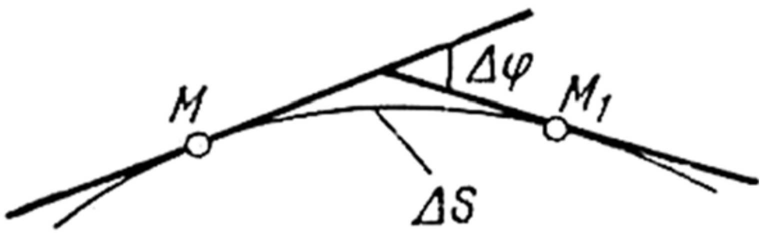

рис. 7.14

Величина, обернена кривизні K, називається радіусом кривизни:

$$1/K = p$$

7.11 Дотичне і нормальне прискорення точки

Розкладемо прискорення $\vec{a}$ точки на складові, спрямовані на природні осі. Так як вектор прискорення лежить в площині, що дотикається, то складові його спрямовані за дотичною і головною нормаллю (рис. 7.15) і називаються дотичним $\vec{a}_\tau$ і нормальним $\vec{a}_n$ прискореннями точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (7.4)$$

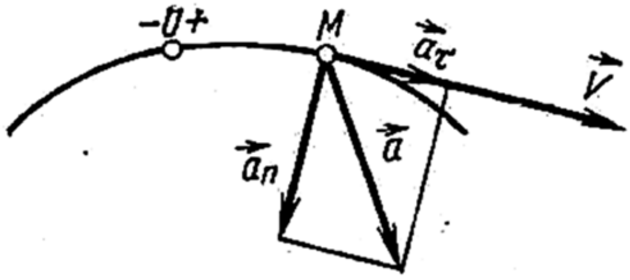

Рисунок 7.15

Знайдемо їх значення. Представимо вектор швидкості $\vec{v}$ як добуток її чисельного значення υ на орт дотичної $\vec{\tau}$:

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \qquad (7.5)$$

Для визначення прискорення знайдемо похідну за часом від правої частини виразу (7.5), маючи на увазі, що орт дотичної $\vec{\tau}$ (рис. 7.16), рівний одиниці, непостійний у напрямку, і, отже, його похідна не дорівнює нулю

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{\overrightarrow{d\tau}}{dt} \qquad (7.6)$$

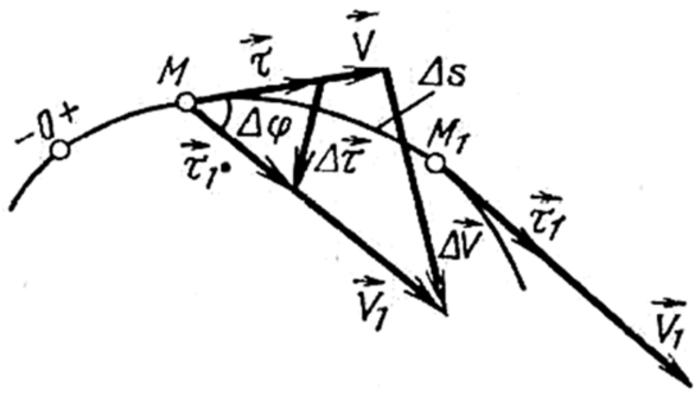

Рисунок 7.16

Перший доданок, як видно з порівняння виразів (7.4) і (7.6), є дотичне прискорення точки. Його чисельне значення дорівнює похідній за часом від чисельного значення швидкості:

$$a_\tau = dv/dt$$

Визначимо чисельне значення другого доданку - нормального прискорення (напрямок його вже відоме). Величину $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$ знайдемо, взявши межу відношення $|\overrightarrow{\Delta\tau}|$ до Δt при $\Delta t \to 0$:

$$\left|\frac{\overrightarrow{d\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{|\overrightarrow{\Delta\tau}|}{\Delta t}$$

Підставивши значення $|\overrightarrow{\Delta\tau}| = 2|\vec{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$ і перемноживши чисельник і знаменник правої частини виразу на добуток $\Delta s \cdot \Delta\varphi$ отримаємо

$$\left|\frac{\overrightarrow{d\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{2|\vec{\tau}|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} \frac{\Delta s\Delta\varphi}{\Delta s\Delta\varphi}$$

Зауважимо, що при $\Delta t \to 0$ довжина дуги Δs і відповідний їй кут суміжності $\Delta\varphi$ також прагнуть до нуля. Представимо тепер праву частину останнього виразу у вигляді добутку трьох меж:

$$\left|\frac{\overline{\partial\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \lim_{\Delta_s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \lim_{\Delta_\varphi \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} |\vec{\tau}|$$

Знаючи, що $|\vec{\tau}| = 1$; $\lim\limits_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$; $\lim\limits_{\Delta_s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = K = \frac{1}{p}$ і $\lim\limits_{\Delta_\varphi \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1$

отримаємо $\left|\frac{\overrightarrow{d\tau}}{dt}\right| = \frac{v}{p}$

Тоді чисельна величина нормального прискорення дорівнює

$$a_n = v^2/p$$

На підставі викладеного можна дійти висновку:

дотичне прискорення дорівнює чисельному значенню похідної від чисельного значення швидкості точки за часом. Воно характеризує швидкодію зміни швидкості за величиною і спрямовано по дотичній до траєкторії точки: при знаку «плюс» - у бік позитивного відліку відстаней, при знаку «мінус» - у протилежний бік. Рух точки буде прискореним при однакових знаках швидкості та дотичного прискорення (рис. 7.17), при зворотних знаках - уповільненим; нормальне прискорення точки дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії. Воно завжди позитивне, спрямоване по головній нормалі у бік увігнутості траєкторії та характеризує швидкодію зміни швидкості в напрямку. При будь-якому прямолінійному русі (ρ→0) нормальне прискорення дорівнює нулю.

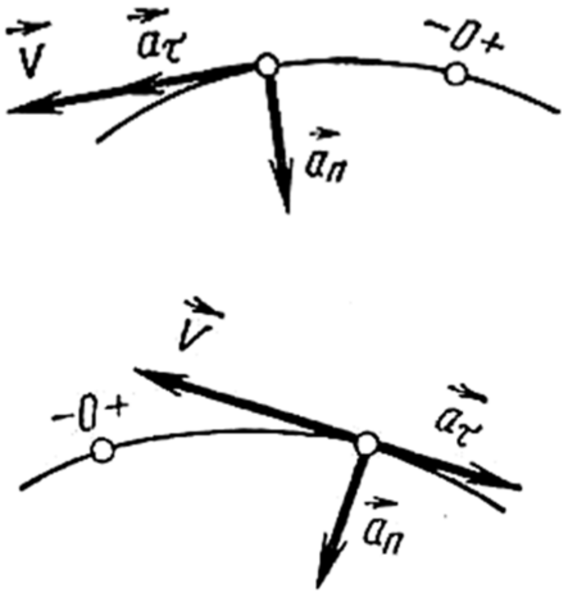

Рисунок 7.17

Знаючи величини дотичного та нормального прискорень, легко знайти модуль прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{p}\right)^2}$$

7.12 Окремі випадки руху точки

Рівномірний рух

$$v = \text{const}; a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0; a_n = \frac{v^2}{p}; \vec{a} = \vec{a}_n$$

У загальному випадку прискорення рівномірного руху не дорівнює нулю. Тільки в одному випадку - при рівномірному прямолінійному русі точка не має прискорення.

Рівняння рівномірного руху:

$$s = s_0 + vt$$

Рівнозмінний рух

При рівнозмінному русі дотичне прискорення точки α_τ = const. Рівняння цього руху мають вигляд

$$v = v_0 + a_\tau t \qquad (7.7)$$

$$s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2 \quad (7.8)$$

8. НАЙПРОСТІШІ РУХИ ТІЛА

8.1 Поступальний рух

Поступальним називається такий рух тіла, при якому будь-яка пряма, пов'язана з цим тілом, переміщається, залишаючись паралельною своєму початковому положенню.

Доведемо, що за поступального руху всі точки тіла описують однакові, траєкторії, що суміщаються при накладенні і мають у кожний даний момент рівні швидкості і прискорення.

Виберемо в тілі дві довільні точки A і B (рис. 8.1), що мають радіуси-вектори $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_B$. Проведемо між точками вектор $\vec{r}_{AB}$, який за визначенням поступального руху переміщається, залишаючись паралельним самому собі. Нехай через проміжок часу Δt він займе становище A_1B_1. При досить малому Δt фігуру ABB_1A_1 приймаємо за паралелограм і тоді $BB_1 \neq AA_1$ Продовжуючи ці побудови далі, приходимо до висновку, що траєкторії точок A і B однакові, тобто при накладенні суміщаються.

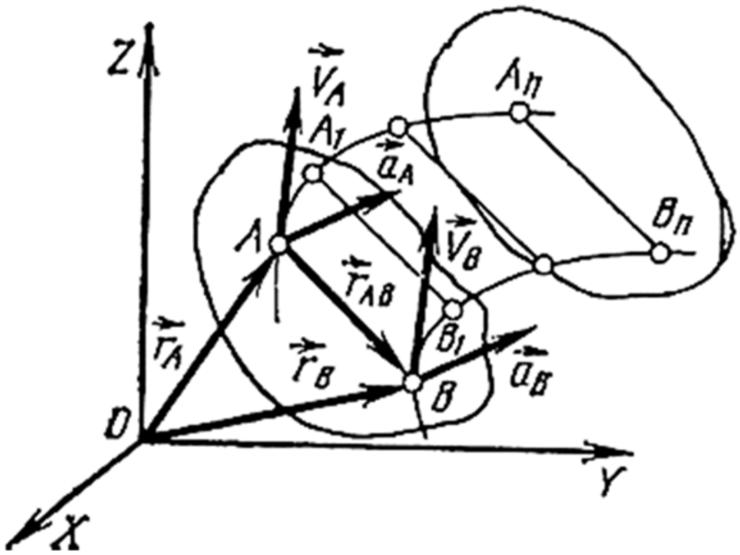

Рисунок 8.1

Для визначення швидкості точок A та B візьмемо похідну за часом від рівності $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$:

$$d\vec{r}_B/dt = \overrightarrow{dr_A}/dt + d\vec{r}_{AB}/dt$$

Так як вектор $\vec{r}_{AB}$ постійний за величиною та напрямком, то $d\vec{r}_{AB}/dt = 0$.

Враховуючи що

$$d\vec{r}_B/dt = \overrightarrow{v_B} \quad \text{і} \quad \overrightarrow{dr_A}/dt = \vec{v}_A$$

Отримаємо $\vec{v}_B = \vec{v}_A$.

Взявши похідні від швидкостей обох точок, отримаємо

$$d\vec{v}_B/dt = d\vec{v}_A/dt$$

або

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Таким чином доведено, що швидкості та прискорення всіх точок тіла рівні, і, отже, поступальний рух тіла визначається рухом будь-якої однієї його точки.

8.2 Обертовий рух

Обертальним, називається такий рух тіла, при якому дві точки, що належать тілу або з ним пов'язані, нерухомі. Пряма, що проходить через ці точки, називається віссю обертання.

Проведемо через вісь обертання, яку зазвичай поєднують з остю OX, нерухому площину A і площину B, пов'язану з тілом (рис. 8.2). Положення тіла в просторі буде визначатися положенням осі обертання і кутом φ, укладеним між площинами. Цей кут називається кутом повороту тіла.

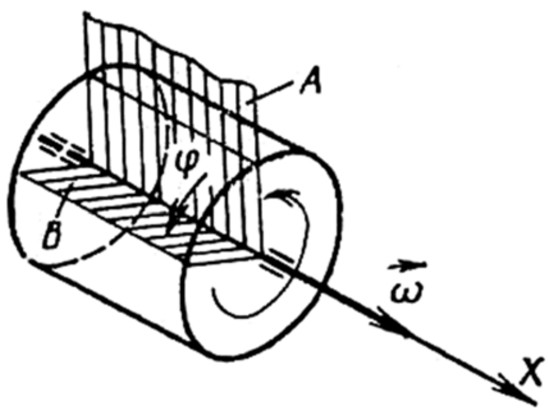

Рисунок 8.2

Рівняння обертання тіла навколо нерухомої осі виражає залежність кута повороту від часу:

$$\varphi = f(t)$$

Основними характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість ω і кутове прискорення ε.

Якщо тіло за проміжок часу Δt повернулося на кут Δφ, то відношення Δφ до Δt дорівнює середній кутовий швидкості

$$\omega_{\text{ср}} = \Delta\varphi/\Delta t$$

При Δt→0 середня кутова швидкість прагне до кутової швидкості

$$\omega = \lim_{\Delta_t \to 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

але

$\varphi = f(t)$, тоді $\lim\limits_{\Delta_t \to 0} \Delta\varphi/\Delta t = \Delta\varphi/\Delta t$

або

$$\omega = d\varphi/dt \qquad (8.1)$$

Кутова швидкість тіла дорівнює першій похідній від кута повороту за часом.

Якщо час Δt кутова швидкість змінилася на величину Δω, то середнє кутове прискорення

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \Delta\omega/\Delta t$$

при Δt→0

$$\varepsilon = d\,\omega/dt = d^2\varphi/dt^2 \qquad (8.2)$$

Кутове прискорення тіла дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом.

Кут повороту φ завжди задається в радіанах, тому вони позначаються відповідно рад/с і рад/с^2.

Величини φ,ω,ε вважають позитивними, якщо вони спрямовані проти ходу годинникової стрілки (при спостереженні з позитивного кінця осі OX). При прискореному обертанні тіла ω і ε мають однакові знаки, при уповільненому-протилежні.

Кутова швидкість може бути представлена вектором, розташованим на осі обертання (див. рис. 8.2). Вектор кутової швидкості визначає положення осі та напрямок обертання, яке відбувається проти ходу годинникової стрілки (при спостереженні з кінця вектору $\vec{\omega}$).

У техніці часто виражають кутову швидкість не в радіанах на секунду, а частотою обертання *n*, вираженої числом обертів на хвилину. Залежність між *n* і ω з урахуванням того, що кожен оборот містить 2π рад, має вигляд

$$\omega = \pi n|30$$

Важливо відзначити, що величини φ,ω,ε,n є кутовими характеристиками, що застосовуються для всього тіла в цілому. Їх не можна відносити до окремої точки обертового тіла або до іншої будь-якої точки. Не можна, наприклад, говорити про точку, що рухається рівномірно по колу, що вона обертається з постійною кутовою швидкістю. Точка обертатися неспроможна, її рух характеризується лінійними величинами: швидкістю $\vec{v}$ і прискоренням $\vec{\alpha}$.

Рівномірне та рівнозмінне обертання. При рівномірному обертанні тіла постійною є його кутова швидкість, при рівноперемінному постійним є кутове прискорення. Для цих окремих випадків обертального руху існують рівняння, подібні до рівнянь рівномірного і рівноперемінного руху точки:

для рівномірного обертання

$$\omega = \mathrm{const}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \ \omega t$$

для рівноперемінного обертання

$$\varepsilon = \text{const}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (8.3)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2 \qquad (8.4)$$

Швидкості і прискорення точок тіла, що обертається. Розглянемо рух точки M, розташованої з відривом від осі обертання (рис. 8.3). Точка рухається по колу (як будь-яка інша точка тіла, що обертається).

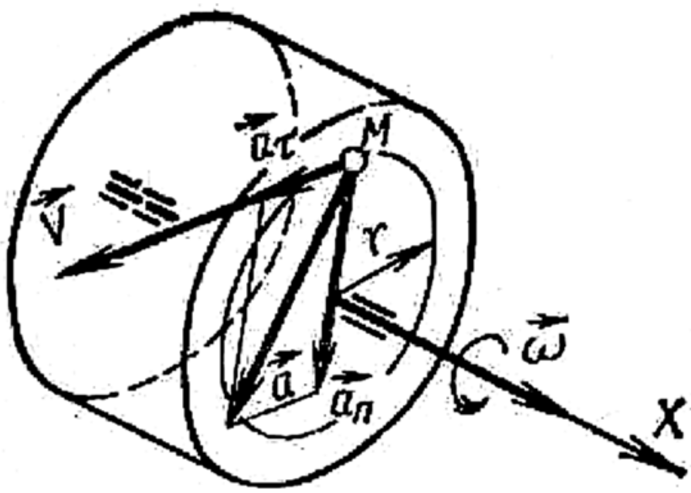

Рисунок 8.3

Відстань від точки до довільно обраного початку відліку являє собою дугу кола, відповідну куту повороту φ:

$$s = r\varphi \qquad (8.5)$$

Чисельне значення швидкості $\vec{v}$ точки

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$$

або

$$v = r\omega \qquad (8.6)$$

Чисельне значення дотичного і нормального прискорень дорівнюють

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \quad \text{і} \quad a_n = \frac{v^2}{p} = \frac{r^2\omega^2}{r}$$

звідки

$$a_\tau = r\,\varepsilon \qquad (8.7)$$

$$a_n = r\omega^2 \qquad (8.8)$$

Модуль прискорення точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4}$$

або

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (8.9)$$

Як видно з формул (8.6) - (8.9), швидкості та прискорення точок пропорційні їх радіусам.

Доцільно нагадати, що кутові кінематичні характеристики φ,ω,n і ε відносяться до всього тіла в цілому, а лінійні характеристики s, v, α_τ, α_n, α характеризують рух окремої точки тіла, що обертається.

9.ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ

9.1 Визначення плоскопаралельного руху

Плоскопаралельним називається рух тіла, при якому всі його точки переміщаються паралельно до деякої нерухомої площини.

Проведемо в тілі (рис. 9.1) прямі АВ та CD, перпендикулярні нерухомій площині XOY. Відповідно до визначення плоскопаралельного руху точки А, В, С, D переміщаються, перебуваючи на постійній відстані від площини. Тоді АВ і CD переміщуються, залишаючись паралельними своєму початковому положенню, рух точок В і D буде таким же, як рух точок А і С, і для вивчення руху всього тіла достатньо вивчити рух точок, що лежать в одному перерізі тіла, паралельному площині XOY.

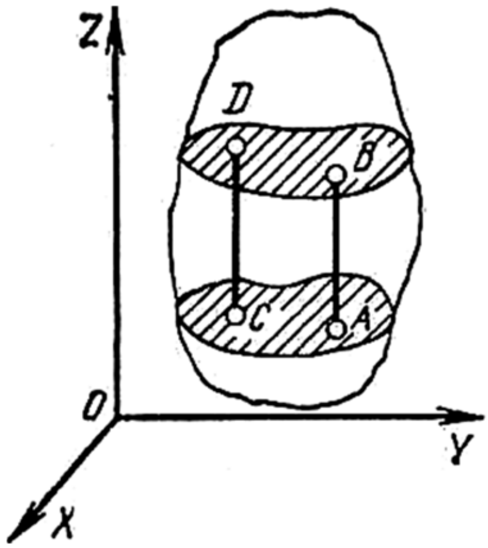

Рисунок 9.1

Плоскопаралельний (плоский) рух можна уявити що складається з поступального і обертального рухів. Дійсно, перетин тіла (рис. 9.2) можна перемістити з одного положення в інше, перемістивши спочатку поступально і потім повернувши на кут навколо осі, що проходить через точку А (назвемо її полюсом).

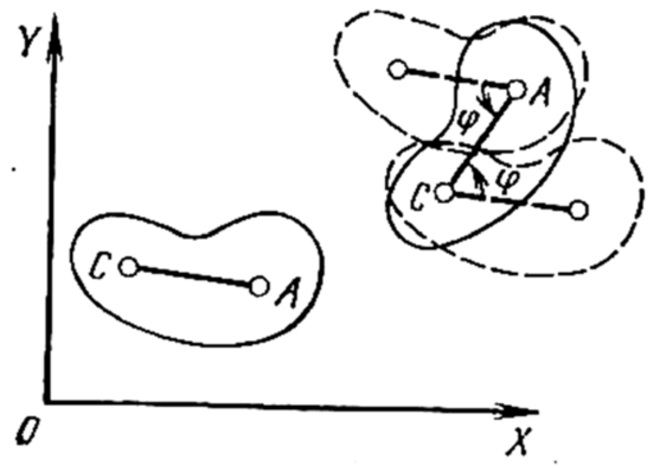

Рисунок 9.2

Так, здійснюючи одночасно поступальний і обертальний рух, перетин (тіло) можна перемістити в будь-яке положення. Отже, плоскопаралельний рух тіла складається з поступального руху, в якому всі точки тіла рухаються так само, як полюс, і з обертального руху навколо цього полюса (вірніше навколо осі, що проходить через полюс перпендикулярно площині руху).

За полюс можна вибрати будь-яку точку, рух якої відомий. При цьому обертальна частина руху не залежатиме від вибору полюса. Справді, перетин тіла можна перемістити з першого положення до другого, вибравши за полюс точку *C*. При цьому поступальна частина переміщення зміниться, а обертальне переміщення буде тим самим поворотом на кут φ.

9.2 Швидкість точок тіла при плокоскопаралельному русі

Тіло здійснює плоскопаралельний рух (рис. 9.3). Приймемо за полюс точку А, рух якої відомий.

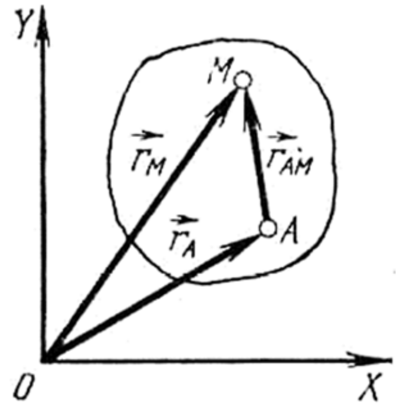

Рисунок 9.3

Визначимо швидкість довільної точки *M*. Її радіус-вектор

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_{AM}$$

Взявши похідну від обох частин рівняння за часом, отримаємо

$$d\vec{r}_M/dt = d\vec{r}_A/dt + d\vec{r}_{AM}/dt$$

де $d\vec{r}_M/dt = \vec{v}_M$ - шукана швидкість точки *M*; $d\vec{r}_A/dt = \vec{v}_A$ - швидкість полюса, тобто швидкість поступального руху тіла; $d\vec{r}_{AM}/dt = \vec{v}_{MA}$ - швидкість точки *M* при обертальному русі тіла навколо полюса *A*.

Таким чином,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$$

Швидкість будь-якої точки тіла при плоскопаралельному русі дорівнює геометричній сумі швидкості полюса та швидкості точки при обертальному русі навколо полюса.

Швидкість точки *M* (рис. 9.4) при обертальному русі тіла навколо полюса спрямована перпендикулярно відрізку *AM* (він є для точки *M* радіусом) і дорівнює модулю

$$v_{MA} = AM\ \omega$$

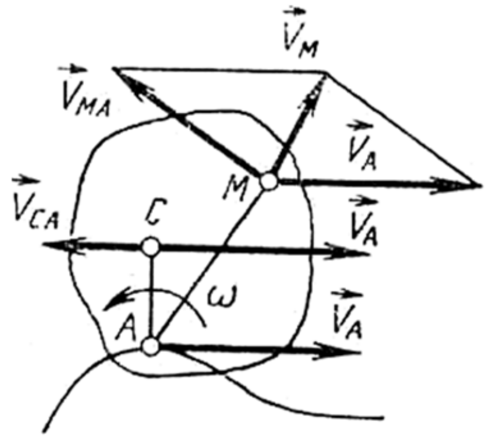

Рисунок 9.4

Якщо відкласти відрізок *AC* перпендикулярно вектору $\vec{v}_A$, то швидкість точки *C* буде дорівнювати різниці швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_{CA}$, при цьому модуль швидкості

$$v_C = v_A - v_{CA}$$

9.3 Поняття про миттєвий центр швидкостей

Продовжимо пряму АС (рис. 9.5 а) і відкладемо на ній відстань

$$AP = v_A \,/\, \omega$$

Швидкість точки P дорівнюватиме нулю. Справді,

$$v_P = v_A - v_{PA} = v_A - AP\,\omega; v_P = v_A - \frac{v_A}{\omega}\omega = 0$$

Очевидно, що таку точку можна знайти в межах тіла або за його межами для кожної миті плоскопаралельного руху. Точка, швидкість якої при плоскопаралельному русі тіла дорівнює нулю, називається миттєвим центром швидкостей.

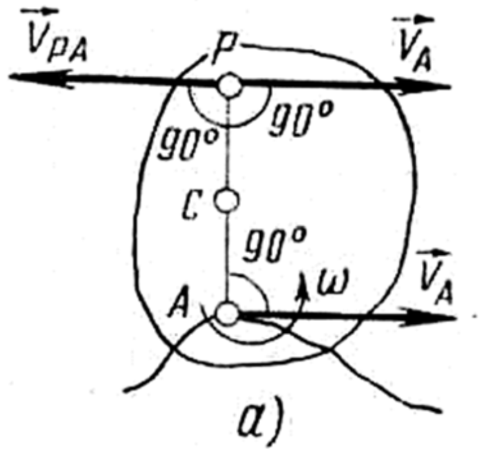

Рисунок 9.5 а

Приймемо за полюс миттєвий центр швидкостей. Тоді, враховуючи, що швидкість самого полюса дорівнює нулю, швидкість будь-якої іншої точки можна визначити як швидкість тільки при обертанні тіла навколо миттєвого центру швидкостей. Наприклад, для точок А, В, С отримаємо (рис. 9.5 б)

$$v_A = AP\,\omega, v_C = CP\,\omega, v_M - PM\omega$$

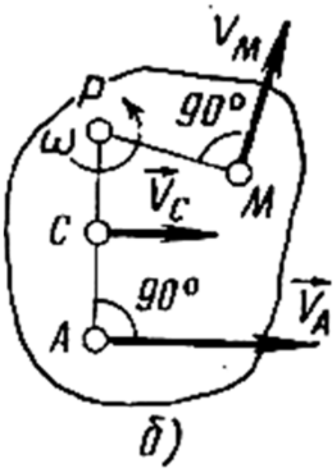

Рисунок 9.5 б

При цьому вектори швидкостей перпендикулярні радіусам точок *AP, CP, MP*. Таким чином, в даний момент швидкість будь-якої точки тіла при плоскопаралельному русі дорівнює швидкості обертального руху навколо миттєвого центру швидкостей.

9.4 Знаходження положення миттєвого центру швидкостей тіла

Тут можливі рівні випадки, тому доцільно розглянути їх.

Відома швидкість однієї точки і кутова швидкість тіла. Миттєвий центр швидкостей (МЦШ) розташований на перпендикулярі до вектору швидкості $\overrightarrow{v_A}$точки (рис. 9.6, а) і знаходиться на відстані, що дорівнює модулю швидкості, поділеному на кутову швидкість тіла

$$AP = v_A/\,\omega$$

Швидкості двох точок паралельні і відомі. Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перпендикулярі до векторів швидкостей меншої швидкості (рис. 9.6, б). Можна знайти відрізок *BP* та ω із рівнянь

$$v_A = AP\,\omega, v_B = BP\omega$$

Швидкості двох точок паралельні та рівні. Перпендикуляри до швидкостей точок не перетинаються. Миттєвий центр швидкостей видалено в нескінченність. Кутова швидкість тіла цієї миті дорівнює нулю (рис. 9.6, б).

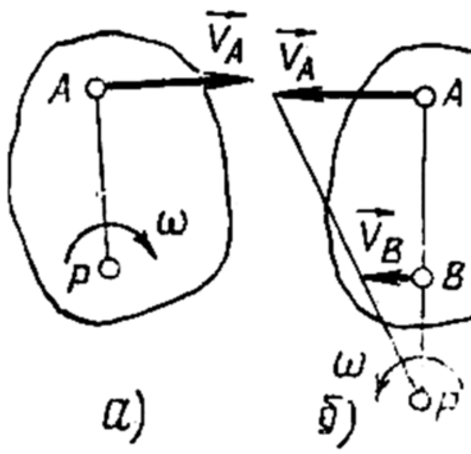

Рисунок 9.6

Кочення тіла без ковзання по іншому нерухомому тілу (рис. 9.7).

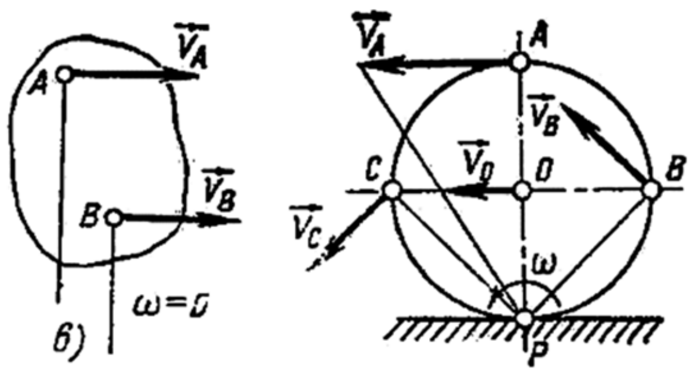

Рисунок 9.7

Точка дотику є миттєвий центр швидкостей. Кутова швидкість тіла

$$\omega = v_0 / OP = v_0 / R$$

Визначимо швидкості інших точок

$$v_A = 2R\omega, v_B = v_C = R\sqrt{2^{\omega}}$$

Відомі напрямки швидкостей двох точок. Розглянемо цей випадок на прикладі кривошипно-шатунного механізму (рис. 9.8). Напрямки швидкостей точки А кривошипа і поршня відомі. Миттєвий центр швидкостей лежить у точці перетину перпендикулярів до напрямів швидкостей цих точок. Точка А належить кривошипу ОА, що обертається навколо осі О, і шатуну АВ, що здійснює плоскопаралельний рух. Отже, швидкість точки А може бути виражена подвійно:

при обертанні кривошипу ОА, $v_A = \text{OA}\,\omega$;

при плоскопаралельному русі шатуна АВ, $v_A = \mathrm{A}P\ \omega_{AB}$

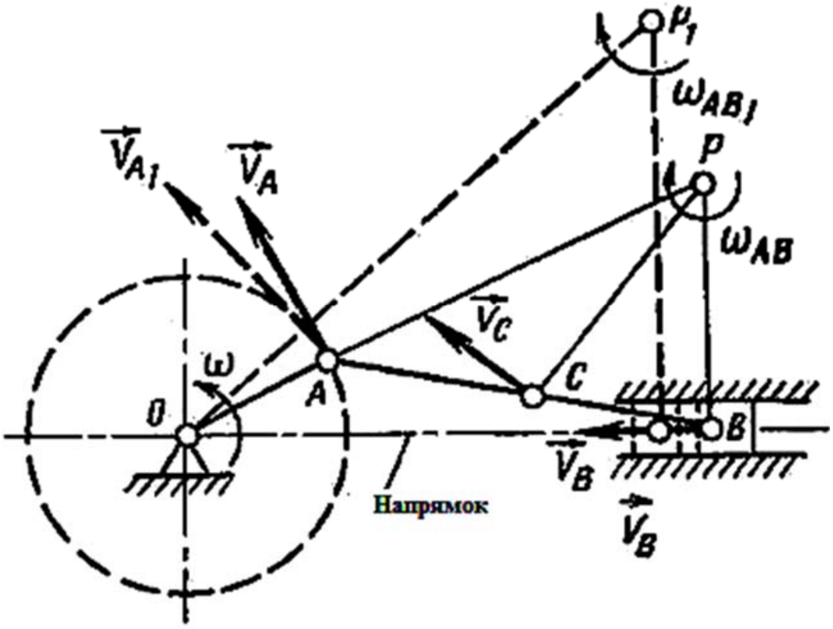

Рисунок 9.8

Тоді миттєва кутова швидкість шатуна

$$\omega_{\mathrm{AB}} = v_A/AP = OA\ \omega/AP$$

Знаючи ω_{AB}, легко знайти швидкість будь-якої точки шатуна.

Наприклад,

$$v_B = BP\omega_{\mathrm{AB}}; v_C = CP\omega_{\mathrm{AB}}$$

З рис. 9.8 видно, що миттєвий центр швидкостей займає становище Р тільки в дану мить. У наступний момент миттєвий центр швидкостей переміститься в положення P_1, зміниться і величина ω_{AB}.

10.СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

10.1 Відносний, переносний і абсолютний рух

У багатьох випадках з'являється необхідність розглядати рух точки, що здійснює складний рух, тобто переміщується відносно системи відліку, яка сама рухається відносно осей, що приймаються за нерухомі.

Нехай точка *M* (рис. 10.1) рухається щодо тіла I, яке переміщується відносно нерухомих осей *OXYZ*. Зв’янемо тіло I з осями $O_1X_1Y_1Z_1$.

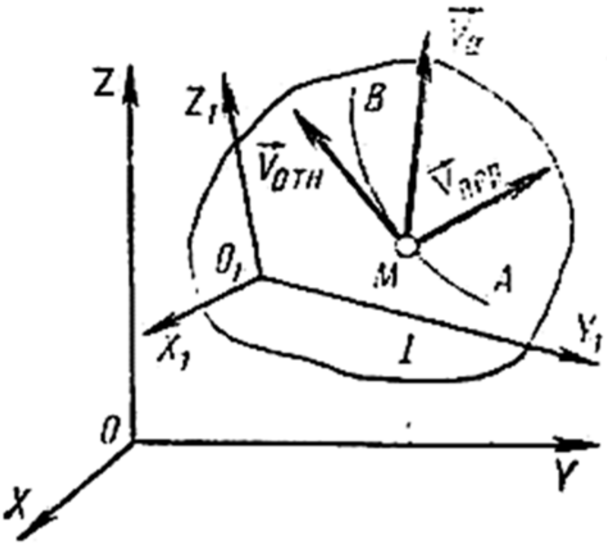

Рисунок 10.1

Рух точки M по траєкторії AB щодо цих осей (відносно тіла I) називається відносним, а швидкість і прискорення точки M у системі відліку $O_1X_1Y_1Z_1$ - відносною швидкістю і відносним прискоренням $(\nu_{\text{від}}, a_{\text{від}})$. Рух тіла I щодо нерухомих осей *OXYZ* називається переносним, а переносною швидкістю та поносним прискоренням точки M вважається швидкість та прискорення тієї точки рухомої системи, з якою точка M на даний момент суміщається $(\nu_{\text{пер}}, a_{\text{пер}})$. Рух точки M відносно нерухомої системи відліку називається абсолютним; швидкість і прискорення цього руху називаються абсолютною швидкістю і абсолютним прискоренням $(\nu_{\text{a}}, a_{\text{a}})$.

10.2 Визначення абсолютної швидкості точки

Припустимо, що переносного руху немає. Тоді точка М (рис. 10.2, а), що знаходиться в даний момент часу *t* в положенні М, переміститься за час Δt по траєкторії відносного руху АВ в положення *M'*, і радіус-вектор точки $\overrightarrow{r_{\text{від}}}$отримає приріст $\overrightarrow{\Delta r_{\text{від}}}$ (вектор переміщення у відносному русі). Таким самим був би і вектор переміщення в абсолютному русі. Але одночасно з відносним відбувається і переносне переміщення, через це траєкторія АВ переміститься за час Δt у положення A_1B_1, вектор переміщення у відносному русі займе положення $\overrightarrow{\Delta r_{\text{від}}}$, точка *M* опиниться в положенні M_1 а радіус-вектор $\overrightarrow{r_a}$ точки в абсолютному русі отримає прирощення $\Delta\overrightarrow{r_a}$. Точка рухомої системи $O_1X_1Y_1Z_1$, з якою точка *M* співпадала в даний момент часу *t*, переміститься в переносному русі в положення *M''*. Тоді $\overrightarrow{r_{\text{пер}}}$ - вектор переміщення в переносному русі.

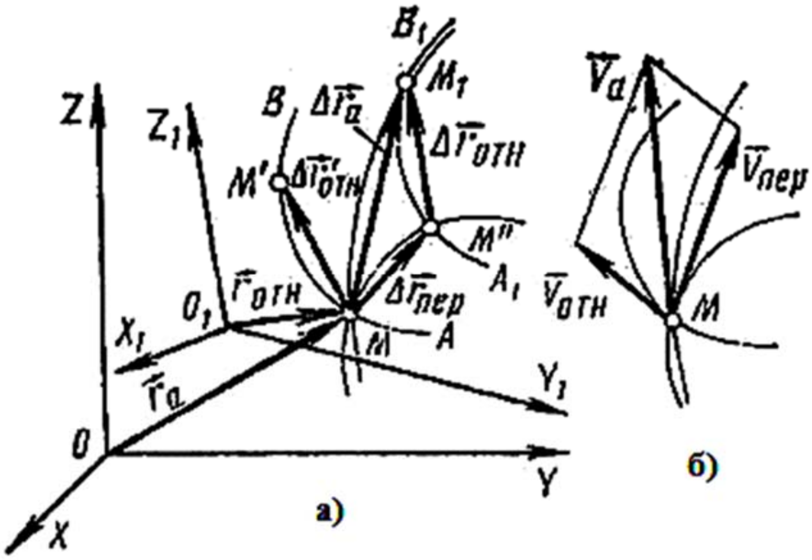

Рисунок 10.2

З рис. 10.2, а видно, що

$$\Delta\vec{r}_{\text{а}} = \Delta\vec{r}_{\text{пер}} + \Delta\vec{r}_{\text{від}}$$

Розділимо обидві частини рівняння Δt і знайдемо межі членів рівняння при Δt→0:

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_{\text{а}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_{\text{пер}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}_{\text{від}}}{\Delta t} \quad (10.1)$$

Тоді з урахуванням виразу (7.2) отримаємо

$$\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{від}}$$

Отже, швидкість абсолютного руху точки у складному русі дорівнює сумі швидкостей переносної та відносної (рис. 10.2, б).

10.3 Абсолютне прискорення точки. Прискорення Коріолісу

Якщо абсолютна швидкість точки визначається сумою (10.1), то прискорення в абсолютному русі не завжди може бути знайдено підсумовуванням переносного та відносного прискорень. Справді, прискорення точки характеризує швидкість зміни вектору її швидкості. Тоді відносне прискорення показує швидкість зміни вектору відносної швидкості лише у відносному русі, тобто у припущенні відсутності переносного переміщення. Позначимо $\left(\Delta \vec{\mathrm{v}}_{\text{від}}\right)_{\text{від}}$- приріст вектору відносної швидкості за час $\Delta \mathrm{t}$ тільки в відносному русі. Відносне прискорення

$$\vec{a}_{\text{від}} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\left(\Delta \vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{від}}}{\Delta t} \quad (10.2)$$

Розмірковуючи аналогічно, отримаємо для переносного прискорення

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\left(\Delta \vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{пер}}}{\Delta t} \quad (10.3)$$

де $\left(\Delta \vec{\mathrm{v}}_{\text{пер}}\right)_{\text{пер}}$ - прирощення, отримане вектором переносної швидкості тільки в переносному русі. Однак у складному русі точки обидва переміщення відбуваються одночасно, і може виявитися, що вектор відносної швидкості отримає за час Δt додаткове прирощення завдяки переносному переміщенню, що відбулося, а вектор переносної швидкості отримає в той же час приріст внаслідок зміни положення точки, що здійснює відносний рух . Пояснимо це простим прикладом. Нехай точка М (рис. 10.3 а) прискорено рухається по стрижню ОА (відносний рух), який, маючи кутову швидкість та кутове прискорення, обертається навколо осі OX (переносний рух). Тільки в відносному русі за час Δt точка перемістилася б із положення М в положення М′, і вектор її відносної швидкості, змінившись від $\nu_{\text{від}}$ до $\nu'_{\text{від}}$, отримав би приріст $\left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{від}}$. Але за цей час Δt стрижень переміститься в переносному русі в положення OA_1, і вектор відносної швидкості займе положення $\nu'_{\text{від}}1$.

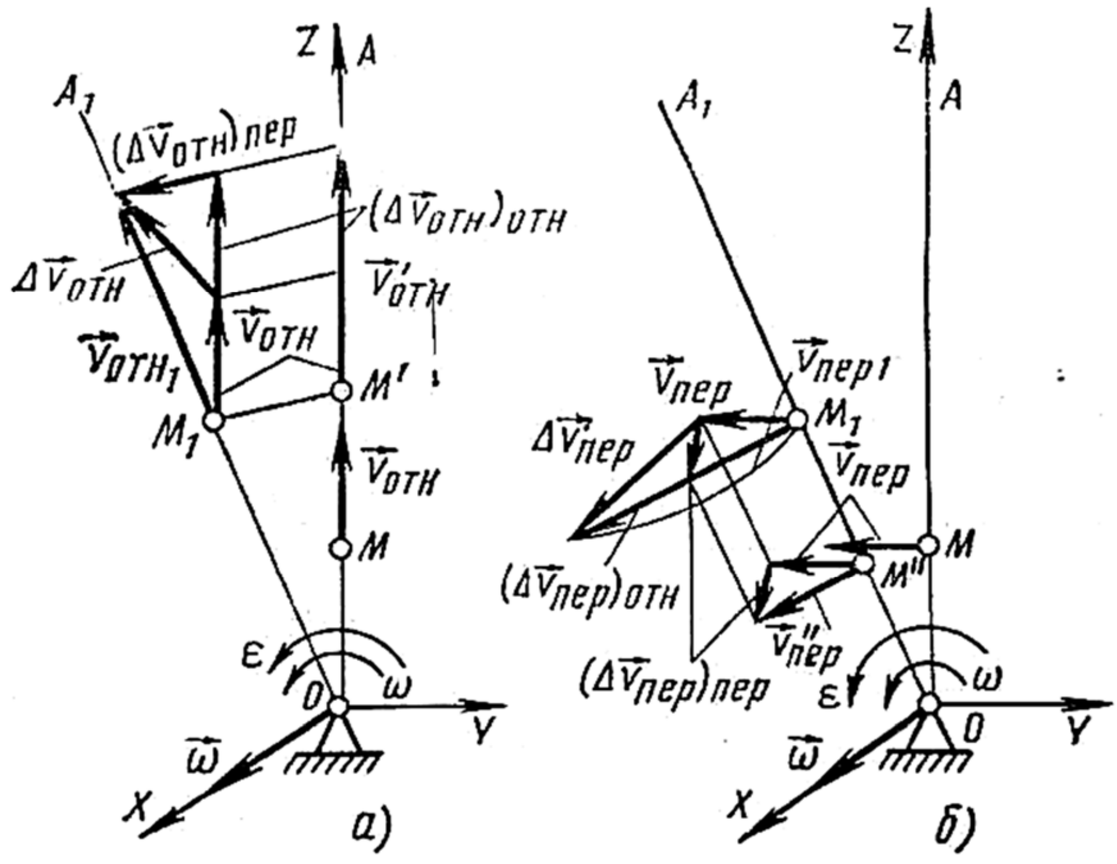

Рисунок 10.3

Тоді повне збільшення вектору відносної швидкості $\nu_{\text{від}}$ складатиметься з двох прирощень: прирощення тільки у відносному русі $\left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{від}}$ і прирощення завдяки переносному переміщенню, що відбулося $\left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{пер}}$, тобто

$$\Delta\vec{v}_{\text{від}} = \left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{від}} + \left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{пер}}$$

Аналогічно простежимо зміну вектору переносної швидкості. Якби був відсутній відносний рух, то вектор переносної швидкості точки М, що перемістилася разом зі стрижнем в положення *M''* (рис. 10.3,б), змінився б від $\nu_{\text{пер}}$ до $\nu''_{\text{пер}}$, отримавши приріст $\left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{пер}}$. Насправді, точка в результаті відносного переміщення опиниться в положенні M_1, тобто на більшій відстані від осі обертання, отже, пропорційно зміненому радіусу, переносна швидкість точки зміниться до $\vec{v}_{\text{пер}1}$. Таким чином, і її повне прирощення $\Delta\vec{v}_{\text{пер}}$ буде складатися з двох доданків: збільшення тільки в переносному русі $\left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{пер}}$ і приріст завдяки відносному переміщенню $\left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{пер}}$ тобто

$$\Delta\vec{v}_{\text{пер}} = \left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{пер}} + \left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{від}}$$

Приріст вектору абсолютної швидкості дорівнює сумі приростів векторів відносної та переносної швидкостей, тобто

$$\Delta\vec{v}_{\text{а}} = \Delta\vec{v}_{\text{від}} + \Delta\vec{v}_{\text{пер}}$$

або

$$\Delta\vec{v}_{\text{а}} = \left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{від}} + \left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{пер}} + \left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{пер}} + \left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{від}}$$

Змінивши порядок доданків правої частини рівняння, розділимо обидві частини на Δt і знайдемо межі членів рівняння при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta_t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\text{а}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta_t\to 0}\frac{\left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{від}}}{\Delta t} + \lim_{\Delta_t\to 0}\frac{\left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{пер}}}{\Delta t} + \frac{\left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{пер}} + \left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{від}}}{\Delta t}$$

Ліва частина рівняння є прискоренням в абсолютному русі, а два перших складових правої частини відповідно до виразів (10.2) і (10.3) рівні прискорень у відносному $\vec{a}_{\text{від}}$ і переносному $\vec{a}_{\text{пер}}$ рухах. Останній доданок називається прискоренням Коріоліса:

$$\lim_{\Delta_t\to 0}\frac{\left(\Delta\vec{v}_{\text{від}}\right)_{\text{пер}} + \left(\Delta\vec{v}_{\text{пер}}\right)_{\text{від}}}{\Delta t} = \vec{a}_{\text{кор}}$$

Таким чином, абсолютне прискорення точки дорівнює сумі трьох прискорень: відносного, переносного та коріолісового, тобто

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}$$

На відміну від відносного прискорення, що характеризує зміну відносної швидкості тільки у відносному русі та переносного прискорення, що характеризує зміну переносної швидкості тільки в переносному русі, коріолісове прискорення характеризує одночасно зміну відносної швидкості в переносному русі та переносної швидкості у відносному русі.

Коріолісове прискорення називають також поворотним прискоренням, оскільки воно виникає тільки у випадках, коли переносний рух пов'язаний з поворотом рухомої системи відліку. Дійсно, як видно з рис. 10.3, а і б, якби стрижень ОА не обертався, а рухався паралельно самому собі, тобто поступально, то приріст векторів $\left(\Delta\vec{\mathrm{v}}_{\text{від}}\right)_{\text{пер}}$ і $\left(\Delta\vec{\mathrm{v}}_{\text{пер}}\right)_{\text{від}}$ були б рівні нулю і, відповідно, коріолісове прискорення дорівнювало б також нулю.

В цьому випадку

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}}$$

Отже, при поступальному переносному русі коріолісово прискорення дорівнює нулю, і абсолютне прискорення точки дорівнює сумі відносного та переносного прискорення.

Може бути доведено, що коріолісове прискорення

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\left(\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}\right)$$

Звідки, відповідно до виразу (5) модуль вектору прискорення

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} v_{\text{отн}} \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{v}_{\text{отн}}}\right) \quad (10.4)$$

Напрямок вектору $\vec{a}_{кор}$ відповідає напрямку векторного добутку $\vec{\omega}_{пер} \times \vec{v}_{від}$, тобто перпендикулярно площині, що проходить через обидва вектори в той бік, звідки найкоротше суміщення $\vec{\omega}_{пер}$ з $\vec{v}_{від}$ видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 10.4).

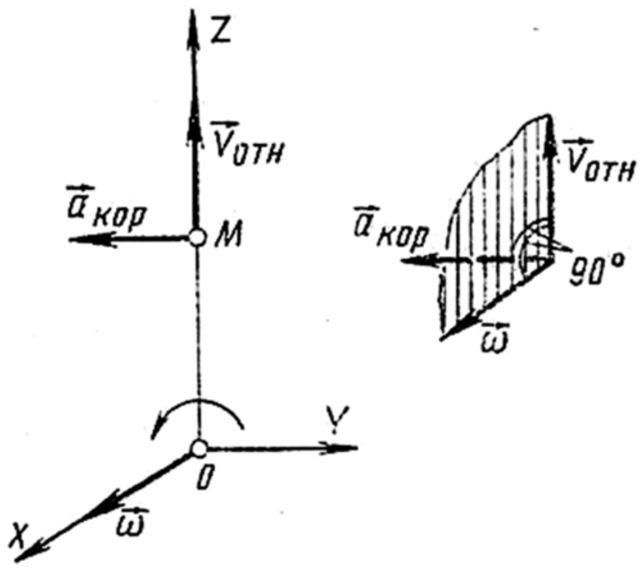

Рисунок 10.4

З формули (10.4) випливає, що коріолісове прискорення дорівнює нулю в наступних випадках:

при поступальному переносному русі, і навіть у ті моменти довільного переносного руху, коли $\omega_{пер} = 0$; у ті моменти, коли $\vec{v}_{від} = 0$; якщо $sin\vec{\omega}_{пер}, \vec{v}_{від} = 0$, тобто в моменти, коли вектори $\vec{\omega}_{пер}$ і $\vec{v}_{від}$ паралельні.

11. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ ДИНАМІКИ

11.1 Вступ у динаміку

Динамікою називається розділ механіки, у якому вивчаються закони руху тіл під впливом сил. Сили, що діють на матеріальні тіла, не завжди постійні. Як показує досвід, змінні сили залежать зазвичай від часу, положення тіла та швидкості його руху.

Прикладом сили, що змінюється з часом, може служити тяга реактивного двигуна, що зростає при збільшенні подачі палива.

Сила, з якою пружина діє утримуване нею тіло, залежить від становища тіла, тобто від деформації пружини.

Силами, що залежать від швидкості тіла, є зазвичай сили опору руху. Наприклад, сила лобового опору транспортного засобу залежить від швидкості руху.

Спостерігаючи за рухом тіл, можна встановити, що одна й та сама сила змушує два неоднакових тіла по-різному змінювати свій рух, одне тіло швидко змінить швидкість свого руху, швидкість іншого буде змінюватися повільно; про таке тіло кажуть, що воно має велику інертність.

Інертність - властивість матеріальних тіл швидше чи повільніше змінювати швидкість свого руху під впливом сил. Інертність тіла залежить від кількості речовини, що становить тіло. Величина, що визначає міру інертності тіла, називається масою.

Рух тіла визначається рухом матеріальних точок (часток), що становлять тіло. З цього вивчення динаміки починають із вивчення руху матеріальної точки.

11.2 Закони динаміки

В основі динаміки лежать закони, встановлені в результаті багатовікових спостережень людей за рухом різних тіл. Закони справедливі в так званій інерційній системі відліку, пов'язаної з Сонцем і деякими зірками, які приймаються за нерухомі. У більшості ж технічних завдань, допускаючи невелику похибку, інерційними вважають осі, пов'язані із Землею.

Перший закон (закон інерції). Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки прикладені сили не змінять цей стан.

Ізольованою називається точка, на яку не діють сили.

Другий закон (основний закон динаміки). Прискорення, одержуване точкою під дією прикладеної до неї сили, пропорційне модулю цієї сили і збігається з нею за напрямом.

$$m\vec{a} = \vec{P} \quad (11.1)$$

де m - маса точки.

Рівняння (11.1) називається основним рівнянням динаміки.

Якщо на точку діють кілька сил, їх можна скласти в одну рівнодіючу (рис. 11.1). Тоді основне рівняння динаміки можна представити у вигляді

$$m\vec{a} = \sum\vec{P}_i \quad \text{або} \quad m\vec{a} = \vec{R}$$

З основного рівняння динаміки випливає, що чим більша маса точки, тим більша її інертність і тим менше прискорення отримає точка під дією однієї й тієї ж сили.

Масу тіла (точки) можна знайти з рівняння (11.1), якщо відоме прискорення, яке отримує тіло під дією відомої сили. Наприклад, якщо відома сила тяжкості тіла G та прискорення вільного падіння g у даному місці, то

$$mg = G,$$

звідки $m = G / g$.

Не слід ототожнювати вагу тіла та його масу. Вага тіла - сила, неоднакова у різних точках земної поверхні та навколоземного простору, повідомляє цьому тілу неоднакове прискорення, а маса - постійна для цього тіла міра інертності, залежить від кількості включеної у ньому речовини.

Для наближеного визначення маси тіла за вагою і навпаки можна вважати $g=9{,}81$ м/с^2.

Третій закон (закон рівності дії та протидії). Дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, рівними по модулю і спрямованими по одній прямій у протилежні сторони.

Ці сили, прикладені до двох різних точок, у загальному випадку не можна вважати врівноваженими, оскільки точки можуть не знаходитись у рівновазі, як, наприклад, дві взаємодіючі одне з одним частки газового потоку.

Механічні одиниці. Стандарт «Одиниці фізичних величин» встановлює три основні механічні одиниці:

одиниця довжини – метр (м);

одиниця маси – кілограм (кг);

одиниця часу (с).

Решта одиниць механіки є похідними від трьох основних одиниць. Наприклад, одиницею сили встановлено ньютон (Н), тобто сила, що повідомляє тілу масою 1 кг, прискорення 1 м/с^2. Таким чином, відповідно до основного рівняння динаміки $\vec{P} = m\vec{a}$ ньютон виражається через основні одиниці

$$1\ \text{Н}=1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\ .$$

Одиниця сили, що широко застосовувалася раніше, кілограм-сила (кгс) повідомляє тілу масою 1 кг прискорення 9,81 м/с^2, тому 1 кгс=9,8 Н і 1 Н = 0,102 кгс.

11.3 Задачі динаміки

Безліч окремих задач динаміки можна звести до двох основних задач.

Перша задача динаміки - визначення сил, прикладених до точки при заданому її русі.

Друга (основна) задача динаміки - визначення закону руху точки, якщо відомі діючі на неї сили.

Ці завдання можна розв'язати за допомогою основного рівняння динаміки (11.1).

11.4 Принцип Д’аламберу

Рішення багатьох завдань динаміки можна спростити застосуванням принципу Даламбера.

Уявімо точку, що рухається під дією кількох сил (рис. 11.1).

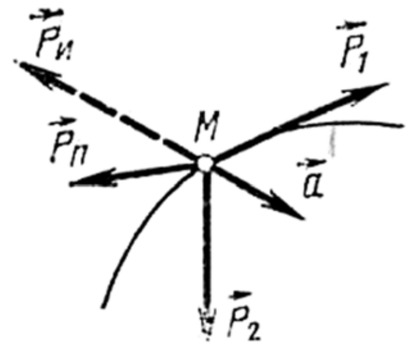

Рисунок 11.1

Для невільної точки до цих сил входять і сили реакцій зв'язків. Запишемо для точки основне рівняння динаміки

$$m\vec{a} = \sum\vec{P}_i$$

Перетворимо рівняння

$$\sum\vec{P}_i - m\vec{a} = 0$$

Добуток має розмірність сили. Позначимо

$$-m\vec{a} = \vec{P}_и \qquad (11.2)$$

і назвемо $\vec{P}_i$ силою інерції точки. Тоді

$$\sum\vec{P}_i + \vec{P}_и = 0$$

Це рівняння є рівнянням рівноваги точки під дією прикладених до неї сил (включаючи реакції зв'язків), умовно доповнених силою інерції точки. Отже, завдання, пов'язані з рухом точки, можна розв'язувати за допомогою рівнянь статики, якщо прикладені до неї сили доповнити силою інерції (принцип Даламбера).

Сила інерції дорівнює добутку маси точки на її прискорення і спрямована у бік, протилежний до прискорення.

Назва сили пояснюється тим, що вона пропорційна до маси точки - мірі її інертності.

Слід пам'ятати, що насправді сила інерції не діє на точку, її прикладають умовно для того, щоб можна було застосувати до точки, що не перебуває в рівновазі, рівняння статики.

Умовимося надалі на силових схемах показувати сили інерції штриховими лініями, показуючи цим умовність її докладання.

При криволінійному русі точки силу інерції прийнято розкладати па дотичну та нормальну складові (рис. 11.2):

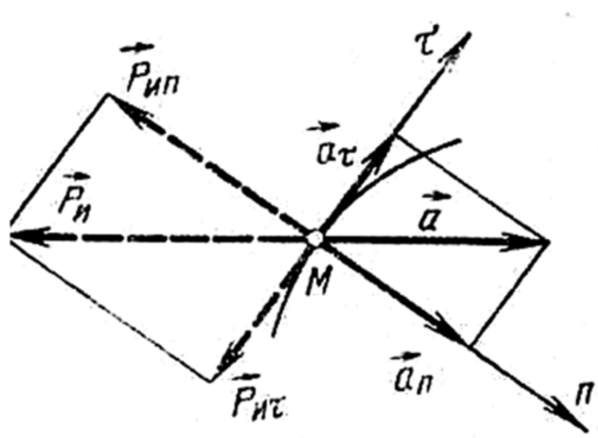

Рисунок 11.2

$$\vec{P}_и = \vec{P}_{и\tau} + \vec{P}_{иn}$$

де $\vec{P}_{и\tau} = -m\vec{a}_{\tau}, \vec{P}_{иn} = m\vec{a}_{n}$

Модулі сил

$$P_{и\tau} = m\frac{dv}{dt}, P_{иn} = m\frac{v^2}{p}$$

Нормальну силу інерції $\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{i\,n}}$, спрямовану у бік, протилежний нормальному прискоренню точки, тобто від центру кривизни траєкторії, називають відцентровою силою.

12.РОБОТА СИЛИ. ПОТУЖНІСТЬ

12.1 Робота пістонної сили при прямолінійному переміщенні точки

Робота характеризує дію сили на тіло, що переміщується, в результаті якої відбувається зміна швидкості руху. Ознайомимося з визначенням роботи сил, прикладених до матеріальної точки, що рухається. Робота сили - скалярна величина, що дорівнює добутку модуля сили на довжину переміщення та на косинус кута між векторами сили та швидкості (рис. 12.1, а):

$$A = Ps\cos\left(\widehat{\vec{P},\vec{V}}\right) \quad (12.1)$$

Якщо кут між векторами сили та швидкості точки гострий або напрямки цих векторів збігаються, робота позитивна, і, очевидно, дія сили викличе збільшення швидкості точки.

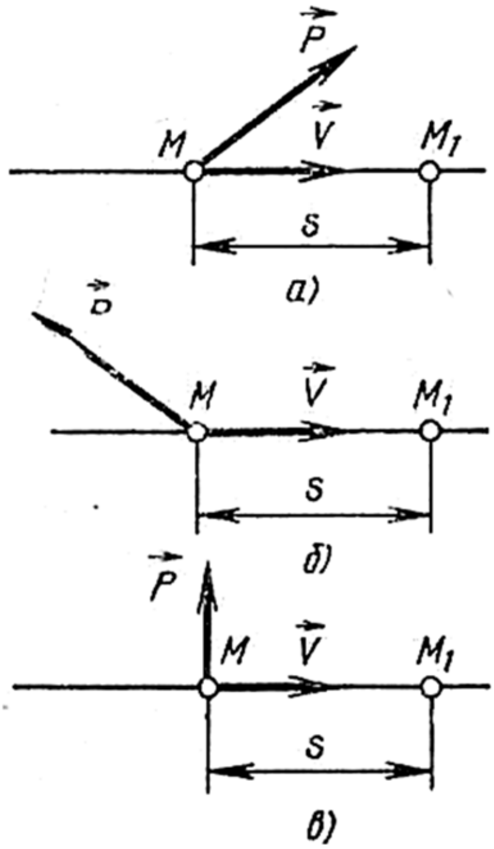

Рисунок 12.1

Навпаки, при тупому вуглі (рис. 12.1 б) сила здійснює від'ємну роботу (гальмує рух точки).

Сила, перпендикулярна швидкості точки, роботу не виробляє (рис. 12.1, в), тобто

$$A = Ps\cos 90^0 = 0$$

За одиницю вимірювання роботи прийнято джоуль (Дж), рівний роботі сили в 1 ньютон при переміщенні нею точки на відстань 1 м у напрямку сили:

$$1\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot \text{м} = 1\ \text{кг} \cdot \text{м}^2\ /\ \text{с}^2$$

12.2 Робота змінної сили при довільному переміщенні точки

Модуль сили та кут між її вектором та векторною швидкістю точки можуть змінюватися. Тоді вираз (12.1) можна використовувати для обчислення елементарної роботи *dA* при нескінченно малому переміщенні *ds* (рис. 12.2), під час якого силу $\vec{P}$ можна прийняти постійною за величиною і напрямом:

$$dA = Pds\cos\left(\widehat{\vec{P},\vec{v}}\right) \quad (12.2)$$

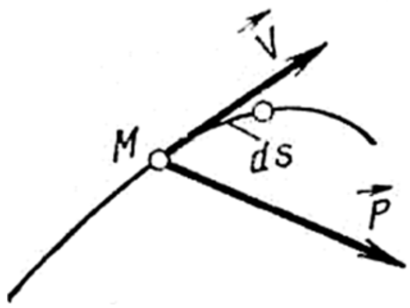

Рисунок 12.2

Роботу сили часто вираховують, використовуючи її проекції на осі координат. Розкладемо силу $\vec{P}$ (рис. 12.3) та елементарне переміщення точки *M* на складові, спрямовані по осях координат. Робота сили $\vec{P}$ дорівнюватиме сумі робіт її складових $P_x\vec{i}$, $P_y\vec{j}$, $P_z\vec{k}$ на переміщеннях *dx, dy, dz*.

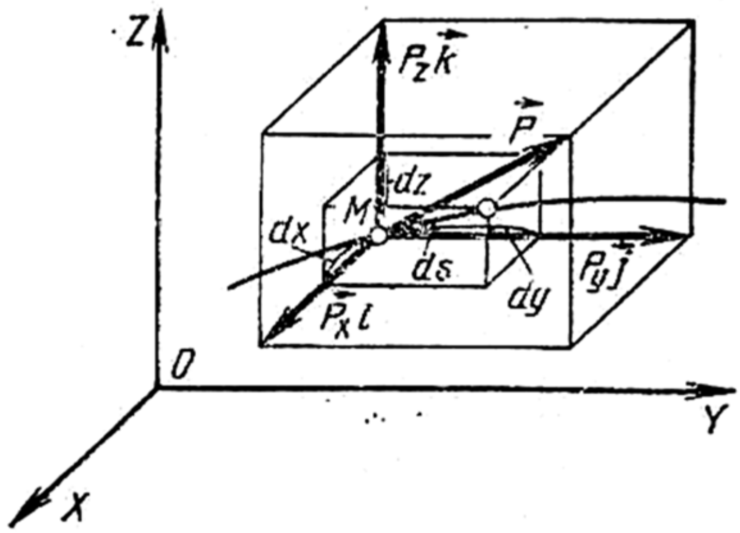

Рисунок 12.3

Складова $P_x\vec{i}$ збігається у напрямку з переміщенням dx, але перпендикулярна до переміщень dy і dz, тому її робота дорівнює $P_x dx$. Розмірковуючи аналогічно щодо інших складових, отримаємо вираз визначення елементарної роботи сили через її проекції на осі координат

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz \quad (12.3)$$

12.3. Робота сили тяжіння

Точка M переміщається траєкторією M_0M_1. Серед інших сил (не показаних на рис. 12.4) на точку діє сила тяжіння $\vec{G}$. Обчислимо її роботу, використовуючи вираз (12.3).

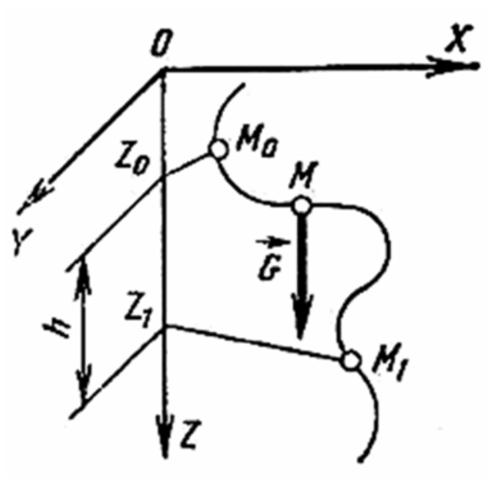

Рисунок 12.4

Якщо вісь *OZ* розташувати вертикально, то сила *G* не буде проектуватися на осі *OX* і *OУ*. Тоді елементарна робота сили

$$dA = Gdz \qquad (12.4)$$

Для визначення роботи сили під час переміщення M_0M_1 точки її прикладання слід обчислити інтегральну суму елементарних робіт для цього переміщення

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA$$

У виразі (12.4) змінною є координата *z*. На переміщенні M_0M_1 вона змінюється від z_0 до z_1. Тоді отримаємо

$$A = \int_{Z_o}^{Z_1} Gdz = G(z_1 - z_0)$$

Позначимо $z_1 - z_0 = h$, тоді формулу для обчислення роботи сили тяжіння можна подати у вигляді

$$A = Gh \qquad (12.5)$$

Вочевидь, що при переміщенні точки вгору ($z_1 - z_0 = -h$) сила тяжіння виробляє негативну роботу. З виразу (12.5) випливає, що робота сили тяжіння залежить від різниці висот початкового і кінцевого положень точки і не залежить від форми траєкторії точки та довжини її шляху. При переміщенні точки вниз сила тяжіння здійснює позитивну роботу, при переміщенні вгору - негативну.

12.4. Робота рушійних сил і сил опору. Коефіцієнт корисної дії

При переміщенні точки до неї крім рушійних сил можуть бути прикладені сили опору, що перешкоджають руху. Отже, не вся робота, здійснена рушійними силами, може вважатися корисною, тобто витраченою із заданою метою (збільшення швидкості руху, підйом на велику висоту тощо). Частина роботи йде подолання опору руху.

Відношення корисної роботи до роботи рушійних сил називається коефіцієнтом корисної дії (ККД)

$$A_{\text{кор}}/A = \eta$$

де $A_{\text{кор}}$ - корисна робота; А - робота рушійних сил; η- ККД.

Оскільки рух будь-яких реальних тіл (зокрема всіх деталей механізмів і машин) завжди зустрічає опір, то корисна робота менше роботи рушійних сил; отже, ККД механізмів і машин завжди менше одиниці.

12.5. Потужність

Потужністю називається робота, зроблена силою в одиницю часу. Якщо сила здійснює в кожну одиницю часу ту саму роботу, то потужність можна обчислити за формулою

$$N = A_1/t_1$$

де t_1- час, за який виконано роботу A_1.

У загальному випадку можна говорити або про середню потужність за час

$$N_{\text{ср}} = A_1/t_1$$

або про потужність в даний момент

$$N = dA/dt \qquad (12.6)$$

де *dA* - елементарна робота, виконана за нескінченно малий проміжок часу *dt*. Враховуючи вираз (12.2) для елементарної роботи, отримаємо

$$N = \frac{Pds\cos(\widehat{\vec{P},\vec{v}})}{dt}, \text{але} \frac{ds}{dt} = v$$

відповідно,

$$N = Pv\ \cos(\widehat{\vec{P},\vec{v}})$$

Якщо сила збігається за напрямком зі швидкістю, отримаємо

$$N = Pv \quad (12.7)$$

За одиницю вимірювання потужності прийнятий ват (Вт), рівний роботі 1 джоуль, виконаної за 1 секунду;

$$1\text{Вт} = 1\text{Дж/с} = 1\ \text{кг} \cdot \text{м}^2\ /\ \text{с}^3$$

Застаріла одиниця потужності 1 кінська сила, поширена раніше в техніці, дорівнює 736 Вт.

13.ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

13.1 Кількість руху і кінетична енергія точки. Імпульс сили

Основними динамічними характеристиками руху точки є її кількість руху та кінетична енергія. Кількістю руху точки називається вектор, рівний добутку маси точки на вектор її швидкості (рис. 13.1):

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

Одиниця виміру кількості руху - кг·м/с (особливої назви вона не має).

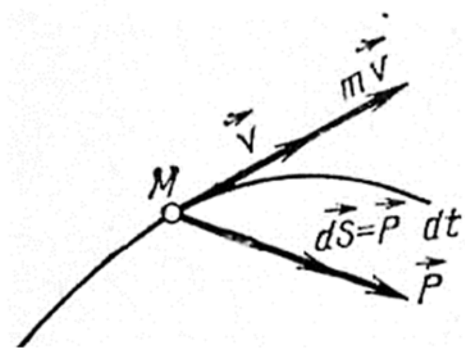

Рисунок 13.1

Кінетичною енергією точки називається скалярна величина, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = mv^2/2 \quad (13.1)$$

Кінетичну енергію вимірюють у тих же одиницях, як і роботу, тобто в джоулях.

Дія сили на матеріальну точку за деякий проміжок часу характеризує так званий імпульс сили - вектор, рівний добутку сили на час її дії.

Якщо сила $\vec{P}$ постійна за модулем і напрямом, то її імпульс

$$\vec{S} = \vec{P}t_1$$

де t_1 - час дії сили.

Так само, як і кількість руху, імпульс сили виражається у кг·м/с. Справді, Н·с = кг·м·с/с^2 = кг·м/с.

Якщо на точку діє змінна сила $\vec{P}$, то її імпульс $\vec{S}$ за проміжок часу від t_0 до t_1 може бути обчислений як інтегральна сума елементарних імпульсів за цей час

$$\vec{S} = \int_{t_o}^{t_1} d\vec{S} = \int_{t_o}^{t_1} \vec{P} dt$$

де

$d\vec{S} = \vec{P}dt$- елементарний імпульс сили $\vec{P}$ за нескінченно малий відрізок часу *dt*.

13.2 Теорема про зміну кількості руху точки (закон кількості руху)

Нехай точка *M* масою *m* рухається під дією сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ і має В момент t_0 швидкість $\vec{v}_0$ і В момент t_1 швидкість $\vec{v}_1$ (рис. 13.2).

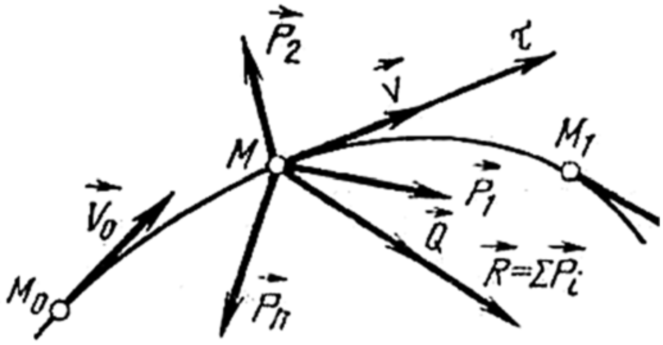

Рисунок 13.2

Підставимо в основне рівняння динаміки (11.1) значення прискорення точки $a = dv / dt$ тоді отримаємо

$$m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \sum\vec{P}_i$$

Помножимо обидві частини рівняння на час *dt* і винесемо масу *m* (постійна величина) під знак диференціала, в результаті отримаємо

$$d(m\vec{v}) = \sum\vec{P}_i dt$$

Ліва частина рівняння являє собою диференціал кількості руху точки, а права - суму елементарних імпульсів діючих на неї сил

$$d(m\vec{v}) = \sum d\vec{S}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння для переміщення точки від M_0 до M_1, тобто для проміжку часу від t_0 до t_1. Тоді для правої частини рівняння межами інтегрування будуть t_0 і t_1, а для лівої відповідні цим моментам часу швидкості $\vec{v}_0$ та $\vec{v}_1$:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d(m\vec{v}) = \sum \int_{t_o}^{t_1} d\vec{S}$$

Так як інтеграл від диференціала функції дорівнює самій функції, то отримаємо

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_i \qquad (13.2)$$

Зміна кількості руху точки за якийсь проміжок часу дорівнює сумі імпульсів сил, що діяли на точку за той самий проміжок часу.

13.3 Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Запишемо основне рівняння динаміки для точки

$$m\vec{a} = \sum \vec{P}_i$$

і спроектуємо його на одну з природних осей - дотичну (див. рис. 13.2). Враховуючи, що проекція вектору на вісь є скаляр, отримаємо

$$ma_\tau = \sum P_i \, \cos(\widehat{\vec{P_i}, \vec{v}})$$

Підставимо в цю рівність значення дотичного прискорення $a_\tau = dv / dt$ і помножимо обидві його частини на величину ds:

$$m\frac{dvds}{dt} = \sum P_i ds \, \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}) \quad (13.3)$$

Права частина цієї рівності - сума елементарних робіт сил, прикладених до точки, а ліва частина дорівнює диференціалу кінетичної енергії точки. Дійсно, продиференціюємо величину $mv^2/2$ (диференціал функції дорівнює її першій похідній, помноженій на диференціал незалежної змінної):

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = m\frac{2_v}{2}dv$$

Але

$$v = \frac{ds}{dt}\text{ , тоді }\ d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = m\frac{dvds}{dt}$$

Таким чином, рівність (13.3) набуде вигляду

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_i$$

.

Проінтегруємо його для переміщення точки від M_0 до M_l (див. рис. 13.2):

$$\int_{v_o}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum\int_{M_o}^{M_1} dA_i$$

або

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_i \quad (13.4)$$

Зміна кінетичної енергії точки на якомусь переміщенні дорівнює сумі робіт сил, що діяли на точку на тому ж переміщенні.

13.4 Теорема про зміну кінетичного моменту точки

У тих випадках, коли точка рухається по замкнутій траєкторії (зокрема, при русі по колу), зручно використовувати динамічну характеристику руху, так звану моментом кількості руху або кінетичним моментом точки щодо центру. Кінетичний момент точки визначають так само, як момент сили щодо центру.

Вектор кінетичного моменту спрямований перпендикулярно до площини, що проходить через вектор кількості руху і обраний центр (рис. 13.3), а модуль його дорівнює добутку модуля вектору кількості руху точки на плече відносно центру

$$m_O(m\vec{v}) = mvh$$

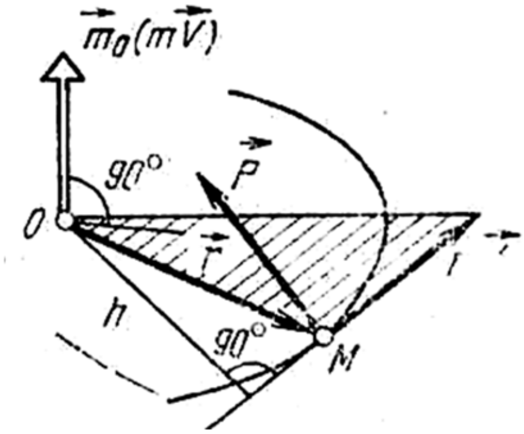

Рисунок 13.3

Отже, як і момент сили, кінетичний момент точки щодо центру може бути представлений у вигляді векторного твору радіуса-вектору точки на вектор кількості руху

$$\vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\,\vec{v} \quad (13.5)$$

Доведемо теорему про зміну кінетичного моменту, що має важливе значення для дослідження гіроскопічних явищ. Візьмемо похідні за часом від обох частин рівності (13.5), враховуючи, що його права частина є добутком двох змінних величин

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_O(m\vec{v})] = \left(\overrightarrow{\frac{dr}{dt}} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\overrightarrow{\frac{dv}{dt}}\right)$$

Але $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} / \mathrm{dt} = \vec{\mathrm{v}}$, тоді перший доданок $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, так як векторний добуток двох векторів, які співпадають за напрямком дорівнює нулю. Другий доданок дорівнює моменту сили $\vec{P}$, прикладеної до точки M, щодо центру O. Дійсно,

$$\vec{r} \times m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{m}_O(\vec{P})$$

Відповідно,

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_O(m\vec{v})\,] = \vec{m}_O\big(\vec{P}\big) \quad (13.6)$$

Похідна від кінетичного моменту точки відносно будь-якого центру за часом дорівнює моменту сили, що діє на точку, відносно того ж центру.

13.5 Відносний рух точки. Коріолісова сила інерції

Усі розглянуті вище закони динаміки справедливі для абсолютного руху точки, тобто руху стосовно нерухомої системи відліку. Однак у деяких випадках необхідно більш уважно розглянути відносний рух точки з урахуванням динамічних ефектів, що виникають через особливості цього руху.

Запишемо основне рівняння динаміки для точки, враховуючи, що абсолютне прискорення її дорівнює сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень

$$m\big(\vec{a}_{\text{від}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}\big) = \sum\vec{P}_i$$

або

$$m\vec{a}_{\text{від}} = \sum\vec{P}_i - m\vec{a}_{\text{пер}} + m\vec{a}_{\text{кор}}$$

За аналогією до виразу (11.2)

$$-m\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{P}_{\text{і.пер}}, -m\vec{a}_{\text{кор}} + \vec{P}_{\text{і.кор}},$$

де $\vec{P}_{\text{і.пер}}$ і $\vec{P}_{\text{і.кор}}$

переносна та коріолісова сили інерції точки. Тоді

$$m\vec{a}_{\text{від}} = \sum\vec{P}_i + \vec{P}_{\text{і.пер}} + \vec{P}_{\text{і.кор}} \quad (13.7)$$

Рівняння (13.7) називається основним рівнянням динаміки відносного руху точки. Отже, вирішуючи завдання динаміки при відносному русі точки, слід до діючих на неї сил додавати переносну і коріолісову сили інерції.

Розглянемо рух точки по поверхні Землі (рис. 13.4, а). Якщо знехтувати обертанням Землі (як роблять при вирішенні більшої частини технічних завдань), то рух точки можна розглядати як абсолютний.

Якщо ж враховувати обертання Землі, то рух точки її поверхні слід вважати відносним, а обертання Землі переносним. Тоді, вирішуючи будь-яке завдання динаміки, пов'язане з відносним рухом точки по поверхні Землі, необхідно до сил, що діють на точку (рис. 13.4, а вони не показані) докласти також сили інерції $\vec{P}_{\text{і.пер}}$ і $\vec{P}_{\text{і.кор}}$. Переносна сила інерції дорівнює по модулю добутку маси точки на її переносне прискорення, рівне нормальному прискоренню, і спрямована відповідно до виразу $\vec{P}_{\text{і.пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}}$ від центру кола. Ця сила, складена з силою тяжіння $\vec{P}_{\text{тяж}}$, утворює вагу G точки (рис. 13.4, б). Коріолісова сила інерції (див. рис. 13.4, а) спрямована у бік, протилежний прискоренню Коріоліса.

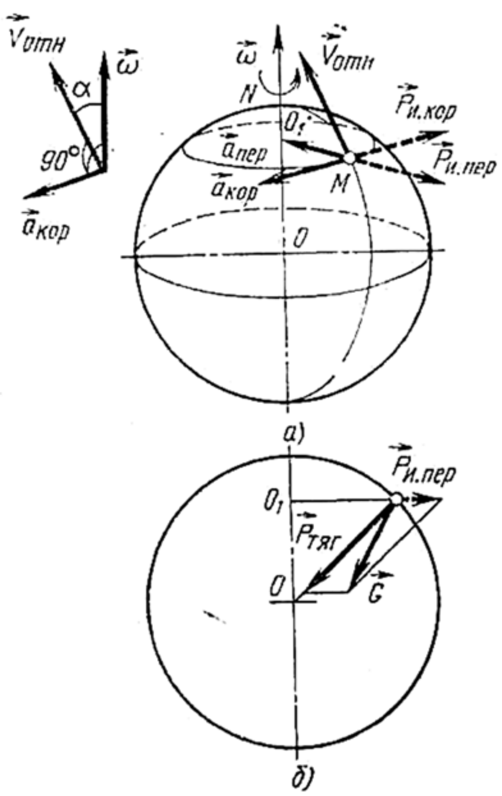

Рисунок 13.4

Діючи на точку, що рухається в північній півкулі по меридіану на північ, вона відхиляє її вправо (можна довести, що точка відхиляється в північній півкулі вправо, і в південній - вліво при русі в будь-якому напрямку, а не тільки в меридіональному).

Очевидно, що цей ефект тим сильніший, чим ближче точка до полюса і чим більша її відносна швидкість. Враховуючи невелику кутову швидкість Землі ($\omega = 1{,}16x10^{-5}$рад/с), при звичайних швидкостях руху тіл дією коріолісової сили можна знехтувати. Але за великих швидкостях руху, цього не можна робити.

Дія коріолісових сил проявляється також при тривалому русі точок з малими швидкостями. Так, їх впливом пояснюють відхилення річок, повітряних та морських течій.

14. ДИНАМІКА СИСТЕМИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

14.1 Механічна система. Зовнішні та внутрішні сили

Механічною системою матеріальних точок або тіл називається така їх сукупність, в якій рух або положення кожної точки (або тіла) залежить від руху або положення всіх інших точок (або тіл).

Тверде тіло є окремим випадком механічної системи. Відстань між двома будь-якими точками цього тіла незмінна.

Сили, що діють на механічну систему, можна поділити на зовнішні та внутрішні.

Зовнішніми називаються сили, що діють на точки або тіла системи з боку інших точок або тіл, що не входять до цієї системи. Внутрішні називаються сили взаємодії між точками або тілами даної системи.

Відповідно до закону рівності дії та протидії внутрішні сили, з якими дві будь-які точки системи взаємодіють, рівні по модулю і спрямовані по одній прямій у протилежні сторони. Сума цих сил дорівнює нулю, хоча точки можуть і не бути в рівновазі (наприклад, дві частинки газового струменя реактивного двигуна). Поширюючи наведені судження всю систему, робимо висновок, що сума всіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю, тобто

$$\sum \vec{P}_{i\text{внутр}} = 0$$

Очевидно, що нулю дорівнюватимуть і суми проекцій внутрішніх сил системи на осі координат і суми їх моментів щодо центру або осі.

14.2 Теорема про зміну кількості руху системи

Кількість руху системи дорівнює сумі кількостей руху її точок

(14.1)

$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_i = \sum m_i \vec{v}_i \quad (14.1)$$

Теорему про зміну кількості руху для однієї точки системи можна подати у вигляді

$$m_i\vec{v}_{i1} - m_i\vec{v}_{i0} = \vec{S}_i + \vec{S}_{i\text{внутр}^*},$$

де $\vec{S}_i$, $\vec{S}_{i\text{внутр}^*}$ - імпульси зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точку.

Склавши аналогічні рівняння для всіх точок системи та склавши їх почленно, отримаємо

$$\sum m_i\vec{v}_{i1} - \sum m_i\vec{v}_{i0} = \sum\vec{S}_i + \overrightarrow{\sum S}_{i\text{внутр}}$$

Якщо сума внутрішніх сил системи дорівнює нулю, то дорівнює нулю та сума їх імпульсів. Тоді, враховуючи вираз (14.1), можна записати

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2 = \sum\vec{S}_i \quad (14.2)$$

Зміна кількості руху системи за деякий проміжок часу дорівнює сумі імпульсів зовнішніх сил, що діяли на систему, за той же проміжок часу.

14.3 Робота та потужність сил, прикладених до тіла, що обертається

Тверде тіло являє собою окремий випадок матеріальної системи. Внутрішні сили у твердому тілі, де відсутнє взаємне переміщення точок, не тільки у сумі рівні нулю, а й взаємно врівноважені. Тому надалі, говорячи про рух тіла під дією сил, ми враховуватимемо лише зовнішні сили.

Нехай тіло, що обертається біля нерухомої осі (рис 14.1), діють сили $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}, \dots, \overrightarrow{P_n}$. Розкладемо силу $\overrightarrow{P_\imath}$, на дві складові: $\overrightarrow{P_\imath'}$, - лежачу в площині, перпендикулярної осі обертання, і $\overrightarrow{P_\imath,''}$ - паралельну осі. Робота сили $\overrightarrow{P_\imath,''}$ дорівнює нулю, так як вона перпендикулярна швидкості $\vec{v}_i$ точки докладання сили. Елементарна робота сили $\overrightarrow{P_\imath'}$:

$$dA_i = P_i' ds \cos a$$

де $ds = r_i d\varphi$ - переміщення точки M_i при повороті тіла на кут $d\varphi$.

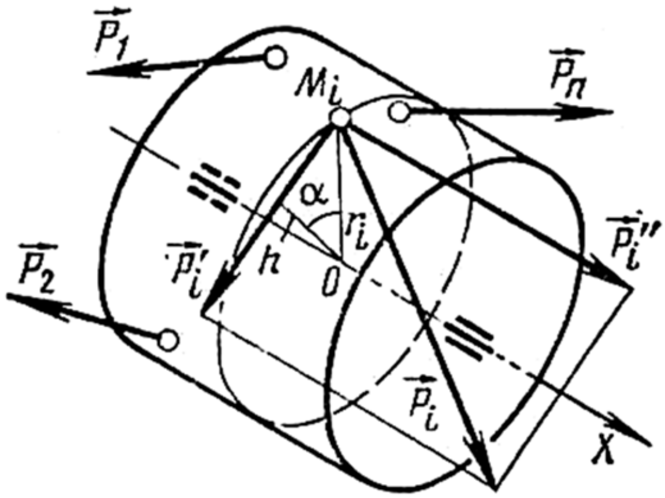

Рисунок 14.1

Тоді, враховуючи, що $r_i \cos\alpha = \mathrm{h}$ (плече сили $\overrightarrow{\mathrm{P_i}'}$ відносно точки О), отримуємо

$$dA_i = P_i' r_i d\varphi \cos a = P_i' h d\varphi \qquad (14.3)$$

де добуток $P_i' h$ дорівнює моменту сили $\vec{P_i}$ відносно осі обертання, оскільки, нагадаємо, момент сили відносно осі дорівнює моменту проекції сили на площину, перпендикулярну осі, щодо точки перетину осі та площини.

Таким чином,

$$dA_i = m_x(\vec{P}_i) d\varphi \qquad (14.4)$$

Елементарна робота сили, прикладеної до тіла, що обертається, дорівнює моменту сили відносно осі обертання, помноженому на елементарний кут повороту тіла.

Для обчислення елементарної роботи всіх сил, прикладених до тіла, слід у формулу (14.4) підставити сумарний момент сил щодо осі обертання - так званий крутний момент

$$dA = M_{\text{вр}} d\varphi \qquad (14.5)$$

При збігу напрямів обертання тіла і крутного моменту робота позитивна, при різних напрямках - негативна. Термін крутний момент є умовним. Сили, що прикладені до тіла, можуть не тільки обертати тіло, але і перешкоджати його руху. Робота крутного моменту при повороті тіла на кінцевий кут

$$A = \int_0^{\varphi} M_{\text{вр}} d\varphi$$

При постійному моменті

$$A = M_{\text{вр}}\varphi \quad (14.6)$$

Потужність крутного моменту дорівнює відповідно до виразів (12.6) і (14.5)

$$N = \frac{dA}{dt} = M_{\text{вр}} \frac{d\varphi}{dt}$$

З огляду на те, що $d\varphi \,/\, dt = \omega$, отримуємо

$$N = M_{\text{вр}}\omega$$

Виразимо кутову швидкість ω ($\omega = \pi n/30$) через частоту обертання n (в об/хв) і за допомогою виразу (14.6) знайдемо співвідношення між крутним моментом (у Н·м) та його потужністю (у Вт):

$$N = 0{,}105 M_{\text{вр}} n$$

$$M_{\text{вр}} = 9{,}55 \frac{N}{n} \quad (14.7)$$

14.4 Кінетична енергія тіла, що обертається

Кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок тіла

$$T_{\text{вр}} = \sum m_i v_i^2 \,/\, 2$$

де $v_i = \omega r_i$.

Враховуючи, що величина ω, загальна для всіх точок, отримуємо

$$T_{\text{вр}} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2$$

Скалярна величина $\Sigma m_i r_i^2 = J$ називається моментом інерції тіла щодо осі. Тоді

$$T_{\text{вр}} = J\omega^2/2 \qquad (14.8)$$

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла на квадрат його кутової швидкості.

14.5 Момент інерції тіла

Момент інерції тіла відносно осі дорівнює сумі добутків мас усіх точок тіла на квадрати їх відстаней до осі

$$J = \sum m_i r_i^2 \quad (14.9)$$

Порівняння виразу (14.8) з виразом (13.1), що визначає кінетичну енергію точки або тіла, при його поступальному русі, показує, що момент інерції характеризує інертність тіла при обертальному русі подібно до того, як маса тіла характеризує його інертність при поступальному русі. З формули (14.9) можна дійти висновку, що інертність тіла при обертанні залежить не тільки від суми мас окремих точок, але й від розподілу точок та їх відстаней до осі обертання.

Момент інерції виражається у кг·м^2.

Знайдемо моменти інерції найпростіших однорідних тіл, для яких, враховуючи безперервний розподіл маси, суму (14.9) слід замінити певним інтегралом, взятим по всьому об'єму тіла:

$$J = \int_V r^2\, dm$$

де r - відстань елементарної частинки тіла до її осі; dm - її маса.

Порожнистий циліндр. Виділимо елемент циліндра у вигляді трубки, радіус якої r, довжина b та товщина стінки dr (рис. 14.2).

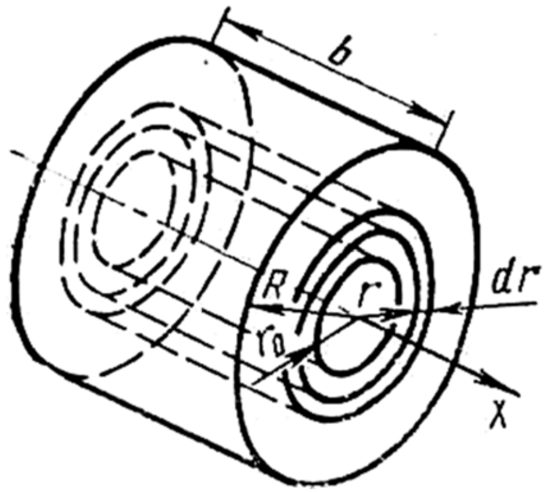

Рисунок 14.2

Маса елемента дорівнює добутку об'єму елемента на густину ρ матеріалу циліндра

$$dm = pb2\pi rdr,$$

де b - довжина циліндра; $2\pi rdr$ - площа торця трубки.

Всі точки елемента розташовані на однаковій відстані r від осі циліндра. Роз'єм циліндр на нескінченно тонкі трубки з радіусами, що змінюються від r_0 до R, і обчислимо момент інерції циліндра щодо його осі

$$J = \int_V r^2\, dm = 2\pi bp \int_{r_0}^{R} r^3 dr = 2\pi bp \left.\frac{r^4}{4}\right|_{r_0}^{R}$$

або

$$J = \frac{1}{2}\,\pi bp(R^4 - r_0^4) = \pi(R^2 - r_0^2)bp\,\frac{R^2 + r_0^2}{2}$$

Величина $\pi(R^2 - r_0^4)bp$ дорівнює масі m циліндра, тоді

$$J = \frac{m}{2}(R^2 + r_0^2) \quad (14.10)$$

Суцільний циліндр. Диск. Кільце. Знаючи момент інерції порожнього циліндра, легко знайти моменти інерції суцільного циліндра (рис. 14.5, а) і диска (рис. 14.5, б), поклавши у формулі (14.10) $\mathrm{r}_0 = 0$:

$$J = mR^2/2 \quad (14.11)$$

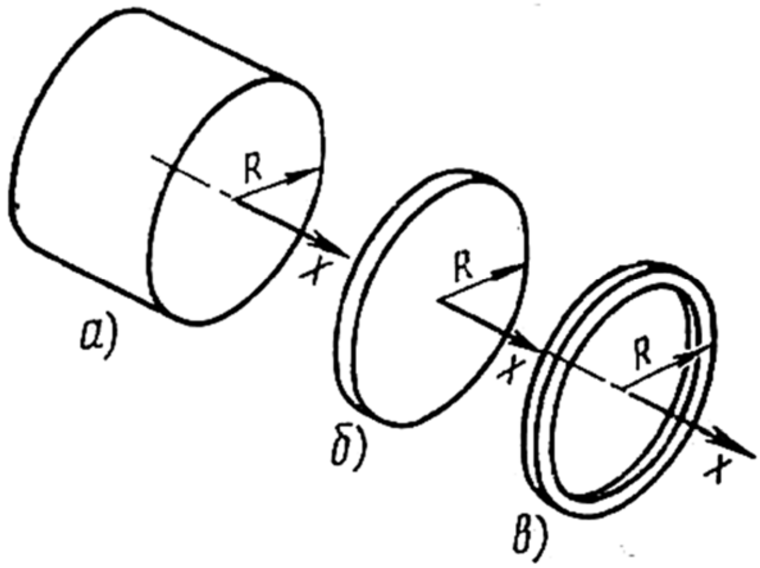

Рисунок 14.3

Вважаючи кільце тонким (рис. 14.3, в), можна прийняти, що всі точки його розташовані на той самій відстані R від осі. Тоді за формулою (14.9) отримаємо момент інерції кільця

$$J = mR^2 \quad (14.12)$$

14.6 Кінетичний момент тіла

Кінетичним моментом тіла відносно центру називається сума кінетичних моментів усіх точок тіла відносно того ж центру

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(m_i \vec{v}_i) \qquad (14.13)$$

Якщо тіло симетрично щодо нерухомої осі обертання, то кінетичний момент тіла відносно центру цієї осі спрямований уздовж осі. Справді, кожній точці m_1 симетричного тіла (рис. 14.4) відповідає точка такої ж маси m_2, розташована на іншій стороні тіла, на таких же відстанях від осі та центру O.

Вектори кінетичних моментів обох точок $\vec{m}_0(m_1\vec{v}_1)$ і $\vec{m}_0(m_2\vec{v}_2)$ рівні за модулем, лежать у площині, лежать у площині, що проходить через вісь, і становлять з нею рівні кути. Оскільки сума цих векторів буде спрямована по осі, як і сума векторів кінетичних моментів двох будь-яких протилежних точок, то, очевидно, що кінетичний момент тіла відносно центру O направлений уздовж осі обертання.

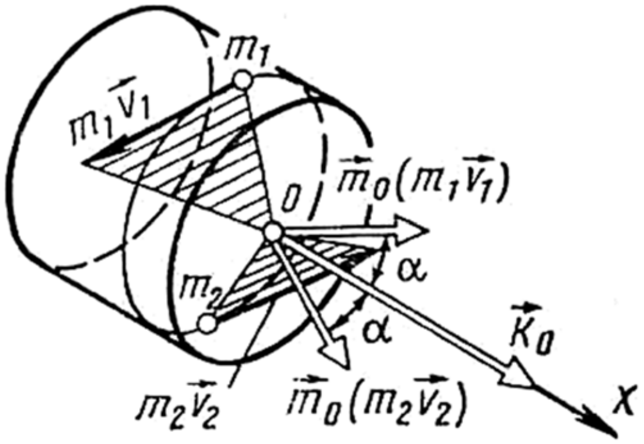

Рисунок 14.4

Запишемо для кожної точки тіла вирази теореми про зміну кінетичного моменту (13.6) і підсумуємо ліві та праві частини рівнянь

$$\sum \frac{d}{dt}[\vec{m}_O(m_i\vec{v}_i)] = \sum \vec{m}_O(\vec{P}_i)$$

Внесемо суму під знак похідної та з огляду на вираз (14.13) отримаємо

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{P}_i) \quad (14.13)$$

Похідна від кінетичного моменту тіла відносного центру за часом дорівнює сумі моментів відносно цього центру всіх сил, які діють тіло.

Спроектувавши рівняння (14.14) на вісь обертання тіла, отримаємо

$$dK_x/dt = M_{\text{вр}} \qquad (14.15)$$

де

$$M_{\text{вр}} = \sum m_x\left(\vec{P}_i\right)$$

Похідна від кінетичного моменту тіла за часом щодо осі обертання дорівнює крутному моменту сил, що діють на тіло.

14.7 Основне рівняння динаміки для тіла, що обертається

Знайдемо кінетичний момент тіла відносно нерухомої осі обертання як суму моментів кількостей руху всіх точок відносно осі

$$K_x = \sum m_x\left(m\vec{v}_i\right) = \sum m_i\, v_i r_i$$

Швидкість кожної точки $v_i = r_i\omega$. З урахуванням того, що кутова швидкість тіла буде загальною для всіх точок, отримаємо

$$K_x = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2$$

де $\sum m_i r_i^2 = J$ - момент інерції тіла відносно осі обертання. Отже,

$$K_x = J\,\omega \qquad (14.16)$$

Підставимо тепер значення кінетичного моменту у формулу (14.15). З урахуванням того, що J - постійна величина, отримаємо

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = M_{\text{вр}} \quad \text{або} \quad J\frac{d\omega}{dt} = M_{\text{вр}},$$

звідки

$$J\varepsilon = M_{\text{вр}} \quad (14.17)$$

Кутове прискорення, яке отримує тіло при обертанні біля нерухомої осі, що пропорційно обертальному моменту сил, прикладених до тіла.

Рівняння (14.17) називається основним рівнянням динаміки для тіла, що обертається. Зіставлення цього рівняння з основним рівнянням динаміки точки (або поступального руху тіла) пояснює правомірність такої назви. На відміну від прискорення точки, що залежить від рівнодіючої прикладених до неї сил і її інертності, мірою якої є маса, кутове прискорення тіла, що обертається, залежить не від величини діючих сил, а від величини їх крутного моменту, і не від маси тіла, а від розподілу цієї маси, тобто від моменту інерції тіла.

Порівняємо, наприклад, моменти інерції двох тіл: суцільного циліндра масою m і радіусом R і кільця масою $0{,}5m$, але радіусом $2R$. Відповідно до формул (14.11) і (14.12) моменти інерції рівні:

циліндру

$$J_{\text{ц}} = mR^2/2$$

кільця

$$J_{\text{к}} = 0{,}5m(2R)^2 = 2mR^2$$

Таким чином, кільце в порівнянні з циліндром при масі, меншій у два рази, має більший у чотири рази момент інерції.

З рівняння (14.17) випливає, що якщо крутний момент, дорівнює нулю (коли, наприклад, моменти сил, що обертають тіло, рівні за величиною до моментів сил, що гальмують обертання), то і кутове прискорення тіла дорівнює нулю, і воно обертається рівномірно або знаходиться у спокої.

15.НЕРІВНОВАЖЕНІСТЬ РОТОРА

15.1 Статична і динамічна неврівноваженість ротора

Тіло, яке при обертанні утримується своїми несучими поверхнями в опорах, називається ротором. Ротором є повітряний робоче колесо турбіни, барабан компресора, і будь-яке інше тіло, що обертається в підшипниках. Нехай на ротор (рис. 15.1), що обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω, діють різні зовнішні сили та реакції опор. Кожна точка ротора рухається по окрузі і має нормальне прискорення, отже, вона не перебуває в рівновазі.

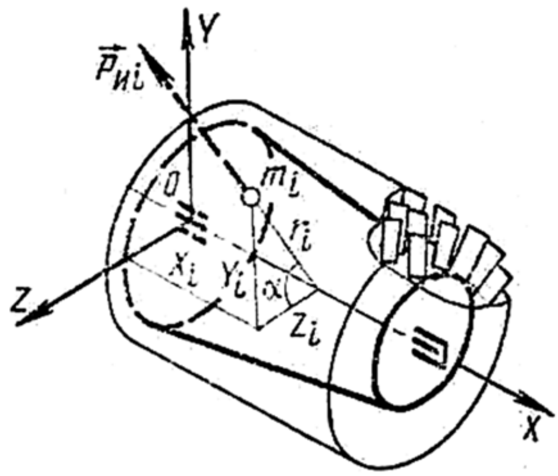

Рисунок 15.1

Для використання рівняння рівноваги відносно реакцій опор докладемо до точок відповідно до принципу Д'аламбера сили інерції. Дотична сила інерції кожної точки дорівнює нулю (ε= 0); враховуємо лише нормальні (відцентрові), рівні за модулем сили інерції точок

$$P_{иi} = P_{иni} = m_{i\omega^2} r_i$$

Відцентрові сили інерції точок пропорційні квадрату кутової швидкості ротора. Вектори цих сил спрямовані по радіусу ротора, отже, їх проекції на осі та моменти відносно осей циклічно змінюються.

Знайдемо суми проекцій сил інерції всіх точок на осі *OY* та *OZ* та суми їх моментів відносно осей для зазначеного на рис. 15.6 положення ротора, враховуючи при цьому, що сили на вісь *OX* не проектуються та їх моменти відносно цієї осі дорівнюють нулю:

$$\sum P_{иiy} = \sum m_{i\omega^2} r_i \sin a = \omega^2 \sum m_i y_i \quad (15.1)$$

$$\sum P_{иiz} = \sum m_{i\omega^2} r_i \cos a = \omega^2 \sum m_i z_i \quad (15.2)$$

З виразів (6.4) випливає

$$\sum m_i y_i = m y_C, \sum m_i z_i = m z_C$$

де m -маса ротора; y_c і z_c - координати центру мас ротора.
Тоді

$$\sum P_{иiy} = \omega^2 m y_C \quad (15.3)$$

$$\sum P_{иiz} = \omega^2 m z_C \quad (15.4)$$

При визначенні моментів сил інерції відносно осі необхідно пам'ятати, що сили потрібно проектувати насамперед на площину, перпендикулярну осі. Плечем сили $P_{иi}$ щодо осей OY та OZ буде координата x_i. Тоді

$$\sum m_y(\vec{P}_{иi}) = \sum P_{иi} \cos a \cdot x_i = \omega^2 \sum m_i x_i r_i \cos a = \omega^2 \sum m_i x_i z_i$$

$$\sum m_z(\vec{P}_{иi}) = \sum P_{иi} \sin a \cdot x_i = \omega^2 \sum m_i x_i r_i \sin a = \omega^2 \sum m_i x_i y_i$$

Величини

$$\sum m_i x_i y_i = J_{xy}, \sum m_i x_i z_i = J_{xz}$$

називаються відцентровими моментами інерції тіла відносно осі OX. Кожен із цих моментів дорівнює сумі добутків мас точок тіла на дві їх координати (відцентровими моментами інерції тіла відносно осі OY будуть J_{xy} і J_{xz}, відносно осі OZ відповідно J_{xz} і J_{xy}). Оскільки координати точок, що перемножуються, мають або однакові знаки, або протилежні, то відцентрові моменти інерції тіла можуть бути позитивними, негативними і рівними нулю. Термін відцентрові характеризує вплив цих моментів на врівноваження ротора, що обертається.

Таким чином, суми моментів сил інерції точок ротора відносно осей

$$\sum m_y(\vec{P}_{иi}) = \omega^2 J_{xz} \quad (15.5)$$

$$\sum m_z(\vec{P}_{иi}) = \omega^2 J_{xy} \quad (15.6)$$

Якщо вирази (15.3) - (15.6) відмінні від нуля, то ротор неврівноважений, тобто розподіл мас його точок такий, що під час обертання ротор зазнає вигин і створює на опорах перемінні навантаження.

Відповідно, реакції опор неврівноваженого ротора будуть залежати не тільки від сил, що постійно діють на нього, але і від змінних у напрямку динамічних складових, пропорційних квадрату кутової швидкості ротора.

Динамічні складові реакцій опор відсутні, якщо вирази (15.3) - (15.6) звертаються в нуль, тобто коли центр мас ротора лежить на осі обертання ($y_c = 0, z_c = 0$) і обидва його відцентрові моменти інерції відносно цієї осі дорівнюють нулю($J_{xy} = 0, J_{xz} = 0$). Такий ротор називається повністю збалансованим.

Розрізняють статичну, моментну та динамічну неврівноваженість ротора. Розглянемо способи балансування (усунення неврівноваженості) на найпростіших прикладах.

Статична неврівноваженість. Ротор (рис. 15.2) має одну неврівноважену масу m_1, центр мас ротора зміщений від осі ($y_c \neq 0$, $z_c \neq 0$).

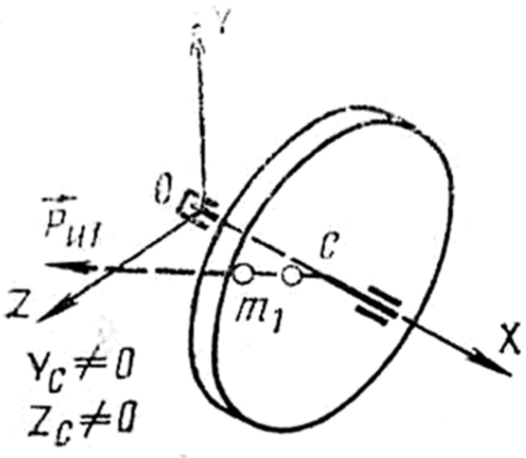

Рисунок 15.2

Кількісно неврівноваженість характеризується так званим дисбалансом, рівним добутку неврівноваженої маси на її відстань до осі обертання

$$D_1 = m_1 r_1$$

Балансування ротора здійснюють збільшенням або, частіше, зменшенням (за допомогою висвердлювання отвору) однієї коригуючої маси в площині, що проходить через центр мас ротора, перпендикулярно його осі, з таким розрахунком, щоб після балансування отримати $y_c = 0$ і $z_c = 0$. Статична неврівноваженість характерна, переважно, для роторів, які мають форму диска невеликий, в порівнянні з радіусом, товщини. Статичне балансування часто виконують на місці, тобто у власних підшипниках і опорах (якщо тертя в них мале), домагаючись, щоб при повороті на деякий кут ротор зупинявся у будь-якому положенні.

Моментна неврівноваженість. Ротор має дві неврівноважені маси (рис. 15.3, а), розташовані в паралельних поперечних перерізах таким чином, що центр мас ротора лежить на осі ($y_c = 0, z_c = 0$) і сили інерції цих мас утворюють пару. Очевидно, у цьому випадку неврівноважені маси можуть бути і не рівні один одному, але повинні лежати в діаметральній площині ротора на відстанях від осі, обернено пропорційних мас точок.

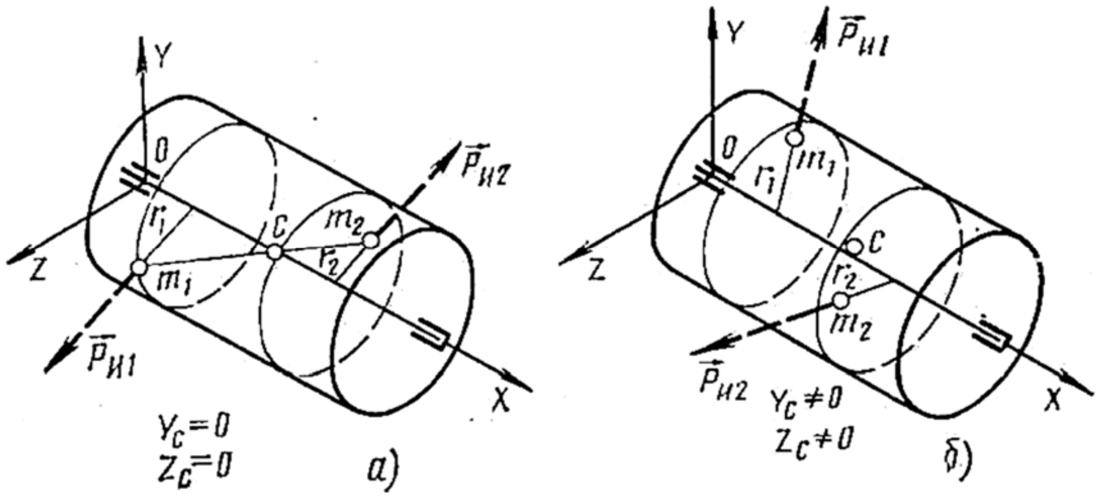

Рисунок 15.3

Тоді центр мас ротора залишиться на осі та сили інерції точок будуть рівні за модулем

$$P_{и1} = P_{и2},\ m_1 r_1 \omega^2 = m_2 r_2 \omega^2$$

або

$$r_1/r_2 = m_2/m_1$$

Моментну неврівноваженість не можна виявити й усунути на місці, оскільки ротор статично збалансований ($y_c = 0, z_c = 0$). Вона проявляється лише за досить великої швидкості обертання. Моментне балансування виконують на спеціальних високоточних балансувальних верстатах, що дозволяють визначати неврівноваженості (значення дисбалансів) та двох потрібних коригувальних мас.

Динамічна неврівноваженість. Неврівноважені маси m_1 і m_2 розташовані в паралельних поперечних перерізах (рис. 15.3 б) довільним чином так, що центр мас ротора зміщений відносно осі ($y_c \neq 0$, $z_c \neq 0$) та сили інерції мас, як і дві будь-які сили, що прикладаються до різних точок і не лежать в одній площині, при додаванні утворюють силу і пару. Таким чином, динамічна неврівноваженість є поєднанням статичної і моментної неврівноваженості. Динамічне балансування виконують також за допомогою двох коригувальних мас.

Розглянуто найпростіші приклади неврівноваженості ротора, що має одну або дві неврівноважені маси. Але й у складніших випадках за більшої кількості неврівноважених мас можна довести, що при статичній неврівноваженості сили інерції мас складаються однією силу; при моментній неврівноваженості утворюють пару, а за динамічної - складаються в силу і пару.

Балансування роторів, що швидко обертаються, проводять дуже ретельно, оскільки навіть незначна неврівноваженість ротора може викликати великі інерційні навантаження.